МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010

Задания С5

Корянов А. Г. *г. Брянск*

Замечания и пожелания направляйте по адресу:
akoryanov@mail.ru

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Содержание

Аналитические методы

1. Линейные уравнения

1.1. При каких значениях параметра b уравнение

$$9x + b^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)b - 2\sqrt{3} = b^4 x - b^2\left(b + \sqrt{3}\right)$$

не имеет корней? (МГУ, 2002)

Ответ: $b = \sqrt{3}$.

1.2. При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4 x + b^2 + \left(2 + \sqrt{2}\right)b + 2\sqrt{2} = b^2\left(b + \sqrt{2}\right) + 4x$$

имеет бесконечно много корней? (МГУ, 2002)

Ответ: $b = -\sqrt{2}$.

1.3. Для каких значений a решение уравнения

$$10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$$

больше 2? (МГУ, 1982)

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

2. Квадратные уравнения

2.1. (2010) Найдите все такие целые a и b, для которых один из корней уравнения

$$3x^2 + ax^2 + bx + 12 = 0$$

равен $1 + \sqrt{3}$.

Ответ: $a = -9,\ b = 12$.

2.2. При каких значениях параметра a уравнение

$$(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$$

имеет два действительных различных корня? (МГУ, 1980)

Ответ: $\left(\dfrac{9 - \sqrt{17}}{16}; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{9 + \sqrt{17}}{16}\right)$.

2.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2003)

Ответ: 0; 1.

2.4. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + x + \frac{2a - 1}{a + 5} = 0$$

не имеет решений? (МГУ, 2004)

Ответ: $(-\infty;-5)\cup\left(\frac{9}{7};+\infty\right)$.

2.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2+(a+4)x+a+1=0$$

имеется ровно один отрицательный. (МГУ, 2007)

Ответ: $(-1;0]\cup\left\{\frac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}$.

2.6. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-(|a+5|-|a-5|)x+(a-12)(a+12)=0$$

имеет два различных отрицательных корня.

Ответ: (–13; –12).

2.7. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)x^2+(|a+2|-|a+10|)x+a=5$$

имеет два различных положительных корня. (МГУ, 1990)

Ответ: $5<a<7$.

2.8. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$$x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма? (МГУ, 1992)

Ответ: $a=-3,\ S=18$.

2.9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$ax^2+(4a-7)x+4a-5=0$$

имеет в точности один корень на отрезке $[-4;0]$. (МФТИ, 2003)

Ответ: $\left(-\frac{23}{4};\frac{5}{4}\right]$.

2.10. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения

$$3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$$

удовлетворяют неравенству $|x|\le 1$.

Ответ: $\{0\}\cup\left[2+\sqrt{3};2+\sqrt{5}\right]$.

2.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения $ax^2+(2a+2)x+a+3=0$ больше 1. (МГУ, 2001)

Ответ: $\left(-2-2\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;-2+2\sqrt{2}\right)$.

2.12. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнения $(2a-1)x^2+6ax+1=0$ и $ax^2-x+1=0$ имеют общий корень. (МГУ, 2000)

Ответ: $-\frac{3}{4};0;\frac{2}{9}$.

2.13. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y-x^2=a \\ x-y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-\frac{3}{4}\le a<\frac{1}{4}$.

2.14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} axy+x-y+\frac{3}{2}=0 \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1988)

Ответ: $-1;-\frac{1}{2};\frac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}$.

3. Уравнения высшей степени

3.1. Число $x=3$ - один из корней уравнения $ax^2+bx+2=0$, где $a<0$. Найдите действительные корни уравнения $ax^4+bx^2+2=0$. (МГУ, 1993)

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

3.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2+2(a-2)x+a^2-4a\right)^2+$$
$$+(a+5)\left(x^2+2(a-2)x+a^2-4a\right)-a^2+8a+2=0$$

имеет а) единственное решение; б) ровно два различных решения. (МГУ, 2002)

Ответ: а) $2+\sqrt{2}$; б) $\left(-\infty;2-\sqrt{2}\right)\cup\{1\}\cup\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$.

3.3. При каких значениях параметра a уравнение $\left(x^2-x+a^2+2\right)^2=4a^2\left(2x^2-x+2\right)$ имеет ровно 3 различных решения? (МГУ, 1996)

Ответ: $a=\pm\sqrt{2}; a=\pm\frac{1+\sqrt{15}}{4}$.

3.4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^4+(a+1)x^3+(2a+1)x^2-(a+1)x+1=0$$

на промежутке $(-\infty;-1)$ имеет не менее двух корней. (МГУ, 2008)

Ответ: $a>3+\sqrt{20}$.

3.5. При каких значениях a уравнения $(2x-1)a^2-\left(x^2-x+1\right)a-\left(x^3-4x^2+3\right)=0$ и

$$(5-3x)a^2+\left(5x^2-5x-2\right)a-2\left(2x^3-8x^2+6\right)=0$$
не имеют общего решения. (МГУ, 1997)

Ответ: $a\neq -\frac{3}{4}; a\neq 0; a\neq 1.$

3.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2)+y=3a \\ a+2x^3=y^3+(a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений. (МГУ, 2001)

Ответ: $\{-1\}\cup\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}.$

3.7. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения

$$x^4+(a-3)x^2+(a+10)^2=0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии? (МГУ, 1993)

Ответ: $-7; -\frac{109}{7}.$

3.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$25x^5+25(a-1)x^3-4(a-7)x=0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию. (МГУ, 2003)

Ответ: $-2.$

3.9. Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3+(a^2-9a)x^2+8ax-64=0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни. (МГУ, 2003)

Ответ: $a=7; x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=8.$

3.10. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3}y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0 \\ y=\sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения? (МГУ, 1998)

Ответ: $a=2.$

4. Уравнения с модулем

4.1. При каких значениях a уравнение

$$2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$$

имеет четыре различных решения? (МГУ, 1994)

Ответ: $0<a<\frac{1}{8}.$

4.2. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-9a|-2a^2+35+x=0$$

не имеет решений? При каких значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30;63]$? (МГУ, 2003)

Ответ: $\left(-\frac{5}{2};7\right)$; $\left[\frac{9-\sqrt{211}}{2};-\frac{5}{2}\right]\cup\{7\}.$

4.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$ имеет хотя бы один корень. (МГУ, 2005)

Ответ: $-8\le a\le 6.$

4.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-3|$ имеет два различных корня. (МГУ, 2005)

Ответ: $(-24;18).$

4.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $3x+\big|2x+|a-x|\big|=7|x+2|$ имеет хотя бы один корень. (МГУ, 2005)

Ответ: $a\le -12$ или $a\ge 8.$

4.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $5x-\big|3x-|x+a|\big|=10|x-2|$ имеет хотя бы один корень. (МГУ, 2005)

Ответ: $-18\le a\le 14.$

4.7. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение

$$\left|x^2-2x\right|+\left|x^2-3x+2\right|=x^2-4x+c$$

имеет ровно три различных решения. (МГУ, 1992)

Ответ: $4; \frac{19}{4}.$

4.8. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение

$$2x-\left|x-k^2\right|=11k-3|x+4k|$$

а) не имеет решений; б) имеет конечное непустое множество решений. (МГУ, 1992)

Ответ: а) $(-23;0)$; б) $(-\infty;-23)\cup(0;+\infty)$

4.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$2|x-a|+a-4+x=0$$

принадлежат отрезку $[0;4]$. (МГУ, 1984)

Ответ: $\frac{4}{3}\le a\le 2.$

4.10. При каких значениях b уравнение $x^2-(4b-2)\cdot|x|+3b^2-2b=0$ имеет два различных решения?

Ответ: $0 < b < \frac{2}{3}$; $b = 1$.

4.11. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$$

имеет единственный корень.

Ответ: 0; 1.

4.12. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x + 2| = ax + 1$?

Ответ: если $a \in (0{,}5;1]$, то нет решений; если $a \in (-\infty;-1] \cup \{0.5\} \cup (1;+\infty)$ - одно решение; при $a \in (-1;0.5)$ - два решения.

4.13. При каких значениях параметра a уравнение $x + 2 = a|x - 1|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Ответ: при $-1 < a \le 1$ уравнение имеет единственное решение, $x = \frac{a-2}{a+1}$.

5. Дробно-рациональные уравнения

5.1. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = 1$ или $a = -1$.

6. Иррациональные уравнения

6.1. При каких значениях b уравнение $\sqrt{x + b} = x + 3$ имеет единственное решение?

Ответ: $b = 2{,}75$; $b > 3$.

6.2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = 1{,}25$; $a < 1$.

6.3. При каких a уравнение $2x + 3\sqrt{x} + 2a^2 - 11a = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $[0;5{,}5]$.

6.4. Для каждого значения a из промежутка $(-3;0)$ найдите число различных решений уравнения

$\left(2x^2 - 5ax + 2a^2\right)\sqrt{x - \frac{2}{a}} = 0$. (МГУ, 2007)

Ответ: если $-3 < a \le -2$, то одно решение; если $-2 < a \le -1$, то два решения; если $-1 < a < 0$, то три решения.

6.5. (2010) При всех a решите уравнение

$$x - \sqrt{a - x^2} = 1.$$

Ответ: если $a < 1$, то решений нет; если $a \ge 1$, то $x = \frac{\sqrt{2a-1}+1}{2}$.

7. Показательные уравнения

7.1. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (5a-3)2^x + 4a^2 - 3a = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $0 < a \le \frac{3}{4}$; $a = 1$.

7.2. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)\cdot 4^x + (2a-3)\cdot 6^x = (3a-4)\cdot 9^x$ имеет единственное решение? (МГУ, 2005)

Ответ: $(-\infty;1] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right)$.

7.3. Найдите все значениях параметра b, при которых уравнение $9^x + (b^2 + 6)\cdot 3^x - b^2 + 16 = 0$ не имеет решения. (МГУ, 1993)

Ответ: $[-4;4]$.

7.4. При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x - 3\cdot 2^{3x+1} + 2\cdot 4^{x+1} - (4-4a)\cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет три различных корня? (МГУ, 2007)

Ответ: $(0;1) \cup (1;4) \cup (4;5)$.

7.5. При каждом значении параметра a решить уравнение

$4^x - 2a(a+1)\cdot 2^{x-1} + a^3 = 0$. (МГУ, 1985)

Ответ: при $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ единственное решение $2\log_2|a|$; при $a = 1$ единственное решение 0; при $a > 0$, $a \ne 1$ два решения $\log_2 a$, $2\log_2 a$.

8. Логарифмические уравнения

8.1. При каких значениях a уравнение $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ имеет четыре различных корня?

Ответ: $\left(0;\frac{1}{8}\right)$.

8.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_5\left(25^x - \log_5 a\right) = x$ имеет единственное решение. (МФТИ, 2004)

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}; [1; +\infty)$..

8.3. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_3(2 - x - y) + 2 = \log_3(17 - 8x - 10y) \\ (x - a)^2 + x = y + a + 6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения. (МФТИ, 2002)

Ответ: $-5 < a < 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. Тригонометрические уравнения

9.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$\left(a^2 - 6a + 9\right)\left(2 + 2\sin x - \cos^2 x\right) +$
$+ \left(12a - 18 - 2a^2\right)\cdot(1 + \sin x) + a + 3 = 0$ не имеет решений. (МГУ, 1989)

Ответ: $a < -3;\ 1 < a < 6$.

9.2. Для каждого значения a найдите все решения уравнения
$\cos 2x + 2\sin^2(x + a) + 2 - \sin a = 0$,
принадлежащие промежутку $\pi \le x \le 2\pi$.. (МГУ, 2001)

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$ при $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$; при других a решений нет.

9.3. При каких значениях a уравнение $\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $0 \le x < 2\pi$.. (МГУ, 1999)

Ответ: $a = -2;\ a = 1$.

9.4. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\sin x - \log_4 a\right)(\sin x - 2 + 2a) = 0$ имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$? (МГУ, 2003)

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; 4\right]$

9.5. Найдите все значения параметра q, при которых уравнение
$\sin^2 x + (q-2)^2 \sin x + q(q-2)(q-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня. (МГУ, 1991)

Ответ: $0; 2; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

9.6. Для каждого значения a найдите число решений уравнения $a tgx + \cos 2x = 1$, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$. (МГУ, 1996)

Ответ: 3 решения при $a < -1,\ a = 0,\ a > 1$; 5 решений при $a = \pm 1$; 7 решений при $-1 < a < 1,\ a \ne 0$.

10. Уравнения смешанного типа

10.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{\left(x^3 - 1\right)\left(x^2 - 16\right)}{\lg(15a - x) - \lg(x - a)} = 0$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2002)

Ответ: $\left(\frac{1}{15}; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; \frac{4}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1; 4)$.

10.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$ имеет ровно восемь различных решений.

Ответ: $(-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

10.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$ имеет ровно десять различных решений.

Ответ: $(-10\pi; -8\pi) \cup (8\pi; 10\pi)$.

10.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 0$ имеет ровно восемь различных решений.

Ответ: $(-4\pi; -3\pi) \cup (3\pi; 4\pi)$.

10.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 0$ имеет ровно шесть различных решений.

Ответ: $(-3\pi; -2\pi) \cup (2\pi; 3\pi)$.

10.6. При каких значениях параметра a уравнение $(1 + \sin(3ax))\sqrt{5\pi x - x^2} = 0$ имеет ровно 5 различных корней? (МГУ, 2004)

Ответ: $\left[-\frac{13}{30}; -\frac{3}{10}\right) \cup \left(\frac{11}{30}; \frac{1}{2}\right]$.

10.7. При каких значениях a, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, уравнение
$\sqrt{2\sin(x - a) + \sqrt{3}} = \cos 6x - 1$ имеет решения? (МГУ, 1993)

Ответ: $-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.

10.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x^2-6|x|-a\right)^2+12\left(x^2-6|x|-a\right)+37=\cos\frac{18\pi}{a}$$
имеет ровно два корня. (МГУ, 1995)
Ответ: $a=-3$ и $a=9$.

10.9. При всех значениях параметра a решите уравнение
$$x^2+4x+6-4a(x-a)-\cos(x+2)=$$
$$=8a+\cos(x-4a+2).$$ (МГУ, 2008)
Ответ: если $a=\pi n$, то $x=2\pi n-2$, $n\in Z$.

11. Линейные неравенства

11.1. Найдите все значения параметра $p\in[-4;4]$, при которых неравенство
$$(p-2)((x+1)(p-3)+2x)>0$$
выполняется при любых $x\geq 0$. (МГУ, 2004)
Ответ: $[-4;1]\cup(3;4]$.

12. Квадратные неравенства

12.1. (2010) Найдите все значения a, для каждого из которых неравенство
$$ax^2-4x+3a+1>0$$
а) выполняется для всех x;
б) выполняется для всех $x>0$;
в) выполняется для всех $x<0$;
г) выполняется для всех $-1<x<0$.
Ответ: а) $a>1$; б) $a>1$; в) $a\geq 0$; г) $a\geq -\frac{1}{3}$

12.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых из неравенств $0\leq x\leq 1$ следует неравенство
$\left(a^2+a-2\right)x^2-(a+5)x-2\leq 0$.
Ответ: $[-3;3]$.

12.3. При каких целых a неравенство $2\log_{\frac{1}{2}}a-3+2x\log_{\frac{1}{2}}a-x^2<0$ верно для любого значения x? (МГУ, 2005)
Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

12.4. Для каких значений a система неравенств
$$\begin{cases}-x^2+12x-a\geq 0\\ x\leq 2\end{cases}$$
выполняется хотя бы при одном значении x? (МГУ, 1994)
Ответ: $a\leq 20$.

12.5. Найдите такие значения x, при которых неравенство
$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$$
выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$. (МГУ, 1994)
Ответ: $\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5;3+\sqrt{6}\right]$.

12.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$ содержит хотя бы одно целое число. (МГУ, 2007)
Ответ: $(2;7)$.

12.7. Найдите все значения a, при которых система
$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\leq 0\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\geq 0\end{cases}$$
имеет единственное решение. (МГУ, 2001)
Ответ: $-\frac{3}{4};\frac{4}{3}$.

12.8. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств
$$\begin{cases}x^2-x+a\leq 0\\ x^2+2x-6a\leq 0\end{cases}$$
имеет единственное решение. (МФТИ, 2004)
Ответ: $\frac{1}{4};0$.

12.9. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых единственное решение имеет система неравенств
$$\begin{cases}by^2+4by-2x+7b+4\leq 0\\ bx^2-2y-2bx+4b-2\leq 0\end{cases}$$ (МГУ, 1994)
Ответ: $\frac{1}{3}$.

12.10. При каких целых значениях параметра k система неравенств
$$\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y\leq k^2+10k+20\\ 5x^2+5y^2-2kx+4ky\leq 5-k^2\end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение? (МГУ, 2001)
Ответ: $Z\setminus\{-11;-10;\ldots;-4;-3\}$.

12.11. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\geq 0\\ ax\geq 4\end{cases}$$
не имеет решений. (МГУ, 1967)
Ответ: $(-2;0]$.

12.12. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\geq 0\\ ax>4\end{cases}$$
не имеет решений.
Ответ: $-2\leq a\leq 0$.

13. Неравенства высшей степени

13.1. Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+\left(5+4a-a^2\right)<0$$

выполняется хотя бы при одном значении $a\in[-1;2]$. (МГУ, 1992)

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

13.2. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\ge 0\\ x^3-(a+3)x^2+3ax\le 0\end{cases}$$

имеет единственное решение (МГУ, 2001)

Ответ: $[3;+\infty)$.

14. Неравенства с модулем

14.1. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\left|\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$ выполняется при всех x.

Ответ: $-5<a<1$.

14.2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\left|x^2-2x+a\right|>5$ не имеет решений на отрезке $[-1;2]$. (МГУ, 2000)

Ответ: $[-4;2]$.

14.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+4|x-a|\ge a^2$ справедливо для всех действительных x. (МГУ, 1993)

Ответ: $[-2;2]$.

14.4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+4x+6a\cdot|x+2|+9a^2\le 0$ имеет не более одного решения. (МГУ, 1995)

Ответ: $a\ge\dfrac{2}{3}$.

14.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$ выполняется для любого x.

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

14.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $2x+2|x-a|+|x-1|>3$ выполняется для любого x.

Ответ: $(1{,}5;+\infty)$.

14.7. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $2x+2|x+a|+|x-1|>3$ выполняется для любого x.

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

14.8. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии $|2x+4-2a|+|x-2+a|\le 3$. (МГУ, 2005)

Ответ: $[-1;5]$.

14.9. (2010) Найдите все пары чисел p и q, для каждой из которых неравенство

$$\left|x^2+px+q\right|>2$$

не имеет решений на отрезке $[1;5]$.

Ответ: $p=-6,\ q=7$.

15. Дробно-рациональные неравенства

15.1. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\dfrac{x-3b}{b-2x}<0$. (МГУ, 2003)

Ответ: $(-\infty;-6)\cup\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

15.2. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполняется для всех таких x, что $1\le x\le 2$. (МГУ, 1974)

Ответ: $\dfrac{1}{2}<a<1$.

15.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}\ge 0\\ x-8>ax\end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Ответ: $[1;3]$.

15.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\dfrac{x+ax+a}{x-2a-2}\ge 0\\ x+ax>8\end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Ответ: $[-3;-1]$.

15.5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2+(a-3)x+\dfrac{2}{a}-2a\ge 0 \\ ax\ge a^2-2 \end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Ответ: $a<-1-\sqrt{5}$.

15.6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{a^2x+2a}{ax-2+a^2}\ge 0 \\ ax+a>\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Ответ: $a=0$, $a\le -\dfrac{1}{2}$.

15.7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2\cdot 2^{|2a-1|}-2x+1}{x^2-(a-2)x-2a}>0.$$

(МГУ, 2003)

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$ при $a=\dfrac{1}{2}$;

$(-\infty;a)\cup(-2;+\infty)$ при $a\le -2$;

$(-\infty;-2)\cup(a;+\infty)$ при $-2<a<\dfrac{1}{2}$ или $a>\dfrac{1}{2}$.

16. Иррациональные неравенства

16.1. При каких значениях a неравенство $\left(x^2-(a+2)x-2a^2+4a\right)\sqrt{1-x}\le 0$ имеет единственное решение? (МГУ, 2000)

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

16.2. Определите, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a}\ge x$ образуют на числовой прямой отрезок длиной $2|a|$ (МГУ, 1996)

Ответ: $2;\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

16.3. Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;5]$ удовлетворяют неравенству

$3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$. (МГУ, 1992)

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right)$.

16.4. При всех значениях параметра b решите неравенство

$2(b-1)\sqrt{3x+1}+1\ge 3bx+b-3x$ (МГУ, 2006)

Ответ: при $b<1$ $x\in\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}\cup[1;+\infty)$; при $b=1$ $x\in\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$; при $b>1$ $x\in\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$.

17. Показательные неравенства

17.1. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $16^x<30\cdot 4^x-a$ не имеет ни одного целочисленного решения. (МГУ, 1995)

Ответ: $a\ge 224$.

18. Логарифмические неравенства

18.1. Для любого допустимого значения a решите неравенство $\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right)>1$ и найдите, при каком значении a множество точек x, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6. (МГУ, 1999)

Ответ: $\left(-3^a;-1\right)\cup\left(1;3^a\right)$ при $0<a<0{,}5$; $\left(-\infty;-3^a\right)\cup\left(3^a;+\infty\right)$ при $a>0{,}5$, длина промежутка равна 6 при $a=1$.

19. Неравенства смешанного типа

19.1. (2010) Найдите наибольшее значение параметра b, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}\left(8x-x^2-16\right)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\ge -\frac{2}{3}b|\cos\pi x|$$

имеет хотя бы одно решение. (МГУ)

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

19.2. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}\cdot\left(x^2-2x+1\right)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\le\sqrt[4]{a^3}\cdot\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

имеет хотя бы одно решение. (МГУ)

Ответ: $\dfrac{1}{16}$.

19.3. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство

$$\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3.$$ (МГУ, 1988)

Ответ: $[-2{,}4;0]$.

19.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство

$$\left|\sin^2 x - 2(a-1)\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x + 2 - a\right| \le 6.$$

(МГУ, 1988)

Ответ: $\left[1;\frac{29}{5}\right]$.

19.5. При каких значениях параметров a и b система неравенств

$\begin{cases} a + \sin bx \le 1 \\ x^2 + ax + 1 \le 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

(МГУ, 1994)

Ответ: $a = 2,\ b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$

$a = -2,\ b \in R.$

20. Инвариантность

* Инвариантность в математическом смысле — неизменность какой-либо величины по отношению к некоторым преобразованиям.
* Инварианты (от лат. invarians, родительный падеж invariantis — неизменяющийся), числа, алгебраические выражения и т. п., связанные с каким-либо математическим объектом и остающиеся неизменными при определенных преобразованиях этого объекта или системы отсчёта, в которой описывается объект.

20.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a\right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений. (МГУ, 1999)

Ответ: $a = 1$ или $a = -1$.

20.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^x + \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x - 5a = y - |y| - 8 \\ x^2 - (a-4)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2007)

Ответ: 2; 4.

20.3. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|y|} + 5|y| + 3x + 4 = 5y^2 + 3a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1987)

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

20.4. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение. (МГУ, 1966)

Ответ: $a = 0$.

20.5. Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет только одно решение. (МГУ, 1966)

Ответ: $a = b = -2$.

20.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|1-x|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

имеет ровно четыре различных решения. (МГУ, 1986)

Ответ: $a = -\frac{1}{32};\ a = -\frac{1}{4}$.

20.7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \ge x^2 + 2a \\ x \ge y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1984)

Ответ: $a = \frac{1}{8}$.

20.8. (2010) Найдите все значения p, при каждом из которых найдется q такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $p = -1,\ p = 1$.

20.9. (2010) Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

имеет решения.

Ответ: $-1 \le p \le 1$.

21. Функции

21.1. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции

$f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}$ лежит на интервале $(-3;3)$.

Ответ: $(-5;1)$

21.2. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции

$f(x)=\dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;3]$. Определите при каждом таком p множество значений функции $f(x)$. (МГУ, 1999)

Ответ: $p=9;\ [-1;3]$.

21.3. Найдите все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$f(x)=\dfrac{x^2+cx-1}{2x^2-3x+2}$ принадлежат интервалу $(-1;2)$. (МГУ, 1998)

Ответ: $\left(3-2\sqrt{3};-6+2\sqrt{15}\right)$.

21.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x)=x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|-a$$

принимает
1) только неотрицательные значения;
2) как положительные, так и отрицательные значения.

Ответ: 1) $a\le-\dfrac{57}{32}$; 2) $a>-\dfrac{57}{32}$.

21.5. Найдите значения a, при которых наибольшее значение функции

$f(x)=2x^2+x(5-3a)+a^2-3a+4$ на отрезке с концами в точках $a-1$ и -4 минимально. Укажите это значение. (МГУ, 2006)

Ответ: $-5;-4$.

21.6. (2010) Найдите все такие значения a, для которых наименьшее значение функции

$\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\cdot|x+1|$ меньше 2.

Ответ: $(-\infty;2)$.

21.7. (2010) Найдите все такие a, что наименьшее значение функции

$f(x)=4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|$ меньше 4.

Ответ: $(-4;-2)\cup(0;2)$.

21.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$f(x)=\dfrac{4\sin x+a}{4a-2\sin x}$ принимает все значения из отрезка $[0;1]$. (МГУ, 2005)

Ответ: $0<|a|\le2$.

Функционально-графические методы

Координатная плоскость *xOy*

22. Параллельный перенос (вдоль оси *y*)

22.1. При каких значениях параметра a уравнение $x-a=\big||2x|-1\big|$ имеет ровно три корня?

Ответ: $a=-0{,}5$ или $a=-1$.

22.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\left|2|x|-a^2\right|=x-a$ имеет ровно три различных решений.

Ответ: $-2;-0{,}5$.

22.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$f(x)=2\left|2|x|-a^2\right|-x+a$

имеет ровно три нуля функции.

Ответ: $-2;-0{,}5$.

22.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$f(x)=2\left|2|x|-a^2\right|-x+a$

имеет две различных точки перемены знака.

Ответ: $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$.

22.5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\big||5x|-10\big|=a+3x$ имеет ровно три различные решения. Для каждого полученного значения a найдите все эти решения.

Ответ: при $a=10$ решения $x=-2{,}5$; $x=0$; $x=10$; при $a=6$ решения $x=-2$; $x=0{,}5$; $x=8$.

22.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-\left|x^2+2x-3\right|-a.$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Ответ: $(-3{,}5;1)$.

22.7. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-3x+2-\left|x^2-5x+4\right|-a.$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

22.8. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет единственное решение?

Ответ: $a=1{,}25$ или $a<1$.

22.9. При каких значениях a неравенство $\sqrt{1-x^2}>a-x$ имеет решение?

Ответ: $a<\sqrt{2}$.

22.10. При каких значениях c уравнение

$$-\sqrt{16-x^2}=c+x$$

имеет единственное решение? (МГУ, 2007)

Ответ: $\{-4\sqrt{2}\}\cup(-4;4]$.

22.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x+y=a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a=\pm\sqrt{2}$.

22.12. Найдите значения параметра a, при которых система $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y-|x|=a\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\{-\sqrt{2}\}\cup(-1;1)$.

22.13. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ |y|-x=a\end{cases}$ имеет ровно три различные решения?

Ответ: при $a=\sqrt{2}$.

23. Параллельный перенос (вдоль оси x)

23.1. При каких значениях b уравнение $\sqrt{x+b}=x+3$ имеет единственное решение?

Ответ: $b=2{,}75$; $b>3$.

23.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$|2x-a|+1=|x+3|$

имеет ровно один корень.

Ответ: -4; -8.

23.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$1=|x-3|-|2x+a|$

имеет ровно один корень.

Ответ: -4; -8.

23.4. При каком значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases}x+3|y|+5=0\\ (x-a)^2+y^2=4\end{cases}$$

имеет три различных решения?

Ответ: $a=-7$.

23.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x-a|+1\le|x+3|$ образуют отрезок длины 1.

Ответ: $a=-\dfrac{5}{2}$, $a=-\dfrac{19}{2}$.

23.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x-a|+2\le|x-4|$ образуют отрезок длины 1.

Ответ: $a=2$, $a=22$.

23.7. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{3-x}+|x-a|\le 2$ является отрезок.

Ответ: $(-1;1)\cup\left[\dfrac{5}{4};5\right)$.

23.8. Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x}+|x+a|\le 3$ является отрезок.

Ответ: $\left(-8;-\dfrac{9}{4}\right]\cup(-2;4)$.

23.9. Найдите все значения a, при которых уравнение $a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$ имеет ровно одно решение. (МГУ, 1994)

Ответ: $[2;3)\cup(3;4]$.

24. Поворот

24.1. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x+2|=ax+1$?

Ответ: если $a\in(0{,}5;1]$, то нет решений; если $a\in(-\infty;-1]\cup\{0.5\}\cup(1;+\infty)$ - одно решение; при $a\in(-1;0.5)$ - два решения.

24.2. Сколько решений в зависимости от параметра b имеет уравнение $|x-4|=bx+2$?

Ответ: нет решений при $b \in [-1;-0,5)$; одно решение при $b \in (-\infty;-1) \cup \{-0,5\} \cup [1;+\infty)$; два решения при $b \in (-0,5;1)$.

24.3. Найдите значения параметра a, при котором уравнение $|x^2 - 5x + 6| = ax$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: $5 - 2\sqrt{6}$.

24.4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 - 4x + 3| = a(x-1)$ имеет два различных корня. Указать эти корни.

Ответ: $a \in (-\infty;-2) \cup [2;+\infty) \cup \{0\}$

$x = 1,\ x = a + 3$.

24.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - 5|x|\right| = a(x+4)$$

имеет ровно три различных корня. (МГУ, 2004)

Ответ: 0;1.

24.6. При каких значениях параметра a уравнение $x + 2 = a|x-1|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Ответ: при $-1 < a \le 1$ уравнение имеет единственное решение, $x = \dfrac{a-2}{a+1}$.

24.7. При каких значениях параметра a уравнение $b|x-3| = x+1$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Ответ: при $-1 < b \le 1$ уравнение имеет единственное решение, $x = \dfrac{3b-1}{b+1}$.

24.8. Выясните, при каких значениях a уравнение $|x+2| + a|x-1| = 3$: $\quad (*)$

а) имеет единственный корень и найти его;
б) имеет ровно два корня и найти их;
в) имеет бесконечное множество корней.

Ответ: а) $|a| > 1,\ x = 1$; б) $|a| < 1,\ x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{a-5}{a+1}$; в) $a = 1$ и $a = -1$.

24.9. При каких значениях параметра a уравнение $6\sqrt{x-2} = ax + 7$ имеет единственное решение?

Ответ: $a \in [-3,5;0]$; $a = 1$.

24.10. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3$ имеет единственное решение.

Ответ: $0 < a < \dfrac{3}{16}$, $a = \dfrac{1}{4}$.

24.11. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y + a = ax^2 \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Ответ: $-2; 2$.

24.12. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + |x-1| = 0$ имеет три решения?

Ответ: при $a = -\dfrac{1}{4}$.

24.13. Определите, при каких значениях параметра b при любых значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0 \\ y + ax + ab = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения $(x; y)$. (МГУ, 2006)

Ответ: $(-4; -1)$.

24.14. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(4;8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a-1)\log_2 x$.

Ответ: $a \le -\dfrac{1}{2},\ a > \dfrac{2}{3}$.

25. Гомотетия

25.1. При каких действительных значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x| + 2|y| = 12 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Ответ: $a \in \left(\dfrac{144}{13};16\right)$.

25.2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |y| = x^2 - 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Ответ: $a = 4$.

25.3. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет решение?

Ответ: $a \ge 2\sqrt{2}$.

25.4. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a?

Ответ: если $a < 1$ или $a > \sqrt{2}$, то нет решений; если $a = 1$ или $a = \sqrt{2}$, то решений четыре; если $1 < a < \sqrt{2}$, то решений восемь.

25.5. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 64 - 16x} + \sqrt{x^2 + y^2 + 36 + 12y} = 10 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $-8 \le a < -6$, $a = \pm\dfrac{24}{5}$, $6 < a \le 8$.

25.6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \le a^2$.

Ответ: $\left(-\infty; -1{,}25\sqrt{5}\right] \cup \left[1{,}25\sqrt{5}; +\infty\right)$.

25.7. Найдите все значения параметра a, при которых количество корней уравнения $(2{,}5 - a)x^3 - 2x^2 + x = 0$ равно количеству общих точек линий $x^2 + y^2 = a$ и $y = 3 - |x - 1|$.

Ответ: $\{2{,}5; 8; 10\}$.

25.8. При каких значениях a существует единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases} ?$$ (МГУ, 2008)

Ответ: 9; 49.

Координатная плоскость *aOx*

26. Уравнения

26.1. Найдите число различных решений уравнения $\left|x^2 + 2x - 3\right| = a$ в зависимости от параметра a.

Ответ: нет решений, если $a < 0$; два решения, если $a = 0$ или $a > 4$; три решения, если $a = 4$; четыре решения, если $0 < a < 4$.

26.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a + 4x - x^2 - 1\right)\left(a + 1 - |x - 2|\right) = 0$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $a = -1$.

26.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - \left|x^2 + 2x - 3\right| - a.$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Ответ: (–3,5;1).

26.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - \left|x^2 - 5x + 4\right| - a.$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

26.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - 6x + 8\right| + \left|x^2 - 6x + 5\right| = a$$

имеет ровно три корня.

Ответ: $a = 5$.

26.6. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение

$$\left|x^2 - 2x\right| + \left|x^2 - 3x + 2\right| = x^2 - 4x + c$$

имеет ровно три различных решения. (МГУ, 1992)

Ответ: $4; \dfrac{19}{4}$.

26.7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|x^2 - 4x + 3\right| = 3a - 2a^2$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $a = 0{,}5$ или $a = 1$.

26.8. При каких значениях a число корней уравнения $\left|x^2 - 8|x| + 7\right| = a$ равно a?

Ответ: 7.

26.9. При каких значениях a уравнение $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ имеет четыре различных корня?

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{8}\right)$.

26.10. Найдите все значения p, при которых уравнение $7 - 2\cos x = p\left(1 + tg^2 x\right)$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $(0; 9]$.

26.11. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет единственное решение?
Ответ: $a = 1{,}25$ или $a < 1$.

27. Неравенства (метод областей)

27.1. Найдите все значения a, при которых неравенство
$\log_a\left(x^2+4\right) > 1$ выполняется для всех значений x. (МГУ, 2005)
Ответ: $(1;4)$.

27.2. Найдите все значения a, при которых неравенство $(x-3a)(x-a-3) < 0$ выполняется при всех x, таких, что $1 \le x \le 3$.
Ответ: $\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

27.3. При каких a из неравенства $0 < x < 1$ следует неравенство $x^2 - a^2 \le 0$?
Ответ: $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

27.4. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - a \le 0 \\ x^2 - 4x + a \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?
Ответ: $a = -1$ или $a = 4$.

27.5. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(1;2]$ выполняется неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a} < 0$.
Ответ: $(0{,}5;1]$.

27.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2 - 2x \le a - 1$ и $x^2 - 4x \le 1 - 4a$ образуют на числовой оси отрезок длины единица.
Ответ: $a = \dfrac{1}{4}$ или $a = 1$.

27.7. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество всех решений неравенства

$$(p - x^2)(p + x - 2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$. (МГУ, 1987)
Ответ: $p \le 0,\ p \ge 3$.

27.8. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $y + 2x \ge a$ и $y - x \ge 2a$ являются решениями неравенства $2y - x > a + 3$.
Ответ: $a > \dfrac{9}{8}$.

Указания и решения

1. Линейные уравнения

1.1. При каких значениях параметра b уравнение

$$9x + b^2 - \left(2-\sqrt{3}\right)b - 2\sqrt{3} = b^4x - b^2\left(b+\sqrt{3}\right)$$

не имеет корней? (МГУ, 2002)
Решение. Данное уравнение является линейным относительно неизвестной x.

$$\left(b^4 - 9\right)\cdot x = b^3 + \left(1+\sqrt{3}\right)b^2 - \left(2-\sqrt{3}\right)b - 2\sqrt{3}.$$

Линейное уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} b^4 - 9 = 0 \\ b^3 + \left(1+\sqrt{3}\right)b^2 - \left(2-\sqrt{3}\right)b - 2\sqrt{3} \ne 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет два корня: $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = -\sqrt{3}$. Подстановка показывает, что второму условию удовлетворяет только $b_1 = \sqrt{3}$.
Ответ: $b = \sqrt{3}$.

2. Квадратные уравнения

2.1. (2010) Найдите все такие целые a и b, для которых один из корней уравнения

$$3x^2 + ax^2 + bx + 12 = 0$$

равен $1+\sqrt{3}$.
Решение. Подставим в уравнение $x = 1+\sqrt{3}$. Получим равенство $(24 + 4a + b) + (6 + 2a + b)\sqrt{3} = 0$, которое выполняется ($a$ и b – целые) при условии

$$\begin{cases} 24 + 4a + b = 0 \\ 6 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим $a = -9$, $b = 12$. При этих значениях квадратное уравнение $x^2 - 2x - 2 = 0$ имеет корни $x = 1 \pm \sqrt{3}$.
Ответ: $a = -9$, $b = 12$.

2.2. При каких значениях параметра a уравнение

$$(3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$$

имеет два действительных различных корня? (МГУ, 1980)

Решение. 1) Если $3a-1=0$ т.е. $a=\dfrac{1}{3}$, то получаем уравнение $\dfrac{2}{3}x-1=0$, которое имеет один корень.

2) При $a\neq\dfrac{1}{3}$ получаем квадратное уравнение, которое имеет два действительных различных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант положителен:

$\dfrac{D}{4}>0 \Leftrightarrow a^2-(3a-1)(3a-2)>0.$ Решая это неравенство при условии $a\neq\dfrac{1}{3}$, получаем ответ.

Ответ: $\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{16};\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right).$

2.4. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2+x+\frac{2a-1}{a+5}=0$$

не имеет решений? (МГУ, 2004)

Решение. Квадратное уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен: $D<0 \Leftrightarrow \dfrac{a-\frac{9}{7}}{a+5}>0.$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ.

Замечание. При $a=-5$ дробь не определена, поэтому и уравнение не определено, и не имеет смысла говорить о решениях уравнения.

Ответ: $(-\infty;-5)\cup\left(\dfrac{9}{7};+\infty\right).$

2.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2+(a+4)x+a+1=0$$

имеется ровно один отрицательный. (МГУ, 2007)

Решение. 1) Пусть $a=0$, тогда получаем линейное уравнение $4x+1=0$, которое имеет единственный отрицательный корень $x=-\dfrac{1}{4}.$

2) При $a\neq 0$ получаем квадратное уравнение, дискриминант которого равен

$D=(a+4)^2-4a(a+1)=-3a^2+4a+16.$

а) Уравнение имеет ровно один корень, т.е. $D=0.$ Отсюда $a=\dfrac{2\pm 2\sqrt{13}}{3}.$ Так как корень $x=-\dfrac{a+4}{2a}<0,$ то остается $a=\dfrac{2+2\sqrt{13}}{3}.$

б) Уравнение имеет корни разных знаков. В этом случае свободный член приведенного уравнения отрицателен (дискриминант будет положительным): $\dfrac{a+1}{a}<0 \Leftrightarrow -1<a<0.$

в) Один из корней равен нулю, т.е. $a+1=0 \Leftrightarrow a=-1.$ Квадратное уравнение принимает вид $-x^2+3x=0,$ и имеет корни $x=0,\ x=3.$ Значение $a=-1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(-1;0]\cup\left\{\dfrac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}.$

2.6. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-(|a+5|-|a-5|)x+(a-12)(a+12)=0$$

имеет два различных отрицательных корня.

Решение. Используя теорему Виета, запишем условия существования двух различных отрицательных корней для квадратного уравнения:

$$\begin{cases} x_1x_2>0\\ x_1+x_2<0\\ D>0.\end{cases}$$

Рассмотрим первые два неравенства

$$\begin{cases}(a-12)(a+12)>0\\ |a+5|-|a-5|<0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(a-12)(a+12)>0\\ (a+5)^2-(a-5)^2<0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-12)(a+12)>0\\ 2a\cdot 10<0.\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ a<-12.$

Теперь рассмотрим дискриминант с учетом $a<-12.$

$(|a+5|-|a-5|)^2-4(a-12)(a+12)>0,$

$10^2-4(a-12)(a+12)>0,\ a^2-144<25,$

$a^2<169,\ -13<a<13.$ Так как $a<-12,$ то получаем $-13<a<-12.$

Ответ: (–13; –12).

2.8. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$$x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма? (МГУ, 1992)

Указание. Сумма квадратов корней данного уравнения в силу теоремы Виета равна $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=-8a-6,$ причем значение a должно удовлетворять условию существованию корней, т.е. $\frac{D}{4}=-a^2-4a-3\ge 0.$ Отсюда значения $a\in[-3;-1].$ Далее рассмотреть линейную (убывающую) функцию $f(a)=-8a-6$ на отрезке $[-3;-1].$

Ответ: $a=-3,\ S=18.$

2.9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$ax^2+(4a-7)x+4a-5=0$$

имеет в точности один корень на отрезке $[-4;0].$ (МФТИ, 2003)

Решение. 1) Пусть $a=0,$ тогда получаем линейное уравнение $-7x-5=0,$ которое имеет единственный корень $x=-\frac{5}{7},$ причем $-\frac{5}{7}\in[-4;0].$

2) При $a\ne 0$ получаем квадратное уравнение, дискриминант которого равен $D=(4a-7)^2-4a(4a-5)=-36a+49.$

а) Уравнение имеет ровно один корень, т.е. $D=0.$ Отсюда $a=\frac{49}{36}.$ Так как корень $x=-\frac{4a-7}{2a}=\frac{28}{49}>0,$ то значение $a=\frac{49}{36}$ не удовлетворяет условию задачи.

б) Квадратное уравнение имеет один корень внутри интервала $(m;M)$, а другой расположен вне этого интервала тогда и только тогда, когда $f(m)\cdot f(M)<0$, где $f(x)=ax^2+(4a-7)x+4a-5.$ Имеем неравенство $f(-4)\cdot f(0)<0$,

$(4a+23)(4a-5)<0,\quad -\frac{23}{4}<a<\frac{5}{4}.$ При этом $a\ne 0$.

в) Пусть $f(-4)=0$, т.е. $4a+23=0 \Leftrightarrow a=-\frac{23}{4}.$ Квадратное уравнение принимает вид $23x^2+120x+112=0,$ и имеет корни $x=-4,$ $x=-\frac{28}{23},$ которые принадлежат отрезку $[-4;0].$

Значение $a=-\frac{23}{4}$ не удовлетворяет условию задачи.

г) Пусть $f(0)=0$, т.е. $4a-5=0 \Leftrightarrow a=\frac{5}{4}.$

Квадратное уравнение принимает вид $5x^2-8x=0,$ и имеет корни $x=0,\ x=\frac{8}{5}.$

Значение $a=\frac{5}{4}$ удовлетворяет условию задачи.

С учетом первого случая окончательно получаем ответ.

Ответ: $\left(-\frac{23}{4};\frac{5}{4}\right].$

2.10. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения

$$3ax^2+\left(3a^3-12a^2-1\right)x-a(a-4)=0$$

удовлетворяют неравенству $|x|\le 1$.

Решение. 1) Пусть $3a=0,$ т.е. $a=0,$ тогда получаем линейное уравнение $-x=0,$ которое имеет единственный корень $x=0,$ причем $0\in[-1;1].$ Значение $a=0$ удовлетворяет условию задачи.

2) При $a\ne 0$ получаем квадратное уравнение, дискриминант которого равен

$D=\left(3a^3-12a^2-1\right)^2+12a^2(a-4)=$

$=(3t-1)^2+12t=(3t+1)^2,$ где $t=a^3-4a^2.$

Тогда найдем корни

$x=\frac{-(3t-1)-(3t+1)}{6a}=\frac{-t}{a}=4a-a^2,$

$x=\frac{-(3t-1)+(3t+1)}{6a}=\frac{1}{3a}.$ Теперь поставим условия для корней:

$\begin{cases}-1\le 4a-a^2\le 1\\ -1\le \frac{1}{3a}\le 1\end{cases}$ Решите систему самостоятельно.

Ответ: $\{0\}\cup\left[2+\sqrt{3};2+\sqrt{5}\right].$

2.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения $ax^2+(2a+2)x+a+3=0$ больше 1. (МГУ, 2001)

Решение. 1) Пусть $a=0,$ тогда получаем линейное уравнение $2x+3=0,$ которое имеет единственный корень.

2) При $a\ne 0$ получаем квадратное уравнение, для которого $\frac{D}{4}=(a+1)^2-a(a+3)=1-a.$

При условии $1-a>0$, т.е. $a<1$ ($a \neq 0$) имеем два корня $x_1 = \frac{-(a+1)-\sqrt{1-a}}{a}$ и $x_2 = \frac{-(a+1)+\sqrt{1-a}}{a}$. Согласно условию задачи $|x_1 - x_2| > 1$, $\left|\frac{2\sqrt{1-a}}{a}\right| > 1$, $\frac{2\sqrt{1-a}}{|a|} > 1$, $2\sqrt{1-a} > |a|$, $4(1-a) > a^2$, $a^2 + 4a - 4 < 0$, $-2-2\sqrt{2} < x < -2+2\sqrt{2}$. С учетом условий $a<1$ ($a \neq 0$) получаем ответ.

Ответ: $\left(-2-2\sqrt{2};0\right) \cup \left(0;-2+2\sqrt{2}\right)$.

2.12. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнения $(2a-1)x^2 + 6ax + 1 = 0$ и $ax^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень. (МГУ, 2000)

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, получаем $(a-1)x^2 + (6a+1)x = 0$. Отсюда $x=0$ или $(a-1)x + (6a+1) = 0$. Оба уравнения не могут иметь корень $x=0$. Значение $a=1$ не удовлетворяет равенству $(a-1)x+(6a+1)=0$. При $a \neq 1$ находим корень $x = \frac{6a+1}{1-a}$. Это значение подставим во второе исходное уравнение:

$$a \cdot \left(\frac{6a+1}{1-a}\right)^2 - \frac{6a+1}{1-a} + 1 = 0,$$

$36a^3 + 19a^2 - 6a = 0$. Отсюда имеем $a=0$, $a = \frac{2}{9}$, $a = -\frac{3}{4}$.

При каждом из этих значений оба исходных уравнения имеют общий корень (покажите).

Ответ: $-\frac{3}{4}; 0; \frac{2}{9}$.

2.13. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - x^2 = a \\ x - y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Исключая параметр из системы, получаем уравнение $(y-x)(1+y+x)=0$. Отсюда $y=x$ или $y=-x-1$.

Пусть $y=x$, тогда из системы имеем квадратное уравнение $x^2 - x + a = 0$, дискриминант которого равен $D_1 = 1-4a$.

Если $y=-x-1$, то из системы имеем квадратное уравнение $x^2 + x + 1 + a = 0$, которое имеет дискриминант $D_2 = -3-4a$.

Рассмотрим разные случаи для дискриминантов.

1) $\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a > 0 \\ -3-4a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$.

2) $\begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a < 0 \\ -3-4a > 0 \end{cases}$

Система неравенств не имеет решений.

3) $\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a = 0 \\ -3-4a > 0 \end{cases}$

Система не имеет решений.

4) $\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a > 0 \\ -3-4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$.

Первое уравнение $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$ имеет корни $-\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Второе уравнение $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ имеет один корень $x = \frac{1}{2}$.

5) $\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a = 0 \\ -3-4a = 0 \end{cases}$

Система не имеет решений.

6) $\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \end{cases}$

В этом случае выше приведенные квадратные уравнения не имеют общих корней (докажите, приравнивая корни). Тогда исходная система имеет четыре различных решения.

7) Случай $x = -x-1$, т.е. $x = -\frac{1}{2}$, приводит к значениям $y = -\frac{1}{2}$ и $a = -\frac{3}{4}$. Тогда получаем одно уравнение $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$, которое имеет корни $-\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{3}{4} \leq a < \frac{1}{4}$.

2.14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0 \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1988)

Решение. Второе уравнение исходной системы можно переписать в виде $y(x+2) + (x+1) = 0$, откуда следует, что эта система ни при каком значении параметра a не имеет решений с условием $x=-2.$ Поэтому исходная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases}(ax-1)y+x+\dfrac{3}{2}=0\\ y=-\dfrac{x+1}{x+2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2a-2)x^2+(2a-9)x-8=0\\ y=-\dfrac{x+1}{x+2}\end{cases}$$

Найдем все значения параметра a, при которых первое уравнение последней системы имеет решение $x=-2.$ Для таких значений a должно выполняться равенство

$(2a-2)(-2)^2+(2a-9)(-2)-8=0,$ откуда находим, что $a=-\dfrac{1}{2}.$

При $a=-\dfrac{1}{2}$ первое уравнение системы перепишется в виде $-3x^2-10x-8=0.$ Это уравнение имеет два корня $x_1=-2$ и $x_2=-\dfrac{4}{3}.$ Второму из них соответствует значение $y_2=\dfrac{1}{2}.$ Для $x_1=-2$ соответствующего значения y не существует.

Итак, при $a=-\dfrac{1}{2}$ исходная система имеет единственное решение $\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{2}\right)$, и это значение a отвечает условию задачи.

При $a=1$ первое уравнение системы перепишется в виде $-7x-8=0.$ Оно имеет единственное решение $x=-\dfrac{8}{7}$, соответствующее значение y равно $\dfrac{1}{6}.$

Итак, при $a=1$ исходная система уравнений имеет единственное решение $\left(-\dfrac{8}{7};\dfrac{1}{6}\right)$, и это значение a отвечает условию задачи.

При $a\neq 1$ первое уравнение системы есть квадратное уравнение с дискриминантом

$D=(2a-9)^2+4\cdot 8\cdot(2a-2)=4a^2+28a+17.$

Если $D<0,$ то первое уравнение системы, а значит, и исходная система, не имеют решений.

Если $D>0$ и $a\neq -\dfrac{1}{2},$ то первое уравнение системы имеет два решения, отличных от (-2). Следовательно, система имеет два решения. Эти значения a не удовлетворяют условию задачи.

Равенство $D=4a^2+28a+17=0$ выполняется для $a=\dfrac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}.$ Оба эти значения отличны от $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Следовательно, при $a=\dfrac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}$ первое уравнение системы, а вместе с ним и система, имеют по одному решению.

Ответ: $-1;-\dfrac{1}{2};\dfrac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}.$

3. Уравнения высшей степени

3.1. Число $x=3$ - один из корней уравнения $ax^2+bx+2=0,$ где $a<0.$ Найдите действительные корни уравнения $ax^4+bx^2+2=0.$ (МГУ, 1993)

Указание. Для корней биквадратного уравнения получаем, что либо $x^2=x_1=3,$ либо $x^2=x_2=\dfrac{2}{3a}<0.$

Ответ: $\pm\sqrt{3}.$

3.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2+2(a-2)x+a^2-4a\right)^2+$$
$$+(a+5)\left(x^2+2(a-2)x+a^2-4a\right)-a^2+8a+2=0$$

имеет а) единственное решение; б) ровно два различных решения. (МГУ, 2002)

Решение. Обозначим $y=f(x)=x^2+2(a-2)x+a^2-4a,$ тогда уравнение принимает вид $g(y)=y^2+(a+5)y-a^2+8a+2=0.$ Квадратный трехчлен $f(x)=(x+a)(x+a-4)$ принимает в одной точке значение $f(2-a)=-4,$ а остальные свои значения (большие -4) – по два раза. Поэтому уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда:

$$1)\ \begin{cases}g(-4)=0\\ y_в\le -4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16-4(a+5)-a^2+8a+2=0\\ -\dfrac{a+5}{2}\le -4\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ a=2+\sqrt{2}$,

а ровно два корня – в следующих случаях:

2) $y_1 = y_2 > -4 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} D = 0 \\ y_в > -4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+5)^2 - 4(-a^2+8a+2) = 0 \\ -\dfrac{a+5}{2} > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \; a = 1;$$

3) $y_1 < -4 < y_2 \;\Leftrightarrow\; g(-4) < 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} a > 2+\sqrt{2} \\ a < 2-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Ответ: а) $2+\sqrt{2}$; б) $\left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$.

3.3. При каких значениях параметра a уравнение $\left(x^2 - x + a^2 + 2\right)^2 = 4a^2\left(2x^2 - x + 2\right)$ имеет ровно 3 различных решения? (МГУ, 1996)

Указание. Положив $u = x^2 - x + 2$, приводим уравнение к виду $\left(u - a^2\right)^2 = 4a^2x^2$, что равносильно совокупности двух уравнений $u - a^2 = 2ax$, $u - a^2 = -2ax$, или совокупности

$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + 2 - a^2 = 0 \\ x^2 + (2a-1)x + 2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Совокупность двух квадратных уравнений может иметь три корня в трех случаях: когда одно из них имеет два корня, а другое – один, не совпадающий ни с одним из корней первого; или когда каждое из них имеет два корня, причем один из них является общим для обоих уравнений.

Ответ: $a = \pm\sqrt{2}; a = \pm\dfrac{1+\sqrt{15}}{4}$.

3.4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ имеет не менее двух корней. (МГУ, 2008)

Решение. Приведем уравнение к виду

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + (a+1)\left(x - \frac{1}{x}\right) + (2a+1) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$y^2 + (a+1)y + 2a + 3 = 0$, где функция $y = f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; -1)$ от $-\infty$ до $f(-1) = 0$.

Поэтому исходное уравнении имеет не менее двух корней на промежутке $(-\infty; -1)$ тогда и только тогда, когда полученное уравнение имеет два корня $y_{1,2} \in (-\infty; 0)$, т.е. когда

$$\begin{cases} a+1 > 0 \\ 2a+3 > 0 \\ (a+1)^2 - 4(2a+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ (a-a_1)(a-a_2) > 0 \\ a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{20} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \; a > 3 + \sqrt{20}$.

Ответ: $a > 3 + \sqrt{20}$.

3.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2) + y = 3a \\ a + 2x^3 = y^3 + (a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений. (МГУ, 2001)

Указание. Преобразуем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ ax^3 + y^3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x) \\ a(x^3-1) + a^3(1-x)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x) = 0 \\ a(x-1)\left(x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2\right) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы приводит к рассмотрению трех случаев.

а) $a = 0$. Тогда система имеет бесконечно много решений вида $(t; 0)$, где $t \in R$. Таким образом, значение $a = 0$ не является искомым.

б) $x = 1$. Система имеет решение $(1; 0)$ при любом a.

в) Третий вариант сводится к системе

$$\begin{cases} y = a(1-x) = 0 \\ x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = a(1-x) = 0 \\ \left(a^2-1\right)x^2 - \left(2a^2+1\right)x + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $x = 1$ не удовлетворяет второму уравнению ни при каком значении параметра a. Поэтому искомыми являются те и только те значения a, при которых система в) имеет не более одного решения.

У этой системы уравнений при $a^2 = 1$ есть единственное решение $(0; a)$. Если же $a^2 \neq 1$ $(a \neq 0)$, то квадратное (а с ним и система) имеет не более одного решения при условии, что дискриминант

$D = \left(2a^2+1\right)^2 - 4\left(a^2-1\right)^2 = 3\left(4a^2-1\right) \le 0$, что равносильно $0 < |a| \le \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\{-1\} \cup \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup \{1\}$.

3.7. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a-3)x^2 + (a+10)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии? (МГУ, 1993)

Указание. Корни уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда уравнение $t^2 + pt + q = 0$ имеет два различных положительных корня $t_1 < t_2$, причем числа $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$ образуют арифметическую прогрессию, т.е. при выполнении условий $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1}$, $t_1 + t_2 = p,\ \ t_1t_2 = q,$ иначе говоря, при $t_2 = 9t_1$, $t_1 = -\frac{p}{10},\ \ t_2 = -\frac{9p}{10}.$ Наконец, $\frac{9p^2}{100} = q.$ В нашем случае $p = a - 3,\ q = (a+10)^2$, так что a удовлетворяет уравнению $(a < 3)$:

$\frac{3(3-a)}{10} = |a+10|$, имеющему корни

$a_1 = -7; a_2 = -\frac{109}{7}.$

Ответ: $-7; -\frac{109}{7}.$

3.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$25x^5 + 25(a-1)x^3 - 4(a-7)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию. (МГУ, 2003)

Указание. Один из корней данного уравнения $x = 0.$ Остальные корни находятся из биквадратного уравнения

$25x^4 + 25(a-1)x^2 - 4(a-7) = 0.$ Это равнение имеет 4 различных решения тогда и только тогда, когда полученное из него заменой $t = x^2$ квадратное уравнение

$25t^2 + 25(a-1)t - 4(a-7) = 0$ имеет два различных положительных корня. Пусть $0 < t_1 < t_2$ - эти корни. Из условия следует равенство $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1}$, т.е. $t_2 = 4t_1.$ По теореме Виета $t_1 + t_2 = a - 1,\ \ t_1t_2 = \frac{4}{25}(7-a).$

Осталось решить полученную систему.

Ответ: $-2.$

3.9. Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни. (МГУ, 2003)

Указание. Если $x_1, x_2, x_3 -$ корни уравнения третьей степени, то по теореме Виета $x_1x_2x_3 = 64,$ а так как $x_2^2 = x_1x_2$, то $x_2^3 = 64.$

Ответ: $a = 7; x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 8.$

3.10. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0 \\ y = \sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения? (МГУ, 1998)

Указание. Пусть $z = x^2$. Рассмотрим уравнение $z^2 - (a-1)(a+3)z + (a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0.$ Система имеет три решения, если это уравнение имеет корни $z_1 = 0,\ z_2 > 0.$ Но тогда $(a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0$; $\ (a-1)(a+3) > 0.$

Ответ: $a = 2.$

4. Уравнения с модулем

4.1. При каких значениях a уравнение

$$2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных решения? (МГУ, 1994)

Указание. Уравнение имеет четыре различных корня относительно x, если это же уравнение как квадратное относительно $y = |x+1|$ имеет два различных положительных корня, т.е. когда $D = 1 - 8a > 0$ и $2a > 0.$

Ответ: $0 < a < \frac{1}{8}.$

4.2. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x - 9a| - 2a^2 + 35 + x = 0$$

не имеет решений? При каких значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30; 63]$? (МГУ, 2003)

Указание. Функция

$$f(x) = 2|x-9a| - 2a^2 + 35 + x = \begin{cases} -x + 18a - 2a^2 + 35, \text{ если } x \le 9a \\ 3x - 18a - 2a^2 + 35, \text{ если } x > 9a \end{cases}$$

линейно убывает на промежутке $(-\infty; 9a]$, линейно возрастает на промежутке $[9a; +\infty)$ и имеет в точке $9a$ минимальное значение $f(9a) = 9a - 2a^2 + 35.$ Уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений тогда и только тогда, когда

$$f(9a) > 0 \ \Leftrightarrow\ 2a^2 - 9a - 35 < 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{5}{2} < a < 7.$$

Уравнение $f(x)=0$ имеет решения, причем все они принадлежат отрезку $[-30;63]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -30\le 9a\le 63 \\ f(9a)\le 0 \\ f(-30)\ge 0 \\ f(63)\ge 0 \end{cases}$$

Решите самостоятельно эту систему.

Ответ: $\left(-\dfrac{5}{2};7\right)$; $\left[\dfrac{9-\sqrt{211}}{2};-\dfrac{5}{2}\right]\cup\{7\}$.

4.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-\left|3x-|x+a|\right|=9|x-1|$ имеет хотя бы один корень. (МГУ, 2005)

Решение. Запишем уравнение в виде

$$9|x-1|+\left|3x-|x+a|\right|-4x=0.$$

Непрерывная функция

$$f(x)=9|x-1|+\left|3x-|x+a|\right|-4x:$$

1) неограниченно возрастает при $x\ge 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x)=9x-9-4x\pm 3x\pm x\pm a=kx+m,$$

где $k\ge 9-4-4=1>0$;

2) убывает при $x\le 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x)=-9x+9-4x\pm 3x\pm x\pm a=kx+m,$$

где $k\ge -9-4+4=-9<0$.

Следовательно, $x=1$ - точка минимума функции f, а область ее значений есть множество $[f(1);+\infty)$. Поэтому уравнение будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(1)\le 0$.

Решим это неравенство:

$$\left|3-|1+a|\right|\le 4;$$

$$-4\le |a+1|-3\le 4;$$

$$|a+1|\le 7;$$

$$-7\le a+1\le 7;$$

$$-8\le a\le 6.$$

Ответ: $-8\le a\le 6$.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован (например, не указано явно, что функция принимает все значения из множества $[f(1);+\infty))$ или решение содержит ошибки.	3
Верно рассмотрены отдельные случаи расположения, в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рассмотрены или в них допущены ошибки).	2
Верно рассмотрены отдельные случаи, но не найдена никакая часть верного ответа.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

4.7. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение

$$|x^2-2x|+|x^2-3x+2|=x^2-4x+c$$

имеет ровно три различных решения. (МГУ, 1992)

Указание. При $x<0$ и $x\ge 2$ получаем уравнение $x^2-x+2-c=0$, имеющее один корень, принадлежащий указанному множеству при $0<c<4$, и два корня при $c\ge 4$.

При $0\le x<1$ приходим к уравнению $x^2-3x-2+c=0$, имеющему в указанном промежутке один корень при $-2<c\le 2$ не имеющему корней, принадлежащих множеству $0\le x<1$, при остальных c.

При $1\le x<2$ получаем уравнение $3x^2-9x+2+c=0$. Его корни в нужном промежутке: при $c=\dfrac{19}{4}$ - один корень и при $4<c<\dfrac{19}{4}$ - два корня, при остальных c все корн вне множества $1\le x<2$. Осталось подвести итог.

Ответ: $4;\dfrac{19}{4}$.

4.8. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение

$$2x-|x-k^2|=11k-3|x+4k|$$

а) не имеет решений; б) имеет конечное непустое множество решений. (МГУ, 1992)

Решение. Уравнение равносильно совокупности четырех систем

$$\begin{cases} x-k^2\ge 0, \\ x+4k\ge 0, \\ x=-\dfrac{k(k-1)}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-k^2\ge 0, \\ x+4k< 0, \\ x=\dfrac{k(k-23)}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-k^2< 0, \\ x+4k\ge 0, \\ x=\dfrac{k(k-1)}{6}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-k^2< 0, \\ x+4k< 0, \\ k(k+23)=0. \end{cases}$$

Первая из них имеет решение

$$\begin{cases} k=0, \\ x=0; \end{cases}$$

вторая решений не имеет, третья равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} k>0, \\ x=\dfrac{k(k-1)}{6}, \end{cases} \qquad \begin{cases} k\le -23, \\ x=\dfrac{k(k-1)}{6}; \end{cases}$$

четвертая равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} k=0, \\ x<0, \end{cases} \qquad \begin{cases} k=-23, \\ x<92. \end{cases}$$

В итоге $x=\dfrac{k(k-1)}{6}$ при $k<-23$, $x\le 92$ при $k=-23$, нет решений при $-23<k<0$, $x\le 0$ при $k=0$, $x=\dfrac{k(k-1)}{6}$ при $k>0$.

Ответ: а) $(-23;0)$; б) $(-\infty;-23)\cup(0;+\infty)$

4.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$2|x-a|+a-4+x=0$$

принадлежат отрезку $[0;4]$. (МГУ, 1984)

Решение. На множестве $x<a$ исходное уравнение можно переписать в виде $2(a-x)+a-4+x=0$, откуда $x=3a-4$. Число $3a-4$ лежит в области $x<a$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $3a-4<a$, т.е. если $a<2$.

На множестве $x\ge a$ исходное уравнение можно переписать в виде $2(x-a)+a-4+x=0$, откуда $x=\dfrac{a+4}{3}$. Число $\dfrac{a+4}{3}$ лежит в области $x\ge a$ в случае, если $\dfrac{a+4}{3}\ge a$, т.е. если $a\le 2$.

Итак, при $a<2$ исходное уравнение имеет два решения $x_1=3a-4$ и $x_2=\dfrac{a+4}{3}$, при $a=2$ единственное решение $x=2$ и при $a>2$ решений не имеет.

Найдем теперь все значения $a<2$, такие, что $3a-4$ и $\dfrac{a+4}{3}$ удовлетворяют условиям $0\le 3a-4\le 4$ и $0\le\dfrac{a+4}{3}\le 4$. Решая эти неравенства получаем, что при $\dfrac{4}{3}\le a<2$ оба корня принадлежат отрезку $[0;4]$. При $a=2$ корень $x=2$ также принадлежит отрезку $[0;4]$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}\le a\le 2$.

4.10. При каких значениях b уравнение $x^2-(4b-2)\cdot|x|+3b^2-2b=0$ имеет два различных решения?

Решение. Пусть $|x|=t$, где $t\ge 0$. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях b квадратное уравнение $t^2-(4b-2)t+3b^2-2b=0$ имеет один положительный корень?

По теореме, обратной теореме Виета найдем корни квадратного уравнения $t_1=b$, $t_2=3b-2$.

Возможны три случая.

1) $\begin{cases} t_1>0 \\ t_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ 3b-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<b<\dfrac{2}{3}.$

2) $\begin{cases} t_1<0 \\ t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<0 \\ 3b-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ Нет решений.

3) $\begin{cases} t_1=t_2 \\ t_1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3b-2 \\ b>0 \end{cases} \Leftrightarrow b=1.$

Ответ: $0<b<\dfrac{2}{3}$; $b=1$.

4.11. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$$

имеет единственный корень.

Решение. 1) Пусть $1-ax\ge 0$, тогда уравнение перепишем в виде $x(1-a+ax)=0$.

Если $a=0$, то уравнение имеет один корень $x=0$, причем выполняется условие $1-ax\ge 0$.

Если $a\ne 0$, то уравнение имеет два корня $x=0$ или $x=\dfrac{a-1}{a}$. Подставим значение второго корня в неравенство $1-ax\ge 0$, получим $a\le 2$.

Корни совпадают при $a=1$.

Таким образом, в первом случае исходное уравнение имеет единственный корень при

$a=0$ или $a=1$; два корня – при $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2]$; не имеет решений при $a>2$.

2) Пусть $1-ax<0$, тогда уравнение примет вид $ax^2+(1-3a)x+2=0$. Чтобы исходное уравнение имело единственный корень (в совокупности из двух случаев), во втором случае достаточно проверить значения $a=0$, $a=1$ и $a>2$.

Значение $a=0$ не удовлетворяет условию $1-ax<0$, значит, удовлетворяет условию задачи. При $a=1$ получаем квадратное уравнение $x^2-2x+2=0$, которое не имеет корней. Значит, $a=1$ также удовлетворяет условию задачи.

Квадратное уравнение $ax^2+(1-3a)x+2=0$ имеет дискриминант $D=9a^2-14a+1$. Функция $f(a)=9a^2-14a+1$ при $a>2$ возрастает и принимает положительные значения. Значит, исходное уравнение при $a>2$ имеет два корня.

Ответ: 0; 1.

4.12. Сколько решений в зависимости от параметра *а* имеет уравнение $|x+2|=ax+1$?

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x+2\ge 0$, т.е. $x\ge -2$. Тогда данное уравнение принимает вид: $x+2=ax+1$, $x(1-a)=-1$. Последнее уравнение при $a=1$ решений не имеет, а при $a\ne 1$ имеет единственный корень $x=\dfrac{1}{a-1}$. Найдем те значения параметра a, при которых для корня выполняется условие $x\ge -2$:

$$\frac{1}{a-1}\ge -2 \Leftrightarrow \frac{2a-1}{a-1}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le 0{,}5 \\ a>1. \end{array}\right.$$

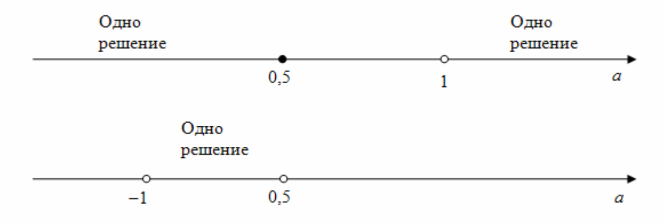
Следовательно, в первом случае исходное уравнение имеет одно решение при всех значениях $a\in(-\infty;0{,}5]\cup(1;+\infty)$ и не имеет решений при $a\in(0{,}5;1]$.

2) Если $x<-2$, то будем иметь уравнение $-x-2=ax+1$ или $x(1+a)=-3$. При $a=-1$ последнее уравнение не имеет корней, а при $a\ne -1$ - единственное решение $x=-\dfrac{3}{1+a}$, которое должно удовлетворять условию $x<-2$:

$$-\frac{3}{1+a}<-2 \Leftrightarrow \frac{2a-1}{a+1}<0 \Leftrightarrow -1<a<0{,}5.$$

Таким образом, во втором случае заданное уравнение при всех значениях $a\in(-1;0{,}5)$ имеет одно решение, а при $a\in(-\infty;-1]\cup[0{,}5;+\infty)$ решений не имеет.

Сравнивая результаты, найденные в двух случаях, получаем ответ.



Ответ: если $a\in(0{,}5;1]$, то нет решений; если $a\in(-\infty;-1]\cup\{0.5\}\cup(1;+\infty)$ - одно решение; при $a\in(-1;0.5)$ - два решения.

4.13. При каких значениях параметра a уравнение $x+2=a|x-1|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Решение. При $x\ge 1$ исходное уравнение принимает вид $x+2=ax-a$, или $(a-1)x=a+2$. Это уравнение не имеет корней при $a=1$, а при $a\ne 1$ получаем $x=\dfrac{a+2}{a-1}$.

Выясним, при каких значениях a выполняется неравенство

$$\frac{a+2}{a-1}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{3}{a-1}\ge 0 \Leftrightarrow a>1.$$

Итак, на множестве $[1;+\infty)$ значений переменного x исходное уравнение при $a\le 1$ не имеет решений; при $a>1$ имеет единственное решение $x=\dfrac{a+2}{a-1}$.

Если $x<1$, то заданное уравнение принимает вид $x+2=a-ax$, или $(a+1)x=a-2$. Это уравнение не имеет решений при $a=-1$, а при $a\ne -1$ получаем $x=\dfrac{a-2}{a+1}$. Проверяем условие $x<1$: $\dfrac{a-2}{a+1}<1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{a+1}>0 \Leftrightarrow a>-1$. Таким образом, на множестве $(-\infty;1)$ значений переменного x исходное уравнение при $a\le -1$ не имеет решений; при $a>-1$ имеет единственное решение $x=\dfrac{a-2}{a+1}$.

Рассматривая в целом результаты двух случаев, получаем, что исходное уравнение при $a\le -1$ не имеет решений; при $-1<a\le 1$ имеет

единственное решение $x=\dfrac{a-2}{a+1}$; при $a>1$ имеет два решения $x=\dfrac{a+2}{a-1}$ и $x=\dfrac{a-2}{a+1}$.

Ответ: при $-1<a\le 1$ уравнение имеет единственное решение, $x=\dfrac{a-2}{a+1}$.

5. Дробно-рациональные уравнения

5.1. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2}{x^2-6x+5}=0$ имеет единственное решение?

Решение. При условии $x\ne 1$ и $x\ne 5$ имеем $x_1=a+2$ и $x_2=2a-1$ (обратная теорема Виета). Для выполнения условия задачи необходимо рассмотреть пять случаев.

1) $\begin{cases} a+2\ne 1\\ a+2\ne 5\\ 2a-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \quad a=1$

2) $\begin{cases} a+2\ne 1\\ a+2\ne 5\\ 2a-1=5\end{cases}$ Нет решений.

3) $\begin{cases} 2a-1\ne 1\\ 2a-1\ne 5\\ a+2=1\end{cases} \Leftrightarrow \quad a=-1$

4) $\begin{cases} 2a-1\ne 1\\ 2a-1\ne 5\\ a+2=5\end{cases}$ Нет решений.

5) $\begin{cases} a+2\ne 1\\ a+2\ne 5\\ 2a-1=a+2\end{cases}$ Нет решений.

Ответ: $a=1$ или $a=-1$.

6. Иррациональные уравнения

6.1. При каких значениях b уравнение $\sqrt{x+b}=x+3$ имеет единственное решение?

Решение. Имеем

$$\sqrt{x+b}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+b=x^2+6x+9,\\ x+3\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+5x+9-b=0,\\ x\ge -3.\end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2+5x+9-b=0$ имеет дискриминант $D=4b-11$.

1) $D=0$ при $b=2{,}75$. В этом случае квадратное уравнение $x^2+5x+6{,}25=0$ имеет один корень $x=-2{,}5$, который удовлетворяет условию $x\ge -3$.

2) Пусть $D>0$, т.е. $b>2{,}75$. Тогда квадратное уравнение имеет два действительных различных корня.

Чтобы заданное уравнение имело один корень, необходимо рассмотреть два случая.

а) Один из корней $x_1<-3$, а другой $x_2=-3$. Подставим значение $x=-3$ в квадратное уравнение, получим $b=3$. Соответствующее уравнение $x^2+5x+6=0$ имеет корни $x_1=-2$, $x_2=-3$. Для первого корня не выполняется условие $x_1<-3$.

б) В случае, когда $x_1<-3<x_2$, значение квадратного трехчлена $f(x)=x^2+5x+9-b$ при $x=-3$ отрицательно, так как $f(x)<0$ на промежутке $(x_1;x_2)$. Получаем $f(-3)=3-b<0,\quad b>3$.

Ответ: $b=2{,}75$; $b>3$.

6.2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет единственное решение?

Решение. Пусть $\sqrt{x+1}=t$, где $t\ge 0$. Отсюда $x=t^2-1$. Уравнение $\sqrt{x+1}=t_0$ имеет один корень, если $t_0\ge 0$. Получаем квадратное уравнение $t^2-t+a-1=0$, дискриминант которого равен $D=5-4a$.

Если $D=0$, т.е. $a=1{,}25$, то квадратное уравнение $t^2-t+0{,}25=0$ или $(t-0{,}5)^2=0$ имеет единственный корень $t=0{,}5>0$. Следовательно, исходное уравнение имеет один корень при $a=1{,}25$.

2) Если $D>0$, т.е. $a<1{,}25$, то квадратное уравнение имеет два корня.

а) Корни будут разных знаков при условии $t_1\cdot t_2=a-1<0$, т.е. из них только один положительный корень. Решая систему неравенств $\begin{cases} a<1{,}25\\ a-1<0,\end{cases}$ получим условие $a<1$, при котором исходное уравнение имеет один корень.

б) Хотя бы один из корней равен нулю, в этом случае $a-1=0$, $a=1$. Квадратное уравнение имеет два неотрицательных корня $t_1=0$ и $t_2=1$. Значит, исходное уравнение также имеет два корня.

Ответ: $a=1{,}25$; $a<1$.

6.3. При каких a уравнение $2x+3\sqrt{x}+2a^2-11a=0$ имеет единственное решение?

Решение. Пусть $\sqrt{x}=t,$ где $t\ge 0.$ Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение $2t^2+3t+2a^2-11a=0$ имеет один неотрицательный корень?

Возможны три случая.

1) Если квадратное уравнение имеет один корень, то он будет равен $t=-\frac{3}{4}.$ Этот корень не удовлетворяет условию задачи.

2) Корни разных знаков. Необходимое и достаточное условие: $t_1t_2<0 \Leftrightarrow 2a^2-11a<0 \Leftrightarrow 0<a<5{,}5.$

3) Один из корней равен нулю, другой – отрицательный. В этом случае необходимо выполнение условия $2a^2-11a=0.$ Отсюда $a=0$ или $a=5{,}5.$ Для этих значений один корень равен нулю, другой равен $(-1{,}5).$

Замечание. В данной задаче не потребовалось рассматривать дискриминант.

Ответ: $[0;5{,}5]$.

6.4. Для каждого значения a из промежутка $(-3;0)$ найдите число различных решений уравнения

$\left(2x^2-5ax+2a^2\right)\sqrt{x-\frac{2}{a}}=0$. (МГУ, 2007)

Указание. Отметим, что $x=\frac{2}{a}$ - корень данного уравнения при всех $a\in(-3;0).$ Корни квадратного трехчлена $x_1=2a,$ $x_2=\frac{a}{2}$ должны удовлетворять условию $x\ge\frac{a}{2}.$ Учитывая еще возможные совпадения $x_1=x_2,$ получаем ответ.

Ответ: если $-3<a\le -2,$ то одно решение; если $-2<a\le -1,$ то два решения; если $-1<a<0,$ то три решения.

6.5. (2010) При всех a решите уравнение

$$x-\sqrt{a-x^2}=1.$$

Решение. Уравнение $x-1=\sqrt{a-x^2}$ равносильно системе

$$\begin{cases}(x-1)^2=a-x^2\\ x\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-2x+1-a=0\\ x\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{D}{4}=2a-1\ge 0\\ x=\frac{1\pm\sqrt{2a-1}}{2}\\ x\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\ge 0{,}5\\ \left[\begin{array}{l}\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\ge 1\\ \frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}\ge 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a\ge 0{,}5\\ \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow a\ge 1 \text{ (один корень)}$$

Отсюда следует, что при $a<1$ исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: если $a<1$, то решений нет; если $a\ge 1$, то $x=\frac{\sqrt{2a-1}+1}{2}$.

7. Показательные уравнения

7.1. При каких значениях параметра a уравнение $4^x-(5a-3)2^x+4a^2-3a=0$ имеет единственное решение?

Решение. Пусть $2^x=t,$ где $t>0.$ Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение $t^2-(5a-3)t+4a^2-3a=0$ имеет один положительный корень? По теореме, обратной теореме Виета найдем корни квадратного уравнения $t_1=a,$ $t_2=4a-3.$

Возможны следующие случаи.

1) $\begin{cases}t_1>0\\ t_2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ 4a-3<0\end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{3}{4}.$

2) $\begin{cases}t_1<0\\ t_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<0\\ 4a-3>0\end{cases} \Leftrightarrow$ Нет решений.

3) $\begin{cases}t_1=t_2\\ t_1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=4a-3\\ a>0\end{cases} \Leftrightarrow a=1.$

4) Один из корней равен нулю, другой – положительный. В этом случае

$$\begin{cases}t_1t_2=0\\ t_1+t_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a^2-3a=0\\ 5a-3>0\end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $0<a\le\frac{3}{4};$ $a=1.$

7.2. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)\cdot 4^x + (2a-3)\cdot 6^x = (3a-4)\cdot 9^x$ имеет единственное решение? (МГУ, 2005)

Указание. Перейдем к уравнению $(3a-4)\cdot t^2 - (2a-3)\cdot t - (a-1) = 0$, где $2^x = t > 0$. Зависимость t от x строго монотонна, поэтому каждому $t > 0$ соответствует ровно одно значение x. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение имеет один положительный корень?

Ответ: $(-\infty;1] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right)$.

7.3. Найдите все значениях параметра b, при которых уравнение $9^x + (b^2+6)\cdot 3^x - b^2 + 16 = 0$ не имеет решения. (МГУ, 1993)

Указание. Задача сводится к определению всех b, при которых квадратное уравнение $t^2 + (b^2+6)\cdot t - b^2 + 16 = 0$ не имеет положительных корней.

Ответ: $[-4;4]$.

7.4. При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x - 3\cdot 2^{3x+1} + 2\cdot 4^{x+1} - (4-4a)\cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет три различных корня? (МГУ, 2007)

Указание. Пусть $2^x = t$ $(t>0)$, тогда данное уравнение приводится к виду

$$t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2(a-1)t - (a-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (t^2-3t)^2 - (t-(a-1))^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (t^2-2t-a+1)(t^2-4t+a-1) = 0.$$

Задача сводится к нахождению трех положительных различных корней из двух квадратных уравнений. Самостоятельно рассмотрите возможные случаи.

Ответ: $(0;1)\cup(1;4)\cup(4;5)$.

7.5. При каждом значении параметра a решите уравнение

$4^x - 2a(a+1)\cdot 2^{x-1} + a^3 = 0$. (МГУ, 1985)

Решение. Обозначив 2^x через y, перепишем исходное уравнение в виде $y^2 - a(a+1)\cdot y + a^3 = 0$. Это уравнение имеет два корня $y_1 = a^2$ и $y_2 = a$. Равенство корней достигается при $a=0$ или $a=1$.

При $a=0$ получаем $y_1 = y_2 = 0$, и уравнение $2^x = 0$, которое не имеет решений.

При $a=1$ получаем $y_1 = y_2 = 1$, и уравнение $2^x = 1$, которое имеет единственное решение $x = 0$.

Если $a \ne 0,\ a \ne 1$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $2^x = a^2$ и $2^x = a$. При $a<0$ второе уравнение решений не имеет, а первое уравнение имеет решение $2\log_2|a|$. При $a>0,\ a\ne 1$ первое уравнение имеет решение $x_1 = 2\log_2 a$, второе уравнение - $x_2 = \log_2 a$.

Ответ: при $a=0$ решений нет; при $a<0$ единственное решение $2\log_2|a|$; при $a=1$ единственное решение 0; при $a>0,\ a\ne 1$ два решения $\log_2 a,\ 2\log_2 a$.

8. Логарифмические уравнения

8.1. При каких значениях a уравнение $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ имеет четыре различных корня?

Решение. Пусть $|\log_3 x| = t$, где $t \ge 0$. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение $2t^2 - t + a = 0$ имеет два различных положительных корня?

Возможен один случай.

$$\begin{cases} D>0 \\ t_1t_2>0 \\ t_1+t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-8a>0 \\ \frac{a}{2}>0 \\ \frac{1}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0<a<\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{8}\right)$.

8.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_5(25^x - \log_5 a) = x$ имеет единственное решение. (МФТИ, 2004)

Решение. Обозначим $\log_5 a = q,\ 5^x = t > 0$. Тогда получаем $t^2 - t - q = 0$. Исходное уравнение имеет единственное решение в двух случаях.

1) Если $D = 1+4q = 0$, т.е. $q = -\frac{1}{4},\ a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $t = \frac{1}{2}$.

2) Если $D = 1+4q > 0$ и квадратное уравнение имеет один положительный корень. При $q > -\frac{1}{4}$ это уравнение имеет два различных корня, причем при $-\frac{1}{4} < q < 0$ оба корня

положительны, так как их сумма равна 1, а произведение равно $-q>0$. Если же $q\ge 0$, то только один корень положителен.
Следовательно, $\log_5 a\ge 0$, т.е. $a\ge 1$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{5}};[1;+\infty)$..

8.3. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}\log_3(2-x-y)+2=\log_3(17-8x-10y)\\(x-a)^2+x=y+a+6\end{cases}$$

имеет ровно два решения. (МФТИ, 2002)

Указание. Из первого уравнения получаем, что $y=x-1$, причем $x<\frac{3}{2}$. После подстановки во второе уравнение получаем, что $x^2-2ax+a^2-a-5=0$. Последнее уравнение должно иметь 2 корня, меньших $\frac{3}{2}$.

Ответ: $-5<a<2-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. Тригонометрические уравнения

9.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a^2-6a+9\right)\left(2+2\sin x-\cos^2 x\right)+$$
$$+\left(12a-18-2a^2\right)\cdot(1+\sin x)+a+3=0$$

не имеет решений. (МГУ, 1989)

Решение. Введя обозначение $\sin x=t$, исходное уравнение перепишем в виде

$(a-3)^2t^2=a^2-7a+6.$ (*)

Теперь задача может быть переформулирована так: найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение (*) не имеет корней, принадлежащих промежутку $-1\le t\le 1$.
При $a=3$ уравнение (*) принимает вид $0=-6$, и, следовательно, при $a=3$ исходное уравнение не имеет решений.
При $a\ne 3$ уравнение (*) может быть переписано в виде

$$t^2=\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2},$$

откуда искомые значения параметра a есть решения совокупности неравенств

$\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2}>1$ и $\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2}<0$. (**)

Первое из этих неравенств равносильно неравенству
$\frac{a+3}{(a-3)^2}<0$. Множество его решений есть $a<-3$. Так как $a^2-7a+6=(a-1)(a-6)$ и на множестве $a\ne 3$ имеем $(a-3)^2>0$, то множество решений второго неравенства совокупности (**) при условии $a\ne 3$ есть $1<a<3$ и $3<a<6$.
Объединяя найденные значения a, получаем ответ.

Ответ: $a<-3;\ 1<a<6$.

9.2. Для каждого значения a найдите все решения уравнения

$\cos 2x+2\sin^2(x+a)+2-\sin a=0$,

принадлежащие промежутку $\pi\le x\le 2\pi$..
(МГУ, 2001)

Указание. Приведите уравнение к виду $\cos 2x-\cos 2(x+a)=\sin a-3$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2x=-1\\\cos 2(x+a)=1\\\sin a=1\end{cases}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$ при $a=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; при других a решений нет.

9.3. При каких значениях a уравнение $\cos 2x+2\cos x-2a^2-2a+1=0$ имеет ровно одно решение на промежутке $0\le x<2\pi$..
(МГУ, 1999)

Указание. Уравнение равносильно совокупности $\cos x=a$, $\cos x=-a-1$.

Ответ: $a=-2;\ a=1$.

9.4. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\sin x-\log_4 a\right)(\sin x-2+2a)=0$ имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$?
(МГУ, 2003)

Указание. Поскольку функция $y=\sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ каждое значение $y\ne -1$ принимает в двух точках, а $y=-1$ лишь при $x=\frac{3\pi}{2}$, то исходное уравнение имеет 2 корня в следующих случаях:

$-1<\log_4 a=2-2a\le 1$, т.е. при $a=1$;

$-1<\log_4 a\le 1,\ |2-2a|>1$;

$-1<2-2a\le 1,\ |\log_4 a|>1$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\{1\}\cup\left(\frac{3}{2};4\right]$

9.5. Найдите все значения параметра q, при которых уравнение $\sin^2 x+(q-2)^2\sin x+q(q-2)(q-3)=0$ имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно три корня. (МГУ, 1991)

Указание. Выполнив замену $y=\sin x$, приведем данное уравнение к квадратному. Пусть его корни y_1 и y_2. Исходное уравнение может иметь 3 корня на отрезке $[0;2\pi]$ лишь в следующих случаях:

1) когда оно сводится к уравнению $\sin x=0$,
2) когда $\sin x=1$ и есть еще два корня уравнения $\sin x=y_2$,
3) когда $\sin x=-1$ и есть еще два корня уравнения $\sin x=y_2$.

Ответ: $0;2;\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

9.6. Для каждого значения a найдите число решений уравнения $a\,tgx+\cos 2x=1$, принадлежащих промежутку $[0;2\pi]$. (МГУ, 1996)

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x(\sin 2x-a)=0\\ \cos x\neq 0,\ 0\le x\le 2\pi.\end{cases}$$

Ответ: 3 решения при $a<-1,\ a=0,\ a>1$; 5 решений при $a=\pm1$; 7 решений при $-1<a<1,\ a\neq 0$.

10. Уравнения смешанного типа

10.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x)-\lg(x-a)}=0$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2002)

Решение. Имеем

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x)-\lg(x-a)}=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^3=1\\ x^2=16\end{array}\right.\\ 15a-x>0\\ x-a>0\\ 15a-x\neq x-a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\pm4\end{array}\right.\\ a<x<15a\\ x\neq 8a\end{cases}$$

Из неравенства $a<x<15a$ следует, что $x>0$ и, значит, $x\neq -4$.

Рассмотрим два случая.

1) $x=1$ - корень уравнения при условиях

$$\begin{cases}a<1<15a\\ 1\neq 8a\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\frac{1}{15}<a<1\\ a\neq\frac{1}{8}\end{cases}$$

2) $x=4$ - корень уравнения при условиях

$$\begin{cases}a<4<15a\\ 4\neq 8a\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\frac{4}{15}<a<4\\ a\neq\frac{1}{2}\end{cases}$$

Поэтому уравнение имеет единственный корень либо при $\begin{cases}\frac{1}{15}<a\le\frac{4}{15}\\ a\neq\frac{1}{8}\end{cases}$ либо при $1\le a<4$, либо при $a=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{15};\frac{1}{8}\right)\cup\left(\frac{1}{8};\frac{4}{15}\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[1;4)$.

10.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=1$ имеет ровно восемь различных решений.

Решение. Преобразуем уравнение

$$\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n, n\in Z\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}a^2-x^2=(2\pi n)^2\\ n\ge 0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\pm\sqrt{a^2-(2\pi n)^2}\\ n=0,1,2,\dots\end{cases}$$

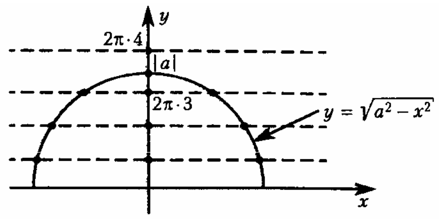
Каждому положительному значению подкоренного выражения соответствуют ровно два значения неизвестной, нулевому – одно, а отрицательному – ни одного. Поэтому для того чтобы решений было ровно 8, необходимо и достаточно, чтобы подкоренное выражение было положительным при $n = 0,1,2,3$ и отрицательным при $n = 4,5,6,...$

Таким образом, получим систему неравенств

$$\begin{cases} a^2 - (2\pi \cdot 3)^2 > 0 \\ a^2 - (2\pi \cdot 4)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 2\pi \cdot 3 \\ |a| < 2\pi \cdot 4 \end{cases}$$

Отсюда получаем значения $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

Замечание. Для решения задачи можно к уравнению $\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n, n \in Z$ применить графическую иллюстрацию. Функция $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ задает верхнюю полуокружность с центром в начале координат и переменным радиусом $|a|$. Функция $y = 2\pi n$ задает семейство горизонтальных прямых. Затем необходимо указать границы для радиуса полуокружности, обеспечивая нужное количество точек их пересечения.



Ответ: $(-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ обоснован и состоит из верных промежутков, но дополнительно содержит хотя бы один из их концов.	3
Решение опирается на верное рассуждение, в котором только не учтены возможные отрицательные значения неизвестной или имеются другие существенные изъяны. В результате, возможно, получен неверный ответ.	2
Ответ неверен или не получен, но найдено верное выражение для неизвестной или ее квадрата.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

10.6. При каких значениях параметра a уравнение $(1 + \sin(3ax))\sqrt{5\pi x - x^2} = 0$ имеет ровно 5 различных корней? (МГУ, 2004)

Указание. Поскольку $x = 0$ и $x = 5\pi$ - корни данного уравнения, необходимо выяснить, при каких a уравнение $\sin 3ax + 1 = 0$ имеет ровно 3 корня на интервале $(0;5\pi)$. Рассмотрите отдельно случаи $a > 0$ и $a < 0$.

Ответ: $\left[-\frac{13}{30}; -\frac{3}{10}\right) \cup \left(\frac{11}{30}; \frac{1}{2}\right]$.

10.7. При каких значениях a, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, уравнение $\sqrt{2\sin(x-a) + \sqrt{3}} = \cos 6x - 1$ имеет решения? (МГУ, 1993)

Указание. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\sin(x-a) + \sqrt{3} = 0 \\ \cos 6x = 1 \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.

10.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня. (МГУ, 1995)

Указание. Уравнение равносильно такому: $\left(x^2 - 6|x| - a + 6\right)^2 + 1 = \cos\frac{18\pi}{a}$. Но это значит, что $x^2 - 6|x| - a + 6 = 0$, а $\cos\frac{18\pi}{a} = 1$. Уравнение $x^2 - 6|x| + 6 = a$ имеет в точности 2 корня при $a = -3$ или при $a > 6$. Из второго уравнения следует, что $a = \frac{9}{n}$, где $n \in Z$, после чего получаем ответ.

Ответ: $a = -3$ и $a = 9$.

10.9. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$x^2 + 4x + 6 - 4a(x-a) - \cos(x+2) = \\ = 8a + \cos(x - 4a + 2).$$ (МГУ, 2008)

Решение. После замены $x + 2 = t$ уравнение принимает вид

$t^2 - 4at + 4a^2 + 2 = \cos t + \cos(t - 4a) \Leftrightarrow$

$(t - 2a)^2 + 2 = 2\cos(t - 2a)\cos 2a$. Левая часть последнего уравнения не меньше 2, а правая – не превышает 2, поэтому решение существует тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} t-2a=0 \\ \cos(t-2a)\cos 2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2a \\ \cos 2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t=2a \\ a=\pi n, n\in Z \end{cases}$$

Теперь возвращаемся к исходной переменной, получаем ответ.

Ответ: если $a=\pi n$, то $x=2\pi n-2$, $n\in Z$.

11. Линейные неравенства

11.1. Найдите все значения параметра $p\in[-4;4]$, при которых неравенство

$$(p-2)((x+1)(p-3)+2x)>0$$

выполняется при любых $x\geq 0$. (МГУ, 2004)

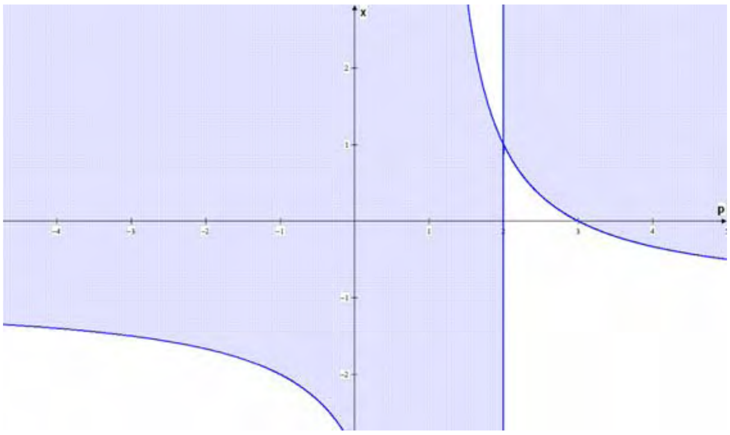
Решение. Если $p>2$, то получается линейное неравенство $(p-1)x+p-3>0$. По условию оно должно выполняться при любых $x\geq 0$, в частности при $x=0$. Отсюда $p>3$. С другой стороны при $p>3$ неравенство действительно справедливо для всех $x\geq 0$. Таким образом, $3<p\leq 4$.

Очевидно, что при $p=2$ исходное неравенство не выполнено ни для каких значений x.

При $p<2$ неравенство принимает вид $(p-1)x+p-3<0$. Если $p>1$, то линейная функция $f(x)=(p-1)x+p-3$ возрастает, поэтому для всех $x\geq 0$ неравенство $f(x)<0$ выполняться не может. Если $p=1$, то $f(x)=p-3=-2<0$ для всех x, в том числе и для $x\geq 0$.

Наконец, для $p<1$ линейная функция $f(x)=(p-1)x+p-3$ убывает и при $x=0$ принимает значение $f(0)=p-3<0$. Значит, при $x\geq 0$ неравенство тем более выполняется.

Второе решение. Используя метод областей, найдем графические решения данного неравенства в системе координат pOx. Линии (прямая и гипербола), ограничивающие области решения (выделены цветом), необходимо изобразить пунктиром.



Если проводить прямые, параллельные оси x, то все значения $x\geq 0$ в области решений возможны при значениях $p\in[-4;1]\cup(3;4]$.

Замечание. Метод областей позволяет увидеть, что без ограничения $p\in[-4;4]$ условию задачи удовлетворяют значения $p\in(-\infty;1]\cup(3;+\infty)$.

Ответ: $[-4;1]\cup(3;4]$.

12. Квадратные неравенства

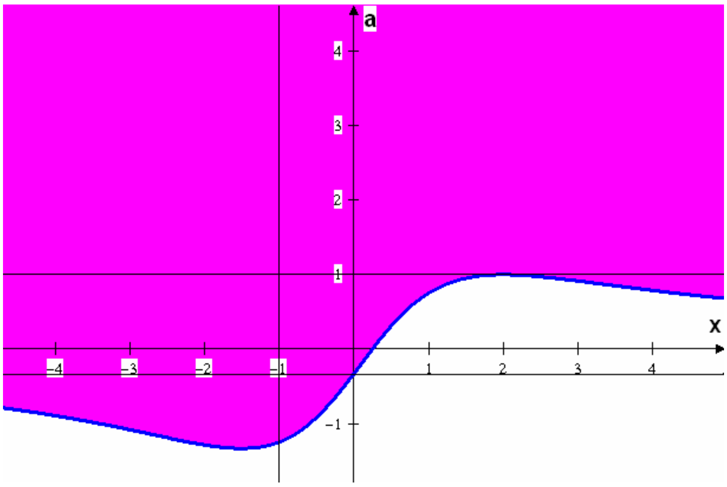
12.1. (2010) Найдите все значения a, для каждого из которых неравенство

$$ax^2-4x+3a+1>0$$

а) выполняется для всех x;
б) выполняется для всех $x>0$;
в) выполняется для всех $x<0$;
г) выполняется для всех $-1<x<0$.

Решение. Перепишем неравенство следующим образом $a(x^2+3)-4x+1>0$; $a>\dfrac{4x-1}{x^2+3}$.

Исследуя функцию $a(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$ с помощью производной $a'(x)=\dfrac{-4x^2+2x+12}{(x^2+3)^2}$, находим при $x=0$ максимум 1, при $x=-1{,}5$ минимум $\left(-\dfrac{4}{3}\right)$. Функция возрастает на интервале $(-1{,}5;0)$, убывает на интервалах $(-\infty;-1{,}5)$ и $(0;+\infty)$. Кроме того определяем асимптоту $a=0$. Выделим цветом графическое решение неравенства $a(x)>\dfrac{4x-1}{x^2+3}$.



Будем проводить прямые (параллельные оси x), которые соответствуют некоторым значениям a. При этом необходимо рассматривать заштрихованную область.

а) Из рисунка видим, что исходное неравенство выполняется для всех x при $a > 1$.

б) Аналогично неравенство выполняется для всех $x > 0$ при $a > 1$.

в) Неравенство выполняется для всех $x < 0$ при $a \ge 0$.

г) На интервале $(-1;0)$ функция $a(x)$ возрастает, причем $a(0) = -\frac{1}{3}$. Поэтому исходное неравенство выполняется для всех $-1 < x < 0$ при $a \ge -\frac{1}{3}$.

Ответ: а) $a > 1$; б) $a > 1$; в) $a \ge 0$; г) $a \ge -\frac{1}{3}$

12.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых из неравенств $0 \le x \le 1$ следует неравенство

$\left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2 \le 0$.

Решение. Квадратный трехчлен $a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)$.

1) Пусть $a = 1$, тогда получаем линейное неравенство $-6x - 2 \le 0$, которое имеет решения $x \ge -\frac{1}{3}$. Промежуток $[0;1]$ содержится в этом множестве решений.

2) Пусть $a = -2$, тогда имеем неравенство $-3x - 2 \le 0$, решениями которого являются значения $x \ge -\frac{2}{3}$. Промежуток $[0;1]$ содержится в этом множестве решений.

3) Если $(a-1)(a+2) \ne 0$, то имеем квадратное неравенство. Так как дискриминант $D = (a+5)^2 + 8(a^2 + a - 2) = 9(a+1)^2$, то квадратный трехчлен $\left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2$ имеет корни

$$x = \frac{a+5-3(a+1)}{2(a-1)(a+2)} = -\frac{1}{a+2} \quad \text{или}$$

$$x = \frac{a+5+3(a+1)}{2(a-1)(a+2)} = \frac{2}{a-1}.$$

а) Пусть $(a-1)(a+2) > 0$, тогда ветви параболы $f(x) = \left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2$ направлены вверх и решениями данного неравенства является промежуток вида $\left[-\frac{1}{a+2}; \frac{2}{a-1}\right]$ или $\left[\frac{2}{a-1}; -\frac{1}{a+2}\right]$. Возможное решение неравенства в виде отдельного числа $x = \frac{2}{a-1} = -\frac{1}{a+2}$ не удовлетворяет условию задачи. Таким образом, в этом случае необходимо и достаточно поставить условия

$$\begin{cases} (a-1)(a+2) > 0 \\ f(0) \le 0 \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -2 \\ a > 1 \end{array}\right. \\ -2 \le 0 \\ a^2 - 9 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} -3 \le a < -2 \\ 1 < a \le 3 \end{array}\right.$$

б) Пусть $(a-1)(a+2) < 0$, тогда ветви параболы $f(x) = \left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2$ направлены вниз и решениями данного неравенства являются два разнонаправленных луча с началом в точках $\frac{2}{a-1}$ и $-\frac{1}{a+2}$ соответственно. Возможное решение неравенства в виде прямой в случае $x = \frac{2}{a-1} = -\frac{1}{a+2}$ (это будет при $a = -1$) удовлетворяет условию задачи. Таким образом, в этом случае необходимо и достаточно поставить условия

$$\left[\begin{cases}(a-1)(a+2)<0\\ f(0)\le 0\\ x_в<0\end{cases}\right.\atop\begin{cases}(a-1)(a+2)<0\\ f(1)\le 0\\ x_в>1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases}-2<a<1\\ -2\le 0\\ \dfrac{a+5}{(a-1)(a+2)}<0\end{cases}\right.\atop\begin{cases}-2<a<1\\ a^2-9\le 0\\ \dfrac{a+5}{(a-1)(a+2)}>1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases}-2<a<1\\ a+5>0\end{cases}\right.\atop\begin{cases}-2<a<1\\ -3\le a\le 3\\ a+5<(a-1)(a+2)\end{cases} \Leftrightarrow\ -2<a<1.$$

Собирая все значения a, получаем ответ.

Ответ: $[-3;3]$.

12.3. При каких целых a неравенство $2\log_{\frac{1}{2}} a-3+2x\log_{\frac{1}{2}} a-x^2<0$ верно для любого значения x? (МГУ, 2005)

Указание. Квадратный трехчлен относительно x отрицателен при всех x тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен.

Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

12.4. Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases}-x^2+12x-a\ge 0\\ x\le 2\end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x? (МГУ, 1994)

Указание. Промежуток между корнями квадратного трехчлена $f(x)=-x^2+12x-a$ имеет общие точки с лучом $x\le 2$ тогда и только тогда, когда $f(2)\ge 0$.

Ответ: $a\le 20$.

12.5. Найдите такие значения x, при которых неравенство

$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$. (МГУ, 1994)

Указание. Перепишем неравенство как линейное относительно переменной a

$f(a)=(-2x^2+13x-13)a+(4x^2-27x+3)>0$.

Данное неравенство выполняется при всех $1<a<3$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}f(1)\ge 0\\ f(3)\ge 0\end{cases}$$

Осталось решить полученную систему.

Ответ: $\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5;3+\sqrt{6}\right]$.

12.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$ содержит хотя бы одно целое число. (МГУ, 2007)

Указание. Необходимым и достаточным условием существования решений квадратного относительно a неравенства

$4a^2+(6x-24)a+6x^2-3x+35<0$ является

$\dfrac{D}{4}=(3x-12)^2-4(6x^2-3x+35)>0,$ т.е.

$-2-\dfrac{8}{\sqrt{15}}<x<-2+\dfrac{8}{\sqrt{15}}$. Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений x, для каждого из которых надо найти соответствующие значения параметра a.

Ответ: $(2;7)$.

12.7. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2001)

Указание. Множество решений каждого из неравенств системы может представлять собой отрезок, объединение двух непересекающихся лучей (с началом), прямую, точку или пустое множество. Поэтому система может иметь единственное решение только в следующих случаях: а) решением одного из неравенств является ровно одна точка; б) множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, т.е. существует решение системы уравнений

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0\end{cases}$$

Ответ: $-\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{3}$.

12.8. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases}x^2-x+a\le 0\\ x^2+2x-6a\le 0\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МФТИ, 2004)

Указание. Данная система *может* иметь единственное решение лишь в трех случаях:

$D_1 = 1 + 4a = 0,\ \ \frac{D_2}{4} = 1 + 6a = 0,$ уравнения $x^2 - x + a = 0$ и $x^2 + 2x - 6a = 0$ имеют общий корень. Осталось найти значения a и сделать проверку.

Ответ: $\frac{1}{4};0$.

12.10. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \le k^2 + 10k + 20 \\ 5x^2 + 5y^2 - 2kx + 4ky \le 5 - k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение? (МГУ, 2001)

Указание. Первое неравенство задает на координатной плоскости Oxy круг с центром $(1;-2)$ и радиусом $|k+5|$, второе – круг с центром $\left(\frac{k}{5};-\frac{2k}{5}\right)$ и радиусом 1 (оба круга с границей). Система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих кругов не превосходит суммы радиусов, т.е. когда

$\sqrt{\left(1-\frac{k}{5}\right)^2 + \left(-2+\frac{2k}{5}\right)^2} \le |k+5| + 1.$ Осталось решить полученное неравенство.

Ответ: $Z \setminus \{-11;-10;...;-4;-3\}$.

12.11. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \ge 0 \\ ax \ge 4 \end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Решение. 1) Пусть $a > 0$. В этом случае данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} (x-a)\left(x - \frac{2a+3}{a}\right) \ge 0 \\ x \ge \frac{4}{a}. \end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x \ge \frac{4}{a}$ должно выполняться неравенство:

$f(x) = (x-a)\left(x - \frac{2a+3}{a}\right) < 0.$ Однако это неверно, так как если x больше всех чисел $\frac{4}{a}$, a, $\frac{2a+3}{a}$, то $f(x) > 0$.

2) Пусть $a < 0$. В этом случае данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} (x-a)\left(x - \frac{2a+3}{a}\right) \le 0 \\ x \le \frac{4}{a}. \end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x \le \frac{4}{a}$ должно выполняться неравенство:

$f(x) = (x-a)\left(x - \frac{2a+3}{a}\right) > 0.$ Это будет тогда и только тогда, когда $\frac{4}{a} < a$ и $\frac{4}{a} < \frac{2a+3}{a}$, или (так как $a < 0$) $a^2 < 4$, $4 > 2a + 3$, или ($a < 0$) $-a < 2$, $a < \frac{1}{2}$, и окончательно: $-2 < a < 0$.

Наконец, условию задачи удовлетворяет и значение $a = 0$. Итак, $-2 < a \le 0$.

Ответ: $(-2;0]$.

13. Неравенства высшей степени

13.1. Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство

$$(2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + (5 + 4a - a^2) < 0$$

выполняется хотя бы при одном значении $a \in [-1;2]$. (МГУ, 1992)

Указание. Перепишем данное неравенство так:

$f(a) = a^2 + a(x^3 + 2x^2 - 4) - (2x^3 + x^2 - 6x + 5) > 0.$

Левая часть его – квадратный трехчлен относительно a. Для того чтобы квадратный трехчлен с положительным коэффициентом при a^2 принимал положительные значения хотя бы в одной точке отрезка $[-1;2]$, необходимо и достаточно, чтобы он был положителен хотя бы в одном из концов этого отрезка. Получаем совокупность неравенств для x:

$$\left[\begin{array}{l} f(-1) > 0 \\ f(2) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+2)(x-1)x < 0 \\ (x+3)(x-1) > 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-2) \cup (0;1) \cup (1;+\infty)$.

13.2. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \ge 0 \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение (МГУ, 2001)

Указание. Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-a) \ge 0 \\ x(x-3)(x-a) \le 0 \end{cases}$$

При $a \ge 3$ у системы единственное решение $x = a$. При $a < 3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $[b;3]$, где $b = \max(a, 2)$.

Ответ: $[3;+\infty)$.

14. Неравенства с модулем

14.1. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\left|\dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$ выполняется при всех x.

Решение. Приведем неравенство к виду $-3 < \dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} < 3$. Так как квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ принимает положительные значения при всех значениях x, то приходим к двойному неравенству $-3(x^2 + x + 1) < x^2 - ax + 1 < 3(x^2 + x + 1)$, затем к системе $\begin{cases} 4x^2 + (3 - a)x + 4 > 0 \\ 2x^2 + (3 + a)x + 2 > 0 \end{cases}$

Для выполнения неравенств при всех значениях x необходимо и достаточно поставить условия

$$\begin{cases} D_1 = (3 - a)^2 - 64 < 0 \\ D_2 = (3 + a)^2 - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a - 3| < 8 \\ |a + 3| < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -8 < a - 3 < 8 \\ -4 < a + 3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < a < 11 \\ -7 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < a < 1.$$

Ответ: $-5 < a < 1$.

14.2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $|x^2 - 2x + a| > 5$ не имеет решений на отрезке $[-1;2]$. (МГУ, 2000)

Указание. Условие равносильно тому, что неравенство $|x^2 - 2x + a| \le 5$ выполняется при всех $x \in [-1;2]$, а это равносильно справедливости неравенства

$(x^2 - 2x + a)^2 - 5^2 \le 0,$

$(x^2 - 2x - 5 + a)(x^2 - 2x + 5 + a) \le 0,$

$(t + a - 6)(t + a + 4) \le 0,$ где $t = (x - 1)^2$, при всех $0 \le t \le 4$.

Ответ: $[-4;2]$.

14.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 + 4|x - a| \ge a^2$ справедливо для всех действительных x. (МГУ, 1993)

Решение. При $x \ge a$ неравенство равносильно неравенству $(x - a)(x + a + 4) \ge 0$, справедливому при всех $x \ge a$ тогда и только тогда, когда $a \ge -a - 4$, т.е. при $a \ge -2$.

Аналогично, при $x < a$ приходим к неравенству $(x - a)(x + a - 4) \ge 0$, справедливому при всех $x < a$ при $a \le -a + 4$, т.е. при $a \le 2$.

Ответ: $[-2;2]$.

14.4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 + 4x + 6a \cdot |x + 2| + 9a^2 \le 0$ имеет не более одного решения. (МГУ, 1995)

Указание. После замены $|x + 2| = t$ неравенство приводится к виду $(t + 3a)^2 \le 4$, откуда $-2 - 3a \le t \le 2 - 3a$. Последнее неравенство имеет не больше одного решения лишь при $2 - 3a \le 0$.

Ответ: $a \ge \dfrac{2}{3}$.

14.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x + 1| + 2|x + a| > 3 - 2x$ выполняется для любого x.

Решение. Неравенство преобразуется к виду $f(x) > 3$, где $f(x) = |x + 1| + 2|x + a| + 2x$. Точки -1 и $-a$ разбивают числовую прямую на интервалы, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с линейной (при любом раскрытии знаков модуля). На левом интервале ($x < -1$, $x < -a$) функция принимает вид $f(x) = -x - 2a - 1$ и является убывающей. На правом интервале ($x > -1$, $x > -a$) функция принимает вид $f(x) = 5x + 2a + 1$ и является возрастающей. Это означает, что функция ограничена снизу. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей прямых. Точки -1 и $-a$ являются точками излома, поэтому в этих точках функция может принимать наименьшее значение.

Все значения функции $f(x)$ больше 3 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(-1) > 3 \\ f(-a) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|-1 + a| - 2 > 3 \\ |-a + 1| - 2a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |a - 1| > \dfrac{5}{2} \\ |a - 1| > 2a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a - 1 > 2{,}5 \\ a - 1 < -2{,}5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a - 1 > 2a + 3 \\ a - 1 < -2a - 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a>3{,}5\\ a<-1{,}5\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a<-4\\ a<-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \; a<-1{,}5.$$

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

14.8. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии $|2x+4-2a|+|x-2+a|\le 3$. (МГУ, 2005)

Решение. Пусть $y=x+a$, тогда данное неравенство принимает вид $|y-2|+2|y-2a+2|\le 3$. Раскрывая первый из модулей, запишем это неравенство в виде системы

$$\left\{\begin{array}{l}y-2\le 3-2|y-2a+2|\\ y-2\ge -3+2|y-2a+2|\end{array}\right. \text{ или}$$

$$-1+2|y-2a+2|\le y\le 5-2|y-2a+2|.$$

Отсюда следует, что переменная y не может принимать значений, выходящих за пределы отрезка $[-1;5]$. Покажем, что искомым множеством является весь этот отрезок. Достаточно убедиться, что граничные значения достигаются. Действительно, $y=-1$ получаем из равенства $-1-2a+2=0$, т.е. при $a=\dfrac{1}{2}$.

Аналогично, $y=5$ получается при $5-2a+2=0$, т.е. для $a=\dfrac{7}{2}$.

Ответ: $[-1;5]$.

14.9. (2010) Найдите все пары чисел p и q, для каждой из которых неравенство

$$|x^2+px+q|>2$$

не имеет решений на отрезке $[1;5]$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}x^2+px+q>2\\ x^2+px+q<-2.\end{array}\right.$$

Условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда выполняются условия системы

$$\left\{\begin{array}{l}f(1)\le 2\\ f(5)\le 2\\ f(x_в)\ge -2,\end{array}\right.$$

где $f(x)=x^2+px+q$ и $x_в=-\dfrac{p}{2}$ - абсцисса вершины параболы.

Рассмотрим систему неравенств.

$$\left\{\begin{array}{l}p+q\le 1\\ 5p+q\le -23\\ \dfrac{p^2}{4}-q\le 2.\end{array}\right.$$

Сложив первое и третье неравенства, получим квадратное неравенство $p^2+4p-12\le 0$, решением которого является промежуток $[-6;2]$.

Складывая второе и третье неравенства, имеем квадратное неравенство $p^2+20p+84\le 0$, решением которого является промежуток $[-14;-6]$.

Из двух полученных промежутков получаем $p=-6$. Подставим это значение p в систему неравенств и найдем $q=7$.

Проверим найденные значения, решая неравенство $|x^2-6x+7|>2$. Решения $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$ удовлетворяют условию задачи.

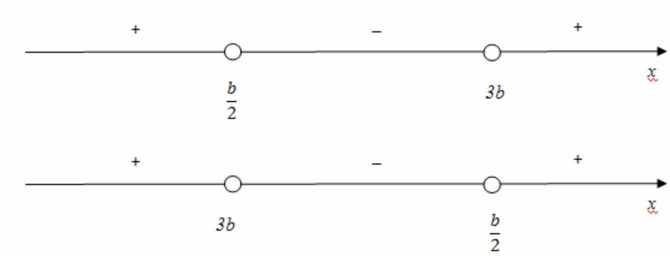
Ответ: $p=-6,\; q=7$.

15. Дробно-рациональные неравенства

15.1. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\dfrac{x-3b}{b-2x}<0$. (МГУ, 2003)

Решение. Неравенство перепишем так:

$$\frac{x-3b}{x-\frac{b}{2}}>0 \text{ или } f(x)=(x-3b)\left(x-\frac{b}{2}\right)>0.$$



Условие задачи выполняется, если для квадратичной функции имеет место

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{b}{2}\ge 3b\\ \left[\begin{array}{l}-3>\dfrac{b}{2}\\ -1<3b\end{array}\right.\end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l}\dfrac{b}{2}\le 3b\\ \left[\begin{array}{l}-3>3b\\ -1<\dfrac{b}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Отсюда получаем значения
$b \in (-\infty;-6) \cup \left(-\frac{1}{3};0\right]$ или $b \ge 0$.

Замечание. Можно было бы воспользоваться условиями расположения корней квадратного трехчлена: оба корня меньше числа (–3) или оба корня больше числа (–1), т.е.

$\begin{cases} f(-3) > 0 \\ x_в < -3 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(-1) > 0 \\ x_в > -1 \end{cases}$ где абсцисса

вершины $x_в = \dfrac{3b + \frac{b}{2}}{2} = \dfrac{7b}{4}$.

Ответ: $(-\infty;-6) \cup \left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

15.2. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a} < 0$ выполняется для всех таких x, что $1 \le x \le 2$. (МГУ, 1974)

Указание. Неравенство сводится к виду $f(x) = (x-2a-1)(x-a) < 0$ и к условиям

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(2) < 0 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{2} < a < 1$.

15.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a} \ge 0 \\ x-8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Решение. 1) При $a=1$ второе неравенство, а значит и система не имеет решений.

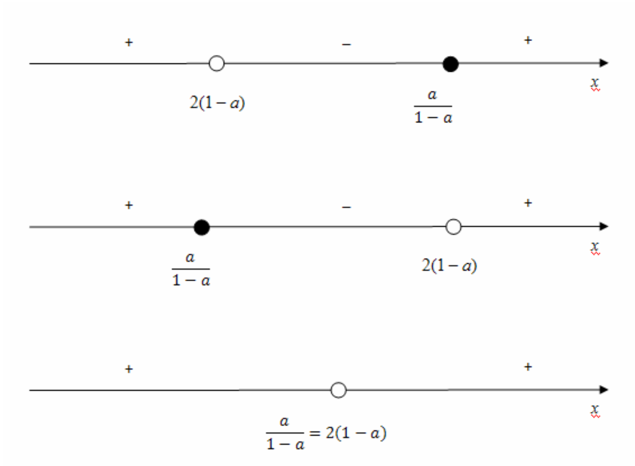
2) Пусть $a<1$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} (1-a)\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\big(x-2(1-a)\big) \ge 0 \\ x \ne 2(1-a) \\ (1-a)x > 8 \end{cases}$$ или

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\big(x-2(1-a)\big) \ge 0 \\ x \ne 2(1-a) \\ x > \dfrac{8}{1-a} \end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x > \dfrac{8}{1-a}$ должно выполняться неравенство:

$f(x) = \left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a)) < 0$. Однако это неверно, так как если x больше всех чисел $\dfrac{8}{1-a}$, $2(1-a)$, $\dfrac{a}{1-a}$, то $f(x) > 0$.



3) Пусть $a>1$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\big(x-2(1-a)\big) \le 0 \\ x \ne 2(1-a) \\ x < \dfrac{8}{1-a} \end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x < \dfrac{8}{1-a}$ должно выполняться неравенство:

$f(x) = \left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\big(x-2(1-a)\big) > 0$. Это будет тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 1 \\ \dfrac{8}{1-a} \le \dfrac{a}{1-a} \\ \dfrac{8}{1-a} \le 2(1-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 8 \ge a \\ 8 \ge 2(1-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 < a \le 8 \\ -1 \le a \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a \le 3.$$

Итак $a=1$, $1 < a \le 3$.

Ответ: $[1;3]$.

15.7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0.$$

(МГУ, 2003)

Указание. Дискриминант трехчлена, стоящего в числителе, при $a \neq \frac{1}{2}$ отрицателен, а при $a = \frac{1}{2}$ равен нулю. Знаменатель же равен $(x+2)(x-a)$. Осталось применить метод интервалов, учитывая взаимное расположение точек a и -2.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$ при $a=\frac{1}{2}$;

$(-\infty;a)\cup(-2;+\infty)$ при $a \le -2$;

$(-\infty;-2)\cup(a;+\infty)$ при $-2 < a < \frac{1}{2}$ или $a > \frac{1}{2}$.

16. Иррациональные неравенства

16.1. При каких значениях a неравенство $\left(x^2-(a+2)x-2a^2+4a\right)\sqrt{1-x} \le 0$ имеет единственное решение? (МГУ, 2000)

Указание. Данное неравенство имеет единственное решение ($x=1$) тогда и только тогда, когда наименьший корень квадратного трехчлена $x^2-(a+2)x-2a^2+4a$ не меньше 1.

Ответ: $\left[\frac{1}{2};1\right]$

16.2. Определите, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \ge x$ образуют на числовой прямой отрезок длиной $2|a|$ (МГУ, 1996)

Указание. Решая неравенство, удобно выполнить замену $y=\sqrt{x+a}$.

Ответ: $2; \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

16.3. Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;5]$ удовлетворяют неравенству

$$3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0. \text{ (МГУ, 1992)}$$

Указание. Данное неравенство преобразуется к виду

$a < \frac{5}{3}+\left(\sqrt{\frac{3}{3x+1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$. Правая часть оптимальна и равна $\frac{5}{3}$, когда выражение в скобках равно нулю, т.е. при $x=\frac{8}{3}\in[1;5]$.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$.

16.4. При всех значениях параметра b решите неравенство

$$2(b-1)\sqrt{3x+1}+1 \ge 3bx+b-3x \text{ (МГУ, 2006)}$$

Указание. Преобразуйте исходное неравенство к виду

$2(b-1)\sqrt{3x+1} \ge (b-1)(3x+1)$.

Ответ: при $b<1$ $x\in\left\{-\frac{1}{3}\right\}\cup[1;+\infty)$; при $b=1$ $x\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$; при $b>1$ $x\in\left[-\frac{1}{3};1\right]$.

17. Показательные неравенства

17.1. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$16^x < 30\cdot 4^x - a$ не имеет ни одного целочисленного решения. (МГУ, 1995)

Указание. Пусть $4^x=t$, тогда неравенство $(t-15)^2<225-a$, во всяком случае, не должно иметь своим решением $t=16$, т.е. должно выполняться неравенство $(16-15)^2 \ge 225-a$, т.е. $a \ge 224$. Проверьте, что это условие является и достаточным.

Ответ: $a \ge 224$.

18. Логарифмические неравенства

18.1. Для любого допустимого значения a решите неравенство

$\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right)>1$ и найдите, при каком значении a множество точек x, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6. (МГУ, 1999)

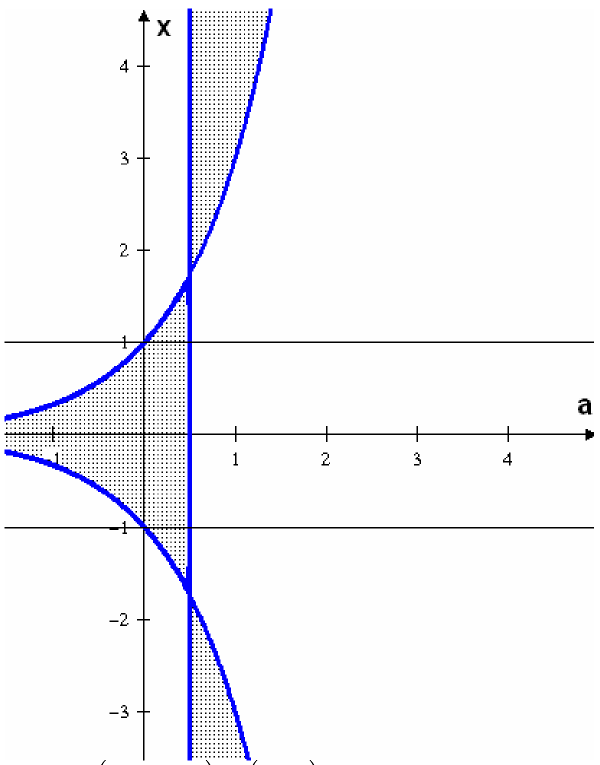
Решение. Для решения неравенства $\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right)-1>0$ используем метод рационализации.

$$\begin{cases}(2a-1)\left(\log_3 x^2-2a\right)>0\\ \log_3 x^2>0\\ 2a>0\\ 2a\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2a-1)\left(x^2-3^{2a}\right)>0\\ x^2-1>0\\ a>0\\ a\neq 0{,}5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2a-1)\left(x-3^a\right)\left(x+3^a\right)>0\\ (x-1)(x+1)>0\\ a>0\end{cases}$$

Далее используем метод областей для графического изображения решений исходного неравенства. С учетом ограничений запишем решения $\left(-3^a;-1\right)\cup\left(1;3^a\right)$ при $0<a<0{,}5$; $\left(-\infty;-3^a\right)\cup\left(3^a;+\infty\right)$ при $a>0{,}5$.
Из рисунка видим, что ограниченный отрезок, расположенный вне заштрихованной области ($a>0$) возможен между числами 3^a и -3^a.
Поэтому получаем уравнение $3^a-(-3^a)=6$, откуда $a=1$.



Ответ: $\left(-3^a;-1\right)\cup\left(1;3^a\right)$ при $0<a<0{,}5$; $\left(-\infty;-3^a\right)\cup\left(3^a;+\infty\right)$ при $a>0{,}5$, длина промежутка равна 6 при $a=1$.

19. Неравенства смешанного типа

19.1. (2010) Найдите наибольшее значение параметра b, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}\left(8x-x^2-16\right)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\geq-\frac{2}{3}b\left|\cos\pi x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. При $b=0$ неравенство выполняется. Пусть $b>0$. Преобразуем данное неравенство

$$b\sqrt{b}\left(b(x-4)^2+\frac{1}{b(x-4)^2}\right)\leq\frac{2}{3}b\left|\cos\pi x\right| \text{ или}$$

$$\sqrt{b}\left(b(x-4)^2+\frac{1}{b(x-4)^2}\right)\leq\frac{2}{3}\left|\cos\pi x\right|.$$

Так как сумма двух взаимно обратных положительных величин не меньше 2, то левая часть не меньше $2\sqrt{b}$. Правая часть не больше $\frac{2}{3}$. Следовательно, чтобы данное неравенство имело хотя бы одно решение, необходимо выполнение условия $2\sqrt{b}\leq\frac{2}{3}$, $b\leq\frac{1}{9}$.

Наибольшее значение $b=\frac{1}{9}$. Если $b=\frac{1}{9}$, то левая часть последнего неравенства не меньше $\frac{2}{3}$, а правая часть не больше $\frac{2}{3}$. Значит, левая и правая части равны $\frac{2}{3}$. Левая часть достигает наименьшего значения при условии $b(x-4)^2=\dfrac{1}{b(x-4)^2}$ или $(x-4)^4=81$, $x=1$ или $x=7$. При этих значениях x правая часть равна $\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

19.3. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство $\left|3\sin^2x+2a\sin x\cdot\cos x+\cos^2x+a\right|\leq3$. (МГУ, 1988)

Решение. Упростим подмодульное выражение

$$f(x)=3\sin^2x+2a\sin x\cdot\cos x+\cos^2x+a=$$
$$=3\cdot\frac{1-\cos2x}{2}+a\sin2x+\frac{1+\cos2x}{2}+a=$$
$$=a\sin2x-\cos2x+2+a=$$
$$=\sqrt{a^2+1}\sin(2x-\varphi)+2+a, \text{ где}$$
$$\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы наименьшее (m) и набольшее (M) значения функции $f(x)$ удовлетворяли системе

$$\begin{cases}m\geq-3\\M\leq3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{a^2+1}+2+a\geq-3\\\sqrt{a^2+1}+2+a\leq3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+1}\leq a+5\\\sqrt{a^2+1}\leq1-a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} a^2+1 \le (a+5)^2 \\ a+5 \ge 0 \end{cases} \atop \begin{cases} a^2+1 \le (1-a)^2 \\ 1-a \ge 0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -2{,}4 \\ a \le 0. \end{cases}$$

Ответ: $[-2{,}4;0]$.

19.5. При каких значениях параметров a и b система неравенств

$$\begin{cases} a+\sin bx \le 1 \\ x^2+ax+1 \le 0 \end{cases}$$ имеет единственное решение?

(МГУ, 1994)

Указание. Второе неравенство имеет решение при $|a| \ge 2$. Если $a < -2$, то первое неравенство выполняется при всех x, а при $a > 2$ оно вообще не имеет решений. Осталось проверить $a = 2$ и $a = -2$.

Ответ: $a = 2,\ b = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$

$a = -2,\ b \in R.$

20. Инвариантность

20.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} + 2a\right| = a^2+1$$

имеет нечетное число решений. (МГУ, 1999)

Решение. Данное уравнение инвариантно (неизменно) при замене x на $-x$ (докажите). Поэтому, если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечетным только в случае, когда среди корней находится число $x_0 = 0$. Подставляя в исходное уравнение $x = 0$, получаем уравнение относительно a:

$|2a| = a^2+1, \quad (|a|-1)^2 = 0, \quad |a| = 1.$

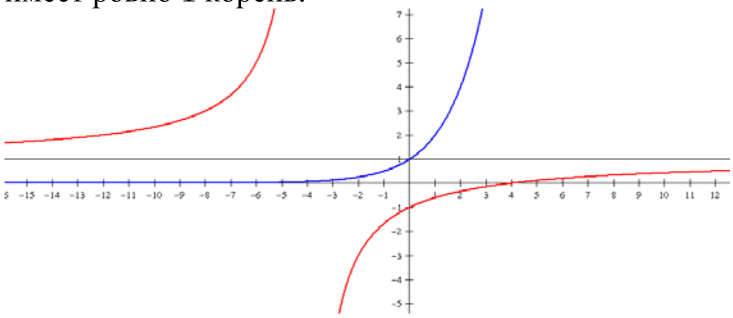
1) Если $a = 1$, то исходное уравнение примет вид

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} + 2\right| = 2.$$

Оно распадается на два уравнения:

$\dfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 0$ или $\dfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = -4$. Первое уравнение имеет один корень $x = 0$. Второе уравнение разрешим относительно 2^x ($x = -4$ не является корнем этого уравнения):

$2^x = \dfrac{x-4}{x+4}$ или $2^x = 1 - \dfrac{8}{x+4}$. Показательная функция $y = 2^x$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и проходит через точку $(0;1)$. Дробно-линейная функция возрастает на промежутках $(-\infty;-4)$ и $(-4;+\infty)$. Ее график – гипербола, проходящая через точку $(0;-1)$, с вертикальной асимптотой $x = -4$ и горизонтальной асимптотой $y = 1$. Второе уравнение не имеет корней. В этом случае исходное уравнение имеет ровно 1 корень.



2) Пусть $a = -1$ (рассмотрите самостоятельно).

Ответ: $a = 1$ или $a = -1$.

20.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (5-2\sqrt{6})^x + (5+2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8 \\ x^2 - (a-4)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2007)

Решение. Из равенства

$$(5-2\sqrt{6})^x = \frac{1}{(5+2\sqrt{6})^x} = (5+2\sqrt{6})^{-x}$$

следует, что если пара $(x; y)$ удовлетворяет системе, то пара $(-x; y)$ – тоже решение системы. Поэтому, если решение единственно, то $x = 0$ и

$$\begin{cases} y - |y| + 5a - 10 = 0 \\ (a-4)y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем два возможных значения $a = 2,\ a = 4$. Проверка показывает, что оба значения удовлетворяют условию.

Ответ: 2; 4.

20.3. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|y|} + 5|y| + 3x + 4 = 5y^2 + 3a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1987)

Решение. Заметим, что если (x_0, y_0) - решение системы, то и $(x_0, -y_0)$ - решение системы. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось условие

$-y_0 = y_0$, т.е. $y_0 = 0$. При $y = 0$ система примет вид

$$\begin{cases} 7 + 3x = 3a \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Если $x = 1$, то $a = \frac{10}{3}$; если $x = -1$, то $a = \frac{4}{3}$.

Итак, значениями параметра *a*, при которых данная система может иметь единственное решение, являются только $a = \frac{4}{3}$ и $a = \frac{10}{3}$.

Пусть $a = \frac{4}{3}$. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|y|} + 5|y| = -3x + 5y^2 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $|x| \le 1$, $|y| \le 1$. Тогда $-3x \le 3$, $|y| \ge y^2$. Кроме того, $3 \cdot 2^{|y|} \ge 3 \cdot 2^0 = 3$ при любом *y*. Таким образом $3 \cdot 2^{|y|} \ge 3 \ge -3x$, $5|y| \ge 5y^2$.

Следовательно, $3 \cdot 2^{|y|} + 5|y| \ge -3x + 5y^2$, причем равенство достигается только в случае, когда $3 \cdot 2^{|y|} = 3 = -3x$, $5|y| = 5y^2$ одновременно.

Получаем систему

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|y|} = 3 \\ -3x = 3 \\ 5|y| = 5y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Значит, при $a = \frac{4}{3}$ данная система имеет единственное решение $(-1;0)$.

Пусть теперь $a = \frac{10}{3}$. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|y|} + 5|y| + 3x = 5y^2 + 6 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Заметим, что пары чисел (0;1) и (1;0) являются решениями этой системы. Таким образом, при $a = \frac{10}{3}$ система имеет более одного решения.

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

20.6. (2010) Найдите все значения *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|1-x|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

имеет ровно четыре различных решения. (МГУ, 1986)

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \sqrt{7|y|} + \sqrt{|x-1|} = 1 \\ \left(\sqrt{7|y|}\right)^4 + \left(\sqrt{|x-1|}\right)^4 = -4a. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим $\sqrt{|x-1|} = u$, $\sqrt{7|y|} = v$. (3)

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = -4a \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что выполняются неравенства $u \ge 0$ и $v \ge 0$. (5)

Если u_0, v_0 - какое-либо решение системы (4), удовлетворяющее неравенствам (5), то из формул (3) следует, что исходная система будет иметь следующие решения

$$\left(1 + u_0^2; \frac{v_0^2}{7}\right), \left(1 + u_0^2; -\frac{v_0^2}{7}\right),$$

$$\left(1 - u_0^2; \frac{v_0^2}{7}\right), \left(1 - u_0^2; -\frac{v_0^2}{7}\right). \quad (6)$$

Пара чисел $u = v_0$, $v = u_0$ также удовлетворяет равенствам (4) и неравенствам (5). Поэтому решениями исходной системы уравнений будут и следующие пары чисел:

$$\left(1 + v_0^2; \frac{u_0^2}{7}\right), \left(1 + v_0^2; -\frac{u_0^2}{7}\right),$$

$$\left(1 - v_0^2; \frac{u_0^2}{7}\right), \left(1 - v_0^2; -\frac{u_0^2}{7}\right). \quad (7)$$

Если параметр *a* принимает значение, удовлетворяющее условию задачи, то среди выписанных восьми пар чисел (6) и (7) должно быть только четыре различных. Легко проверить, что это возможно лишь тогда, когда $u_0 = 0$, или $v_0 = 0$, или $u_0 = v_0$.

Учитывая, что пара чисел $(u_0; v_0)$ должна удовлетворять первому уравнению системы (4), заключаем, что если для некоторого значения *a* выполняется условие задачи, то системе (4) обязательно должна удовлетворять по крайней мере одна из трех пар чисел $(0;1)$, $(1;0)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Подставляя указанные пары во второе уравнение системы (4), убеждаемся, что это возможно только при $a = -\frac{1}{4}$ и $a = -\frac{1}{32}$.

Рассмотрим систему (4) при $a = -\frac{1}{32}$

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^4+v^4=\frac{1}{8} \end{cases} \quad (8)$$

Обозначив $t = uv$, будем иметь

$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=1-2t,$

$u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=(1-2t)^2-2t^2=1-4t+2t^2.$

Следовательно, t удовлетворяет квадратному уравнению $1-4t+2t^2=\frac{1}{8}$, т.е. уравнению $2t^2-4t+\frac{7}{8}=0.$ Это уравнение имеет два корня $t_1=\frac{1}{4}$ и $t_2=\frac{7}{4}$. Нас интересуют неотрицательные решения u, v системы (8). Из первого уравнения (8) следует, что должны выполняться неравенства $0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1,$ и, значит, $t \le 1.$ Следовательно, $t=\frac{1}{4}$ и все неотрицательные решения системы (8) содержатся среди решений системы

$$\begin{cases} u+v=1 \\ uv=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что она имеет единственное решение $u=\frac{1}{2},\ v=\frac{1}{2}.$ Эта пара удовлетворяет системе (8). Для нее среди решений (6), (7) исходной системы имеется ровно четыре различных $\left(\frac{5}{4};\pm\frac{1}{28}\right), \left(\frac{3}{4};\pm\frac{1}{28}\right).$

Решая также систему (4) при $a=-\frac{1}{4}$, убеждаемся, что она имеет только два решения $(0;1)$ и $(1;0)$ в неотрицательных числах. Для них среди решений (6), (7) исходной системы имеется ровно четыре различных $(0;0)$, $(2;0)$, $\left(1;\pm\frac{1}{7}\right).$

Ответ: $a=-\frac{1}{32};\ a=-\frac{1}{4}.$

20.7. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \ge x^2+2a \\ x \ge y^2+2a \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1984)

Решение. Заметим, что x и y входят в систему симметричным образом. Если $(x_0;y_0)$ - решение системы, то $(y_0;x_0)$ также является ее решением. Так как решение должно быть единственным, то $x_0=y_0$, и при этом число x_0 удовлетворяет неравенству $x_0^2-x_0+2a \le 0.$ Это неравенство должно иметь единственное решение, что будет тогда, когда дискриминант $D=1-8a=0$ или $a=\frac{1}{8}.$

Теперь докажем, что при этом значении a данная система действительно имеет единственное решение. При $a=\frac{1}{8}$ данная система примет вид

$$\begin{cases} y \ge x^2+\frac{1}{4} \\ x \ge y^2+\frac{1}{4} \end{cases}$$

Если пара чисел $(x;y)$ удовлетворяет этой системе неравенств, то она удовлетворяет и неравенству, полученному при сложении этих неравенств. Складывая эти неравенства, имеем неравенство $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0.$ Последнее неравенство выполняется только для $x=y=\frac{1}{2}$, т.е. оно имеет единственное решение $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$

Ответ: $a=\frac{1}{8}.$

20.8. (2010) Найдите все значения p, при каждом из которых найдется q такое, что система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=q|x|+p \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если $(x_0;y_0)$ - решение системы, то $(-x_0;y_0)$ также является ее решением. Поэтому условие $x=0$ - необходимое условие для существования единственного решения. Пусть $x=0$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} y^2=1 \\ y=p, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad p=\pm 1.$$

Проверим эти значения. Если $p=1$, то имеем

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=q|x|+1 \end{cases}$$
Отсюда получаем уравнение
$(1+q^2)x^2+2q|x|=0,\quad |x|((1+q^2)|x|+2q)=0.$
Последнее уравнение будет иметь единственный корень при $q>0$.
Аналогично проверяется значение $p=-1$.
Ответ: $p=-1,\ p=1$.
20.9. (2010) Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=q|x|+p \end{cases}$$
имеет решения.
Решение. Заметим, что если $(x_0;y_0)$ - решение системы, то $(-x_0;y_0)$ также является ее решением. Поэтому уравнение
$(1+q^2)x^2+2pq|x|+p^2-1=0,$ полученное из системы, будет иметь корни разных знаков. Для этого необходимо и достаточно выполнение условия $p^2-1<0,\ -1<p<1.$
Если $p^2-1=0,$ то квадратное уравнение будет иметь, по крайней мере, корень $x=0$ для любого q.
Ответ: $-1\le p\le 1.$

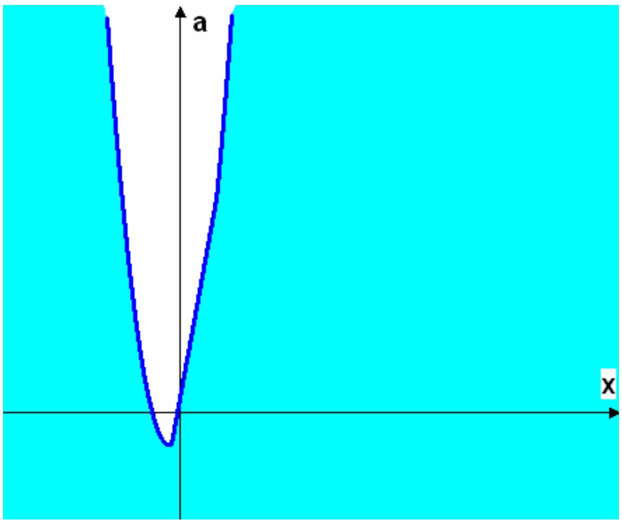
21. Функции

21.1. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции
$f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}$ лежит на интервале $(-3;3)$.
Указание. См. решение задания № 14.1.
Ответ: $(-5;1)$
21.2. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции
$f(x)=\dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;3]$. Определите при каждом таком p множество значений функции $f(x)$. (МГУ, 1999)
Решение. Обозначим $f(x)=y$ и рассмотрим какие значения принимает переменная y.
Значение $y=0$ получаем при $x=-\dfrac{p}{3}$, причем $x^2+5x+7>0$ при всех x. Пусть $y\ne 0$. Из равенства $y=\dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ получаем квадратное уравнение $yx^2+(5y-3)x+7y-p=0,$ которое имеет решение, когда дискриминант
$D=(5y-3)^2-4y(7y-p)\ge 0,$
$g(y)=3y^2+y(30-4p)-9\le 0.$ Таким образом, множество $E(f)$ значений функции f - отрезок между корнями квадратного трехчлена $g(y)$ (по теореме Виета произведение этих корней равно -3, так что корни имеют разные знаки, и отрезок между ними всегда содержит точку $y=0$, которую на время исключили).
Отрезок $E(f)$ содержит полуинтервал $(-1;3]$ в том и только том случае, если
$$\begin{cases} g(-1)\le 0 \\ g(3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-(30-4p)-9\le 0 \\ 27+3(30-4p)-9\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} p\le 9 \\ p\ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \quad p=9.$$
При $p=9$ имеем $g(y)=y^2-2y-3\le 0,$ причем $g(-1)=g(3)=0$ и $E(f)=[-1;3]$.
Ответ: $p=9;\ [-1;3]$.
21.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых функция
$$f(x)=x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|-a$$
принимает
1) только неотрицательные значения;
2) как положительные, так и отрицательные значения.
Решение. 1) Для неравенства $f(x)\ge 0$ имеем
$a\le x^2+4x+\left|x^2-\dfrac{3}{2}x-1\right|.$
Построим график функции
$a(x)=x^2+4x+\left|x^2-\dfrac{3}{2}x-1\right|=$
$$=\begin{cases} 2x^2+2{,}5x-1 \ \ \textit{если}\ \ x\in(-\infty;-0{,}5]\cup[2;+\infty) \\ 5{,}5x+1 \ \ \textit{если}\ \ x\in[-0{,}5;2] \end{cases}$$
Выделим цветом множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству
$a\le x^2+4x+\left|x^2-\dfrac{3}{2}x-1\right|.$
Найдем наименьшее значение функции $a(x)$.
Сравним значения квадратного трехчлена $2x^2+2{,}5x-1$ при $x_в=-\dfrac{2{,}5}{4}=-\dfrac{5}{8}$ и линейного двучлена $5{,}5x+1$ при $x=-0{,}5$:

$2\left(-\frac{5}{8}\right)^2+2{,}5\left(-\frac{5}{8}\right)-1=-\frac{57}{32}=-1{,}78125$ и $5{,}5(-0{,}5)+1=-1{,}75$. Таким образом, $a_{наим.}=-\frac{57}{32}$.

Прямые, параллельные оси x, полностью находятся в заштрихованной области при $a\le-\frac{57}{32}$.

2) Условие «функция принимает как положительные, так и отрицательные значения» означает на графическом языке: прямые, параллельные оси x, пересекают как заштрихованную так и не заштрихованную области. Как видим из рисунка, это возможно при $a>-\frac{57}{32}$.



Ответ: 1) $a\le-\frac{57}{32}$; 2) $a>-\frac{57}{32}$.

21.5. Найдите значения a, при которых наибольшее значение функции $f(x)=2x^2+x(5-3a)+a^2-3a+4$ на отрезке с концами в точках $a-1$ и -4 минимально. Укажите это значение. (МГУ, 2006)

Указание. Наибольшее значение квадратичной функции из условия задачи на отрезке достигается в одном из концов этого отрезка.

Ответ: $-5;-4$.

21.6. (2010) Найдите все такие значения a, для которых наименьшее значение функции $\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\cdot|x+1|$ меньше 2.

Решение. Функция преобразуется к виду $f(x)=|(x-1)(x-a)|+(a-1)\cdot|x+1|$. Точки -1, 1 и a разбивают числовую прямую на интервалы, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с квадратичной (при любом раскрытии знаков модуля). На левом интервале ($x<-1,\ x<1,\ x<a$) функция принимает вид $f(x)=x^2-2ax+1$ и является убывающей на интервале $(-\infty;t)$, где t одно из чисел -1 и a. На правом интервале ($x>-1,\ x>1,\ x>a$) функция принимает вид $f(x)=x^2-2x+2a-1$ и является возрастающей на $(t;+\infty)$, где t одно из чисел 1 и a. На промежуточных интервалах функция может иметь вид $f(x)=-x^2+2ax-1$ или $f(x)=-x^2+2x-2a+1$ и будет ограничена снизу. Каждая из парабол имеет вершину либо при $x=1$ либо при $x=a$. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей парабол. Точки -1, 1 и a являются точками излома, поэтому в этих точках функция может принимать наименьшее значение. Получаем условия

$$\left[\begin{array}{l} f(1)<2 \\ f(-1)<2 \\ f(a)<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1<1 \\ |a+1|<1 \\ (a-1)|a+1|<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a<2 \\ -2<a<0 \\ \left[\begin{array}{l} a^2-1<2\ при\ a\ge-1 \\ a^2-1>-2\ при\ a<-1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<2 \\ -2<a<0 \\ -1\le a<\sqrt{3} \\ a<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$a<2$.

Ответ: $(-\infty;2)$.

21.7. (2010) Найдите все такие a, что наименьшее значение функции $f(x)=4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|$ меньше 4.

Решение. Переформулируем задачу: найдите все такие a, что неравенство $4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|-4<0$ имеет решения.

Перепишем неравенство $|x-a|<1-\frac{1}{4}\left|x^2+2x-3\right|$. График непрерывной функции $f(x)=1-\frac{1}{4}\left|x^2+2x-3\right|=$

$$=\begin{cases} -0{,}25x^2-0{,}5x+1{,}75 & если\ x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty) \\ 0{,}25x^2+0{,}5x+0{,}25 & если\ x\in[-3;1] \end{cases}$$

состоит из частей парабол. Функция $g(x)=|x-a|$ задает семейство «уголков» с вершиной на оси x. Необходимо найти те промежутки, на которых имеются точки графика

$g(x)=|x-a|$, расположенных ниже графика $f(x)$. На рисунке отмечены три пограничных расположения графика $g(x)=|x-a|$. Если $a=-1$, то графики имеют одну общую точку. Аналитически это можно показать, решив на промежутке $[-3;1]$ уравнение

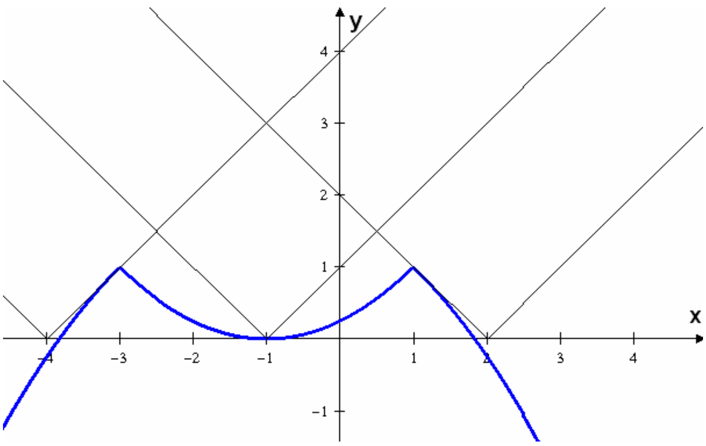
$$|x+1|=0{,}25x^2+0{,}5x+0{,}25,\quad |x+1|=0{,}25|x+1|^2.$$

Другие граничные значения a найдем из условий касания:

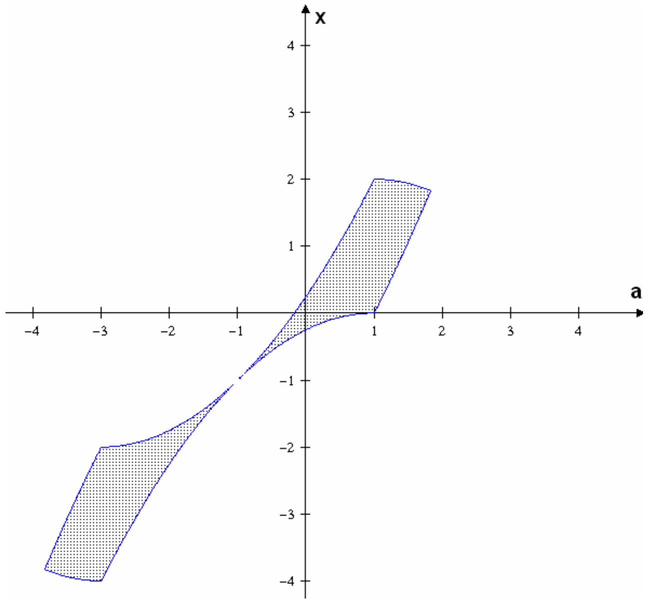
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x_0)=-1\\ g(x_0)=f(x_0)\end{cases}\\ \begin{cases}f'(x_0)=1\\ g(x_0)=f(x_0)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-0{,}5x-0{,}5=-1\\ g(x_0)=f(x_0)\end{cases}\\ \begin{cases}-0{,}5x-0{,}5=1\\ g(x_0)=f(x_0)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ g(1)=f(1)\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\ g(-3)=f(-3)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|1-a|=1\\ |3+a|=1\end{array}\right.$$

Отсюда получаем $a=-4$ или $a=2$, для которых $x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. Теперь из рисунка получаем искомые промежутки: $(-4;-1)\cup(-1;2)$.



Замечание. Если решения неравенства графически представить в системе координат aOx, то получим красивую фигуру с центром симметрии $(-1;-1)$. Из этого рисунка также видим решения $(-4;-1)\cup(-1;2)$.



Ответ: $(-4;-1)\cup(-1;2)$.

21.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=\dfrac{4\sin x+a}{4a-2\sin x}$ принимает все значения из отрезка $[0;1]$. (МГУ, 2005)

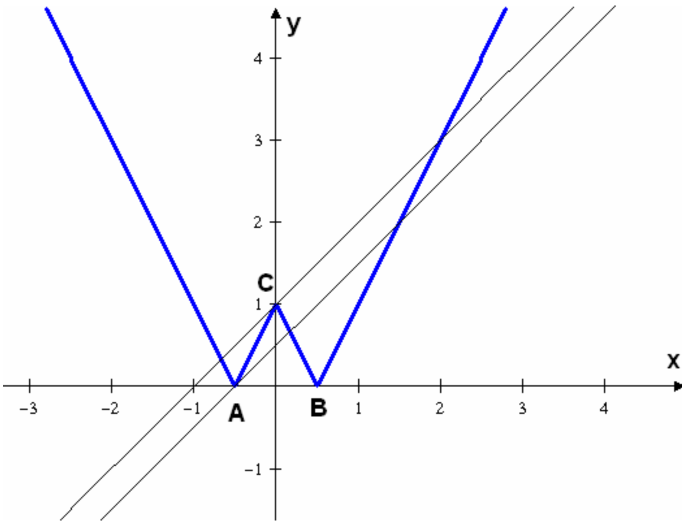
Указание. Выполнив замену $\sin x=t$, приходим к такой переформулировке задачи: при каких значениях параметра a уравнение $y=\dfrac{4t+a}{4a-2t}$ имеет корень на отрезке $[-1;1]$ для любого $y\in[0;1]$? Решая это уравнение относительно t, получаем $t=2a-\dfrac{9a}{2(y+2)}=f(y)$. Значение $a=0$ не удовлетворяет условию. При $a\neq 0$ функция $f(y)$ монотонно возрастает на отрезке $[0;1]$, а t при этом принимает значения от $f(0)=-\dfrac{a}{4}$ до $f(1)=\dfrac{a}{2}$. Условие $|t|\le 1$ означает, что $\left|\dfrac{a}{4}\right|\le 1$, $\left|\dfrac{a}{2}\right|\le 1$.

Ответ: $0<|a|\le 2$.

22. Параллельный перенос (вдоль оси y)

22.1. При каких значениях параметра a уравнение $x-a=||2x|-1|$ имеет ровно три корня?

Решение. График функции $y=||2x|-1|$ касается оси Ox в точках $A(-0{,}5;0)$ и $B(0{,}5;0)$. Функция $y=x-a$ задает семейство прямых параллельных прямой $y = x$. Графики пересекаются в трех точках тогда и только тогда, когда прямая $y = x - a$ проходит через точку A или точку $C(0;1)$. Во всех остальных случаях количество точек пересечения графиков функций будет или больше, или меньше трех. Определим значения параметра a в первом и во втором случае. Пусть прямая $y = x - a$ проходит через точку $A(-0{,}5;0)$, тогда $0 = -\frac{1}{2} - a$, откуда $a = -\frac{1}{2}$. Если прямая $y = x - a$ проходит через точку $C(0;1)$, то $a = -1$.



Ответ: $a = -0{,}5$ или $a = -1$.

22.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\left|2|x| - a^2\right| = x - a$ имеет ровно три различных решений.

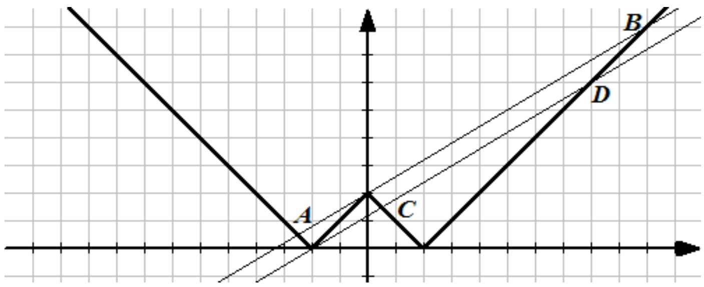
Указание. При $a = 0$ уравнение имеет один корень. При $a \neq 0$ построим график функции (см. график из примера 22.1) $f(x) = 2\left|2|x| - a^2\right|$, который имеет общие точки $\frac{a^2}{2}$ и $-\frac{a^2}{2}$ с осью x. Из семейства параллельных прямых $y = x - a$ нас интересуют только те, которые пересекают построенный график в трех точках. Таких прямых только две. Для одной прямой получаем условие $a = -\frac{a^2}{2}$, для другой прямой $-a = 2a^2$. Поскольку $a \neq 0$, то получаем ответ.

Ответ: $-2; -0{,}5$.

22.5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left||5x| - 10\right| = a + 3x$ имеет ровно три различные решения. Для каждого полученного значения a найдите все эти решения.

Решение. Поделим обе части уравнения на 5, $\left||x| - 2\right| = \frac{a}{5} + \frac{3x}{5}$.

Построим график функции $y = \left||x| - 2\right|$, содержащий части прямых с угловыми коэффициентами $k = 1$ или $k = -1$. Функция $y = \frac{a}{5} + \frac{3x}{5}$ задает семейство прямых с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{5}$.



Условию задачи удовлетворяют два расположения прямой l: l_1 и l_2.

1) Так как прямая l_1 проходит через точку (0; 2), то из уравнения прямой $y = \frac{a}{5} + \frac{3x}{5}$ получим $a = 10$. В этом случае уравнение прямой l_1 имеет вид: $y = \frac{3x}{5} + 2$. Найдем абсциссы точек пересечения A и B прямой l_1 с неподвижным графиком.

а) Для точки A решим уравнение $\frac{3x}{5} + 2 = -x - 2$, $x = -2{,}5$.

б) Для точки B решим уравнение $\frac{3x}{5} + 2 = x - 2$, $x = 10$.

2) Так как прямая l_2 проходит через точку (–2; 0), то из уравнения прямой $y = \frac{a}{5} + \frac{3x}{5}$ получим $a = 6$. В этом случае уравнение прямой l_2 имеет вид: $y = \frac{3x}{5} + \frac{6}{5}$. Найдем абсциссы точек пересечения C и D прямой l_2 с неподвижным графиком.

а) Для точки C решим уравнение $\frac{3x}{5} + \frac{6}{5} = -x + 2$, $x = 0{,}5$.

б) Для точки D решим уравнение

$\frac{3x}{5}+\frac{6}{5}=x-2,\quad x=8.$

Ответ: при $a=10$ решения $x=-2{,}5;\quad x=0;$ $x=10;$

при $a=6$ решения $x=-2;\ x=0{,}5;$ $x=8.$

22.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-\left|x^2+2x-3\right|-a\ .$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x^2-\left|x^2+2x-3\right|.$

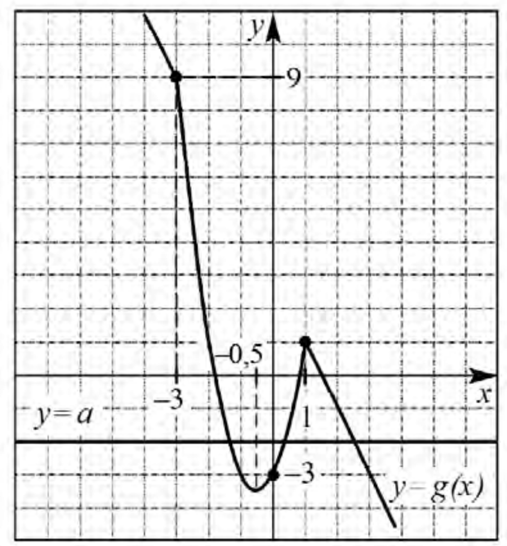


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех и более точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет более двух различных корней.

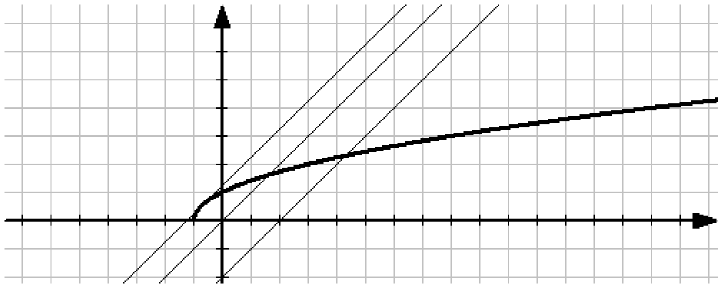
$$g(x)=\begin{cases}-2x+3,\ \textit{если}\ x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)\\ 2x^2+2x-3,\ \textit{если}\ x\in(-3;1)\end{cases}$$

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет более двух корней, только если $g\left(-\frac{1}{2}\right)<a<g(1),\ -3{,}5<a<1.$

Ответ: (–3,5;1).

22.8. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет единственное решение?

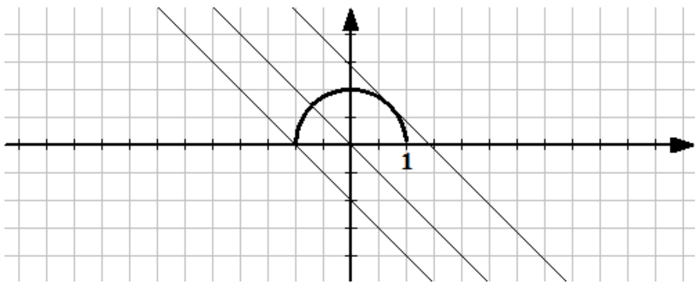
Решение. Построим график функции $y=\sqrt{x+1}$. Функция $y=x+a$ задает семейство прямых, параллельных прямой $y=x$. При $a<1$ графики имеют одну общую точку. Еще один случай, когда графики имеют одну общую точку, прямая $y=x+a$ является касательной. Угловой коэффициент касательной равен 1. Так как $f'(x_0)=k,$ то получим уравнение $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=1$ для нахождения абсциссы x_0 точки касания. Из уравнения находим $x_0=-0{,}75$, а из уравнения $y=\sqrt{x+1}$ находим $y_0=0{,}5.$ Подставим координаты точки $(-0{,}75;0{,}5)$ в уравнение $y=x+a$, получим $a=1{,}25$.



Ответ: $a=1{,}25$ или $a<1.$

22.9. При каких значениях a неравенство $\sqrt{1-x^2}>a-x$ имеет решения?

Решение. График функции $y=\sqrt{1-x^2}$ или $x^2+y^2=1\ (y\ge 0)$ есть полуокружность.



Функция $y=a-x$ для каждого значения a задает прямую, которая с изменением a перемещается параллельно самой себе (с ростом a перемещается вверх).

Исходное неравенство будет выполняться до тех пор, пока точки окружности будут выше точек прямой, т.е. пока прямая не станет касательной к окружности. Это произойдет при $a=\sqrt{2}.$ Значение $a=\sqrt{2}$ можно найти и аналитически, если решить уравнение $\sqrt{1-x^2}=a-x,$ и после возведения в квадрат потребовать, чтобы дискриминант полученного квадратного уравнения был равен нулю.

Итак, при $a<\sqrt{2}$ данное неравенство имеет решения.

Ответ: $a<\sqrt{2}$.

22.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=a \end{cases}$$

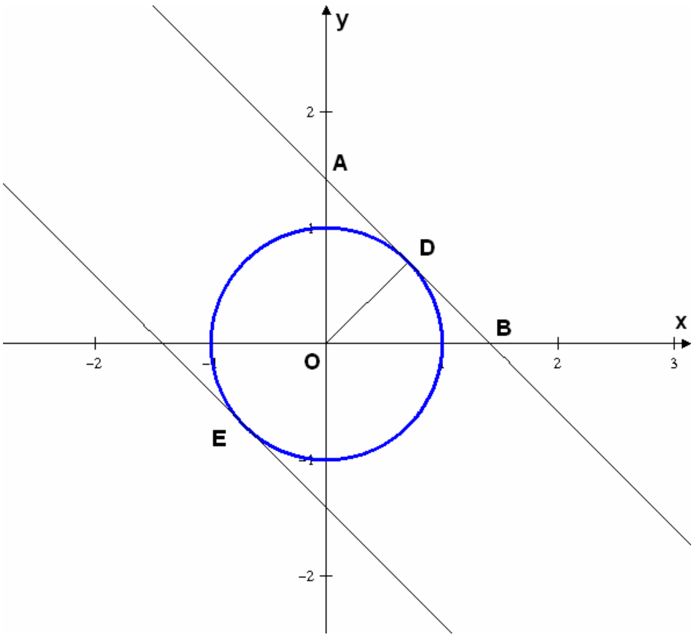
имеет единственное решение.

Решение. Изобразим в одной координатной плоскости графики, заданные уравнениями системы.

На рисунке видно, что система будет иметь единственное решение, если прямая $y=a-x$ касается окружности $x^2+y^2=1$ и ее решениями будут координаты точек E и D.

Найдем значение a, при котором прямая касается окружности, для чего рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ODA (это действительно так, ибо прямая $y=-x$, а значит и прямая $y=a-x$, составляют с положительным направлением оси Ox угол в 45°). Так как $OD=AD=1$, по теореме Пифагора получаем $a=OA=\sqrt{a}$.

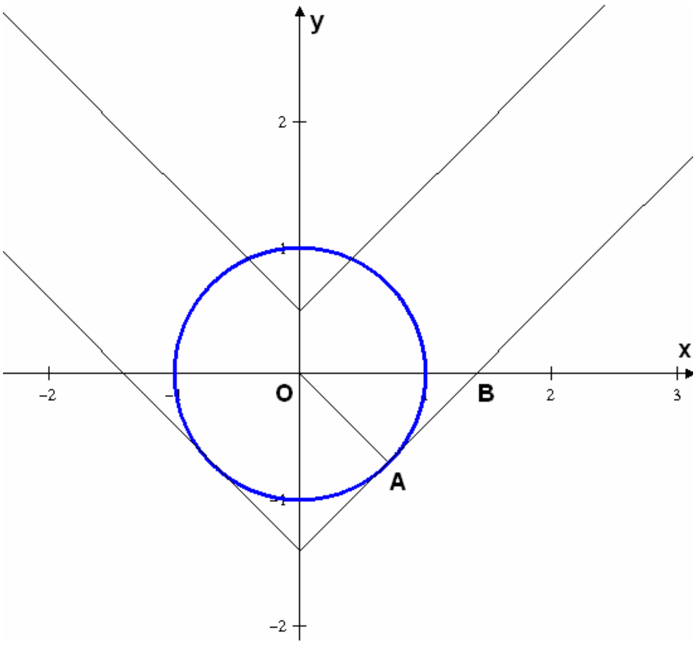
Тогда второе значение a, при котором прямая $y=a-x$ касается окружности $x^2+y^2=1$, будет равно $\left(-\sqrt{2}\right)$.



Ответ: $a=\pm\sqrt{2}$.

22.12. Найдите значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y-|x|=a \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Решение. Первое уравнение системы задает окружность радиуса 1 с центром (0; 0). Второе уравнение $y=|x|+a$ задает семейство «уголков» с вершиной на оси y.



$\angle AOB=45^\circ$, $OA=AB=1$, $OB=\sqrt{2}$, $a=-\sqrt{2}$.

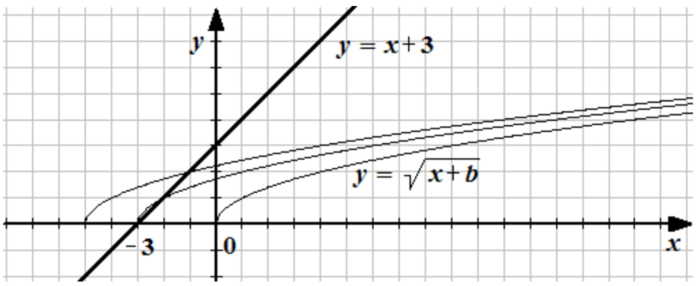
Из рисунка видно, что условию задачи удовлетворяют следующие значения $a\in\left\{-\sqrt{2}\right\}\cup(-1;1)$.

Ответ: $a\in\left\{-\sqrt{2}\right\}\cup(-1;1)$.

23. Параллельный перенос (вдоль оси x)

23.1. При каких значениях b уравнение $\sqrt{x+b}=x+3$ имеет единственное решение?

Решение. Рассмотрим неподвижный график (прямую) функции $y=x+3$ и семейство графиков, состоящих из полупарабол $y=\sqrt{x+b}$ с вершиной на оси x.



Если вершина полупараболы лежит левее точки $(-3;0)$, то точка пересечения одна. В этом случае $-b<-3$ или $b>3$. Если вершина находится в точке $(-3;0)$, то имеется две точки пересечения. Тогда $b=3$. Точек пересечения будет две до тех пор, пока прямая $y = x + 3$ не станет касательной к графику функции $y = \sqrt{x+b}$. Так как угловой коэффициент касательной равен 1, то найдем абсциссу точки касания из условия $y'(x_0) = 1$.

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0+b}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_0+b} = 0{,}5 \Leftrightarrow x_0 + b = 0{,}25 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = 0{,}25 - b.$$

Точка касания принадлежит прямой и полупараболе, поэтому $\sqrt{x_0+b} = x_0 + 3$ или $\sqrt{0{,}25-b+b} = 0{,}5 - b + 3$. Отсюда $b = 2{,}75$ и $x_0 = -2{,}5$, т.е. вершина параболы находится в точке $(-2{,}75;0)$. В этом случае точка пересечения графиков одна. При $b < 2{,}75$ точек пересечения графиков не будет.

Ответ: $b = 2{,}75$; $b > 3$.

23.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

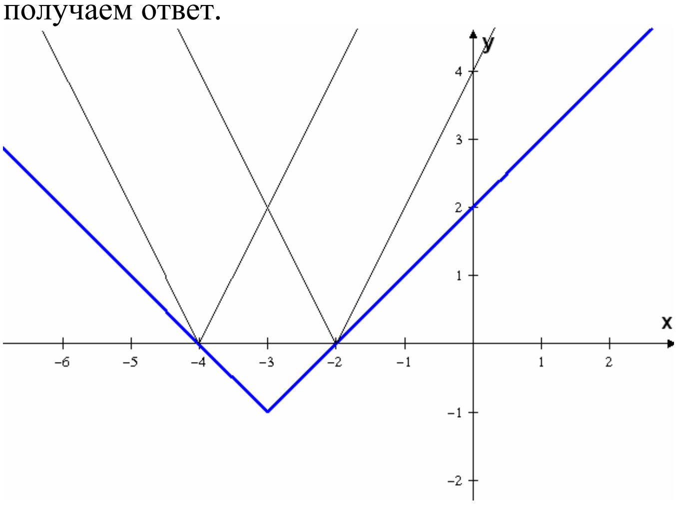
$|2x-a|+1=|x+3|$

имеет ровно один корень.

Решение. Перепишем уравнение $|2x-a| = |x+3|-1$. Функция $f(x) = |x+3|-1$ задает «уголок» с вершиной $(-3;-1)$, состоящий из лучей с угловыми коэффициентами 1 и -1.

Функция $g(x) = |2x-a|$ задает семейство уголков с вершиной на оси x, состоящий из лучей с угловыми коэффициентами 2 и -2. Условию задачи удовлетворяет два случая расположения графиков: если вершина движущегося уголка попадает в точку $(-4;0)$ или точку $(-2;0)$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению $g(x) = |2x-a|$.

Имеем $|-8-a| = 0$ или $|-4-a| = 0$. Отсюда получаем ответ.

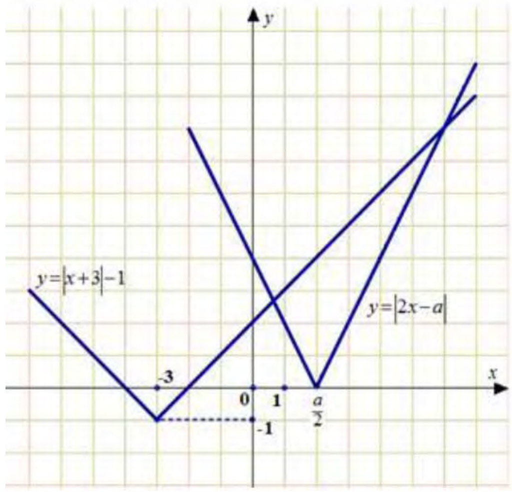


Ответ: $-4; -8$.

23.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x-a|+1 \le |x+3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение. Перепишем неравенство в следующем виде $|2x-a| \le |x+3|-1$.

Построим схематично графики функций $y = |2x-a|$ и $y = |x+3|-1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \le -4$ или $\frac{a}{2} \ge -2$.

1) $\begin{cases} a \le -8 \\ |2x-a| \le -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -8 \\ 2x-a \le -x-4 \\ 2x-a \ge x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a \le -8 \\ x \le \dfrac{a-4}{3} \\ x \ge a+4 \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3} - (a+4) = 1$, откуда $a = -\frac{19}{2}$.

2) $\begin{cases} a \ge -4 \\ |2x-a| \le x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -4 \\ 2x-a \le x+2 \\ 2x-a \ge -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

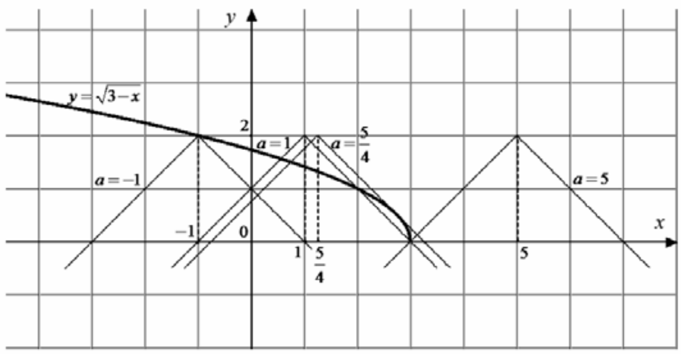
$\begin{cases} a \ge -4 \\ x \le a+2 \\ x \ge \dfrac{a-2}{3} \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a + 2 - \frac{a-2}{3} = 1$, откуда $a = -\frac{5}{2}$.

Ответ: $a=-\frac{5}{2},\ a=-\frac{19}{2}.$

23.7. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{3-x}+|x-a|\le 2$ является отрезок.

Указание. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{3-x}\le 2-|x-a|$, и нарисуем эскизы графиков функций, стоящих в левой и правой частях неравенства.



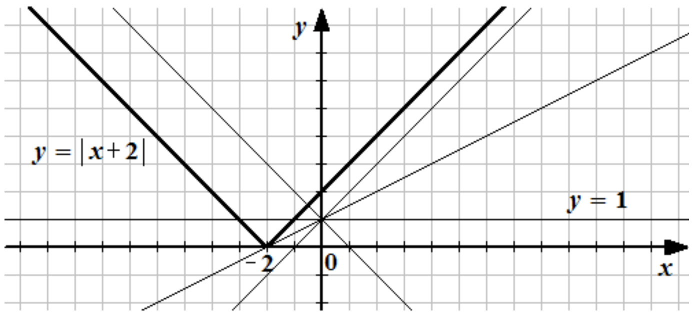
Рассматривая взаимное расположение графиков при разных значениях a, получаем:
$-1 < a < 1$ или $1{,}25\le a<5$.

Ответ: $(-1;1)\cup\left[\frac{5}{4};5\right).$

23.9. Найдите все значения a, при которых уравнение
$a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$ имеет ровно одно решение. (МГУ, 1994)
Указание. График левой части уравнения
$3-\sqrt{1-(x-3)^2}=a-\sqrt{1-(x-a)^2}$,
равносильного исходному, есть нижняя единичная полуокружность с центром в точке $(3;3)$, а график правой части – такая же полуокружность, но с центром $(a;a)$. Изменяя параметр в сторону возрастания, получим, что указанные графики впервые пересекаются, причем имеют единственную точку, при $a=2$. Эта ситуация сохраняется при дальнейшем увеличении a (кроме случая $a=3$, когда полуокружности сливаются) до значения $a=4$, а затем графики расходятся и не имеют общих точек.
Ответ: $[2;3)\cup(3;4].$

24. Поворот

24.1. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x+2|=ax+1$?
Решение. Рассмотрим графики двух функций. Графиком функции $f(x)=|x+2|$ является «уголок» с вершиной в точке $(-2;0)$. Функция $g(x)=ax+1$ задает семейство прямых, проходящих через точку $(0;1)$. При изменении параметра a от $-\infty$ до $+\infty$ прямая $y=ax+1$ поворачивается по направлению против часовой стрелки между состояниями, близкими к вертикальным.



Из рисунка видно, что при $a=\pm1$ график функции $g(x)=ax+1$ параллелен одной из ветвей графика функции $f(x)=|x+2|$. Найдем значения a, при которых прямая $y=ax+1$ проходит через вершину графика $f(x)$. Подставим координаты точки $(-2;0)$ в уравнение $y=ax+1$, отсюда $a=0{,}5$.

Изменяя значения параметра a от $-\infty$ до $+\infty$, определяем соответствующее количество точек пересечения рассматриваемых графиков.

При $a\in(-\infty;-1]$ графики пересекаются в одной точке, значит, данное уравнение имеет один корень. Если $a\in(-1;0{,}5)$, то прямая $y=ax+1$ пересекает график $f(x)$ в двух точках, т.е. исходное уравнение имеет два корня. При $a=0{,}5$ уравнение имеет одно решение (общая точка $(-2;0)$). Если $a\in(0{,}5;1]$, то графики $f(x)$ и $g(x)$ не пересекаются, уравнение не имеет решений. При $a\in(1;+\infty)$ оба графика пересекаются в одной точке.
Ответ дадим в виде таблицы.

Значения параметра a	$(-\infty;-1]$	$(-1;0{,}5)$	0,5	$(0{,}5;1]$	$(1;+\infty)$
Число раз личных корней	1	2	1	0	1

Замечание. Если представить уравнение в виде $|x+2|-1=ax$, то можно было рассмотреть графики функций $f(x)=|x+2|-1$ и $g(x)=ax$.

Ответ: если $a\in(0{,}5;1]$, то нет решений; если $a\in(-\infty;-1]\cup\{0.5\}\cup(1;+\infty)$ - одно решение; при $a\in(-1;0.5)$ - два решения.

24.3. Найдите значения параметра a, при котором уравнение $|x^2-5x+6|=ax$ имеет ровно три различных решения.

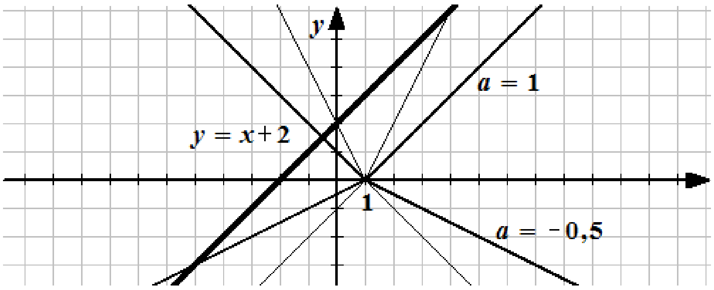
Решение. Построим график функции $y=|x^2-5x+6|$. Функция $y=ax$ задает семейство прямых, проходящих через начало координат (пучок прямых с центром (0; 0)). Условию задачи удовлетворяет прямая l, касающаяся неподвижного графика функции $f(x)=-x^2+5x-6$ на промежутке (2; 3) в точке $C(x_0;y_0)$. Составим уравнение касательной. Так как $f(x_0)=-x_0^2+5x_0-6$, $f'(x_0)=-2x_0+5$, то $y=-x_0^2+5x_0-6+(-2x_0+5)(x-x_0)$ или $y=x_0^2-6+x(5-2x_0)$. Так как касательная проходит через начало координат, то получаем $0=x_0^2-6$, $x_0=\pm\sqrt{6}$, $x_0=\sqrt{6}$ $(x_0\in(2;3))$.

Искомое значение параметра $a=f'(x_0)=-2\cdot\sqrt{6}+5$.

Ответ: $5-2\sqrt{6}$.

24.6. При каких значениях параметра a уравнение $x+2=a|x-1|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Решение. Построим графики обеих частей исходного уравнения. График функции $f(x)=x+2$ - есть прямая (неподвижный график). Функция $g(x)=a|x-1|$ задает семейство «уголков» с вершиной в точке $(1;0)$. Если $a>0$, то ветви «уголка» направлены вверх, при $a<0$ - вниз. При $a=1$ или $a=-1$ одна из ветвей «уголка» параллельна прямой $y=x+2$.



Исследуем изменение параметра a от $-\infty$ до $+\infty$. Из рисунка видно, что при $a\le -1$ графики обеих частей исходного уравнения не пересекаются, т.е. уравнение не имеет решений. При $-1<a\le 1$ уравнение имеет одно решение, это абсцисса точки пересечения графика функции $f(x)=x+2$ с левой ветвью графика функции $g(x)=a|x-1|$, т.е. с той, для которой $x<1$ и, следовательно, исходное уравнение принимает вид $x+2=a(1-x)$. Отсюда $x=\dfrac{a-2}{a+1}$. При $a>1$ оба графика пересекаются в двух точках.

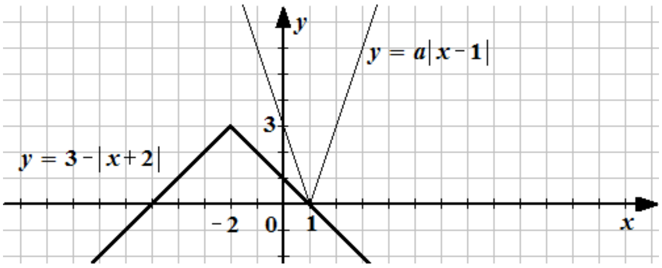
Ответ: при $-1<a\le 1$ уравнение имеет единственное решение, $x=\dfrac{a-2}{a+1}$.

24.8. Выясните, при каких значениях a уравнение $|x+2|+a|x-1|=3$: (*)

а) имеет единственный корень и найти его;
б) имеет ровно два корня и найти их;
в) имеет бесконечное множество корней.

Решение. Запишем уравнение (*) в виде $a|x-1|=3-|x+2|$ (**)

и построим графики функций $y=3-|x+2|$ и $y=a|x-1|$.



Из рисунка видно, что при любом $a \in \boldsymbol{R}$ графики указанных функций имеют общую точку $(1;0)$ и поэтому число $x_1 = 1$ - корень уравнения (∗).

а) Пусть $|a| > 1$, тогда графики функций имеют единственную общую точку $(1;0)$, а число $x_1 = 1$ - корень уравнения (∗).

б) Пусть $|a| < 1$, тогда графики имеют общую точку с абсциссой $x_2 < -2.$ Так как $|x-1| = 1-x,$ $|x+2| = -x-2$ при $x < -2,$ то x_2 - корень уравнения $3 + x + 2 = a(1-x),$ т.е. $x_2 = \dfrac{a-5}{a+1}.$

в) Пусть $a = 1,$ тогда графики совпадают на отрезке $[-2;1]$ и поэтому каждое значение $x \in [-2;1]$ - корень уравнения (∗).

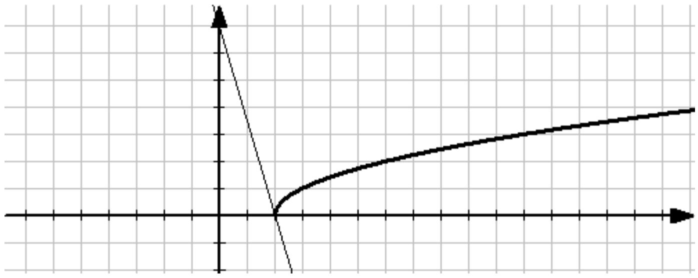
Если $a = -1,$ то графики совпадают при $x \ge 1,$ поэтому значения $x \in [1;+\infty)$ - корни уравнения (∗).

Ответ: а) $|a| > 1,\ x = 1;$ б) $|a| < 1,\ x_1 = 1,$ $x_2 = \dfrac{a-5}{a+1};$ в) $a = 1$ и $a = -1.$

24.9. При каких значениях параметра a уравнение $6\sqrt{x-2} = ax + 7$ имеет единственное решение?

Решение. На рисунке построены графики функций $y = 6\sqrt{x-2}$ и $y = ax + 7.$ При изменении значения параметра a прямая $y = ax + 7$ поворачивается вокруг точки (0; 7). Зафиксируем три положения этой прямой: (1), (2), (3).

Прямая (1) проходит через точку (2; 0), прямая (2) параллельна оси Ox, прямая (3) касается графика функции $y = 6\sqrt{x-2}$.



Отметим, что прямой (1) ответствует значение $a = -3{,}5$, прямой (2) - $a = 0.$ Как видно из рисунка, искомыми значениями параметра являются те, которым соответствуют прямые, лежащие между прямыми (1) и (2), а также прямая (3). Иначе говоря, искомыми являются значения параметра, лежащие в промежутке $a \in [-3{,}5;0]$ и, кроме того, значение a, при котором прямая $y = ax + 7$ является касательной к кривой $y = 6\sqrt{x-2}$. Найдем это значение параметра a. Пусть x_0 - абсцисса точки касания, тогда можно заключить, что имеют место два числовых равенства:

$$\begin{cases} 6\sqrt{x_0 - 2} = ax_0 + 7 \\ 6 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x_0 - 2}} = a \end{cases}$$

Эта система выражает два факта: то, что в точке x_0 равны значения самих функций $y = 6\sqrt{x-2}$ и $y = ax + 7$, а также то, что равны и их производные.

Выразив из второго уравнения системы a и подставив в первое уравнение, будем иметь:

$$6\sqrt{x_0 - 2} = \frac{3x_0}{\sqrt{x_0 - 2}} + 7 \qquad (*)$$

Сделаем замену $\sqrt{x_0 - 2} = t_0.$ Равенство (∗), записанное через t_0, будет иметь вид

$$6t_0 = \frac{3\left(t_0^2 + 2\right)}{t_0} + 7.$$

Это последнее равенство, в свою очередь, можно переписать в виде $3t_0^2 - 7t_0 - 6 = 0,$ которое имеет решения $t_0 = 3$ и $t_0 = -2/3.$ Так как значение $t_0 = -2/3$ не удовлетворяет условию, остается $t_0 = 3$, откуда следует, что $x_0 = 11,\ a = 1.$

Ответ: $a \in [-3{,}5;0]$; $a = 1.$

24.11. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y + a = ax^2 \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Решение. Изобразим графики уравнений в одной системе координат (рис.?).

Из геометрических соображений видно, что система будет иметь наибольшее число решений (пять точек), если вершина параболы будет находиться в точке *B*, а ее ветви будут направлены вниз или, если вершина параболы будет находиться в точке *D*, а ее ветви будут направлены вверх. Такие ситуации возможны, если a соответственно равно (–2) или 2.

Ответ: $-2; 2$.

24.12. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + |x-1| = 0$ имеет три решения?

Решение. Если $a = 0,$ то уравнение имеет один корень $x = 1,$ что не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 0$. Перепишем данное уравнение в следующем виде: $ax^2 = -|x-1|$. Уравнение будет иметь решение только при $a < 0$.

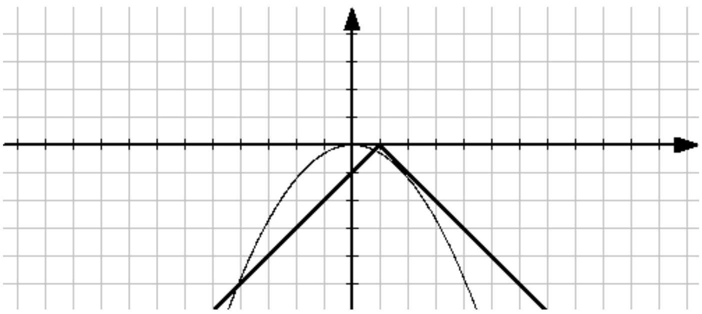


График функции $y = -|x-1|$ - «уголок» с вершиной в точке (1;0), ветви которого направлены вниз. Графиком функции $y = ax^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Вершина параболы – точка (0;0).

Уравнение будет иметь три решения только тогда, когда прямая $y = -x + 1$ будет касательной к графику функции $y = ax^2$. Пусть x_0 - абсцисса точки касания прямой $y = -x + 1$ с параболой $y = ax^2$.

Уравнение касательной имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

Запишем условия касания: $\begin{cases} y'(x_0) = -1, \\ ax_0^2 = -x_0 + 1; \end{cases}$

$\begin{cases} 2ax_0 = -1, \\ ax_0^2 = -x_0 + 1; \end{cases}$ откуда $x_0 = 2,\ a = -\dfrac{1}{4}$.

Ответ: при $a = -\dfrac{1}{4}$.

24.13. Определите, при каких значениях параметра b при любых значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0 \\ y + ax + ab = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения $(x; y)$. (МГУ, 2006)

Указание. Первое уравнение системы задает окружность

$\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = \dfrac{45}{4}$, а второе – прямую $y = -a(x+b)$, проходящую через точку $(-b; 0)$, не лежащую на одной горизонтали с центром $\left(\dfrac{5}{2}; -3\right)$ окружности. Следовательно, для того чтобы при любом значении углового коэффициента a такая прямая пересекала данную окружность ровно в двух различных точках, необходимо и достаточно, чтобы точка $(-b; 0)$ лежала внутри окружности, т.е. выполнялось неравенство

$$\left(-b - \frac{5}{2}\right)^2 + (0+3)^2 < \frac{45}{4}.$$

Ответ: $(-4; -1)$.

24.14. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(4;8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a-1)\log_2 x$.

Решение. 1). Пусть $\log_2 x = t,$ тогда при $x = 4$ имеем $t = 2$; если $x = 8$, то $t = 3$. Так как функция $t = \log_2 x$ непрерывная и возрастающая, то при всех значениях переменной x из промежутка (4;8] переменная t принимает все значения из промежутка (2;3].

2). Переформулируем задачу: найдите все значения a, для которых при каждом t из промежутка (2;3] значение выражения $t^2 - 8$ не равно значению выражения $(2a-1)t$.

3). Графиком функции $y = t^2 - 8$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Функция $y = (2a-1)t$ задает семейство прямых, проходящих через начало координат.

При увеличении углового коэффициента прямая поворачивается против часовой стрелки.

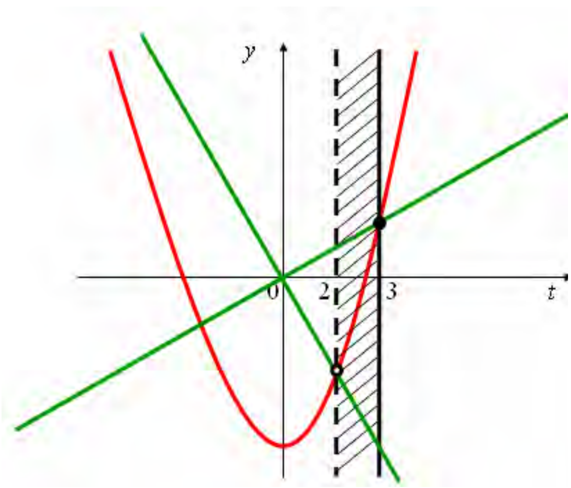
4). Парабола пересекает прямую $t = 2$ в точке (2;–4): $y = 22 – 8 = –4$. В этом случае угловой

коэффициент прямой $y=(2a-1)t$, проходящей через точку (2;–4), равен:
$2a-1=-2$. Парабола пересекает прямую $t=3$ в точке (3;1): $y=3^2-8=1$. В этом случае угловой коэффициент прямой $y=(2a-1)t$, проходящей через точку (3;1), равен:

$$2a-1=\frac{1}{3}.$$

5). Условие «значение выражения t^2-8 не равно значению выражения $(2a-1)t$ при $t\in(2;3]$» графически означает, что прямая $y=(2a-1)t$ не пересекает параболу на промежутке $(2;3]$. Это выполняется при условиях

$$\left[\begin{array}{l}2a-1\le -2\\ 2a-1>\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$



Решая совокупность неравенств, получаем ответ.

Ответ: $a\le -\frac{1}{2}$, $a>\frac{2}{3}$.

25. Гомотетия

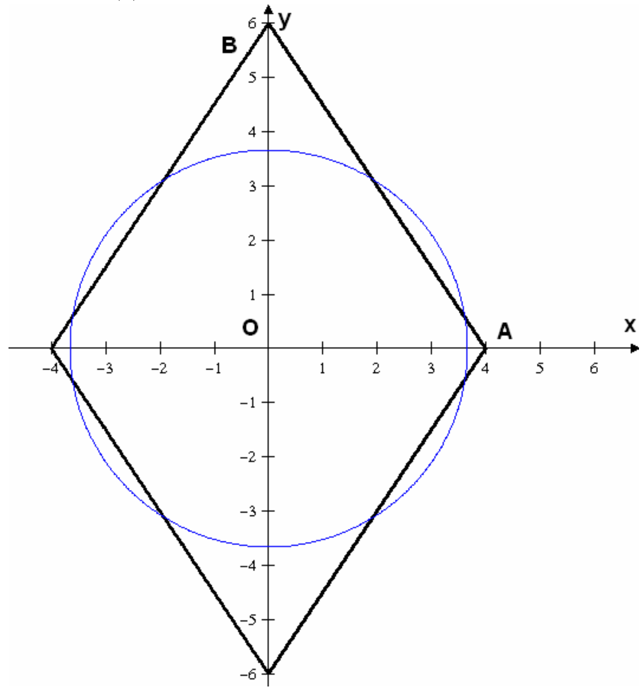
25.1. При каких действительных значениях параметра a система

$$\begin{cases}3|x|+2|y|=12\\ x^2+y^2=a\end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Решение. Уравнение $3|x|+2|y|=12$ задает ромб, точка пересечения диагоналей которого – начало координат (0;0), $OA=4$, $OB=6$.

Данная система имеет наибольшее число решений, когда окружность $x^2+y^2=a$ пересекает каждую сторону ромба в двух точках. Это возможно тогда, когда радиус этой окружности ($r=\sqrt{a}$) больше половины его меньшей диагонали.



Рассмотрим треугольник AOB: $h=OB\cdot\dfrac{OA}{AB}$,

где $OA=4$, $OB=6$, $AB=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$,

$$h=\frac{12\sqrt{13}}{13}.$$

Значит, $\dfrac{12\sqrt{13}}{13}<\sqrt{a}<4$ или $\dfrac{144}{13}<a<16$.

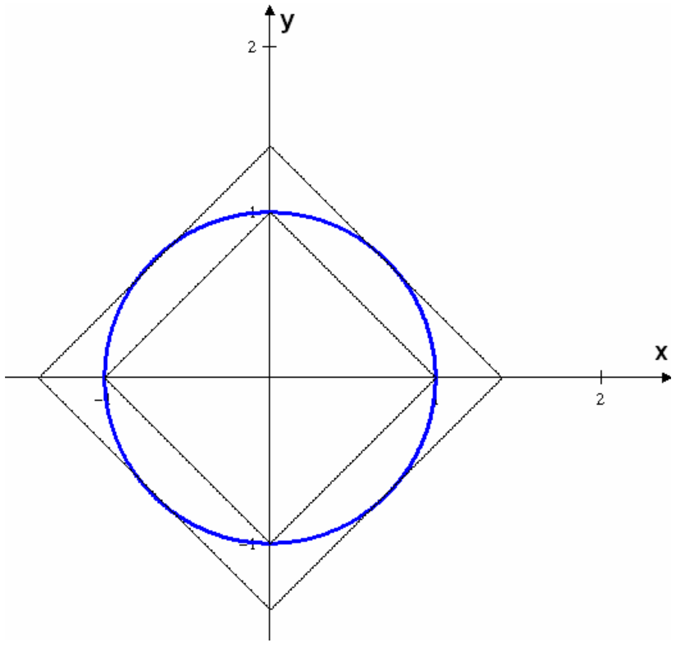
Ответ: $a\in\left(\dfrac{144}{13};16\right)$.

25.4. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ |x|+|y|=a\end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a?

Решение. Отметим, что при $a<0$ второе уравнение не имеет решений. Если $a=0$, то второе уравнение имеет решение (0;0), но оно не является решением первого уравнения. Пусть $a<0$. Графиком первого уравнения системы является окружность с центром (0;0) и радиуса 1. Второе уравнение задает семейство гомотетичных квадратов с центром гомотетии (0;0).



Если квадрат находится внутри окружности, то система не имеет решений. Когда квадрат окажется вписанным в окружность $(a=1)$, система будет иметь четыре решения. При $a=\sqrt{2}$ квадрат будет описанным около окружности и решений системы станет опять четыре. Если брать промежуточные значения $a \in (1;\sqrt{2})$, то каждая сторона квадрата имеет две общие точки с окружностью, а значит, система будет иметь восемь решений. При $a>\sqrt{2}$ система решений не имеет.

Ответ: если $a<1$ или $a>\sqrt{2}$, то нет решений; если $a=1$ или $a=\sqrt{2}$, то решений четыре; если $1<a<\sqrt{2}$, то решений восемь.

25.5. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+64-16x}+\sqrt{x^2+y^2+36+12y}=10\\ x^2+y^2=a^2\end{cases}$$

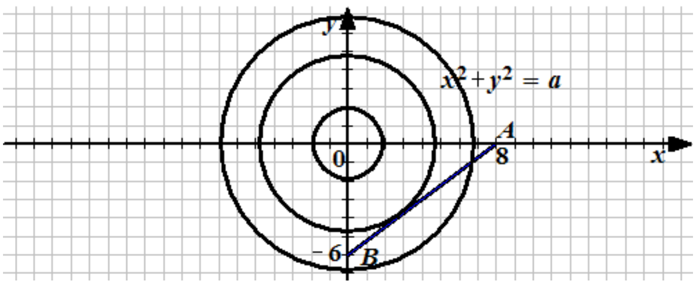
$(*)$

имеет единственное решение.

Решение. Первому уравнению системы $(*)$ удовлетворяют координаты точки $M(x;y)$ такой, что сумма расстояний от точки M до точек $A(8;0)$ и $B(0;-6)$ равна 10.

Так как расстояние AB равно 10, то точка M должна принадлежать отрезку AB (в противном случае сумма указанных расстояний была бы больше 10 согласно свойству сторон треугольника).

Итак, первому уравнению системы $(*)$ удовлетворяют координаты точек отрезка AB и только эти точки.



Второму уравнению системы $(*)$ удовлетворяют координаты точек окружности радиуса $|a|$ с центром $O(0;0)$. Эта окружность имеет с отрезком AB единственную общую точку в следующих случаях:

а) окружность касается отрезка AB; в этом случае $|a|=h$, где $h=\dfrac{6\cdot 8}{10}=\dfrac{24}{5}$;

б) окружность пересекает отрезок AB в одной точке; в этом случае ее радиус должен быть больше катета OB, но не превышать катета OA прямоугольного треугольника OAB, т.е. $6<|a|\le 8$.

Ответ: $-8\le a<-6,\ a=\pm\dfrac{24}{5},\ 6<a\le 8.$

25.6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}8xy-25=0,\\ x^2=y+2x\end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2+y^2\le a^2$.

Решение. Из второго уравнения системы выразим $y=x^2-2x$ и подставим в первое уравнение. Получим уравнение $8x^3-16x^2-25=0$. После замены $2x=t$ перейдем к приведенному уравнению $t^3-4t^2-25=0$. Среди делителей числа -25 легко находим корень $t=5$. Из разложения $(t-5)(t^2+t+5)=0$ следует, что приведенное уравнение других корней не имеет. Далее $2x=5,\quad x=2{,}5$ и $y=2{,}5^2-2\cdot 2{,}5=1{,}25$. Таким образом, данная система имеет единственное решение $(2{,}5;1{,}25)$.

Неравенство $x^2+y^2\le a^2$ задает круг с центром $(0;0)$ и радиуса $|a|$. Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно выполнение условия $a^2\ge OM^2$, где $O(0;0)$ и $M(2{,}5;1{,}25)$. Так как $OM^2=2{,}5^2+1{,}25^2=7{,}8125=(1{,}25\sqrt{5})^2$, то из неравенства $a^2 \ge (1{,}25\sqrt{5})^2$ или $|a| \ge 1{,}25\sqrt{5}$ получаем решения.

Ответ: $\left(-\infty;-1{,}25\sqrt{5}\right] \cup \left[1{,}25\sqrt{5};+\infty\right)$.

25.7. Найдите все значения параметра a, при которых количество корней уравнения $(2{,}5-a)x^3-2x^2+x=0$ равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a$ и $y=3-|x-1|$.

Решение. Уравнение $(2{,}5-a)x^3-2x^2+x=0$ при любом значении a равносильно совокупности уравнений $x=0$ и $(2{,}5-a)x^2-2x+1=0.$

А) Исследуем второе уравнение.

1) Если $a=2{,}5$, то получаем линейное уравнение, которое имеет один корень $x=0{,}5$ (исходное уравнение – два различных корня).

2) Если $a \ne 2{,}5$, то имеем квадратное уравнение, дискриминант которого равен $D_1=1-(2{,}5-a)=a-1{,}5.$

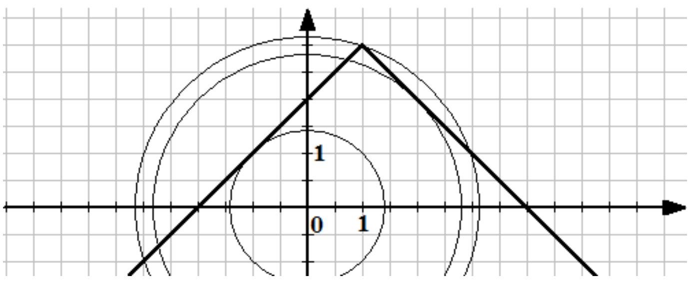
а) $D_1=0$ при $a=1{,}5.$ Квадратное уравнение имеет один корень $x=1$ (исходное уравнение – два различных корня).

б) $D_1>0$ при $a>1{,}5$ (учтем, что $a \ne 2{,}5$). Квадратное уравнение имеет два различных корня, отличных от нуля (исходное уравнение – три различных корня)

в) $D_1<0$ при $a<1{,}5.$ Квадратное уравнение не имеет корней (исходное уравнение имеет один корень).

Б) Исследуем систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ y=3-|x-1|. \end{cases}$

При $a \le 0$ система не имеет решений. Пусть $a>0.$ Первое уравнение системы при $a>0$ задает семейство окружностей с центром (0;0) и радиуса $r=\sqrt{a}$ $\left(r^2=a\right)$. Второе уравнение системы задает неподвижный уголок с вершиной (1;3), состоящий из частей прямых с угловыми коэффициентами $k=1$ или $k=-1.$



1) Окружность имеет одну общую точку с неподвижным графиком (касается с частью прямой $y=x+2$), если радиус $r=\sqrt{2}$, тогда $a=\left(\sqrt{2}\right)^2=2.$ При $a<2$ нет общих точек.

2) Если окружность касается с другой частью прямой $y=4-x$, то радиус окружности $r=2\sqrt{2}$ и $a=8.$ В этом случае окружность с уголком имеет три общих точки. При $a \in (2;8)$ - две общие точки.

3) Пусть окружность проходит через вершину уголка. Радиус такой окружности равен $r=\sqrt{10}$, $a=10.$ В этом случае графики имеют три общие точки. При $a \in (8;10)$ - четыре общие точки, при $a>10$ - две общие точки.

Исследуя количество корней данного уравнения и количество общих точек данных линий (количество решений системы), получаем ответ.

Ответ: $\{2{,}5;8;10\}$.

26. Уравнения

26.1. Найдите число различных решений уравнения $\left|x^2+2x-3\right|=a$ в зависимости от параметра a.

Решение. Построим график функции $y=\left|x^2+2x-3\right|$. Характеристическими точками графика являются точки $A(1;0)$, $B(-3;0)$ и $C(-1;4)$. Уравнение $\left|x^2+2x-3\right|=a$ имеет столько различных решений, сколько раз прямая $y=a$ пересекает график функции $y=\left|x^2+2x-3\right|$.

Из рисунка видно, что:

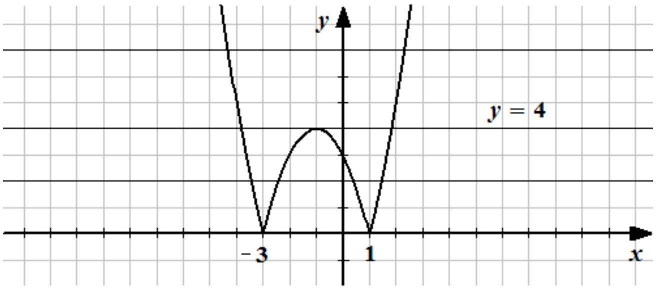
если $a<0,$ то графики не имеют общих точек, т.е. нет решения;

если $a=0,$ то графики имеют две общие точки (A и B), т.е. данное уравнение имеет два решения;

если $0<a<4,$ то графики пересекаются в четырех точках – что дает четыре решения;

если $a=4,$ то графики имеют три общие точки, т.е. исходное уравнение имеет три решения;

если $a>4,$ то графики имеют две общие точки и заданное уравнение имеет два решения.



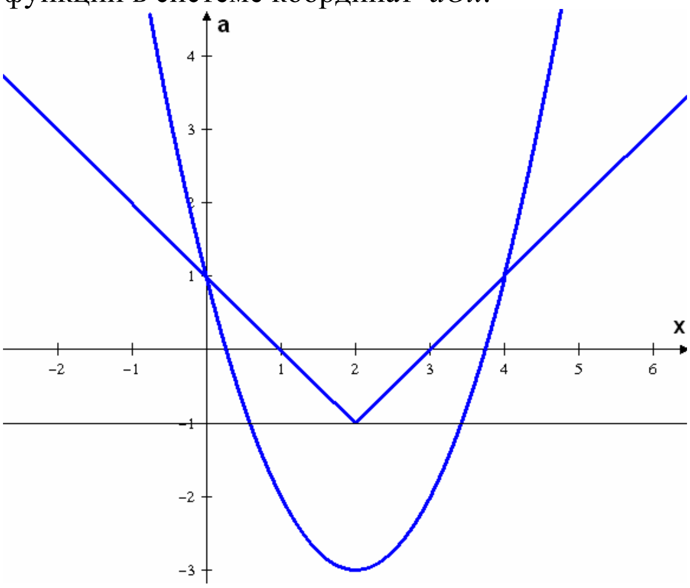
Ответ: нет решений, если $a < 0$; два решения, если $a = 0$ или $a > 4$; три решения, если $a = 4$; четыре решения, если $0 < a < 4$.

26.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$$

имеет ровно три различных корня.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $a = x^2 - 4x + 1$ и $a = |x - 2| - 1$. Построим графики полученных функций в системе координат aOx.



Из рисунка видим, что условию задачи удовлетворяет одно значение $a = -1$.

Ответ: $a = -1$.

26.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a.$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Указание. Переформулируем задачу: найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

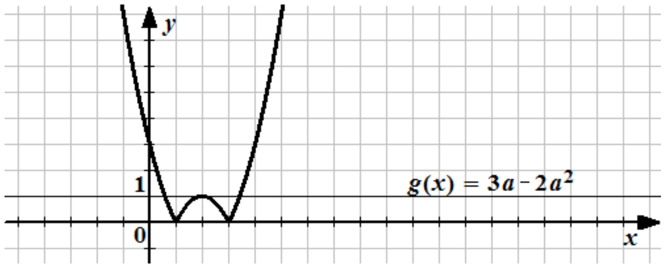
$$x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a = 0.$$

имеет более чем два решения.

Ответ: (–3,5;1).

26.7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 - 4x + 3| = 3a - 2a^2$ имеет ровно три различных корня.

Решение. Определим, при каких значениях параметра a графики функций $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ и $g(x) = 3a - 2a^2$ имеют ровно три общих точки на координатной плоскости xOy.



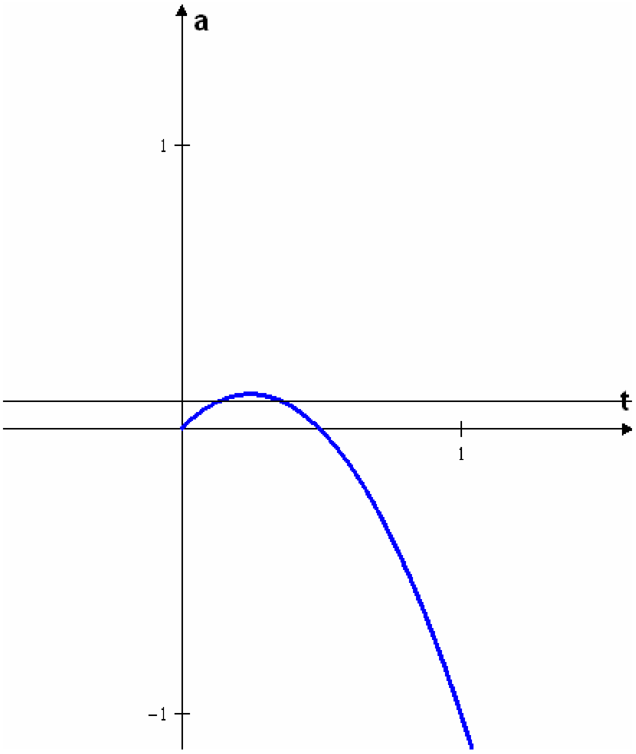
По графику видно, что требованию задачи отвечает случай $3a - 2a^2 = 1$. Отсюда $a = 0{,}5$ или $a = 1$.

Замечание. При решении такого типа задач полезно разобрать сразу все возможные случаи наличия корней в данном уравнении и необходимые для этого условия.

Ответ: $a = 0{,}5$ или $a = 1$.

26.9. При каких значениях a уравнение $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ имеет четыре различных корня?

Решение. Сделав замену $|\log_3 x| = t$, где $t \geq 0$, получим уравнение $2t^2 - t + a = 0$, которое должно иметь два различных положительных корня. Построим график функции $a = -2t^2 + t$, где $t > 0$. Координаты вершины параболы $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right)$.



Из рисунка видим, что прямые $a = const$ пересекают график в двух точках при $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right)$.

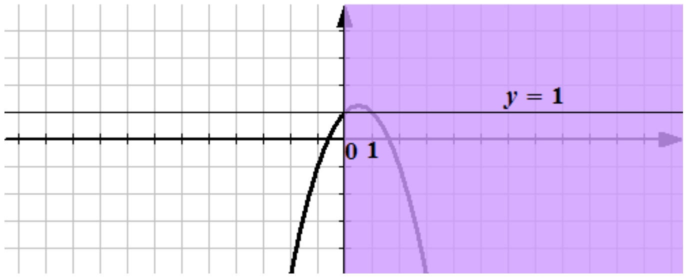
26.10. Найдите все значения p, при которых уравнение $7 - 2\cos x = p\left(1 + tg^2 x\right)$ имеет хотя бы один корень.

Указание. Сделав замену $\cos x = t$, где $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$, приведите уравнение к виду $p = -2t^3 + 7t^2$.

Ответ: $(0; 9]$.

26.11. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет единственное решение?

Решение. После замены $\sqrt{x+1} = t$ имеем квадратное уравнение $t^2 - t + a - 1 = 0$, где $t \ge 0$. Перепишем уравнение в виде $-t^2 + t + 1 = a$. Рассмотрим неподвижный график функции $y = -t^2 + t + 1$, где $t \ge 0$ и семейство прямых $y = a$, параллельных оси t. Найдем координаты вершины параболы $(0{,}5; 1{,}25)$. Графики будут пересекаться в одной точке при $a = 1{,}25$ или $a < 1$.



Ответ: $a = 1{,}25$ или $a < 1$.

27. Неравенства (метод областей)

27.1. Найдите все значения a, при которых неравенство $\log_a\left(x^2 + 4\right) > 1$ выполняется для всех значений x. (МГУ, 2005)

Решение. Используя метод рационализации, заменим данное неравенство равносильной системой

$$\begin{cases} (a-1)\left(x^2 + 4 - a\right) > 0 \\ a > 0 \\ a \ne 1 \end{cases}$$

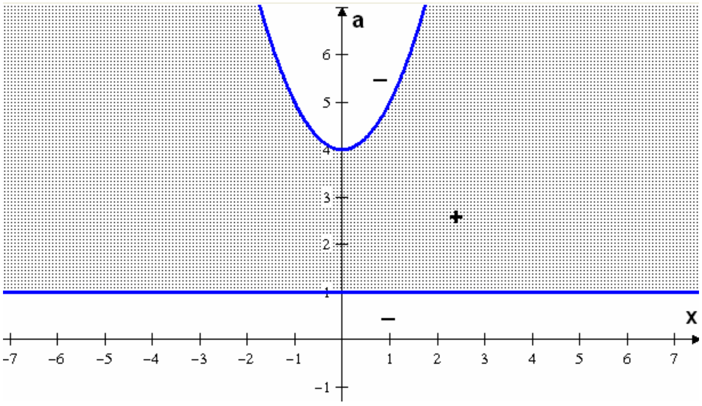
Для решения первого неравенства системы используем метод областей.

1) Обозначим $F(x; a) = (a-1)\left(x^2 + 4 - a\right)$.

2) Для выражения $F(x; a)$ переменные x и a принимают любые значения.

3) $F(x; a) = 0$, $(a-1)\left(x^2 + 4 - a\right) = 0$, отсюда $a = 1$ или $a = x^2 + 4$.

4) Имеем прямую и параболу, которые разбивают координатную плоскость на области, в каждой из которых выражение $F(x; a)$ сохраняет знак. Возьмем контрольную точку $(0; 0)$: $F(0; 0) = -4 < 0$. Ставим знак минус в области, содержащей точку $(0; 0)$. В остальных областях расставляем знаки, используя правило знакочередования. Множество точек, координаты которых удовлетворяют первому неравенству системы, выделены цветом. Условия $a > 0$, $a \ne 1$ учтены. Проводя прямые, параллельные оси x, видим, что полностью прямые находятся в заштрихованной области при $a \in (1; 4)$.



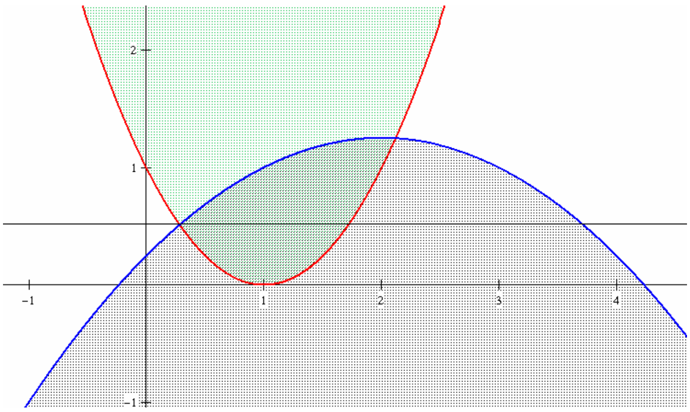
Замечание. Для данного примера линии на рисунке должны бать штриховыми, а не сплошными.

Ответ: $(1;4)$.

27.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2-2x\le a-1$ и $x^2-4x\le 1-4a$ образуют на числовой оси отрезок длины единица.

Решение. Считая переменную a зависимой от переменной x, перепишем неравенства в следующем виде: $a\ge x^2-2x+1$ и $a\le -\frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{4}$. Графическое решение первого неравенства в системе координат xOa представляет множество точек, лежащих выше параболы или на ней, для второго неравенства – не выше соответствующей параболы. Общая часть и есть графическое решение данных неравенств с двумя переменными.

Решая каждое из квадратных уравнений $x^2-2x+1-a=0$ и $x^2-4x+4a-1=0$, получаем, что каждая из парабол состоит из двух полупарабол (уравнения корней) $x=1-\sqrt{a}$ или $x=1+\sqrt{a}$ и $x=2-\sqrt{5-4a}$ или $x=2+\sqrt{5-4a}$.



Область решений ограничена либо графиками функций $x=1-\sqrt{a}$ и $x=1+\sqrt{a}$, либо $x=1+\sqrt{a}$ и $x=2-\sqrt{5-4a}$.

Согласно условию задачи имеем

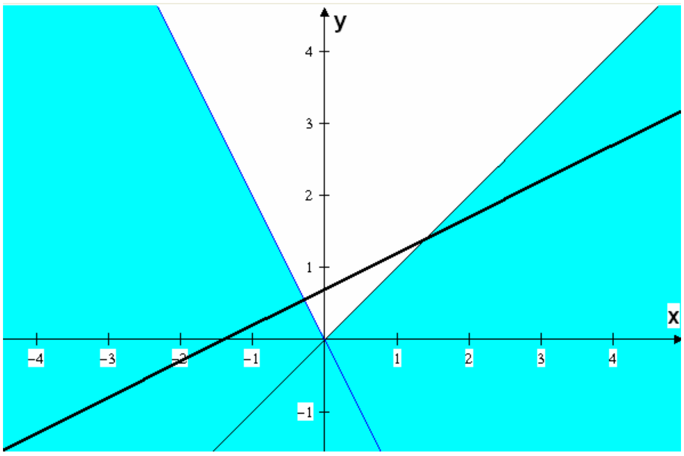
$$\left[\begin{array}{l}1+\sqrt{a}-\left(1-\sqrt{a}\right)=1\\ 1+\sqrt{a}-\left(2-\sqrt{5-4a}\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sqrt{a}=1\\ \sqrt{5-4a}=2-\sqrt{a}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{4}\\ a=1.\end{array}\right.$$

Ответ: $a=\frac{1}{4}$ или $a=1$.

27.8. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $y+2x\ge a$ и $y-x\ge 2a$ являются решениями неравенства $2y-x>a+3$.

Решение. Первые два неравенства $y\ge -2x+a$ и $y\ge x+2a$ задают на координатной плоскости угол с вершиной $\left(-\frac{a}{3};\frac{5a}{3}\right)$. Чтобы все точки угла полностью принадлежали множеству решений неравенства $y>\frac{x}{2}+\frac{a+3}{2}$ (верхняя полуплоскость) необходимо и достаточно принадлежности вершины угла. Имеем $\frac{5a}{3}>-\frac{a}{6}+\frac{a+3}{2}$, отсюда $a>\frac{9}{8}$.



Ответ: $a>\frac{9}{8}$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Графики функций и уравнений

1.1. Прямая на плоскости

• Уравнение $px+qy+r=0$, где p,q,r - действительные числа и $p^2+q^2\neq 0$, задает на координатной плоскости прямую линию.

• Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=kx+b$.

• Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$$

• Уравнение прямой в отрезках на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a\neq 0,\ b\neq 0)$$

1.2. Две прямые на плоскости

• Взаимное расположение двух прямых

$$y=k_1x+b_1 \quad \text{и} \quad y=k_2x+b_2$$

а) совпадающие:

$$\begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$$

б) параллельные:

$$\begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1\neq b_2 \end{cases}$$

в) пересекающиеся: $k_1\neq k_2$

г) перпендикулярные: $k_1k_2=-1$.

• Взаимное расположение двух прямых

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{и} \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

а) совпадающие:

$$\begin{cases} a_1b_2=a_2b_1 \\ a_1c_2=a_2c_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

б) параллельные:

$$\begin{cases} a_1b_2=a_2b_1 \\ a_1c_2\neq a_2c_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

в) пересекающиеся:

$$a_1b_2\neq a_2b_1 \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

г) перпендикулярные:

$$a_1a_2+b_1b_2=0 \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{b_1}=-\frac{b_2}{a_2}.$$

• Пусть коэффициенты уравнений системы

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

отличны от нуля. Тогда:

1) чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1};$$

2) чтобы система имела бесконечно много решений, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1};$$

3) чтобы система не имела решений, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}.$$

Случай, когда коэффициенты равны нулю, нужно рассматривать отдельно.

• Уравнение $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$, где $a_i^2+b_i^2\neq 0 \quad (i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости две пересекающиеся прямые.

• Уравнение $|a_1x+b_1y+c_1|=|a_2x+b_2y+c_2|$, где $a_i^2+b_i^2\neq 0 \quad (i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости две пересекающиеся прямые.

• Уравнение $|a_1x+b_1y+c_1|=a_2x+b_2y+c_2$, где $a_i^2+b_i^2\neq 0 \quad (i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости угол.

• Уравнение $|ax+by+c|=m$, где $m>0$ и $a^2+b^2\neq 0$, задает на координатной плоскости пару параллельных прямых.

1.3. Окружность (эллипс)

• Уравнение $(x-m)^2+(y-n)^2=a^2$ задает на координатной плоскости окружность радиуса $R=|a|$ с центром в точке $C(m;n)$ при $a\neq 0$; если $a=0$, то это сама точка C.

• Уравнение $(x-m)^2+(y-n)^2=a$ задает на координатной плоскости окружность радиуса $R=\sqrt{a}$ с центром в точке $C(m;n)$ при $a>0$; если $a=0$, то это сама точка C; если $a<0$, то пустое множество.

• Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

с центром в точке $C(m;n)$ и полуосями a и b $(a>0,\ b>0)$.

1.4. Парабола

• Функция $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ задает параболу с вершиной в точке $C(x_в; y_в)$.

• Функция $y = a(x-m)^2 + n \ (a \neq 0)$ задает параболу с вершиной в точке $C(m; n)$.

• Каноническое уравнение параболы:

$$(y-n)^2 = 2p(x-m).$$

• Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

1) Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0) \qquad (*)$$

не имеет решений тогда и только тогда, когда $D < 0$.

2) Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) два различных корня тогда и только тогда, когда $D > 0$;

б) два (может быть кратных) корня тогда и только тогда, когда $D \geq 0$.

3) Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) два корня $x_1 < M < x_2$ тогда и только тогда, когда $a \cdot f(M) < 0$;

б) два корня $x_1 = M < x_2$ или $x_1 < M = x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(M) = 0 \\ x_в > M \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(M) = 0 \\ x_в < M \end{cases}$$

4). Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) два (может быть кратных) корня $x_1, \, x_2 > M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \\ x_в > M \end{cases}$$

б) два разных корня $x_1, \, x_2 > M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \\ x_в > M \end{cases}$$

в) два (может быть кратных) корня $x_1, \, x_2 \geq M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(M) \geq 0 \\ x_в \geq M \end{cases}$$

г) единственное решение $x_1 = x_2 > M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = 0 \\ x_в > M \end{cases}$$

5). Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) два (может быть кратных) корня $x_1, \, x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \\ x_в < M \end{cases}$$

б) два разных корня $x_1, \, x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \\ x_в < M \end{cases}$$

в) два (может быть кратных) корня $x_1, \, x_2 \leq M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(M) \geq 0 \\ x_в \leq M \end{cases}$$

г) единственное решение $x_1 = x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = 0 \\ x_в < M \end{cases}$$

6). Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) корни $x_1 < m < M < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}$$

б) корни $x_1 = m < M < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(m) = 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}$$

в) корни $x_1 < m < M = x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0 \\ f(M) = 0 \end{cases}$$

7). Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) корни $x_1 < m < x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases}$$

б) корни $m < x_1 < M < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) > 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}$$

8). Квадратное уравнение (∗) имеет один корень внутри интервала $(m;M)$, а другой расположен вне этого интервала тогда и только тогда, когда
$$f(m)\cdot f(M)<0.$$
9). Квадратное уравнение (∗) имеет

а) разные корни $m<x_1<x_2<M$ или (может быть) кратные корни $m<x_1\le x_2<M$ тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases}D>0\\ a\cdot f(m)>0\\ a\cdot f(M)>0\\ m<x_в<M\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}D\ge 0\\ a\cdot f(m)>0\\ a\cdot f(M)>0\\ m<x_в<M\end{cases}$$
б) разные корни $m\le x_1<x_2<M$ или (может быть) кратные корни $m\le x_1\le x_2<M$ тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases}D>0\\ a\cdot f(m)\ge 0\\ a\cdot f(M)>0\\ m<x_в<M\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}D\ge 0\\ a\cdot f(m)\ge 0\\ a\cdot f(M)>0\\ m\le x_в<M\end{cases}$$
в) разные корни $m<x_1<x_2\le M$ или (может быть) кратные корни $m<x_1\le x_2\le M$ тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases}D>0\\ a\cdot f(m)>0\\ a\cdot f(M)\ge 0\\ m<x_в<M\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}D\ge 0\\ a\cdot f(m)>0\\ a\cdot f(M)\ge 0\\ m<x_в\le M\end{cases}$$
г) разные корни $m\le x_1<x_2\le M$ или (может быть) кратные корни $m\le x_1\le x_2\le M$ тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases}D>0\\ a\cdot f(m)\ge 0\\ a\cdot f(M)\ge 0\\ m<x_в<M\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}D\ge 0\\ a\cdot f(m)\ge 0\\ a\cdot f(M)\ge 0\\ m\le x_в\le M\end{cases}$$

1.5. Гипербола

• Уравнение $(x-m)(y-n)-k=0$ при $k\ne 0$ задает на координатной плоскости семейство гипербол $y=\dfrac{k}{x-m}+n$ с центром симметрии $C(m;n)$ и асимптотами $x=m$ и $y=n$.

• Функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $c\ne 0$ и $ad-bc\ne 0$, задает на координатной плоскости гиперболу.

• Каноническое уравнение гиперболы:
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right)$$

1.6. Параллелограмм

• Уравнение $|a_1x+b_1y+c_1|+|a_2x+b_2y+c_2|=m$, где $m>0$ и $a_i^{\,2}+b_i^{\,2}\ne 0$ $(i=1;2)$, $\dfrac{a_1}{a_2}\ne\dfrac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости параллелограмм.

• «Уравнение ромба в отрезках»:
$$\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}=1,\ \text{где}\ \ k>0,\ l>0.$$
• Уравнение квадрата: $|x|+|y|=k$, где $k>0$.

<u>2. Преобразование графиков</u>

• Если график функции $y=f(x)$ построен, то

1. График функции $y=f(x-a)$ может быть получен переносом графика функции $y=f(x)$ на a единиц вправо, если $a>0$; на a единиц влево, если $a<0$.

2. График функции $y=f(x)+b$ может быть получен переносом графика функции $y=f(x)$ на b единиц вверх, если $b>0$; на b единиц вниз, если $b<0$.

3. График функции $y=f(kx)$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ сжатием в k раз к оси y, если $k>1$; растяжением в $\dfrac{1}{k}$ раз, если $0<k<1$; преобразованием симметрии относительно оси y, если $k=-1$.

4. . График функции $y=m\cdot f(x)$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ растяжением от оси x, если $m>1$; сжатием к оси x, если $0<m<1$; преобразованием симметрии относительно оси x, если $m=-1$.

5. Для построения графика функции $y=f(|x|)$ надо:

а) стереть все точки графика функции $y=f(x)$, лежащие слева от оси y;

б) оставить на месте все точки графика функции, лежащие на оси y и справа от нее;

в) отобразить правую часть графика симметрично относительно оси y.

6. График функции $y = |f(x)|$ получается из графика $y = f(x)$ следующим образом:

а) все точки графика $y = f(x)$, лежащие на оси x и выше ее, остаются на месте;

б) все точки графика $y = f(x)$, лежащие ниже оси x, симметрично отображаются относительно оси x.

• График уравнения $f(x-m;y)=0$ получается из графика уравнения $f(x;y)=0$ переносом на m единиц вправо, если $m>0$; на m единиц влево, если $m<0$.

• График уравнения $f(x;y-n)=0$ получается из графика уравнения $f(x;y)=0$ переносом на n единиц вверх, если $n>0$; на n единиц вниз, если $n<0$.

• Графики уравнений $f(x;y)=0$ и $f(-x;y)=0$ симметричны относительно оси y.

• Графики уравнений $f(x;y)=0$ и $f(x;-y)=0$ симметричны относительно оси x.

• График уравнения $f(kx;y)=0$ получается из графика уравнения $f(x;y)=0$ сжатием вдоль оси x в k раз, если $k \ge 1$ (при $0<k<1$ получаем растяжение в $1/k$ раз).

• График уравнения $f(x;ky)=0$ получается из графика уравнения $f(x;y)=0$ сжатием вдоль оси y в k раз, если $k \ge 1$ (при $0<k<1$ получаем растяжение в $1/k$ раз).

3. Решение неравенств с двумя переменными

3.1. Графическое решение неравенств

Неравенство с двумя переменными x и y $f(x;y) > \varphi(x;y)$ можно записать в виде

$$F(x;y) > 0, \qquad (1)$$

где $f(x;y), \varphi(x;y), F(x;y)$ - многочлены с указанными переменными. Неравенства, содержащие неизвестные, могут быть и другого вида:

$$F(x;y) < 0, F(x;y) \ge 0, F(x;y) \le 0.$$

Решением неравенства (1) называется упорядоченная пара действительных чисел $(x_0;y_0)$, обращающая это неравенство в верное числовое неравенство. Графически это соответствует заданию точки $(x_0;y_0)$ координатной плоскости. Решить неравенство – значит, найти множество всех его решений. Совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству (1), называется *областью* его *решений*.

Неравенства называются *равносильными*, если они имеют одну и ту же область решений.

Полезно будет напомнить здесь одно простое утверждение: график уравнения $F(x;y) = y - f(x) = 0$, где $f(x)$ - многочлен, делит координатную плоскость на две области так, что при переходе из одной области в другую значение выражения $F(x;y)$ меняет знак на противоположный.

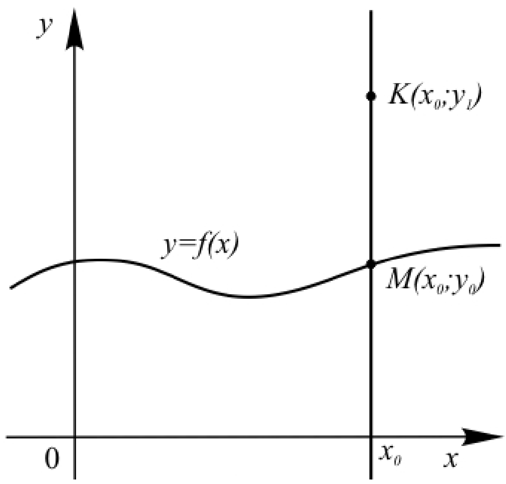


Рис. 1

Действительно, если взять любую точку (рис. 1), лежащую выше графика, то ее ордината будет больше, чем ордината точки, имеющей такую же абсциссу, но лежащей на графике. То есть множество точек плоскости, расположенных выше графика, будет геометрическим изображением решения неравенства $y > f(x)$, т.е. $F(x;y) > 0$. Для точек, лежащих ниже графика, имеет место неравенство $F(x;y) < 0$.

Аналогично можно сформулировать утверждение для графика уравнения $F(y;x) = x - \varphi(y) = 0$, где $\varphi(y)$ - многочлен.

Многочлен можно заменить на элементарную функцию. Например, для выражений

$$F(x;y) = y - \log_2 x \text{ и } F(x;y) = y - \frac{k}{x} \quad (k>0)$$

на рисунках 2 и 3 соответственно представлены решения неравенства $F(x;y) \ge 0$.

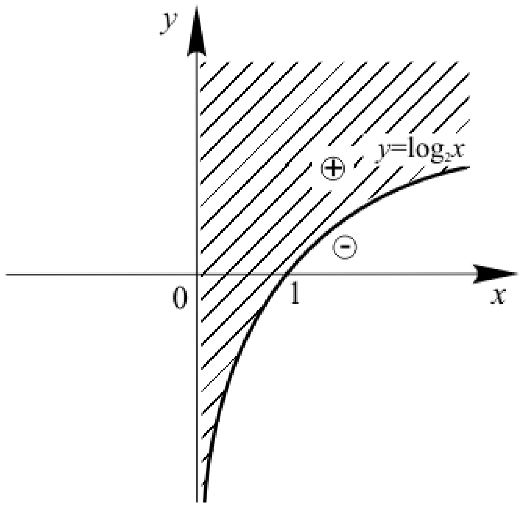


Рис. 2

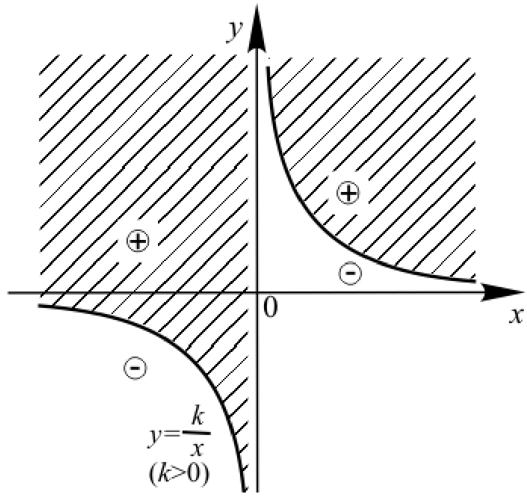


Рис. 3

Указанные утверждения удобно использовать, если в неравенстве удается выразить переменную y (или x) в явном виде, то есть уединить эту переменную в одной из частей неравенства. Ниже будут рассмотрены неравенства (уравнения), в которых переменная y (или x) задана в неявном виде.

3.2. Области знакопостоянства линейного многочлена $F(x;y) = px + qy + r$

Уравнение $px + qy + r = 0$, где $p^2 + q^2 \neq 0$, задает прямую линию. Геометрической интерпретацией решения линейного неравенства с двумя переменными является следующая теорема.

Теорема 1. Прямая $px + qy + r = 0$, где $p^2 + q^2 \neq 0$, разбивает координатную плоскость на две открытые полуплоскости так, что координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют неравенству $px + qy + r > 0$, а другой - неравенству $px + qy + r < 0$.

Исходя из теоремы 1, можно сформулировать свойство чередования знака для линейного многочлена

$$\Phi(x;\, y) = px + qy + r \quad (p^2 + q^2 \neq 0):$$

при переходе через точку прямой $px + qy + r = 0$ *из одной полуплоскости в другую знак значения многочлена* $\Phi(x;\, y)$ *меняется на противоположный.*

- Если прямые $F_1(x;y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $F_2(x;y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ пересекаются, то каждая из систем неравенств

$$\begin{cases} F_1 \geq 0 \\ F_2 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \geq 0 \\ F_2 \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \leq 0 \\ F_2 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \leq 0 \\ F_2 \leq 0, \end{cases}$$

задает на координатной плоскости множество внутренних точек угла, включая границы (сделайте рисунок и рассмотрите все возможные случаи). Например, совокупность $\left[\begin{array}{l} F_1 < 0 \\ F_2 < 0, \end{array}\right.$ соответствующая системе неравенств $\begin{cases} F_1 \geq 0 \\ F_2 \geq 0, \end{cases}$ задает оставшуюся часть, исключая границы (координатную плоскость с «вырезанным» углом). Аналогичные утверждения верны и для других пар систем и совокупностей неравенств. Другими словами, в алгебре указанные совокупность и система неравенств являются логическими отрицаниями друг друга, а на координатной плоскости им соответствующие множества точек являются дополнениями друг друга до всей плоскости.

- Неравенство $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \leq 0$ (или $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \geq 0$), где $a_i^2 + b_i^2 \neq 0 \quad (i = 1;2)$, $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек вертикальных углов, включая границы.

3.3. Метод областей и его обобщения

- Рассмотрим выражение

$$F(x;y) = F_1(x;y) \cdot F_2(x;y) \cdot \ldots \cdot F_n(x;y), \qquad (2)$$

где $F_i(x;y) = p_ix + q_iy + r_i$, причем прямые $p_ix + q_iy + r_i = 0$ и $p_jx + q_jy + r_j = 0$ попарно различны $(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n;\, i \neq j)$.

Выражению (2) соответствует разбиение

плоскости на области прямыми линиями $p_i x + q_i y + r_i = 0$ $(i = 1,2,...,n)$. Точки пересечения прямых будем называть *особыми точками* границы области, другие точки - *обыкновенными*. Метод областей опирается на следующее свойство чередования знака выражения (2): *при переходе через обыкновенную точку прямой* $p_i x + q_i y + r_i = 0$ *(границы области) из одной области в смежную знак значения выражения (2) меняется на противоположный.*

Действительно, при переходе через прямую линию $p_i x + q_i y + r_i = 0$ в выражении (2) меняет знак только один множитель $p_i x + q_i y + r_i$.

Пример 1. Решите графически неравенство $(y+x)(x-y-1)(x+2) \ge 0$.

Решение. На координатной плоскости xOy строим сплошными линиями график уравнения $(y+x)(x-y-1)(x+2) = 0$, состоящий из трех прямых $y = -x$, $y = x-1$ и $x = -2$ (рис.4). Многочлену $F(x;y) = (y+x)(x-y-1)(x+2)$ соответствует разбиение плоскости $(x;y)$ на семь областей. Возьмем пробную точку (3;0) и определим знак значения выражения $F(x;y)$ в этой точке: $F(3;0) = 30$; 30 > 0. Ставим знак плюс в области, содержащей точку (3;0). Далее, используя свойство чередования знака выражения $F(x;y)$ вида (2), расставляем знаки в остальных областях. Нумерация областей на рисунке показывает последовательность их обхода (последовательность обхода может быть и другой). Выбираем области, содержащие знак плюс и решения уравнения $F(x;y) = 0$.

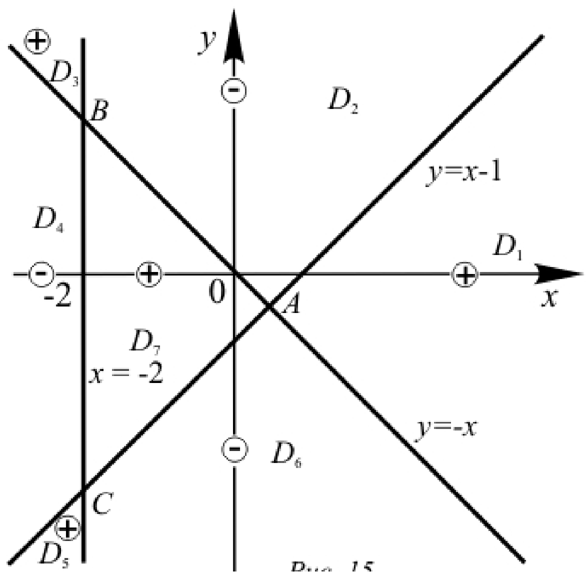


Рис. 4

- Пусть дано выражение вида

$F(x;y) = F_1^{k_1}(x;y) \cdot F_2^{k_2}(x;y) ... F_n^{k_n}(x;y)$ (3)

где $F_i(x;y) = p_i x + q_i y + r_i$, причем прямые $p_i x + q_i y + r_i = 0$ и $p_j x + q_j y + r_j = 0$ попарно различны $(i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n; i \neq j)$. $k_1, k_2, ..., k_n$ - фиксированные натуральные числа и выражению $F(x;y)$ соответствует разбиение плоскости на области.

Для решения неравенства (1), где выражение $F(x;y)$ имеет вид (3), используется *обобщенный метод областей,* который опирается на следующее правило чередования знака выражения: *при переходе через обыкновенную точку прямой* $p_i x + q_i y + r_i = 0$ *(границы области) из одной области в смежную знак значения выражения (3) меняется на противоположный, если* k_i *- нечетное число, и не меняется, если* k_i *- четное число.*

Далее показано другое обобщение метода областей, связанное с заменой в выражениях вида (2) или (3) линейных многочленов $F_i(x;y)$ на нелинейные многочлены с известными областями знакопостоянства.

3.4. Области знакопостоянства многочленов *F(x; y)* второй степени

Рассмотрим кривые второго порядка: эллипс (в частности, окружность), гиперболу, параболу.

Теорема 2. Окружность $(x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2$ (с центром в точке $A(m;n)$ и радиуса $R > 0$) делит координатную плоскость на две части так, что координаты точек, лежащих вне окружности, удовлетворяют неравенству $(x-m)^2 + (y-n)^2 > R^2$, а расположенных внутри окружности – неравенству $(x-m)^2 + (y-n)^2 < R^2$.

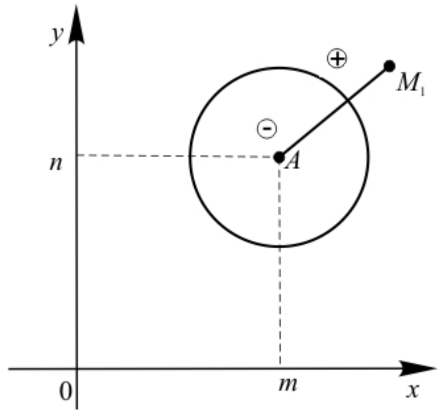


Рис. 5

Теорема 3. Эллипс, заданный каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, делит координатную плоскость на две части так, что координаты точек, лежащих вне эллипса, удовлетворяют неравенству $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$, а расположенных внутри эллипса – неравенству $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$.

Для эллипса $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ аналогично формулируется утверждение о знакочередовании значения выражения
$F(x;y)=\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}-1$.

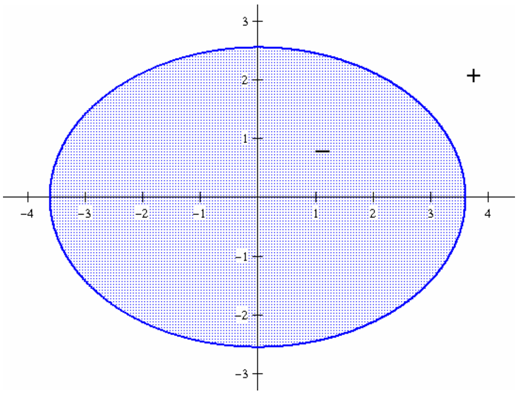


Рис. 6

Отсюда как следствие вытекает теорема 2.

Теорема 4. Гипербола $xy-k=0$ $(k\neq 0)$ делит координатную плоскость на три области так, что при переходе из одной области в смежную выражение $F(x;y)=xy-k$ меняет знак на противоположный.

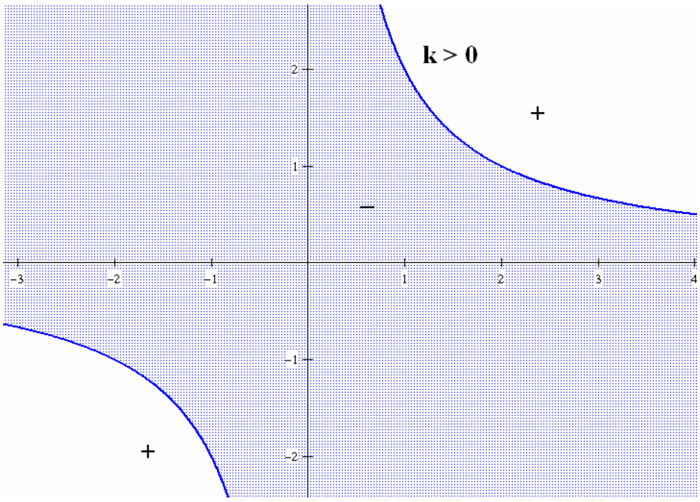


Рис. 7

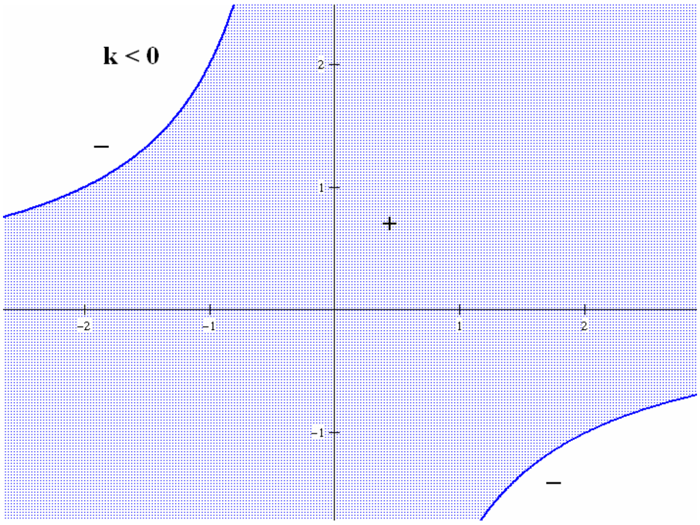


Рис. 8

Аналогичное свойство знакочередования формулируется для гиперболы
$(x-m)(y-n)-k=0 \quad (k\neq 0)$.

Сравните расположение знаков выражений $F(x;y)=y-\frac{k}{x}$ и $F(x;y)=xy-k$ для одного и того же графика на координатной плоскости (рис. 3 и 7).

Теорема 5. Гипербола, заданная каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right)$, делит координатную плоскость на три области так, что при переходе из одной области в смежную значение выражения

$$F(x;y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1 \quad \left(F(x;y)=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-1\right)$$

меняет знак на противоположный.

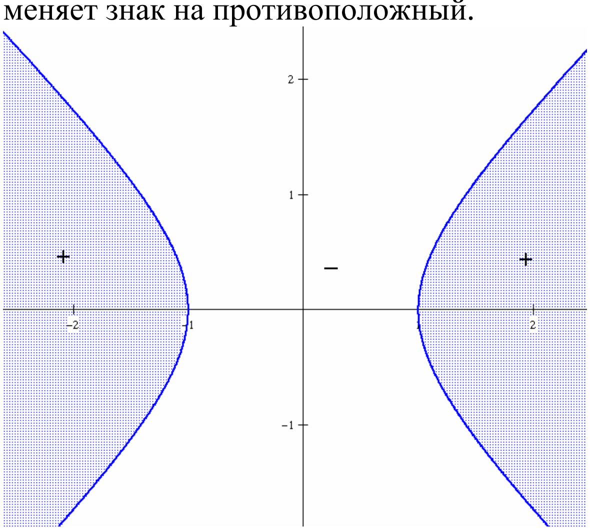


Рис. 9

Аналогичное свойство формулируется для гипербол

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{(y-n)^2}{b^2}-\frac{(x-m)^2}{a^2}=1.$$

Теорема 6. Парабола, заданная каноническим уравнением $y^2=2px$ $(p>0$ или $p<0)$, делит координатную плоскость на две области так, что при переходе из одной области в другую значение выражения $F(x;y)=y^2-2px$ меняет знак на противоположный.

Аналогичное свойство формулируется для параболы $(y-n)^2=2p(x-m)$.

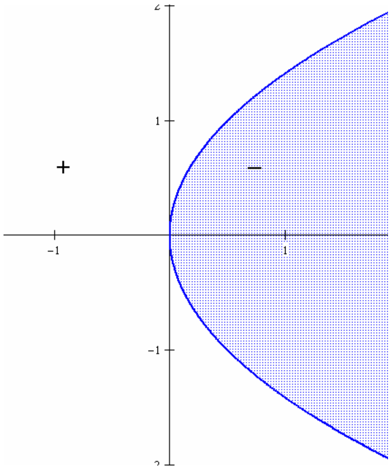


Рис. 10

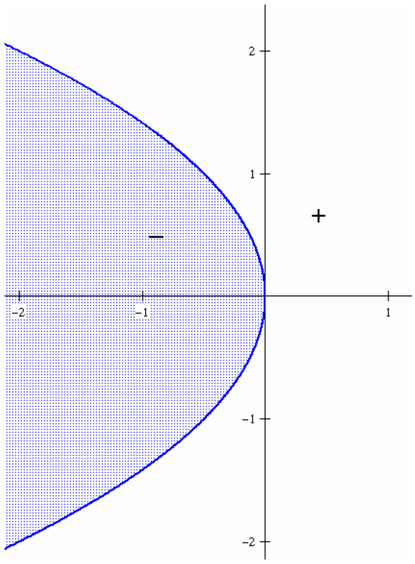


Рис. 11

3.5. Области знакопостоянства выражений, содержащих знак модуля

Для решения неравенств с двумя переменными, содержащих знак модуля, обычно разбивают координатную плоскость на отдельные области так, чтобы на каждой из них можно было записать неравенство, не используя знака абсолютной величины.

В некоторых случаях удобно использовать известные области знакопостоянства выражений с модулями.

Теорема 7. Ромб, заданный уравнением $\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}=1$, где $k>0, l>0$, делит координатную плоскость на две части так, что координаты точек, лежащих вне ромба, удовлетворяют неравенству $\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}>1$, а расположенных внутри ромба – неравенству $\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}<1$(сравните с уравнением и графиком эллипса в теореме 3).

По аналогии с существующей терминологией «уравнение прямой в отрезках», уравнение $\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}=1$, где $k>0, l>0$, можно назвать «уравнением ромба в отрезках».

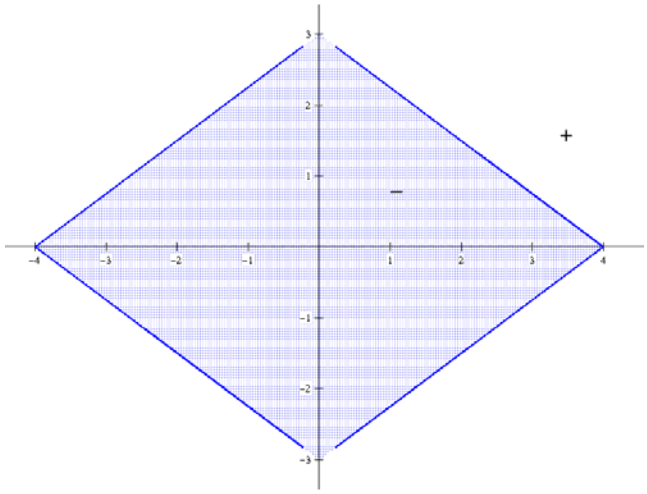


Рис. 12

Теорема 8. Фигура, заданная уравнением $\frac{|x|}{k}-\frac{|y|}{l}=1$, где $k>0, l>0$, делит координатную плоскость на три области так, что при переходе из одной области в смежную значение выражения $F(x;y)=\frac{|x|}{k}-\frac{|y|}{l}-1$ меняет знак на противоположный (сравните с уравнением и графиком гиперболы в теореме 5).

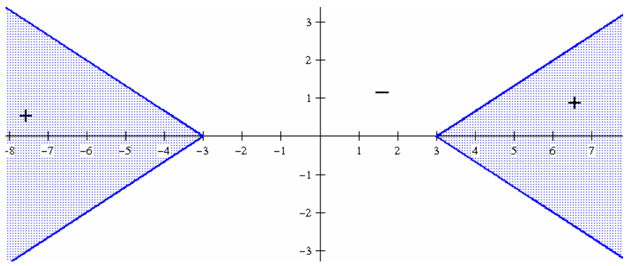


Рис. 13

Теорема 9. Фигура, заданная уравнением $|y|=kx$ $(k>0$ или $k<0)$, делит координатную плоскость на две области так, что при переходе из одной области в другую значение выражения $F(x;y)=|y|-kx$ меняет знак на противоположный (сравните с уравнением и графиком параболы в теореме 6).

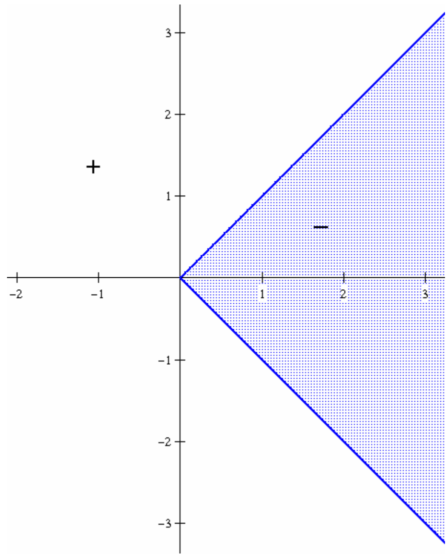


Рис. 14

Теорема 10. Неравенство $|a_1x+b_1y+c_1|\le a_2x+b_2y+c_2$, где $a_i^2+b_i^2\ne 0 \quad (i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\ne\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек угла, включая границы. В частности, отсюда следует теорема 9.

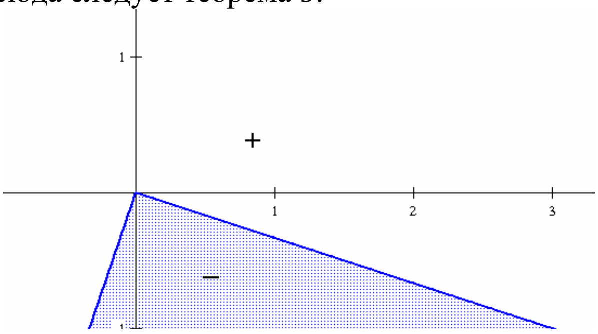


Рис. 15

Теорема 11. Неравенство $|a_1x+b_1y+c_1|\le|a_2x+b_2y+c_2|$, где $a_i^2+b_i^2\ne 0 \quad (i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\ne\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек вертикальных углов, включая границы.

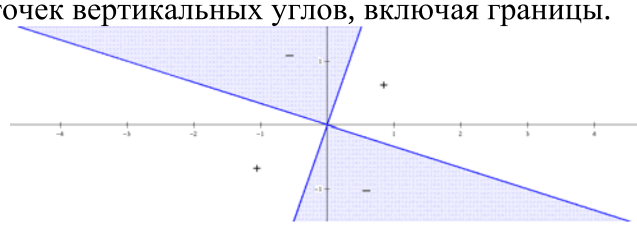


Рис. 16

Теорема 12. Пара параллельных прямых, заданная уравнением $|ax+by+c|=m$, где $m>0$ и $a^2+b^2\ne 0$, разбивает координатную плоскость на три области так, что при переходе из одной области в другую значение выражения $F(x;y)=|ax+by+c|-m$ меняет знак на противоположный.

Конкретизируем данную теорему: неравенство $|ax+by+c|\le m,$ где $m>0$ и $a^2+b^2\ne 0,$ задает на координатной плоскости множество внутренних точек «полосы», включая границы. В частности, «полоса» $|by+c|\le m$ параллельна оси Ox, а «полоса» $|ax+c|\le m$ параллельна оси Oy.

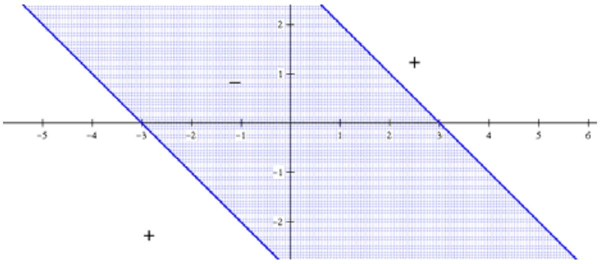


Рис. 17

Теорема13. Неравенство $|a_1x+b_1y+c_1|+|a_2x+b_2y+c_2|\le m,$ где $m>0$ и $a_i^2+b_i^2\ne 0 \quad (i=1;2),\ \dfrac{a_1}{a_2}\ne\dfrac{b_1}{b_2},$ задает на координатной плоскости множество внутренних точек параллелограмма, включая границы.

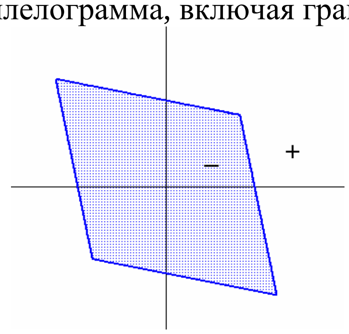


Рис. 18

3.6. Рационализация неравенств

Чтобы расширить возможности применения метода областей при решении неравенств с двумя переменными, используем идею рационализации неравенств.

Прием рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x;y)$ на более простое выражение $G(x;y)$, при которой неравенство $G(x;y)\vee 0$ равносильно неравенству $F(x;y)\vee 0$ в области определения выражения $F(x;y)$.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где u,υ,ω,p,q - выражения с двумя переменными $(u>0;u\ne 1;\upsilon>0;\omega>0)$, a – фиксированное число ($a>0;a\ne 1$).

№	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$\log_a\upsilon-\log_a\omega$ $\log_a\upsilon-1$ $\log_a\upsilon$	$(a-1)(\upsilon-\omega)$ $(a-1)(\upsilon-a)$ $(a-1)(\upsilon-1)$
2 2а 2б	$\log_u\upsilon-\log_u\omega$ $\log_u\upsilon-1$ $\log_u\upsilon$	$(u-1)(\upsilon-\omega)$ $(u-1)(\upsilon-u)$ $(u-1)(\upsilon-1)$
3	$\log_u\upsilon-\log_\omega\upsilon$ $(\omega\ne 1)$	$(\upsilon-1)(u-1)\times$ $\times(\omega-1)(\omega-u)$
4 4а	$u^\upsilon-u^\omega \quad (u>0)$ $u^\upsilon-1$	$(u-1)(\upsilon-\omega)$ $(u-1)\upsilon$
5	$u^\upsilon-\omega^\upsilon$ $(u>0;\omega>0)$	$(u-\omega)\upsilon$
6	$\lvert p\rvert-\lvert q\rvert$	$(p-q)(p+q)$

Пример 2. Изобразите на координатной плоскости область решений неравенства

$$\frac{1}{\log_x y}>1.$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями: $x>0;x\ne 1;y>0;y\ne 1$ Приведем данное неравенство к виду

$$\frac{1-\log_x y}{\log_x y}>0 \text{ или } (\log_x y-1)\log_x y<0.$$

Используя замены 2а и 2б, последнее неравенство приводим к неравенству $(x-1)(y-x)(x-1)(y-1)<0$ или $(x-1)^2(y-x)(y-1)<0$.

Далее, используя обобщенный метод областей, находим решения исходного неравенства (рис.19).

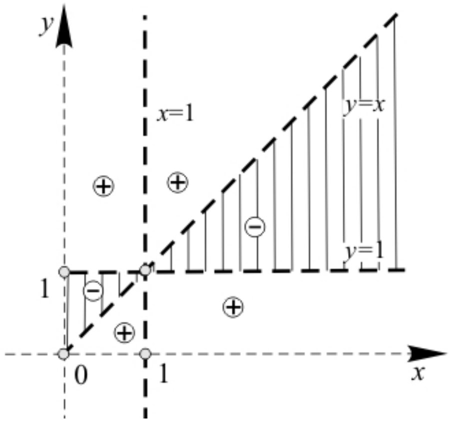


Рис. 19

3.7. Аналитическое задание области решения неравенств

Открытой элементарной областью (рис. 39) называется множество точек координатной плоскости, удовлетворяющей системе неравенств вида:

$$\begin{cases} a < x < b, \\ f(x) < y < \varphi(x) \end{cases} \qquad (4)$$

где функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, заданные каждая одной своей формулой, непрерывны на промежутке $[a;b]$ и удовлетворяют неравенству $f(x) < \varphi(x)$ в интервале $(a;b)$. В этом случае говорят, что в системе (4) за основу задания области выбрана переменная *x*. Область, заданную системой неравенств (4), иногда записывают в виде

$$\{(x;y) | a < x < b, f(x) < y < \varphi(x)\}$$

или

$$\{(x;y) | x \in (a;b), y \in (f(x);\varphi(x))\}.$$

Знаки неравенств в системе (4) могут быть и нестрогими. Для неограниченных областей в условиях $a < x < b$, $f(x) < y < \varphi(x)$ используют символы $+\infty$ или $-\infty$.

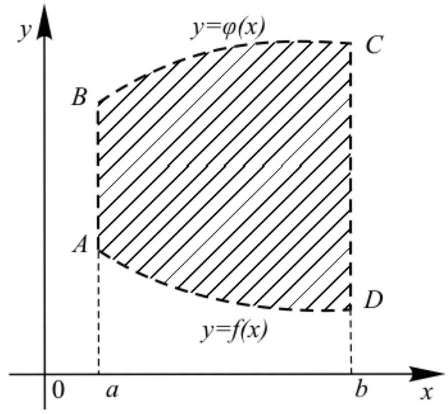


Рис. 20

Приведенные рассуждения легко переносятся на области, в основу задания которых выбрана переменная *y*.

Пример 3. Задайте аналитически решение неравенства $(y + x)(x - y - 1)(x + 2) \geq 0$.

Решение. Рис. 4. Найдем точки пересечения прямых $y = -x$, $y = x - 1$ и $x = -2$, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = x - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ x = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - 1, \\ x = -2. \end{cases}$$

Отсюда получаем особые точки $A(0{,}5;-0{,}5)$, $B(-2;2)$, $C(-2;-3)$. Примем за основу задания областей переменную *x*, тогда особые значения переменной *x*: $x = 0{,}5$ или $x = -2$. Разобьем область решений на элементарные области прямыми $x = 0{,}5$ и $x = -2$. Запишем ответ для областей, содержащих знак плюс:

$$\{(x;y) x \in (-\infty;-2); y \in (-\infty; x-1] \cup [-x;+\infty)\}$$
$$\cup \{(x;y) | x = -2; y \in R\} \cup$$
$$\cup \{(x;y) | x \in (-2;0{,}5); y \in [x-1;-x]\} \cup$$
$$\cup \{(0{,}5;-0.5)\} \cup$$
$$\cup \{(x;y) | x \in (0{,}5;+\infty); y \in [-x; x-1]\}$$

3.8. Решение неравенств с параметром

Пусть дано неравенство

$$F(a;x) \vee 0, \qquad (3)$$

где *x* - переменная, *a* – фиксированное число (параметр), символ $\vee$ заменяет один из знаков: $>, <, \geq, \leq$. Рассматривая параметр *a* как равноправную переменную с переменной *x*, мы сводим задачу решения неравенства (3) с параметром к решению неравенства с двумя переменными *a* и *x*.

Пример 4. Решите неравенство

$$(x + a)(a - x - 1)(a + 2) \geq 0$$

в зависимости от значения параметра *a*.

Решение. В примере 1 дано графическое решение неравенства $(y+x)(x-y-1)(x+2)\ge 0$ (рис. 4), в примере 3 представлена аналитическая запись решения этого неравенства. Дадим ответ для данного неравенства с параметром a (рис. 21). Особые точки $A(0{,}5;-0{,}5)$, $B(-2;2)$, $C(-2;-3)$ и особые значения параметра: $a=0{,}5$ и $a=-2$. Выберем области, содержащие знак плюс и решения уравнения $F(a;x)=0$, где

$F(a;x)=(x+a)(a-x-1)(a+2)$:

$D_1=\{(a;x)|a\ge 0{,}5;-a\le x\le a-1\}$;

$D_3=\{(a;x)|a\le -2;x\ge -a\}$;

$D_5=\{(a;x)|a\le -2;x\le a-1\}$;

$D_7=\{(a;x)|-2\le a\le 0{,}5;a-1\le x\le -a\}$.

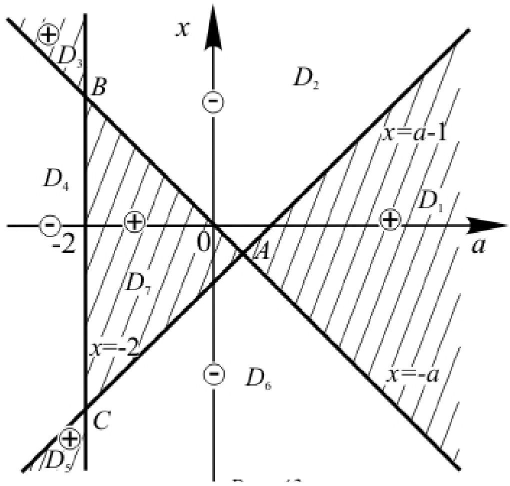


Рис. 21

Пример 5. (ЕГЭ, 2003 г.). Найдите все значения *a*, при которых область определения функции

$$y=\left(a^{x+0,5}+\sqrt{x}\cdot a^4-x^{0,5+x\log_x a}-a^{4,5}\right)^{0,5}$$

содержит ровно одно целое число.

Решение. 1). Из определения логарифма следует, что

$$a>0, x>0, x\ne 1. \qquad (*)$$

2). Упростим выражение, стоящее в основании степени

$a^{x+0,5}+\sqrt{x}\cdot a^4-x^{0,5+x\log_x a}-a^{4,5}=$

$=a^{x+0,5}+\sqrt{x}\cdot a^4-\sqrt{x}\cdot a^x-a^{4,5}=$

$=a^{0,5}\left(a^x-a^4\right)-\sqrt{x}\left(a^x-a^4\right)=$

$=\left(a^x-a^4\right)\left(a^{0,5}-x^{0,5}\right)$.

3). Из условия имеем

$$\left(a^x-a^4\right)\left(a^{0,5}-x^{0,5}\right)\ge 0.$$

Применяя рационализации 4 и 5, получим

$(a-1)(x-4)(a-x)0{,}5\ge 0$ или

$(a-1)(x-4)(x-a)\le 0$. $\qquad (**)$

Для решения последнего неравенства используем метод областей (рис.22). Неравенству $(**)$, учитывая условия $(*)$, удовлетворяют координаты точек областей D_3, D_7 и части областей D_1 и D_5.

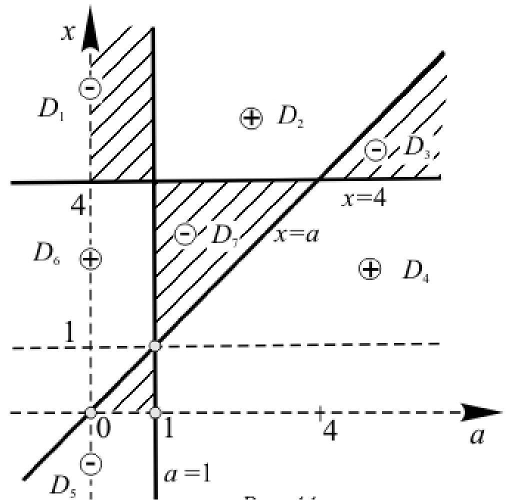


Рис. 22

При каждом значении $a\in(0;1]$ в части области D_1 бесконечное множество целых чисел, в части области D_5 нет ни одного целого числа, т.е. $0<a\le 1$ не удовлетворяют условию задачи.

При $a\in(1;4)$ в области D_7 решение имеет вид $[a;4]$. Если $3<a<4$, то отрезок $[a;4]$ содержит одно целое число 4.

При $a=4$ решение $x=4$.

В области D_3 при $a\in(4;+\infty)$ решение имеет вид $[4;a]$, которое содержит одно целое число 4 при условии $4<a<5$.

Объединим полученные значения параметра *a*.

О т в е т: $(3;5)$.

Пример 6. (ЕГЭ, 2003 г.) Из области определения функции

$$y=\log_7\left(a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}\right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения *a*, при которых такая сумма будет больше 7, но меньше 11.

Решение. 1). Так как $D(\log_7)=R_+$, то имеем

$a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}>0$

или по рационализации 4

$(a-1)\left(a-\dfrac{7x+4}{x+4}\right)>0$, где $a>0$.

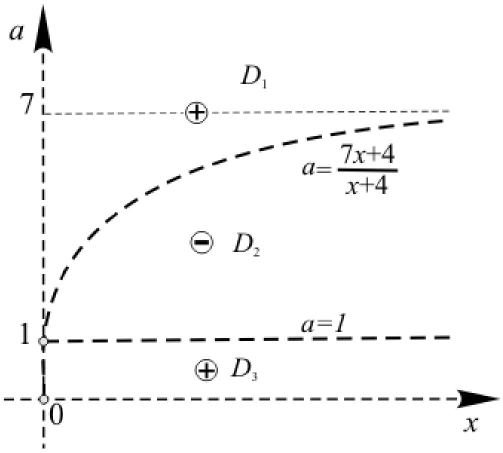


Рис. 23

2). Обозначим $F(x;a)=(a-1)\left(a-\frac{7x+4}{x+4}\right)$.

График уравнения $F(x;a)=0$, состоящий из прямой $a=1$ (пунктирная линия) и гиперболы $a=\frac{7x+4}{x+4}$ (пунктирная линия), разбивает первый координатный угол ($a>0$ и переменная x принимает натуральные значения) на три области. Применяя метод областей, получаем необходимое множество точек плоскости: области D_1 и D_3 (рис.23).

3). Решим уравнение $a=\frac{7x+4}{x+4}$ относительно переменной x и найдем $x=\frac{4-4a}{a-7}$. При $0<a<1$ решением является промежуток $(0;+\infty)$, который содержит все натуральные числа. Эти значения параметра a не удовлетворяют условию задачи.

При $a>1$ решением является промежуток $\left(0;\frac{4-4a}{a-7}\right)$. Рассмотрим суммы: 1; 1+2=3; 1+2+3=6; 1+2+3+4=10; 1+2+3+4+5=15. Согласно условию задачи имеем неравенство $4<\frac{4-4a}{a-7}\le 5$. Так как $a-7<0$, то получаем

$$\begin{cases}4(a-7)>4-4a,\\ 4-4a\ge 5(a-7);\end{cases}\quad \begin{cases}a>4,\\ a\le\frac{39}{9}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(4;\frac{39}{9}\right]$.

Источники

1. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.

2. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

3. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

4. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

5. Панферов В. С., Сергеев И. Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект-Центр, 2010.

6. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

7. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

8. Журнал «Квант»

9. Журнал «Математика в школе»

10. Десять правил расположения корней квадратного трехчлена/ Ш. Цыганов. – г. Математика (приложение «Первое сентября»), №18, 2002.

11. Неравенства с двумя переменными: графическое и аналитическое решения/ А. Корянов. – М.: Чистые пруды, 2008. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 22).

12. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Условия и решения. Вып. 1-16. – М.: Школьная Пресса, – (Библиотека журнала «Математика в школе»).

13. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)

14. www.alexlarin.narod.ru - сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.