XVI Устная математическая олимпиада для 6 – 7 классов
25.03.2018
7 класс

1. Бутылка кваса

Объем бутылки кваса – 1,5 литра. Первый выпил половину бутылки, второй – треть того, что осталось после первого, третий – четверть оставшегося от предыдущих, и так далее, четырнадцатый – пятнадцатую часть оставшегося. Сколько кваса осталось в бутылке?

Фольклор

Ответ: 0,1 литра.

Решение. Заметим, что если уменьшить некоторую величину на $\frac{1}{n}$ ее часть, то останется $\frac{n-1}{n}$ от этой величины. Значит, оставшийся объем кваса равен $1{,}5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{14}{15}$ $= 1{,}5\cdot\frac{1}{15} = 0{,}1$ литра.

2. Точки в пятиугольнике

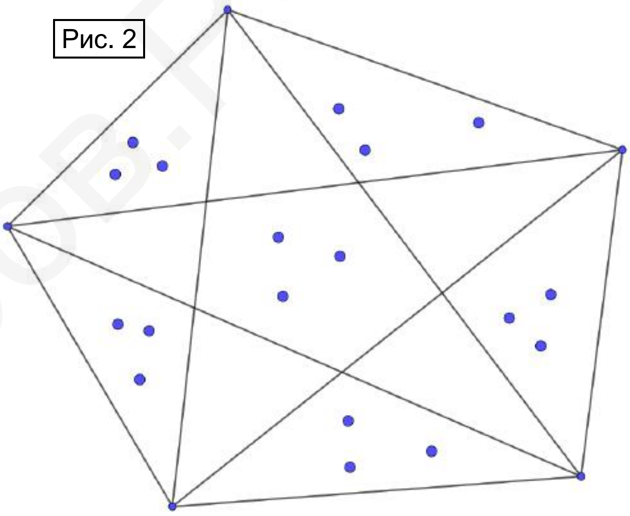
Можно ли внутри выпуклого пятиугольника отметить 18 точек так, чтобы внутри каждого из десяти треугольников, образованных его вершинами, отмеченных точек было поровну?

Фольклор

Ответ: можно.

Решение. Проведем все диагонали пятиугольника (см. рис. 2). Десять треугольников, указанных в условии, можно разделить на две группы по пять: 1) треугольники, образованные двумя соседними сторонами и диагональю пятиугольника; 2) треугольники, образованные стороной и двумя диагоналями пятиугольника.

Рис. 2



Рассмотрим пятиугольник, образованный точками пересечения диагоналей исходного пятиугольника и пять малых треугольников, прилежащих к сторонам исходного. В каждой из этих областей отметим по три точки. Любой из десяти треугольников, указанных выше, содержит ровно две выделенные области, значит, внутри каждого из них находится ровно шесть отмеченных точек.

3. Мудрецы

Трём мудрецам показали 9 карт: шестерку, семерку, восьмерку, девятку, десятку, валета, даму, короля и туза (карты перечислены по возрастанию их достоинства). После этого карты перемешали и каждому раздали по три карты. Каждый мудрец видит только свои карты. Первый сказал: «Моя старшая карта – валет». Тогда второй ответил: «Я знаю, какие карты у каждого из вас». У кого из мудрецов был туз?

М.А. Евдокимов

Ответ: у третьего мудреца.

Решение. У первого мудреца старшая карта – валет, значит, у него ровно две карты младше валета, то есть две карты из набора 6, 7, 8, 9, 10. Для того, чтобы второй мудрец мог наверняка знать карты каждого, у него должны быть три остальные карты из этого набора (иначе он не смог бы однозначно определить карты первого мудреца). Тогда дама, король и туз должны оказаться у третьего мудреца.

4. Параллелепипед

Дан прямоугольный параллелепипед, у которого все измерения (длина, ширина и высота) – целые числа. Известно, что если длину и ширину увеличить на 1, а высоту уменьшить на 2, то объем параллелепипеда не изменится. Докажите, что какое-то из измерений данного параллелепипеда кратно трем.

А.М. Пешнин, по мотивам фольклора

Решение. Пусть a, b и c – длина, ширина и высота данного параллелепипеда. Тогда условие равенства объемов записывается так: $abc = (a + 1)(b + 1)(c – 2)$. Предположим, что ни из чисел a, b и c не делится на 3, то есть abc не кратно трем Тогда и $(a + 1)(b + 1)(c – 2)$ не кратно трем, значит, ни один из множителей также не делится на 3.

Заметим, в каждой из пар (a; $a + 1$), (b; $b + 1$) и (c; $c – 2$) остатки от деления на 3 отличаются на 1. Значит, каждое из чисел a, b и c при делении на 3 может давать только остаток 1, тогда каждое из чисел $a + 1$, $b + 1$ и $c – 2$ при делении на 3 дает остаток 2. Таким образом, остаток от деления на 3 левой части равенства равен 1, а остаток от деления на 3 правой части равен 2. Противоречие. Следовательно, хотя бы одно из измерений данного параллелепипеда кратно трем.

Отметим, что описанная в условии ситуация возможна, например, $20\times14\times18 = 21\times15\times16$.

5. Режем на девятиугольники

Можно ли разрезать равносторонний треугольник на три равных девятиугольника?

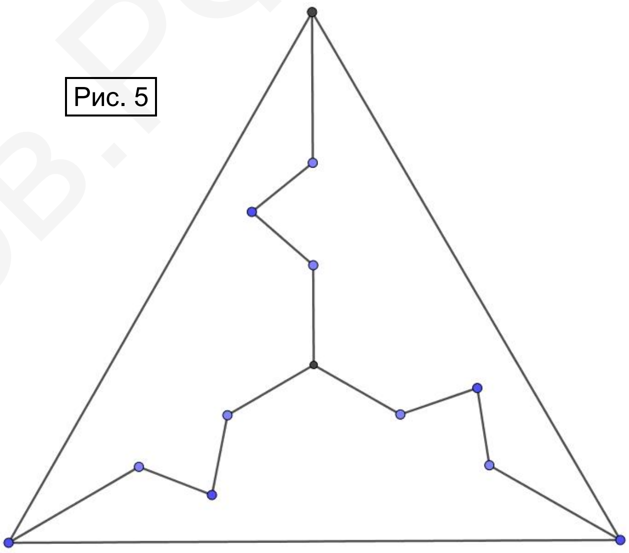
Фольклор

Ответ: можно.

Решение. Например, см. рис. 5. Девятиугольники будут равными, так как получаются один из другого поворотом вокруг центра равностороннего треугольника на 120°.

От школьников рассуждение про поворот требовать не следует. Им достаточно объяснить, что равносторонний треугольник можно разбить на три равных треугольника с общей вершиной в центре исходного треугольника, после чего показать, каким образом они вырезают треугольные «зубья».

Рис. 5



6. Обитаемый остров

На острове рыцарей и лжецов каждый дружит с десятью другими жителями (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый житель острова заявил, что среди его друзей больше лжецов, чем рыцарей. Может ли количество рыцарей быть вдвое больше, чем количество лжецов?

А.М. Пешнин

Ответ: не может.

Решение. Пусть на острове живут x рыцарей и y лжецов, а количество пар друзей вида рыцарь – лжец равно D. Рыцари говорит правду, поэтому каждый из них входит хотя бы в 6 таких пар. Каждый лжец имеет не более 10 друзей – рыцарей, поэтому входит не более, чем в 10 таких пар. Следовательно, $6x \le D \le 10y$, откуда $x \le \frac{5y}{3} < 2y$, так как какие-то аборигены на острове есть (значит, обязательно есть и лжецы).

Таким образом, рыцарей не может быть вдвое больше, чем лжецов.

Аналогичные рассуждения могут быть изложены на языке графов.

7. Стоимость обедов

Цена стандартного обеда в таверне «Буратино» зависит только от дня недели. Аня обедала 10 дней подряд, начиная с 10 июля, и заплатила 70 сольдо. Ваня также заплатил

70 сольдо за 12 обедов, начиная с 12 июля. Таня заплатила 100 сольдо за 20 обедов, начиная с 20 июля. Сколько заплатит Саня за 24 обеда, начиная с 24 июля?

А.В. Шаповалов

Ответ: 150 сольдо.

Решение. Составим календарь с 10 июля до 16 августа, условно считая 10 августа первым днем недели. Каждая строка календаря соответствует одному и тому же дню недели (см. рис. 7а). Пусть в первый день недели обед стоит a_1 сольдо, во второй – a_2 сольдо, ..., в седьмой день – a_7 сольдо. Стоимость всех обедов за неделю обозначим $P = a_1 + a_2 + ... + a_7$. Отметим на нашем календаре дни, в которые обедали Аня (см. рис. 7б), Ваня (см. рис. 7в) и Таня (см. рис. 7г).

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7а

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7б

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7в

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7г

В совокупности они обедали шесть раз в каждый из дней недели и заплатили 70 + 70 + 100 = 240 сольдо. Это означает, что стоимость семи обедов подряд (по одному разу в каждый день недели) равна 240 : 6 = 40 сольдо.

Отметим теперь дни, в которые обедал Саня (см. рис. 7д). Заметим, что он обедал в те же дни, что и Аня, плюс ещё две недели. Следовательно, Саня должен заплатить $70 + 2\cdot 40 = 150$ сольдо.

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7д

Это решение можно оформить алгебраически. Аня обедала 10 дней подряд, начиная с первого дня недели, то есть $P + a_1 + a_2 + a_3 = 70$ (1). Ваня обедал 12 дней подряд с третьего дня недели, то есть $P + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 2P - a_1 - a_2 = 70$ (2). Таня обедала 20 дней подряд, начиная с четвертого дня недели, то есть $3P - a_3 = 100$ (3). Сложив равенства (1), (2) и (3), получим: $3P + a_3 + 3P - a_3 = 240$. Значит, $P = 40$ (стоимость обедов за неделю). Подставив значение P в равенство (1), получим: $a_1 + a_2 + a_3 = 70 - 40 = 30$. Тогда стоимость 24 обедов, начиная с первого дня недели, равна $3P + a_1 + a_2 + a_3 = 150$.

8. Равные углы

Точка M – середина стороны BC треугольника ABC. Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.

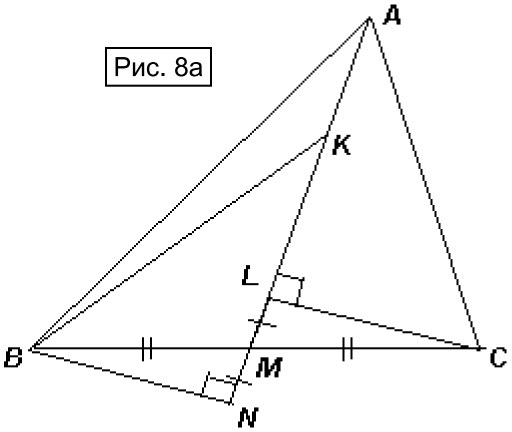
Санкт-Петербургская олимпиада, 2010, вторые варианты

Решение. На продолжении отрезка LM отметим точку N так, что $NM = LM$ (см. рис. 8а). Тогда треугольники CLM и BNM равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle BNM = \angle CLM = 90°$ и $BN = CL$.

Так как $KN = KL + 2LM = KL + AK = AL$, то равны прямоугольные треугольники BNK и ALC (по двум катетам). Следовательно, $\angle BKM = \angle CAM$.

Отметим, что возможен случай, когда точка L лежит на отрезке AK, но его можно не рассматривать, так как при таком расположении точек рассуждения аналогичны рассмотренным.

Рис. 8а



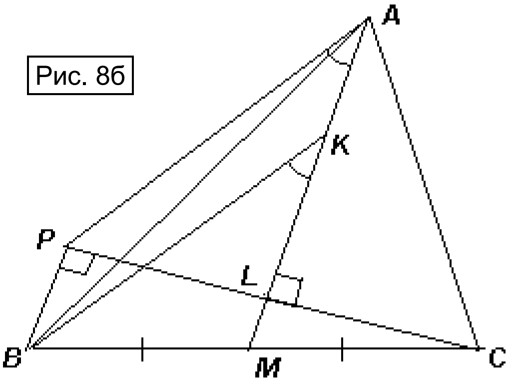


Рис. 8б

Для тех, кто знает больше, возможен и другой способ решения. Из вершины B опустим перпендикуляр BP на прямую CL (см. рис. 8б). Тогда PL = CL (по теореме Фалеса). Значит, в треугольнике PAC высота AL совпадает с медианой, поэтому он равнобедренный: AP = AC. Тогда AL – его биссектриса, то есть ∠CAL = ∠ĐÀK.

Кроме того, LM – средняя линия треугольника CPB, то есть PB || LM и PB = 2LM = AK. Тогда AKBP – параллелограмм, поэтому ∠BKM = ∠PAK. Таким образом, ∠BKM = ∠CAL, что и требовалось.

9. Разные цвета

В какое наименьшее количество цветов можно покрасить натуральные числа так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 2 или в два раза, были покрашены в разные цвета?

А.М. Пешнин

Ответ: в три цвета.

Решение. Пример: Будем последовательно красить натуральные числа по возрастанию. 1 и 2 покрасим двумя разными цветами. Для цвета каждого числа $k > 2$ есть не более двух ограничений: оно не может быть одного цвета ни с числом $\frac{k}{2}$, ни с числом $k - 2$. Поэтому для любого такого k обязательно найдется третий цвет.

Оценка: Рассмотрим числа 4, 6 и 8. Любые два из них должны быть покрашены в разные цвета, поэтому цветов не может быть меньше трех.

Пример раскраски в три цвета можно построить и по-другому. Покрасим все числа в два цвета с соблюдением только первого условия. Например, все числа, дающие остаток 0 или 1 при делении на 4 – в красный цвет, а остальные числа – в синий цвет. Теперь надо добиться выполнения первого условия. Для этого перекрасим в фиолетовый цвет все числа, в разложение на простые множители которых число 2 входит в нечетной степени. Тогда первое условие, очевидно, не нарушится, а второе также будет выполнено, поскольку числа, различающиеся в два раза, имеют в разложении на простые множители разную четность показателя степени двойки.