IX Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2013

15 января 2013 года, 9.00–13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), в которой $\angle ABC > 90^\circ$. На боковой стороне AB отмечена точка M. Обозначим через O_1 и O_2 центры описанных около треугольников MAD и MBC окружностей соответственно. Известно, что описанные около треугольников MO_1D и MO_2C окружности вторично пересекаются в точке N. Докажите, что прямая O_1O_2 проходит через точку N.

2. Найдите все нечетные натуральные $n > 1$ такие, что существует перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, в которой при всех $k, 1 \le k \le n$, одно из чисел $a_k^2 - a_{k+1} - 1$ и $a_k^2 - a_{k+1} + 1$ делится на n (здесь мы считаем $a_{n+1} = a_1$).
Т

3. Пусть $a, b, c, d > 0$, $abcd = 1$. Докажите неравенство
$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c} + \frac{(b-1)(d+1)}{1+cd+d} + \frac{(c-1)(a+1)}{1+da+a} + \frac{(d-1)(b+1)}{1+ab+b} \ge 0.$$

IX International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2013

15 January, 2013, 9.00–13.30
First day
(Each problem is worth 7 points)

1. Given a trapezoid $ABCD$ ($AD \parallel BC$) with $\angle ABC > 90^\circ$. Point M is chosen on the lateral side AB. Let O_1 and O_2 be the circumcenters of the triangles MAD and MBC respectively. The circumcircles of the triangles MO_1D and MO_2C meet again at the point N. Prove that the line O_1O_2 passes through the point N.

2. Find all odd positive integers $n > 1$ such that there is a permutation $a_1, a_2, \ldots, a_n$ of the numbers $1, 2, \ldots, n$, where n divides one of the numbers $a_k^2 - a_{k+1} - 1$ and $a_k^2 - a_{k+1} + 1$ for each $k, 1 \le k \le n$ (we assume $a_{n+1} = a_1$).

3. Let $a, b, c, d > 0$ and $abcd = 1$. Prove that
$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c} + \frac{(b-1)(d+1)}{1+cd+d} + \frac{(c-1)(a+1)}{1+da+a} + \frac{(d-1)(b+1)}{1+ab+b} \ge 0.$$