

Тренировочные задачи

Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 2

1. Докажите, что уравнение имеет решение при любом a :

а) $(a^2 + 1)x^2 + (a^3 + 4a^2 + a)x - a^2 - 2 = 0$;

б) $(a^2 - 2a + 3)x^2 - (3a^2 + 5a - 1)x + 7a - 8 = 0$;

в) $(a^3 - 2a^2)x^2 + (a^3 - a + 2)x + a^2 + 1 = 0$.

2. При каких a один корень уравнения $2x^2 + ax + 4 - a = 0$ больше 3, а другой меньше 3?

3. При каких a один корень уравнения $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$ больше 1, а другой меньше 1?

4. При каких a число -1 лежит между корнями уравнения $(a - 2)x^2 + 3ax + 5 = 0$?

5. При каких a один корень уравнения $(a^2 - 2)x^2 + (a^2 + a - 1)x - a^3 + a = 0$ больше a , а другой меньше a ?

6. При каких a оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3?

7. При каких a оба корня уравнения $x^2 + 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$ меньше -1 ?

8. При каких a корни уравнения $(2 + a)x^2 - 2ax + 3a = 0$ различны и положительны?

9. При каких a оба корня уравнения $ax^2 - 2(2a - 1)x + 2 - 3a = 0$ больше 1?

10. При каких a корни уравнения $ax^2 - (2a + 1)x + 3a - 1 = 0$ меньше 1?

11. При каких a корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a ?

12. При каких a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ различны и принадлежат интервалу $(0; 3)$?

13. При каких a корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ расположены на отрезке $[-2; 6]$?

14. При каких a корни уравнения $ax^2 - (a + 1)x + 2 = 0$ по модулю меньше 1?

15. При каких a корни уравнения $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ удовлетворяют условию $0 < x < 3$?

16. При каких a корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 2 = 0$ расположены на отрезке $[2; 5]$?

17. При каких значениях a ровно один из двух корней уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ принадлежит интервалу $(1; 4)$?

18. При каких a неравенство $x^2 + a^2x - 2a - 4 < 0$ выполнено для всех $x \in [0; 1]$?

19. При каких a неравенство $x^2 - ax + a > 0$ выполнено для всех $|x| < 1$?

20. При каких a неравенство $(x - 3a)(x + 2a + 1) < 0$ выполнено для всех $x \in [1; 3]$?

21. При каких a неравенство $ax^2 + (a + 1)x - 3 < 0$ выполнено для всех $x < 2$?

22. При каких a неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполнено для всех $x > 0$?
23. При каких значениях a неравенство $(a - 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 3 > 0$ выполнено хотя бы при одном $x < 1$?
24. При каких a уравнение $(a - 1)x^2 - 2ax + 2 - 3a = 0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству $x > 1$?
25. При каких a уравнение $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0 < x < 3$?
26. Сколько корней, больших -1 , имеет уравнение $x^2 + (2a + 6)x + 4a + 12 = 0$?
27. Сколько корней, меньших 1 , имеет уравнение $(1 + a)x^2 - 3ax + 4a = 0$?
28. Сколько корней на отрезке $[-1; 1]$ имеет уравнение $4x^2 - 2x + a = 0$?
29. Сколько корней на интервале $(0; 2)$ имеет уравнение $(2a + 3)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3 = 0$?
30. Сколько корней на промежутке $[-1; 3)$ имеет уравнение $(4 - a)x^2 - 6ax + 3 = 0$?
31. При каких a один из корней уравнения $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$ меньше 2 , а второй больше 3 ?
32. При каких значениях a корни x_1 и x_2 уравнения $(3a + 2)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < -1 < x_2 < 1$?
33. При каких a корни уравнения $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1$ имеют разные знаки и по модулю меньше 4 ?
34. При каких a один из корней уравнения $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ по модулю больше 1 , а второй по модулю меньше 1 ?
35. При каких m из неравенства $x^2 - (3m + 1)x + m > 0$ следует, что $x > 1$?
36. При каких a из неравенства $x^2 - (a + a^3)x + a^4 < 0$ следует неравенство $x^2 + 4x + 3 < 0$?
37. При каких a из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$?
38. Найти все a такие, что если x удовлетворяет неравенству $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$, то $|x| \leq 2$.
39. При каких a из неравенства $1 < x \leq 2$ следует неравенство $x^2 - 2ax + a < 0$?
40. Найдите все a , при которых неравенство выполняется для любых x :
- а) $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$; б) $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$;
- в) $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$; г) $\left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$.
41. При каких a каждое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ будет содержаться среди решений неравенства $ax^2 - (3a + 1)x + 3 \geq 0$?
42. При каких a любое решение неравенства $x^2 - x - 2 < 0$ больше любого решения неравенства $ax^2 - 4x - 1 \geq 0$?

43. При каких a множество решений неравенства $x^2 - (a^2 + a)x + a^3 \leq 0$ содержит не менее пяти целых чисел?

44. (МГУ, физический ф-т, 1994) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - 12x + a \leq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

45. (МГУ, ф-т психологии, 1977) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

46. (МГУ, географич. ф-т, 1990) Найти все a , при которых уравнение

$$(a + 1)x^2 + (|a + 2| - |a + 10|)x + a = 5$$

имеет два различных положительных корня.

47. (МГУ, ф-т психологии, 1993) Пусть $x_{1,2}$ — корни квадратного трёхчлена

$$f(x) = (a - 1)x^2 - (2a + 1)x + 5a + 2.$$

Найти:

- 1) все a , при которых $x_1, x_2 > 1$;
- 2) все b , при которых выражение $(x_1 - b)(x_2 - b)$ принимает постоянное значение для всех a , для которых оно определено.

48. (МГУ, ф-т психологии, 1981) Найти все a , при которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на отрезке $[0; 2]$ равно 3.

49. (МГУ, ИСАА, 2000) Найти все a , при которых неравенство

$$|x^2 - 2x + a| > 5$$

не имеет решений на отрезке $[-1; 2]$.

50. (МГУ, мехмат, 1991) Найти все пары (p, q) , при которых неравенство

$$|x^2 + px + q| > 2$$

не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

51. (МГУ, химический ф-т, 1981) Найти все a , при которых неравенство

$$\left(a^3 + (1 - \sqrt{2})a^2 - (3 + \sqrt{2})a + 3\sqrt{2}\right)x^2 + 2(a^2 - 2)x + a > -\sqrt{2}$$

выполняется для любого $x > 0$.

52. (МГУ, геологич. ф-т, 1977) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2ax \leq 3a^2 - 8a + 4, \\ x^2 + 4ax > 2 + 5a - 3a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

53. (МГУ, биологич. ф-т, 1977) Найти все a , при которых корни уравнений

$$x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$$

перемежаются (т. е. каждое из уравнений имеет два корня и между ними лежит корень другого уравнения).

54. (МГУ, ф-т гос. управления, 2006) Найти все значения a , для которых неравенство

$$(a + b + 36)x^2 - 5(x - 1)(b + 1) \leq 0$$

имеет решение при любом b .

55. (МГУ, физический ф-т, 1991) Найти все a , при которых все корни уравнения

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$$

удовлетворяют неравенству $|x| < 1$.

Ответы

1. в) Указание: найдите $f(0)$ и $f(-1)$.

2. $a < -11$.

3. $a \in (-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11})$.

4. $a \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (2; +\infty)$.

5. $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

6. $a > \frac{11}{9}$.

7. $a > 1$.

8. $a \in (-3; -2)$.

9. Ни при каких.

10. $a \in [\frac{2-\sqrt{6}}{4}; 0]$.

11. $a < -2$.

12. $a \in (2\sqrt{2}; \frac{11}{3})$.

13. $a \in [0; 4]$.

14. $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$.
15. $a \in \left(\frac{12}{7}; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \{1\}$.
16. $a \in [2 + \sqrt{2}; 5 - \sqrt{2}]$.
17. $a \in (0; 3]$.
18. $a \in (-1; 3)$.
19. $a > 0$.
20. $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
21. $a \in (-7 - 4\sqrt{3}; 0]$.
22. $a > 1$.
23. $a > \frac{3}{4}$.
24. $a \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; +\infty)$.
25. $a \in (0; \frac{12}{7}) \cup \left\{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right\}$.
26. Если $a \in (-\infty; -\frac{7}{2}] \cup \{-3\}$, то один корень; если $a \in (-\frac{7}{2}; -3)$, то два корня; если $a \in (-3; +\infty)$, то таких корней нет.
27. Если $a \in (-1; -\frac{1}{2}]$, то один корень; если $a \in (-\frac{1}{2}; 0]$, то два корня; если $a \in (0; +\infty)$, то таких корней нет.
28. Если $a \in [-6; -2) \cup \{\frac{1}{4}\}$, то один корень; если $a \in [-2; \frac{1}{4})$, то два корня; если $a \in (\frac{1}{4}; +\infty)$, то таких корней нет.
29. Если $a \in (-\frac{13}{14}; -\frac{3}{4}] \cup \left\{\frac{-37+2\sqrt{71}}{31}\right\}$, то один корень; если $a \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{-37+2\sqrt{71}}{31}\right)$, то два корня; если $a \in \left(\frac{-37+2\sqrt{71}}{31}; +\infty\right)$, то таких корней нет.
30. Если $a \in (-\infty; -\frac{7}{5}) \cup \{-\frac{4}{3}\} \cup \{1\} \cup [\frac{13}{9}; +\infty)$, то один корень; если $a \in [-\frac{7}{5}; -\frac{4}{3}) \cup (1; \frac{13}{9})$, то два корня; если $a \in (-\frac{4}{3}; 1)$, то таких корней нет.
31. $a \in (2; 5)$.
32. $a \in (-1; -\frac{2}{3})$.
33. $a \in (-\frac{9}{10}; -\frac{1}{2})$.
34. $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.
35. Ни при каких.
36. $a \in [-\sqrt[3]{3}; -1] \cup \{0; 1\}$.
37. $a \in [\frac{1}{2}; 1]$.
38. $a \in [-2; -\frac{1}{2}]$.

39. $a > \frac{4}{3}$.

40. а) $a < -6$; б) $a > 6$; в) $a \in (-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$; г) $a \in (-5; 1)$.

41. $a < \frac{1}{2}$.

42. $a < -4$.

43. $a \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.

44. $a \leq 20$.

45. $a < \frac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

46. $a \in (5; 7)$.

47. 1) $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{13}}{4}\right]$; 2) $b = \frac{7}{3}$.

48. $a = 1 - \sqrt{2}$ или $a = 5 + \sqrt{10}$.

49. $a \in [-4; 2]$

50. $p = -6, q = 7$.

51. $a \in [-\sqrt{2}; 1) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

52. $a \in (-\infty; \frac{2}{3}) \cup (2; +\infty)$.

53. $a \in [-3; 0)$.

54. $a \leq -35$.

55. $a \in \{0\} \cup (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5})$.