

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1. Задаёт ли указанное правило функцию $y = f(x)$:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ \sqrt{x} - 1, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ x + 1, & \text{если } x \geq 2? \end{cases}$$

В случае положительного ответа:

- а) найдите область определения функции;
- б) вычислите значения функции в точках 0, 1, 3, -1;
- в) постройте график функции;
- г) найдите промежутки монотонности функции.

2. Исследуйте функцию $y = -\frac{1}{x^5} + 4x^3$ на чётность.

3. На числовой окружности взяты точки $M\left(\frac{2\pi}{3}\right), N\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Найдите все числа t , которым на данной окружности соответствуют точки, принадлежащие дуге MN . Сделайте чертёж.

4. Задайте аналитически и постройте график функции $y = f(x)$, у которой $E(f) = [1; +\infty)$.

5. Найдите функцию, обратную функции $y = 2 - x^2, x \geq 0$. Постройте на одном чертеже графики этих взаимно обратных функций.

6. Известно, что функция $y = f(x)$ убывает на R . Решите неравенство $f(|2x + 7|) > f(|x - 3|)$.

Вариант 2

1. Задаёт ли указанное правило функцию $y = f(x)$:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{если } -3 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{x} + 2, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{если } x \leq 2, \\ x + 1, & \text{если } 2 \leq x < 4? \end{cases}$$

В случае положительного ответа:

- а) найдите область определения функции;
- б) вычислите значения функции в точках $-4, -2, 0, 4$;
- в) постройте график функции;
- г) найдите промежутки монотонности функции.

2. Исследуйте функцию $y = \sqrt{x-3} + x^2$ на четность.

$$M\left(-\frac{\pi}{4}\right), N\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

3. На числовой окружности взяты точки $M\left(-\frac{\pi}{4}\right), N\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. Найдите все числа t , которым на данной окружности соответствуют точки, принадлежащие дуге MN . Сделайте чертёж.

4. Задайте аналитически и постройте график функции $y = f(x)$, у которой $E(f) = (-\infty; -3]$.

5. Найдите функцию, обратную функции $y = x^2 + 7, x \geq 0$. Постройте на одном чертеже графики этих взаимно обратных функций.

6. Известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на R . Решите неравенство $f(|x-8|) > f(|2x+5|)$.

$$E(f) = \{-3; 3\}.$$

постройте график функции $y = f(x)$, у которой $E(f) = \{-1; 0; 1\}$.

5. Найдите функцию, обратную функции $y = \sqrt{x+3}$. Постройте на одном чертеже графики этих взаимно обратных функций.

6. Известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на R . Решите неравенство $f(|3-x|) < f(|2x+5|)$.

Рекомендации по оцениванию контрольной работы

Каждый вариант контрольной работы выстроен по одной и той же схеме: задания обязательного минимума – до первой черты, задания среднего уровня – между первой и второй чертой, задания уровня выше среднего – после второй черты. Шкала оценок за выполнение контрольной работы может выглядеть так: за успешное выполнение только заданий обязательного минимума – оценка «3»; за успешное выполнение заданий обязательного минимума и одного дополнительного (после первой или второй черты) – оценка «4»; за успешное выполнение заданий всех трех уровней – оценка «5». При этом оценку не рекомендуется снижать за одно неверное решение в первой части работы (допустимый люфт).

Решение контрольной работы

В а р и а н т 1

1. Правило задает функцию, если, во-первых, можно выполнить действия, а во-вторых, соблюдается однозначность функции.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ \sqrt{x} - 1, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

В случае

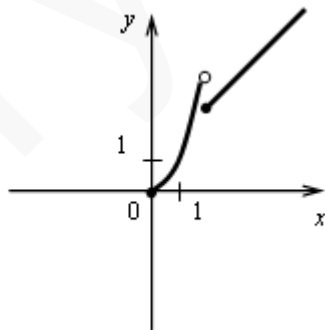
условия не соблюдаются: $f(0) = 0$ и $f(0) = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ x+1, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad \text{– функция}$$

а) $D(f) = [0; +\infty)$

б) $f(0) = 0^2 = 0$; $f(1) = 1^2 = 1$; $f(3) = 3+1 = 4$; $f(-1)$ – не определено;

в)

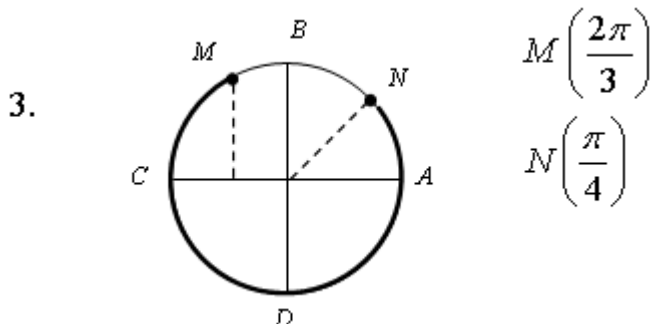


г) на $[0; 2)$ и на $[2; +\infty)$ функция возрастает, в точке $x = 2$ функция имеет разрыв.

2. $D(f) = (-\infty; +\infty)$ – симметрична относительно начала координат.

$$f(-x) = -\frac{1}{(-x^5)} + 4(-x^3) = \frac{1}{x^5} - 4x^3 = -\left(-\frac{1}{x^5} + 4x^3\right) = -f(x),$$

значит, функция $f(x)$ – нечетная.

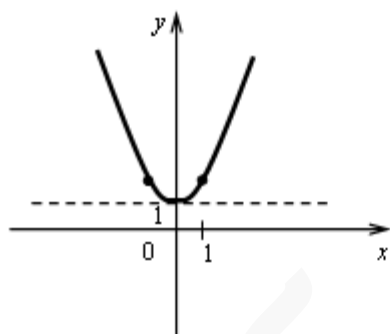


$$M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$N\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \leq t \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4.

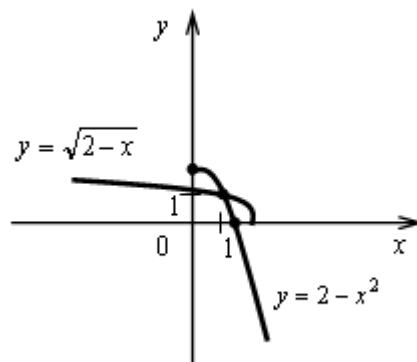


$$f(x) = x^2 + 1$$

$$E(f) = [1; +\infty).$$

5. $y = 2 - x^2$ Квадратичная функция определена и убывает при $x \geq 0$, значит, существует обратная функция: $y = 2 - x^2$; $x^2 = 2 - y$; $x = \sqrt{2 - y}$.

Функция $y = \sqrt{2 - x}$



$$D(f) = (-\infty; 2]$$

$$E(f) = [0; +\infty)$$

6. $y = f(x)$ убывает на $\mathbb{R}$.

$f(|2x + 7|) > f(|x - 3|)$, значит, неравенство верно при $|2x + 7| < |x - 3|$. Возведем обе части в квадрат:

$$(2x+7)^2 < (x-3)^2$$

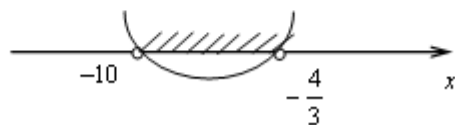
$$4x^2 + 28x + 49 < x^2 - 6x + 9$$

$$3x^2 + 34x + 40 < 0$$

$$3x^2 + 34x + 40 = 0$$

$$D_1 = 17^2 - 3 \cdot 40 = 289 - 120 = 169$$

$$x_1 = \frac{-17+13}{3} = -\frac{4}{3}; \quad x_2 = \frac{-17-13}{3} = -10.$$



ОТВЕТ: $\left(-10; -1\frac{1}{3}\right)$.