

## Тренировочные задачи

### Формулы двойного и половинного угла

**1.** Вычислите:

а)  $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ;$

б)  $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8};$

в)  $4 \sin 75^\circ \cos 75^\circ;$

г)  $\frac{1}{2} \sin 105^\circ \cos 105^\circ;$

д)  $\left( \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \right)^2;$

е)  $\left( \sin \frac{7\pi}{8} - \cos \frac{7\pi}{8} \right)^2.$

$$\boxed{\text{а) } 2 \sin \alpha; \text{ б) } 2 \sin \beta; \text{ в) } 2 \cos \beta; \text{ г) } 1; \text{ д) } \cos 2\alpha}$$

**2.** Вычислите:

а)  $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ;$

б)  $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8};$

в)  $2 \cos^2 75^\circ - 1;$

г)  $1 - 2 \cos^2 \frac{5\pi}{8};$

д)  $1 - 2 \sin^2 \frac{7\pi}{12};$

е)  $2 \sin^2 165^\circ - 1.$

$$\boxed{\text{а) } 2 \sin \alpha; \text{ б) } 2 \sin \beta; \text{ в) } 2 \cos \beta; \text{ г) } 1; \text{ д) } \cos 2\alpha}$$

**3.** Упростите выражение:

а)  $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha};$

б)  $\frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha};$

в)  $\frac{1 - \cos 2\beta}{\sin \beta};$

г)  $\frac{1 + \cos 2\beta}{\cos \beta};$

д)  $\frac{\cos 40^\circ + \sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ};$

е)  $\frac{\cos 10^\circ}{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ} + \sin 5^\circ.$

$$\boxed{\text{а) } 2 \sin \alpha; \text{ б) } 2 \sin \beta; \text{ в) } 2 \cos \beta; \text{ г) } 1; \text{ д) } \cos 2\alpha}$$

**4.** Упростите выражение:

а)  $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2;$

б)  $\sin 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1;$

в)  $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{1 - \cos \alpha};$

г)  $\frac{\cos 2x - \cos^2 x}{1 - \cos^2 x};$

д)  $(\cos 3\alpha + \sin 3\alpha)(\cos 3\alpha - \sin 3\alpha);$

е)  $1 - 2 \sin^2 4x.$

$$\boxed{\text{а) } 1; \text{ б) } \cos 2\alpha; \text{ в) } 2 \sin \alpha; \text{ г) } -1; \text{ д) } \cos 6\alpha; \text{ е) } \cos 8x}$$

5. Известно, что  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  и  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Найдите  $\sin 2\alpha$  и  $\cos 2\alpha$ .

$$\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}, \cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$$

6. Известно, что  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Найдите  $\sin 2\alpha$  и  $\cos 2\alpha$ .

$$\sin 2\alpha = -\frac{169}{120}, \cos 2\alpha = \frac{119}{120}$$

7. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен  $1/3$ . Найдите косинус угла при вершине этого треугольника.

$$\frac{6}{7} -$$

8. Вычислите  $\sin \frac{\pi}{8}$  и  $\cos \frac{\pi}{8}$ .

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}, \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

9. Упростите выражение:

a)  $\frac{2 \operatorname{tg} 3^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 3^\circ};$

б)  $\frac{6 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}};$

в)  $\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}};$

г)  $2 \sin \frac{\pi+x}{2} \cos \frac{\pi+x}{2};$

д)  $(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha;$

е)  $\cos^2 \frac{\pi+\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\pi+\alpha}{4}.$

$$\boxed{\text{а) } \operatorname{tg} 6^\circ; \text{ б) } \sin \alpha; \text{ в) } \sin x; \text{ г) } \cos 2\alpha; \text{ д) } \sin \frac{\alpha}{2}; \text{ е) } \sin \alpha \wedge \cos 2\alpha}$$

10. Докажите тождество:

а)  $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha;$

б)  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha;$

в)  $\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cos 2\alpha;$

г)  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{ctg} \alpha;$

д)  $\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha;$

е)  $(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \sin 2\alpha = 2 \cos 2\alpha;$

ж)  $(1 + \cos 2\alpha) \operatorname{tg} \alpha = \sin 2\alpha;$

з)  $\sin \alpha \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha;$

и)  $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1;$

к)  $\frac{\sin 2\alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha;$

л)  $\left( \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \sin 2\alpha = 4 \sin \alpha;$

м)  $\left( \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) \sin 2\alpha = 4 \cos \alpha;$

н)  $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$

о)  $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$

11. Найдите  $\sin 2\alpha$ , если  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ .

$$\frac{1}{8} -$$

12. Докажите тождество:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2.$$

**13.** Докажите тождество:

$$\text{а)} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha; \quad \text{б)} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha.$$

**14.** Выведите формулы тройного угла:

$$\begin{aligned} \text{а)} \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \\ \text{б)} \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \\ \text{в)} \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

**15.** Исходя из равенства  $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$ , вычислите  $\sin 18^\circ$ .

$\frac{\sqrt{5}}{4}$

**16.** Покажите, что:

$$\text{а)} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}; \quad \text{б)} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$