

Тренировочные задачи

Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 1

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ не имеет корней.
2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + 2 = 0$ имеет два различных корня.
3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$ не имеет корней.
4. Найдите значения параметра m , при которых выражение

$$\text{а) } x^2 - 2(2 + m)x + 12 + m^2; \quad \text{б) } 2mx^2 + (2m - 4)x + \frac{m}{2} + 3$$

является полным квадратом.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $(2a - 1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ имеет не более одного решения.
6. При каких a уравнение $a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$ имеет более одного корня?
7. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ xy = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

8. При всех значениях a решите уравнение $x^2 + 2ax - 1 = 0$.
9. При всех значениях a решите уравнение $x^2 - 2ax + 1 = 0$.
10. При всех значениях a решите уравнение $ax^2 + 3x - 1 = 0$.
11. При всех значениях a решите уравнение $(a - 1)x^2 - 2ax + 2a - 2 = 0$.
12. Найдите, при каких p отношение корней уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4 .
13. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2 - (3k + 2)x + k^2 - 1 = 0$ втрое меньше другого?
14. Найдите все значения a , при каждом из которых один корень уравнения

$$\text{а) } 9x^2 - 18(a - 1)x - 8a + 24 = 0; \quad \text{б) } x^2 + 4(a - 2)x + 9a^2 + 5 = 0$$

вдвое больше другого.

15. При каких a сумма квадратов различных корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ больше 1?
16. При каких a сумма корней уравнения $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов корней?

17. При каких a сумма кубов различных корней уравнения $x^2 - x + a = 0$ не больше 1?
18. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ максимальна?
19. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 2 = 0$ минимальна?
20. При каких a разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0$ равна 1?
21. При каких a один из корней уравнения $8x^2 - 30x + a = 0$ равен квадрату другого?
22. При каком целом значении параметра b корни уравнения $5x^2 + bx - 28 = 0$ удовлетворяют условию $5x_1 + 2x_2 = 1$?
23. Найдите числа p и q , если известно, что они являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.
24. Найдите все a , при которых уравнение $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ имеет только положительные корни.
25. Найдите все a , при которых уравнение $(2 - x)(x + 1) = a$ имеет два различных неотрицательных корня.
26. Найдите все a , при которых уравнение $(a - 3)x^2 - 6x + a + 5 = 0$ имеет только отрицательные корни.
27. При каких m уравнение $3mx^2 - (7m + 1)x + 2m + 1 = 0$ имеет корни разных знаков?
28. При каких a уравнение $x^2 + (4 - 2a)x + a = 0$ имеет неотрицательный корень?
29. При каких a уравнения $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?
30. При каком целом b уравнения $2x^2 + (3b - 1)x - 3 = 0$ и $6x^2 - (2b - 3)x - 1 = 0$ имеют общий корень?
31. При каких a уравнения

$$x^2 + (a^2 - 5a + 6)x = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2(a - 3)x + a^2 - 7a + 12 = 0$$

равносильны?

32. При всех a решить неравенство $x^2 + 2ax + 1 \leq 0$.
33. При всех a решить неравенство $ax^2 - 2x + 1 > 0$.
34. При всех a решить неравенство $x^2 - 3ax + 2a^2 \geq 0$.
35. При всех a решить неравенство $x^2 + (a - 5)x - 2a^2 + 2a + 4 < 0$.
36. При каких a решения неравенства $x^2 - (a^2 + 3a + 1)x + a^2 + 3a^3 \leq 0$ образуют отрезок, длина которого больше 3?
37. (МГУ, геологич. ф-т, 1980) Найти все a , при которых уравнение

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

38. (МГУ, филологич. ф-т, 2004) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + x + \frac{2a - 1}{a + 5} = 0$$

не имеет решений?

39. (МГУ, химический ф-т, 2003) Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

40. (МГУ, физический ф-т, 1981) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

41. (МГУ, ф-т психологии, 1994) Известно, что $x = 1, y = -1$ — одно из решений системы

$$\begin{cases} 3ax + by = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{1111\pi}{6}, \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найти остальные решения системы.

42. (МГУ, ИСАА, 1992) Найти все a , при которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$$

принимает наименьшее значение.

43. (МГУ, мехмат, 1989) Найти все a , при которых выражение

$$(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1),$$

где $x_{1,2}$ — корни квадратного трёхчлена

$$f(x) = x^2 + ax + a + \frac{1}{5},$$

принимает наименьшее значение.

44. (МГУ, социологич. ф-т, 2001) Найти все a , при которых уравнение

$$ax^2 + (2a + 2)x + a + 3 = 0$$

имеет два корня и расстояние между ними больше 1.

45. (МГУ, химический ф-т, 2007) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

46. (МГУ, филологич. ф-т, 2000) Найти все a , при которых уравнения

$$(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad ax^2 - x + 1 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

47. (МГУ, географич. ф-т, 1992) Найти все тройки (a, b, c) , при которых уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет единственный корень $x = -1$, причём $a + b + c = 1$.

48. (МГУ, географич. ф-т, 1996) Найти все пары (a, b) , при которых ненулевые векторы

$$\vec{u} = (a(2 - b), 2a - 3, a(b - 2)) \quad \text{и} \quad \vec{v} = (2 - b, a - 2, b - 2)$$

коллинеарны, но не равны. Найти все $a = b$, при которых эти векторы перпендикулярны.

49. (МГУ, геологич. ф-т, 1979) Найти все α , при которых уравнение

$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha} + 36 = 0$$

имеет единственный корень.

50. (МГУ, физический ф-т, 1988) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

51. (МГУ, мехмат, 1987) Найти все пары (a, b) , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти различных решений.

52. (МГУ, мехмат, 2007) Графики двух функций

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 3 \quad \text{и} \quad g(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

53. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Найдите все значения параметра a , при которых для любого значения параметра b неравенство

$$(a + b)x^2 + (3b - 4a + 7)x + 4a - 2b - 6 \geq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответы

1. $a > 1$.
2. $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$.
3. $a \in [2; 4)$.
4. а) $m = 2$; б) $m = \frac{2}{5}$.
5. $a \in \left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right)$.
6. $a \in \{-3\} \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.
7. $a = \frac{1}{4}$.
8. $x = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$.
9. Если $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, то $x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$; если $a \in (-1; 1)$, то решений нет.
10. Если $a \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right)$, то решений нет; если $a \in \left[-\frac{9}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$, то $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4a}}{2a}$; если $a = 0$, то $x = \frac{1}{3}$.
11. Если $a \in \left(-\infty; 2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(2 + \sqrt{2}; +\infty\right)$, то решений нет; если $a \in [2 - \sqrt{2}; 1) \cup (1; 2 + \sqrt{2}]$, то $x = \frac{a \pm \sqrt{4a - a^2 - 2}}{a - 1}$; если $a = 1$, то $x = 0$.
12. $p = \pm 6$.
13. $k = 2$.
14. а) $a = -1$ или $a = 2$; б) $a = \frac{-64 \pm 3\sqrt{907}}{49}$.
15. $a \in (-\infty; -1) \cup (2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.
16. $a = 1$ или $a = \frac{1}{2}$.
17. $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right)$.
18. $a = 0$.
19. $a = 1$.
20. $a = -3$ или $a = 9$.
21. $a = 27$ или $a = -125$.
22. $b = -13$.
23. $p = q = 0$ или $p = 1, q = -2$.
24. $a \in [2; 6]$.
25. $a \in \left[2; \frac{9}{4}\right)$.
26. $a \in [-6; -5)$.

27. $m \in (-\frac{1}{2}; 0)$.
28. $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.
29. $a = -6$.
30. $b = 2$.
31. $a = 3$ или $a = 4$.
32. Если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $x \in [-a - \sqrt{a^2 - 1}; -a + \sqrt{a^2 - 1}]$; если $a = -1$, то $x = 1$; если $a = 1$, то $x = -1$; если $a \in (-1; 1)$, то решений нет.
33. Если $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in (\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}; \frac{1-\sqrt{1-a}}{a})$; если $a = 0$, то $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$; если $a \in (0; 1]$, то $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}) \cup (\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}; +\infty)$; если $a \in (1; +\infty)$, то x любое.
34. Если $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in (-\infty; 2a] \cup [a; +\infty)$; если $a = 0$, то x любое; если $a \in (0; +\infty)$, то $x \in (-\infty; a] \cup [2a; +\infty)$.
35. Если $a \in (-\infty; 1)$, то $x \in (a + 1; 4 - 2a)$; если $a = 1$, то решений нет; если $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (4 - 2a; a + 1)$.
36. $a \in (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$.
37. $a \neq 1$.
38. $a \in (-\infty; -5) \cup (-\frac{9}{7}; +\infty)$.
39. $a = 0$ или $a = 1$.
40. $a = \pm\sqrt{2}$.
41. $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{5}{4}$.
42. $a = 2$.
43. $a = -\frac{1}{4}$.
44. $a \in (-2 - 2\sqrt{2}; 0) \cup (0; -2 + 2\sqrt{2})$.
45. $a \in (-1; 0] \cup \left\{ \frac{2+2\sqrt{13}}{3} \right\}$.
46. $a \in \left\{ -\frac{3}{4}, 0, \frac{2}{9} \right\}$.
47. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ и $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
48. $a = 3$, b — любое; $a \neq 1, \frac{3}{2}, 2$, $b = 2$. $a = b = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$.
49. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{18} + 2\pi n$, $\frac{13\pi}{18} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
50. $a = 1, -\frac{1}{2}, \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$.
51. $a = \pm 1$, $b = -2$; a — любое, $b = 2$.
52. $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{7}{5}$.