

Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

А. Н. Рурукин, Е. В. Бровкова, Т. Н. Виссонова

Способы решения задач по математике

Часть 2

В помощь учащимся 9-го класса

Москва 2009

УДК 512(076)
ББК 22.143я7

Рурукин А.Н., Бровкова Е.В., Виссонова Т.Н. **Способы решения задач по математике. Часть 2. В помощь учащимся 9-го класса:** Учебно-методическое пособие. – М.: НИЯУ МИФИ, 2009. – 76 с.

В данном пособии систематизированы знания по математике, которые получают учащиеся за 9 лет обучения в средней школе. Охвачены все узловые темы курса. Часть 2 включает такие темы курса, как решение текстовых задач, арифметическая и геометрическая прогрессии, планиметрия. Особое внимание уделено практике решения задач, начинается с самых простых задач и кончая достаточно сложными.

Пособие предназначено для учащихся 9-х классов средних школ, которые хотят углубленно изучать математику, и поможет подготовиться к олимпиадам, поступлению в физико-математические лицеи. Учителя могут использовать данное пособие для подготовки к занятиям.

Рекомендовано редсоветом НИЯУ МИФИ в качестве учебного пособия.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. *Г.В. Лупенко*

© *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2009*

ISBN 978-5-7262-1182-4

Редактор *Е. Н. Кочубей*
Макет подготовлен *Е. Н. Кочубей*

Подписано в печать 13.08.2009. Формат 60×84 1/16.
Изд. № 083-1. П.л. 4,75. Уч.-изд. л. 4,75. Тираж 4500 экз. Заказ №
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ. 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 5. Текстовые задачи	
5.1. Задачи на движение	4
5.2. Задачи на производительность труда	7
5.3. Задачи на процентное содержание и концентрацию	9
5.4. Задачи на числа	12
Задачи для самостоятельного решения	21
Тема 6. Арифметическая и геометрическая прогрессии	
6.1. Арифметическая прогрессия	29
6.2. Геометрическая прогрессия	31
6.3. Смешанные задачи на прогрессии	36
Задачи для самостоятельного решения	38
Тема 7. Геометрия (планиметрия)	
7.1. Треугольники	42
7.2. Четырехугольники	52
7.3. Окружность и круг	56
7.4. Многоугольники и окружности	59
7.5 Методы решения задач	61
Задачи для самостоятельного решения	68
Ответы	73

Тема 5. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Данная тема практически всегда встречается на собеседованиях и экзаменах, поэтому рекомендуем обратить на нее самое *серьезное внимание*. Круг задач, относящихся к этой теме, очень широк. Условно *выделяют*: задачи на движение, задачи на работу и производительность труда, задачи на процентное содержание и концентрацию, задачи на числа.

Успех в решении задач рассматриваемой темы во многом зависит от удачного выбора неизвестных и далеко не всегда в качестве неизвестных удобно выбирать те величины, которые необходимо найти по условию задачи. Как правило, в качестве неизвестных удобно выбирать те величины, используя которые наиболее просто записать условия задачи в математической форме (т. е. в виде уравнения, системы уравнений, неравенств и т. д.). Для каждого вида задач будут даны рекомендации по выбору неизвестных.

Разумеется, рассматриваемые задачи имеют *идеализированный характер*. Так в задачах на движение предполагается, что повороты тел и изменение их скорости происходят мгновенно (что ясно из физики является невозможным). В задачах на процентное содержание и концентрацию считается, что растворы и сплавы идеально перемешаны и т. д.

Можно предложить *схему решения* текстовых задач:

- выбирают удобные для описания условий задачи неизвестные;
- составляют необходимые уравнения или системы уравнений (реже неравенства);
- решают полученные уравнения или системы уравнений;
- отбирают подходящие по смыслу задачи решения.

5.1. Задачи на движение

Принятые обозначения: расстояние – s, l, L ; скорости тел – $u, w, v \dots$ или $v_1, v_2, \dots$; время движения – t, T .

Обычно в качестве неизвестных выбирают *расстояние* и *скорости* движущихся тел. Время в качестве неизвестного выбирается достаточно редко, так как в этом случае запись условий задачи получается громоздкой.

Напомним следующие, часто используемые при решении задач, допущения.

1. Движение на отдельных участках считается равномерным и пройденный путь определяется соотношением $s = vt$.

2. При движении тела по течению реки его скорость относительно берега w складывается из скорости тела в стоячей воде (собственной скорости) u и скорости течения реки v : $w = u + v$; при движении против течения: $w = u - v$. Тела, не имеющие двигателей (плот, бревно и т. д.), обладают скоростью течения реки: $w = v$.

3. В задачах со встречами тел: при движении тел навстречу друг другу они встречаются через время $S/(v_1 + v_2)$ (где S – начальное расстояние между телами; v_1 и v_2 – скорости тел); при движении тел в одну сторону ($v_1 > v_2$) они встречаются через время $S/(v_1 - v_2)$ (первое тело догоняет второе).

Пример 5.1. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 с. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спустится за 42 с. За сколько секунд он спустится стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

Решение. Несмотря на то, что по условию задачи необходимо найти время, выберем в качестве неизвестных: длину эскалатора L , собственную скорость пассажира v , скорость движения эскалатора u . Запишем условие задачи, используя эти неизвестные. При спуске вниз по движущемуся эскалатору скорость пассажира относительно здания метро (или земли) равна $v + u$ и время спуска составляет величину $L/(v + u) = 24$. Время спуска пассажира по неподвижному эскалатору равно $L/v = 42$. Получаем

$$\text{систему уравнения } \begin{cases} \frac{L}{v+u} = 24; \\ \frac{L}{v} = 42. \end{cases} \quad \text{Обратим внимание на то, что}$$

система состоит из двух уравнений, содержащих три неизвестные. Разумеется, найти все неизвестные невозможно, но по условию задачи этого и не требуется. Необходимо найти только время спуска пассажира на движущемся эскалаторе. Так как при этом его скорость движения u , то время спуска равно L/u .

Из второго уравнения системы имеем $L = 42v$. Подставив эту величину в первое уравнение, получим $\frac{42v}{u+v} = 24$, откуда $v = \frac{4}{3}u$.

Тогда $L = 42v = 56u$ и искомое время $\frac{L}{u} = \frac{56u}{u} = 56$. Итак, пассажир спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора, за 56 с.

Пример 5.2. Из пункта A в 12 ч вышел поезд. В 14 ч в том же направлении вышел другой поезд. Он нагнал первый поезд в 20 ч. Найти скорости поездов, если при одновременном движении навстречу друг другу из городов, расстояние между которыми 420 км, эти поезда встречаются через 6 ч.

Решение. Пусть скорость первого поезда v_1 , скорость второго – v_2 , $v_1 > v_2$. До отправления второго поезда первый находился в пути 2 ч и прошел за это время $2v_1$ (км). К началу движения второго поезда расстояние между поездами составляло $2v_1$. Так как второй поезд нагнал первый в 20 ч (т. е. через 6 ч после начала движения), то имеем уравнение $\frac{2v_1}{v_2 - v_1} = 6$. При движении навстречу друг другу при расстоянии 420 км поезда встречаются тоже через 6 ч. Поэтому получаем уравнение $\frac{420}{v_2 + v_1} = 6$. Итак,

$$\text{имеем систему уравнений } \begin{cases} \frac{2v_1}{v_2 - v_1} = 6; \\ \frac{420}{v_1 + v_2} = 6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4v_1 = 3v_2; \\ v_1 + v_2 = 70. \end{cases} \text{ Решив эту}$$

линейную систему уравнений, найдем: $v_1 = 30$ км/ч, $v_2 = 40$ км/ч.

Пример 5.3. Часы показывают полночь. Через сколько минут часовая и минутная стрелки снова совпадут?

Решение. Несмотря на необычную формулировку эта задача решается аналогично предыдущей. Пусть длина окружности циферблата равна s . Так как минутная стрелка проходит циферблат за 1 ч (60 мин), то ее скорость $s/60$. Часовая стрелка проходит циферблат за 12 ч (720 мин) и ее скорость $s/720$. Тогда эти две стрелки совпадут через $\frac{s}{s/60 - s/720} = \frac{720}{11} = 65\frac{5}{11}$ мин.

5.2. Задачи на производительность труда

Принятые обозначения: работа – A , V ; производительность труда (работа в единицу времени) – N ; время работы – t . При этом $A = Nt$. В качестве неизвестных обычно выбирают *работу* и *производительность труда*.

Пример 5.4. Первый рабочий может выполнить некоторую работу на 4 ч раньше, чем второй. Вначале они 2 ч работали вместе, после чего оставшуюся работу выполнил один первый рабочий за час. За какое время может выполнить всю работу второй рабочий?

Решение. Пусть объем всей работы A , производительность труда первого рабочего N_1 , второго – N_2 . Тогда первый рабочий выполнит всю работу за время A/N_1 , второй – A/N_2 . Получаем уравнение $\frac{A}{N_2} - \frac{A}{N_1} = 4$.

Запишем второе условие задачи. За 2 ч совместного труда рабочие сделали $2(N_1 + N_2)$, за час первый рабочий сделал $1N_1$, в итоге была выполнена работа: $2(N_1 + N_2) + N_1 = A$. Получаем

$$\text{систему уравнений } \begin{cases} \frac{A}{N_2} - \frac{A}{N_1} = 4; \\ 3N_1 + 2N_2 = A, \end{cases} \quad \text{из которой надо найти } A/N_2.$$

Из второго уравнения имеем: $N_1 = \frac{A - 2N_2}{3}$. Подставив это

выражение в первое уравнение, получим: $\frac{A}{N_2} - \frac{3A}{A - 2N_2} = 4$ или

$A^2 - 9AN_2 + 8N_2^2 = 0$. Отсюда имеем $A = 8N_2 \left(\frac{A}{N_2} = 8 \right)$; $A = N_2$

$\left(\frac{A}{N_2} = 1 \right)$. Второе решение, очевидно, не подходит, так как если

один второй рабочий может сделать всю работу за 1 ч, то это противоречит условиям задачи. Итак, второй рабочий сделает всю работу за 8 ч.

Пример 5.5. Петя съедает банку варенья за 6 ч, а Катя – такую же банку за 5 ч. Успеют ли дети съесть банку варенья, если родители ушли из дома на 2 ч 50 мин? Как при этом съесть варенье за наименьшее время?

Решение. Очевидно, что если каждый ребенок съест по половине банки, то Петя потратит на это 3 ч, Катя – 2,5 ч. Следовательно, Катя успеет съесть свою долю и избежать наказания. Петю ожидает другая участь. Поэтому нужно есть варенье вместе (независимо от того, кому сколько достанется). Найдем время поедания в этом случае. Для этого существует два способа: арифметический и алгебраический.

Арифметический способ. Так как НОК (5; 6) = 30, то предположим, что дети имеют в своем распоряжении 30 ч. За это время Петя успеет съесть $30:6 = 5$ банок варенья, а Катя – $30:5 = 6$ банок. Таким образом, за 30 ч можно съесть 11 банок. Соответственно, одну банку можно съесть вдвоем за $\frac{30}{11} = 2\frac{8}{11}$ ч.

Алгебраический способ. Пусть в банку входит A (кг) варенья. Тогда Петя за 1 ч съедает $A/6$ (кг), Катя – $A/5$ (кг). Вдвоем за 1 ч дети съедают $\frac{A}{6} + \frac{A}{5} = \frac{11A}{30}$ (кг). Поэтому A (кг) варенья они

съедают за время $A: \frac{11A}{30} = \frac{30}{11} = 2\frac{8}{11}$ ч. Учтем, что 2 ч 50 мин составляют $2\frac{5}{6}$ ч. Сравним числа $2\frac{5}{6}$ и $2\frac{8}{11}$, найдя их разность: $2\frac{5}{6} - 2\frac{8}{11} = \frac{5}{6} - \frac{8}{11} = \frac{7}{66} > 0$. Поэтому $2\frac{5}{6} > 2\frac{8}{11}$ и дети вполне

успевают съесть варенье. Так как $\frac{7}{66}$ ч составляет около 7 мин, то еще и остается время для сокрытия следов "преступления".

5.3. Задачи на процентное содержание и концентрацию

Почему-то задачи этой темы вызывают у школьников чуть ли не ужас, хотя они *не сложнее* задач других тем. Поэтому остановимся на решении таких задач подробнее.

Сначала напомним, что *процентом* называют *сотую часть* рассматриваемой *величины*. Обсудим сначала несколько вспомогательных задач.

Напомним, что если в смеси растворов объемом V нас интересует компонент, имеющий объем V_0 , то концентрацией этого компонента C_0 называется отношение V_0/V , т. е. $C_0 = V_0/V$. Тогда, очевидно, что процентное содержание $P_0 = \frac{V_0}{V} \cdot 100$ этого

компонента в смеси связано простым соотношением с его концентрацией: $P_0 = C_0 \cdot 100$. Разумеется, сумма концентраций всех компонентов смеси равна 1, а сумма процентных содержаний всех компонентов смеси составляет 100%.

Принятые обозначения: объем вещества – V , масса – m , концентрация – c , процентное содержание вещества – p .

В качестве неизвестных обычно выбирают объемы (или массы) компонентов смеси.

Пример 5.6. В сосуде содержится 5 л 20 %-ного водного раствора кислоты. Сколько воды необходимо добавить в этот сосуд, чтобы получить 5%-ный раствор кислоты.

Решение. Так как 5 л раствора содержат 20 % кислоты, то объем кислоты равен: $\frac{5 \cdot 20}{100} = 1$ л. Пусть в раствор добавили x л воды. Тогда объем раствора составил величину $(5 + x)$ л. По условию задачи кислота равняется 5 % этой величины и ее объем

равен $\frac{5 \cdot (5+x)}{100}$ л. Так как кислоты в раствор не добавляли, то это тот объем кислоты, который находился в сосуде первоначально. Получаем уравнение $\frac{5 \cdot (5+x)}{100} = 1$ или $5 + x = 20$. Решив это линейное уравнение, найдем: $x = 15$ (л).

Пример 5.7. Один сплав содержит два металла, массы которых относятся как 2 : 3, а в другом сплаве массы этих же металлов относятся как 3 : 7. Какие массы первого и второго сплавов надо сплавить вместе, чтобы получить третий сплав, массой 1,5 кг, в котором эти металлы (по массе) находились бы в отношении 1 : 2?

Решение. Пусть сплавы состоят из металлов A и B . Для удобства дальнейшие рассуждения будем иллюстрировать диаграммой.

A	$\frac{2}{5}x$	B	$\frac{3}{5}x$
-----	----------------	-----	----------------

Первый сплав x (кг)

A	$\frac{3}{10}y$	B	$\frac{7}{10}y$
-----	-----------------	-----	-----------------

Второй сплав y (кг)

A	0,5	B	1,0
-----	-----	-----	-----

Третий сплав (1,5 кг)

Пусть первый сплав содержит x кг, второй сплав – y кг обоих металлов. Найдем вес каждого из металлов в отдельности в этих сплавах.

Рассмотрим сначала первый сплав. Пусть x_A и x_B – вес каждого из металлов в этом сплаве. Тогда по условию задачи имеем: $x_A + x_B = x$, $x_A/x_B = 2/3$. Из второго уравнения системы

находим: $x_A = \frac{2}{3}x_B$ и подставим в первое, получаем $x = x_B + \frac{2}{3}x_B$

или $x = \frac{5}{3}x_B$. Отсюда $x_B = \frac{3}{5}x$ и тогда $x_A = \frac{2}{3}x_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$.

Полностью аналогично находятся веса металлов во втором и третьем сплавах.

Так как третий сплав был получен из первых двух, то соответствующие металлы A и B перешли из первого и второго

сплавов в третий. Запишем эти условия:
$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = 0,5; \\ \frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y = 1,0. \end{cases}$$

Заметим, что вместо второго уравнения системы можно было записать и более простое условие на вес сплавов: $x + y = 1,5$ (в нашем случае это условие получается при сложении уравнений системы). Решив полученную систему линейных уравнений, найдем единственное решение: $x = 0,5, y = 1$.

В тех случаях, когда задача содержит параметры, необходимо учитывать те ограничения на параметры, которые следуют из условия задачи.

Пример 5.8. Взяли два куска сплавов меди и серебра: первый массой 2 кг содержит 30 % меди, второй массой 3 кг содержит 40 % меди. Сколько килограммов второго сплава надо сплавить со всем первым куском, чтобы получить новый сплав, содержащий p % меди?

Решение. В первом куске содержится $\frac{2}{100} \cdot 30 = 0,6$ кг меди.

Пусть взяли x кг второго сплава (очевидно, что $0 \leq x \leq 3$). Тогда вместе с ним было взято $\frac{x}{100} \cdot 40 = 0,4x$ кг чистой меди. В новом сплаве будет $(0,6 + 0,4x)$ кг меди. При этом вес нового сплава $(2 + x)$ кг.

Процентное содержание меди в новом сплаве $\frac{0,6 + 0,4x}{2 + x} \cdot 100\%$. По условию задачи это содержание составляет

p %. Для нахождения x получаем уравнение $p = \frac{0,6 + 0,4x}{2 + x} \cdot 100$

или $2p + px = 60 + 40x$ или $2p - 60 = x(40 - p)$, откуда

$$x = \frac{2(p - 30)}{40 - p}.$$

Ограничения на параметр p найдем из условия $x \in [0; 3]$. Так как $x \geq 0$, то получаем неравенство $\frac{2(p-30)}{40-p} \geq 0$, решение кото-

рого $p \in [30; 40)$. Так как $x \leq 3$, то получаем неравенство

$$\frac{2(p-30)}{40-p} \leq 3 \Rightarrow \frac{2(p-30)}{40-p} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{5(p-36)}{40-p} \leq 0,$$

откуда $p \in [0; 36] \cup (40; 100]$ (здесь учтено, что по смыслу задачи $0 \leq p \leq 100$). Учитывая решения двух неравенств, окончательно имеем $p \in [30; 36]$. Таким образом, при $p \in [0; 30) \cup (36; 100]$

$x \in \emptyset$; при $p \in [30; 36]$ $x = \frac{2(p-30)}{40-p}$ кг.

5.4. Задачи на числа

Обратите внимание на эту тему. Понятия, связанные с числами, изучаются в школе, начиная с 5–6 класса, и в старших классах уже забываются. Кроме того по данной теме встречаются *достаточно сложные задачи*, особенно связанные с делимостью натуральных чисел.

Основные понятия

Натуральные числа – числа, которые используются для счета предметов: 1, 2, 3, 4,...

Деление натурального числа n на натуральное число p ($n \geq p$) с остатком состоит в нахождении такого натурального числа k и такого неотрицательного целого числа r ($0 \leq r < p$), что справедливо равенство $n = pk + r$. При этом число p называют *делителем*, k – *частным* и r – *остатком*.

Например, число 62 при делении на 8 дает остаток 6 (что легко получить при делении уголком), так как справедливо равенство:

$$\begin{array}{ccccccc} 62 & = & 8 & \cdot & 7 & + & 6. \\ \swarrow & & | & & \searrow & & \\ \text{делимое} & & & & \text{частное} & & \\ & & \text{делитель} & & & & \text{остаток} \end{array}$$

Заметим, что все условия определения выполнены: делитель и частное – натуральные числа, остаток – неотрицательное целое число и остаток меньше делителя.

Пример 5.9. Натуральное число n при делении на 5 дает остаток 3. Найти остаток от деления на 5 квадрата числа n .

Решение. Так как число n при делении на 5 дает остаток 3, то его можно записать в виде: $n = 5k + 3$ (где k – частное). Найдем квадрат этого числа $N = n^2 = (5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9$. Выделим в числе N слагаемые, которые без остатка делятся на 5: $25k^2$ и $30k$. В числе 9 также выделим наибольшее число, которое без остатка делится на 5: $9 = 5 + 4$. Тогда число N имеет вид: $N = (25k^2 + 30k + 5) + 4 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4 = 5m + 4$ (где $m = 5k^2 + 6k + 1$ – натуральное число). Так как число N записано в виде $N = 5m + p$, то это означает, что при делении числа $N = n^2$ на 5 получает в частном число m и остаток 4.

Если при делении числа n на число p остаток $r = 0$, то число n делится на p *без остатка* (или *нацело*) и $n = pk$ (где k – частное).

Напомним *основные признаки делимости* натуральных чисел.

1. Число делится (без остатка или нацело) *на число 2*, если *его последняя цифра четная или 0*. (Напомним, что число 0 не является ни четным, ни нечетным). Например, число $731\underline{2}$ делится на 2, а число $731\underline{5}$ – не делится.

2. Число делится *на число 3*, если *сумма его цифр делится 3*. Например, число 7341 делится на 3, так как сумма цифр этого числа $7 + 3 + 4 + 1 = 15$ делится на 3. Число 7343 имеет сумму цифр $7 + 3 + 4 + 3 = 17$, которая на 3 не делится. Поэтому число 7343 также на 3 не делится.

3. Число делится *на число 4*, если *две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или являются нулями*. Например, число $731\underline{12}$ делится на 4, так как число, образованное двумя последними цифрами (число 12), делится на 4.

Обратите внимание на этот признак делимости. Очень часто школьники ошибочно "сокращают" этот признак делимости до такого: число делится на число 4, если две его последние цифры делятся на 4. Разумеется, данный "признак делимости" является

грубой ошибкой. В рассмотренном примере число 7312 делилось на 4, хотя ни одна из его двух последних цифр (1 и 2) на 4 не делится.

Число $\underline{7318}$ на число 4 не делится, так как число 18 (образованное двумя последними цифрами) на 4 не делится.

4. Число делится на число 5, если его *последняя цифра 5 или 0*. Например, числа $\underline{7310}$ и $\underline{7315}$ делятся на 5, а число $\underline{7313}$ на 5 не делится.

5. Число делится на число 8, если *три его последние цифры образуют число, которое делится на 8, или являются нулями*. Например, число $\underline{7408}$ делится на 8, так как число 408 делится на 8. Число $\underline{7414}$ не делится на 8, так как число 414 не делится на 8.

6. Число делится на число 9, если *сумма его цифр делится на 9*. Например, число 7353 делится на 9, так как сумма цифр этого числа $7+3+5+3=18$ делится на 9. Число 7356 имеет сумму цифр $7+3+5+6=21$, которая на 9 не делится. Следовательно, и само число не делится на 9.

7. Число делится на число 10, если его *последняя цифра нуль*. Например, число $\underline{7310}$ делится на 10, а число $\underline{7315}$ не делится на 10.

Признаки делимости позволяют решать и более сложные задачи.

Пример 5.10. Найти цифру x , при которой число $\overline{31x53xx}$ делится на 9.

Решение. Используя признак делимости на 9, найдем сумму цифр данного числа: $A = 3 + 1 + x + 5 + 3 + x + x = 12 + 3x = 3(4 + x)$. Чтобы A делилось на 9, необходимо, чтобы число $(4 + x)$ делилось на 3. Кроме того, x является цифрой числа и поэтому $0 \leq x \leq 9$ и $4 \leq 4 + x \leq 13$. Среди чисел 4, 5, 6, ..., 13 делятся на 3 числа: 6, 9, 12, тогда соответственно $x = 2$, $x = 5$, $x = 8$. Итак, искомые числа: 3125322, 3155355, 3185388.

Напомним, что *простыми* числами называются натуральные числа, которые делятся на 1 и на само себя (например, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и т.д.). Все остальные натуральные числа называются *составными* и могут быть *разложены на простые сомно-*

жители (например, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$, $108000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$) единственным образом с помощью признаков делимости. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным.

Заметим, что выяснение вопроса, является ли данное число простым или составным, задача достаточно *не простая*, что видно из следующих примеров.

Пример 5.11. Найти целочисленные решения уравнения $x^2 + 4xy + 3y^2 = 5$.

Решение. Так как в левой части уравнения стоит однородный многочлен по переменным x и y , то разложим его на множители, а правую часть – на простые множители и получим: $(x + y)(x + 3y) = 1 \cdot 5$. В силу того, что решения уравнения x и y должны быть целыми числами, то очевидно, что числа $x + y$ и $x + 3y$ также целые. Поэтому рассмотрим случаи:

$$\begin{cases} x + y = 1; \\ x + 3y = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -1; \\ x + 3y = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5; \\ x + 3y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -5; \\ x + 3y = -1. \end{cases}$$

Решая эти линейные системы, соответственно находим

$$\begin{cases} x = -1; \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1; \\ y = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7; \\ y = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7; \\ y = 2. \end{cases}$$

Все эти решения являются целочисленными.

Пример 5.12. Является ли число $36^{12} + 121^{15}$ простым?

Решение. Данное число запишем в виде $(36^4)^3 + (121^5)^3$. Если вспомнить формулу сокращенного умножения $a^3 + b^3 = (a + b) \times (a^2 - ab + b^2)$, то число можно записать в виде $(36^4)^3 + (121^5)^3 = (36^4 + 121^5)(36^8 - 36^4 \cdot 121^5 + 121^{10})$. Становится очевидным, что приведенное число делится на число $(36^4 + 121^5)$, т. е. является составным.

Кроме рассмотренных понятий, напомним понятие взаимно простых чисел. Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, кроме 1. Например, числа 18 и 35 – взаимно простые, так как $18 = 2 \cdot 3^2$; $35 = 5 \cdot 7$ и эти числа не имеют общих делителей.

Понятие взаимно простых чисел позволяет более эффективно использовать признак делимости.

Пример 5.13. Найти все шестизначные числа вида $\overline{45хуу4}$, которые делятся на 36.

Решение. Число 36 можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел 9 и 4. Поэтому данное число делится на 36, если оно делится на 9 и на 4. Чтобы число делилось на 4, необходимо, чтобы на 4 делилось двузначное число $\overline{у4}$ и поэтому $у$ может равняться 0, 2, 4, 6, 8. Чтобы исходное число делилось на 9, необходимо, чтобы сумма цифр числа $A = 4 + 5 + x + y + y + 4 = 13 + x + 2y$ ($0 \leq x \leq 9$) делилась на 9.

При $y = 0$ $A = 13 + x$, x может равняться 5, что дает число 455004.

При $y = 2$ $A = 17 + x$, x может равняться 1 и получаем число 451224.

При $y = 4$ $A = 21 + x$ и $x = 6$, т.е. число 456444.

При $y = 6$ $A = 25 + x$ и $x = 2$, т.е. число 452664.

При $y = 8$ $A = 29 + x$ и $x = 7$, т.е. число 457884.

Итак, получили пять чисел, удовлетворяющих условию задачи: 455004, 456444, 452664, 457884, 451224.

Любое число можно записать в десятичной системе счисления.

Пример 5.14. Записать в десятичной системе числа: а) 8457; б) $\overline{abcd}$ (черта сверху означает, что число имеет данные цифры, например, $\overline{abcd}$ означает четырехзначное число с первой цифрой a , второй – b , третьей – c и четвертой – d , а не произведение чисел a, b, c, d , которое записывается $abcd$).

Решение. а) $8457 = 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0 = 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$, т.е. число состоит из 8 тысяч, 4 сотен, 5 десятков и 7 единиц.

б) $\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$, число состоит из a тысяч, b сотен, c десятков и d единиц.

При решении задач эта форма записи чисел используется очень часто. Рассмотрим еще ряд примеров.

Пример 5.15. Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 405. Если число, написанное теми

же цифрами в обратном порядке, умножить на сумму его цифр, то получится 486. Найти это число.

Решение. Пусть дано число $\overline{ab} = 10a + b$, сумма его цифр равна $(a + b)$. Число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, имеет вид: $\overline{ba} = 10b + a$. Запишем условия задачи:

$$\begin{cases} (10a + b)(a + b) = 405; \\ (10b + a)(a + b) = 486. \end{cases}$$

Получили систему уравнений, сводящихся к однородному уравнению. Разделив уравнения системы друг на друга, будем иметь: $\frac{10a + b}{10b + a} = \frac{405}{486} = \frac{5}{6}$, откуда $b = \frac{5}{4}a$. Тогда, например, из первого уравнения системы найдем $a^2 = 16$, откуда $a_1 = 4$, $a_2 = -4$ (не подходит, так как $a > 0$). Тогда $b = 5$ и искомое число 45.

Задачи, связанные с числами

При решении задач, связанных с числами, в основном используются: запись *деления* числа *с остатком* и запись числа *в десятичной системе счисления*.

Пример 5.16. Если двузначное число разделить на число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, то в частном получится 4, а в остатке 15. Если же из данного числа вычесть 9, то получится сумма квадратов цифр этого числа. Найти это число.

Решение. Пусть искомое число $\overline{xy} = 10x + y$. Число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, имеет вид $\overline{yx} = 10y + x$. Запишем первое условие задачи: $\overline{xy} = 4\overline{yx} + 15$ или $10x + y = 4(10y + x) + 15$. После преобразований имеем $2x - 13y = 5$. Второе условие задачи дает $10x + y - 9 = x^2 + y^2$. Из первого уравнения получаем $x = \frac{(13y + 5)}{2}$ и, подставив во второе уравнение, имеем $5(13y + 5) + y - 9 = \left(\frac{13y + 5}{2}\right)^2 + y^2$. После преобразова-

ний получим $173y^2 - 134y - 39 = 0$. Так как коэффициенты этого уравнения громоздки, то не будем его решать. Один корень уравнения легко угадывается $y_1 = 1$. Тогда по теореме Виета

$$y_1 y_2 = \frac{-39}{173} \text{ и } y_2 = -\frac{39}{173} \text{ (не подходит, так как } y - \text{ цифра числа).}$$

Находим $x = \frac{13y+5}{2} = 9$. Итак, искомое число 91.

К рассматриваемому типу задач на числа относятся и *задачи с целочисленными неизвестными*. Познакомимся с некоторыми из них.

Пример 5.17. Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп., за альбомы – 56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше, чем на 1 руб., превосходит цену одного альбома.

Решение. Пусть купили x книг и $x - 6$ альбомов. Тогда цена одной книги $\frac{10,56}{x}$ (руб), одного альбома $\frac{0,56}{x-6}$ (руб). Так как цена на одной книги больше, чем на 1 руб., превосходит цену одного альбома, то получаем неравенство $\frac{10,56}{x} - \frac{0,56}{x-6} > 1$. Учитывая, что $x > 0$, $x - 6 > 0$ и умножая обе части неравенства на положительную величину $x(x - 6)$, получим: $10,56(x - 6) - 0,56x > x(x - 6)$. После преобразований имеем: $0 > x^2 - 16x + 63,36$. Решением этого неравенства является промежуток $x \in (7,2; 8,8)$. Однако по условию задачи x – натуральное число. В полученном интервале есть только одно натуральное число: $x = 8$. Итак, было куплено 8 книг.

Пример 5.18. На стоянке находятся машины марок "Москвич" и "Волга". Общее их число менее 30. Если увеличить вдвое число "Волг", а число "Москвичей", увеличить на 27, то "Волг" станет больше. Если увеличить вдвое число "Москвичей", не изменяя числа "Волг", то "Москвичей" станет больше. Сколько "Москвичей" и сколько "Волг" находится на стоянке?

Решение. Пусть на стоянке находится x "Москвичей" и y "Волг". Запишем условия задачи:
$$\begin{cases} x + y < 30; \\ 2y > x + 27; \\ 2x > y. \end{cases}$$

Первое неравенство ограничивает величину $(x + y)$ сверху. Найдем ограничение на эту же величину снизу. Учитывая, что неравенства одного знака можно складывать, сложим второе и третье неравенства системы: $2y + 2x > x + 27 + y$. Отсюда получаем $x + y > 27$. Учитывая, что x и y – целые числа, имеем два варианта: $x + y = 28$ или $x + y = 29$.

а) $x + y = 28$. Тогда $y = 28 - x$. Подставляя это значение во второе и третье неравенства системы, получим:

$$\begin{cases} 2(28 - x) > x + 27; \\ 2x > 28 - x. \end{cases}$$

Решение первого линейного неравенства: $x < \frac{29}{3} = 9\frac{2}{3}$, второго

неравенства: $x > \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$. Поэтому решение системы

$x \in \left(9\frac{1}{3}; 9\frac{2}{3}\right)$. Но в этом промежутке нет ни одного целочисленного значения x . Поэтому $x \in \emptyset$.

б) $x + y = 29$. Тогда $y = 29 - x$. Из второго и третьего неравенства основной системы имеем:

$$\begin{cases} 2(29 - x) > x + 27; \\ 2x > 29 - x. \end{cases}$$

Решение первого неравенства $x < \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$, второго

$x > \frac{29}{3} = 9\frac{2}{3}$. Поэтому решение системы $x \in \left(9\frac{2}{3}; 10\frac{1}{3}\right)$. В этом

промежутке находится *единственное целое* значение $x = 10$. Тогда $y = 29 - 10 = 19$. Итак, на стоянке находилось 10 "Москвичей" и 19 "Волг".

Заметим, что эту задачу удобно решать и *графически*. Для

этого запишем полученную систему неравенств:
$$\begin{cases} y < 30 - x; \\ y > \frac{1}{2}x + 13,5; \\ y < 2x \end{cases}$$
 и

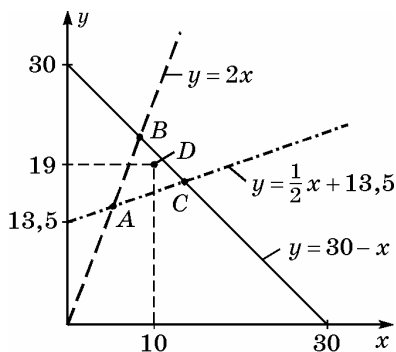


Рис. 5.3

изобразим множество точек, удовлетворяющих этой системе (рис. 5.3). Сначала построим прямые с уравнениями: $y = 30 - x$, $y > \frac{1}{2}x + 13,5$, $y = 2x$. Точки A, B, C отвечают попарному пересечению этих прямых.

Легко проверить, что всем трем неравенствам полученной системы удовлетворяют точки

координатной плоскости, расположенные внутри $\triangle ABC$. Причем внутри этого треугольника находится *только одна* точка D, координаты которой выражаются натуральными числами: $D(10; 19)$. Поэтому $x = 10$, $y = 19$ является *единственным целочисленным* решением системы неравенств и ответом задачи.

Пример 5.19. В четырехзначном числе сумма цифр тысяч, сотен и десятков равна 14, а сумма цифр единиц, десятков и сотен равна 15, причем цифра десятков на 4 больше цифры единиц. Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найти такое, у которого сумма квадратов цифр принимает наименьшее значение.

Решение. Пусть искомое число $\overline{xuzt}$, где x — цифра тысяч, y — цифра сотен, z — цифра десятков, t — цифра единиц. Условия за-

дачи записать легко:
$$\begin{cases} x + y + z = 14; \\ t + z + y = 15; \\ z = t + 4. \end{cases}$$
 Из этой системы уравнений

выразим все цифры x , y , z через цифру единиц t . Вычтем из

первого уравнения второе и получим: $x - t = -1$, откуда $x = t - 1$. Теперь выражения для x и z подставим в первое уравнение: $(t - 1) + y + (t + 4) = 14$ и тогда $y = 11 - 2t$.

Итак, $x = t - 1$, $y = 11 - 2t$, $z = t + 4$.

Найдем величину $A = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (t - 1)^2 + (11 - 2t)^2 + (t + 4)^2 + t^2 = 7t^2 - 38t + 138$. Квадратный трехчлен A должен иметь наименьшее значение. Оно достигается в вершине параболы при $t = \frac{19}{7} = 2\frac{5}{7}$.

На рис. 5.4 для наглядности представлено поведение зависимости $A(t)$.

Однако t – цифра числа и не может быть дробью. Как видно из рисунка, наименьшее значение A достигается в точке t , ближайшей к вершине параболы. Этому условию удовлетворяет число $t = 3$. Тогда $x = t - 1 = 2$, $y = 11 - 2t = 5$, $z = t + 4 = 7$.

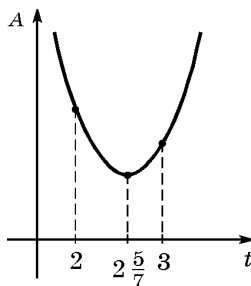


Рис. 5.4

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

– А –

Задачи на движение и совместную работу

1. Из двух городов, расстояние между которыми 363 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля 57 км/ч, скорость второго – 64 км/ч. Через какое время автомобили встретятся?

2. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 54 км/ч, а вторую половину времени – со скоростью 68 км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

3. Путешественник на яхте переплыл океан со средней скоростью 17 км/ч. Назад он вернулся на самолете со скоростью 561 км/ч. Найти среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути.

4. Катер отправился по реке от одной пристани до другой и, затратив на стоянку 15 мин, через 2,5 ч вернулся. Найти скорость течения реки,

если собственная скорость катера 18 км/ч, а расстояние между пристанями 20 км.

5. Поезд, двигаясь со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо светофора за 36 с. Найти длину поезда.

6. Отправившись со станции с опозданием в 1 ч, поезд на перегоне 180 км ликвидировал отставание, двигаясь со скоростью на 15 км/ч большей. Какова скорость поезда по расписанию?

7. Один рабочий выполнит заказ за 28 ч, другой – за 21 ч. За какое время выполнят заказ оба рабочих, работая вместе?

8. Каждый из двух рабочих может выполнить заказ за 8 ч. Через 2 ч после того, как один из рабочих приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и они вместе закончили работу. За какое время был выполнен заказ?

9. Первая труба заполняет бак емкостью 820 л, вторая – бак емкостью 790 л. Одна из труб пропускает в минуту на 3 л больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает каждая труба, если баки были наполнены за одно и то же время? Определите это время.

10. Олег отвечает за 1 ч на 8 вопросов теста, Коля на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Олег закончил позже Коли на 10 мин. Сколько вопросов в тесте?

Задачи на проценты, смеси, сплавы

11. Цена на товар повысилась на 24 % и составила 744 руб. Сколько стоил товар первоначально?

12. До снижения цены товар стоил 600 руб., после снижения стал стоить 552 руб. На сколько процентов была снижена цена товара?

13. Стоимость акций снизилась на 60 %. Во сколько раз подешевели акции?

14. Себестоимость продукции снизилась в 8 раз. На сколько процентов снизилась себестоимость?

15. В сосуд, содержащий 11 л 17 %-ного водного раствора кислоты, добавили 6 л воды. Каково процентное содержание кислоты в получившемся растворе?

16. Сколько литров 15 %-ного раствора кислоты надо добавить к 30 л 10 %-ного раствора такой же кислоты, чтобы получить 12 %-ный раствор кислоты?

17. Клиент внес 30 000 руб. на два вклада, один из которых дает годовой доход 8 %, а другой – 10 %. Через год на двух счетах было 32600 руб. Какую сумму клиент внес на каждый вклад?

18. В прошлом году на два факультета университета было подано 1100 заявлений. В этом году число заявлений уменьшилось на 20 %, а на второй – увеличилось на 30 %. При этом было подано 1130 заявлений. Сколько заявлений было подано на каждый факультет в этом году?

Задачи на числа

19. Теплоход рассчитан на 800 пассажиров и 55 членов команды. Каждая спасательная шлюпка рассчитана на 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на корабле, чтобы можно было эвакуировать всех людей?

20. На день рождения Оля купила 28 конфет и шоколадок. Какое наибольшее число гостей Оля может пригласить, чтобы конфеты и шоколадки можно было разделить поровну между всеми, включая и ее саму?

21. Катя пригласила гостей и хочет купить столько пирожных, чтобы их можно было разделить поровну всем, включая и ее саму. Но она не знает, сколько будет гостей: 3, 4 или 5. Какое наименьшее число пирожных должна купить Катя, чтобы их можно было разделить в любом случае?

22. Сумма возрастов отца и сына равна 52. Через 8 лет отношение возраста отца к возрасту сына будет равно 3. Сколько сыну лет сейчас?

23. Из числителя и знаменателя дроби $\frac{2}{5}$ вычли одно и то же число. В результате получилась дробь $\frac{1}{4}$. Какое число вычиталось?

24. Разность между двухзначным числом и двузначным числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 72. Найти первоначальное число.

25. Число a при делении на 5 дает остаток 2. Найти остаток от деления на 5 числа $3a$.

– В –

Задачи на движение и совместную работу

26. Поезд проехал половину пути со скоростью 40 км/ч, а другую половину – со скоростью 60 км/ч. Найти среднюю скорость поезда на всем пути.

27. Поезд проходит через мост длиной 450 м за 45 с, а мимо светофора – за 15 с. Найти длину поезда и его скорость.

28. Катер, проплыв против течения 8 км, вернулся обратно, затратив на обратный путь на 30 мин меньше, чем при движении против течения. Найти скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 4 км/ч.

29. Водитель остановил машину для заправки топливом на 24 мин. Увеличив скорость на 10 км/ч, водитель наверстал потерянное время на дистанции в 80 км. С какой скоростью двигалась машина на этой дистанции?

30. Болельщик хочет успеть на стадион к началу матча. Если он пойдет из дома пешком со скоростью 5 км/ч, то опоздает на 1 ч. Если поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то придет за 30 мин до начала матча. Чему равно расстояние от дома до стадиона?

31. Два пешехода должны выйти навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 20 км. Если первый пешеход выйдет на полчаса раньше второго, то он встретит второго пешехода через 2,5 ч после своего выхода. Если второй пешеход выйдет на 1 ч раньше первого, то он встретит первого пешехода через 2 ч 40 мин после своего выхода. Найти скорость каждого пешехода.

32. Часы показывают полночь. Через сколько минут часовая и минутная стрелки вновь совпадут?

33. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 3 мин быстрее другого и через 1 ч обогнал его ровно на круг. За какое время каждый лыжник проходил круг?

34. Школьник рассчитал, что сможет хорошо подготовиться к экзамену, если будет решать по 12 задач в день. Однако ежедневно он перевыполнял свою норму на 8 задач, и уже за 5 дней решил на 20 задач больше, чем планировал первоначально. Сколько задач решил школьник?

35. Два каменщика выложили кирпичную стену за 14 дней. При этом второй каменщик присоединился к первому через 3 дня от начала работы. Известно, что первому строителю требуется на 6 дней больше, чем второму. За сколько дней может выложить стенку каждый каменщик, работая отдельно?

36. Бак наполняется двумя трубами за 6 ч. Одна первая труба наполняет бак на 5 ч быстрее, чем одна вторая. За какое время каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бак?

37. Два автомата упаковывают коробки с соками за 12 ч, работая вместе. Если первый автомат будет включен 2 ч, а второй 3 ч, то будет упаковано только 20 % всех коробок. За какое время может упаковать все коробки каждый автомат, работая отдельно?

38. Катя съедает банку варенья за 10 мин, Оля – за 12 мин, Таня – за 15 мин. За какое время девочки втроем съедят банку варенья?

Задачи на проценты, смеси, сплавы

39. В январе завод выпустил 800 приборов. В феврале производство снизилось на 10 %, а в марте – еще на 10 %. Сколько приборов выпустили в марте?

40. Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если зарплата жены увеличится вдвое, то общий доход семьи вырастет на 45 %. На сколько возрастет общий доход семьи, если вдвое увеличится зарплата мужа?

41. В поселке проживало 5000 человек. Через год в результате строительства новых домов число жителей выросло на 20 %, а еще через год – на 30 %. Сколько человек стало проживать в поселке?

42. Банковский вклад в феврале увеличился на 10 %, а в марте уменьшился на 10 %. После этого на счету оказалось 108900 руб. Найти сумму вклада на конец января.

43. Смешали 7 л 16 %-ного раствора кислоты с 3 л 6 %-ного раствора этой же кислоты. Найти процентное содержание кислоты в полученном растворе.

44. Влажность свежескошенной травы 60 %, сена – 20%. Сколько получится сена из 1 т свежескошенной травы?

45. Сколько граммов 75 %-ного раствора кислоты надо добавить к 30 г 15 %-ного раствора кислоты, чтобы получить 50 %-ный раствор кислоты?

46. Каждый ученик спортивной школы занимается одним из видов борьбы: самбо, дзюдо или каратэ. Отношение числа самбистов к числу дзюдоистов равно 11:6, числа дзюдоистов к числу каратистов равно 3:4. Сколько процентов учащихся занимается наиболее популярным в этой школе видом борьбы?

Задачи на числа

47. Длины сторон прямоугольника (в см) выражаются целыми числами. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 38 см^2 , а периметр меньше 50 см.

48. На складе хранятся мешки с мукой и с сахаром. Масса одного мешка с мукой равна 32 кг, а масса одного мешка с сахаром 44 кг. Может ли общая масса всех мешков, хранящихся на складе, быть равной 2014 кг?

49. Найти наименьшее трехзначное число, сумма цифр которого равна 22.

50. Разность цифр двузначного числа равна 5, а произведение цифр равно 14. Найти это число.

51. Если двузначное число разделить на произведение цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение цифр, то получится данное число. Найти это число.

52. Произведение двузначного числа на сумму его цифр равно 90. Если умножить число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на сумму его цифр, то получится 306. Найти это число.

– С –

Задачи на движение и совместную работу

53. Если велосипедист увеличит скорость на 5 км/ч, то получит выигрыш во времени 12 мин при прохождении некоторого пути. Если он уменьшит скорость на 8 км/ч, то потеряет 40 минут на том же пути. Найдите скорость велосипедиста и длину пути.

54. Велосипедист движется по пути AB , состоящем из ровных участков, спусков и подъемов. На ровной дороге скорость велосипедиста равна 10 км/ч, на подъемах – 8 км/ч, на спусках 16 км/ч. На дорогу из A в B велосипедист тратит 6 ч, а на обратный путь из B в A – 5 ч 30 мин. Ровная часть пути составляет 20 км. Найти общую длину подъемов и спусков на пути из A в B .

55. Один автомобиль проезжает в 1 мин на 200 м больше, чем другой, поэтому затрачивает на прохождение 1 км на 10 с меньше. Сколько километров за 1 ч проходит каждый автомобиль?

56. Из пунктов A и B , расстояние между которыми 6 км, одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. После их встречи пешеход, шедший из A , пришел в B через 24 мин, а шедший из B пришел в A через 54 мин. На каком расстоянии от пункта A встретились пешеходы?

57. Из пунктов A и B одновременно отправились навстречу друг другу пешеход и велосипедист. Через 1,5 ч они встретились и продолжили путь в своем направлении. Велосипедист прибыл в пункт A через 2 ч после выезда из B . За какое время прошел путь из A в B пешеход?

58. Плот проплывает путь от A до B за 24 ч, а катер – за 3 ч. За какое время катер проплывает такое же расстояние в стоячей воде?

59. Из пунктов A и B одновременно отправились вниз по течению реки плот и катер. Пока плот плыл со скоростью 3 км/ч, катер прибыл в пункт B , затем совершил обратный рейс в пункт A и снова вернулся в пункт B одновременно с прибытием плота. Какова собственная скорость катера?

60. Поезд проходит мимо платформы длиной l_1 (м) за t_1 (с), а мост длиной l_2 (м) за t_2 (с). Найти скорость и длину поезда. За какое время поезд пройдет перегон длиной $l_1 + l_2$ (м) ($l_1 \neq l_2$)?

61. Ученик выполнил домашние задания по трем предметам: математике, физике и биологии. Если бы задание по математике он выполнил в 5 раз быстрее, по физике в 2 раза быстрее, а по биологии в 2,5 раза быстрее, то на выполнение всей работы у него ушло бы 2 ч. Если бы задание по математике он выполнил в 2 раз быстрее, по физике в 4 раза быстрее, а по биологии в 3 раза быстрее, то на выполнение всей работы у него ушло бы 1 ч. Сколько времени выполнял ученик домашнее задание по трем предметам?

62. Одна мельница может смолоть 38 ц пшеницы за 6 ч, другая – 98 ц за 15 ч, третья – 35 ц за 7 ч. Как распределить 133 т пшеницы между мельницами, чтобы они мололи зерно одно и то же время?

63. Четыре бригады должны разгрузить вагон. Вторая, третья и четвертая бригады вместе могут выполнить эту работу за 4 ч; первая, третья и четвертая – за 3 ч. Если будут работать только первая и вторая бригады, то вагон будет разгружен за 6 ч. За какое время могут разгрузить вагон все бригады вместе?

Задачи на проценты, смеси, сплавы

64. Семья состоит из трех человек: отца, матери и сына. Если зарплата матери увеличилась бы вдвое, общий доход семьи увеличился бы на 30 %. Если бы стипендия сына увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 6 %. Сколько процентов дохода семьи составляет зарплата отца?

65. Свежий виноград содержит 80 % влаги, а сушеный виноград (изюм) – 5 %. Сколько надо собрать свежего винограда, чтобы получить 1 кг изюма?

66. В свежих яблоках 80 % соды, а в сушеных – 20 %. На сколько процентов уменьшилась масса яблок при сушке?

67. Апельсины подешевели на 30 %. Сколько апельсинов теперь можно купить за те же деньги, на которые ранее покупали 2,8 кг?

68. Цена товара была снижена дважды на одно и то же число процентов и стала 1805 руб. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 2000 руб.?

69. Вчера число учеников, присутствующих на уроке, было в 8 раз больше числа отсутствующих. Сегодня не пришли еще 2 ученика, и оказалось, что число отсутствующих составляет 20 % от числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

70. Первый кусок сплава меди и серебра массой 2 кг содержит 30 % меди. Второй кусок сплава меди и серебра массой 3 кг содержит 40 % меди. Какую массу второго куска надо переплавить с целым первым куском, чтобы получить новый сплав, содержащий p % меди?

71. В сосуде емкостью 7 л содержится 3 л 70 %-ного раствора кислоты. Другой сосуд содержит 10 л такой же p %-ной кислоты. Сколько литров кислоты из первого сосуда надо долить в первый, чтобы получить кислоту максимальной концентрации?

Задачи на числа

72. При сложении правильной несократимой дроби с дробью, полученной из данной перестановкой числителя и знаменателя, получили $2\frac{9}{70}$. Найдите правильную дробь.

73. Прямоугольная клумба размерами 18×12 м окаймлена дорожкой постоянной ширины. Определите ширину дорожки, если ее площадь равна площади клумбы.

74. Ученик при умножении двух чисел, из которых одно на 38 больше другого, ошибся, уменьшив в произведении цифру тысяч на 1. При делении ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 86, а в остатке 56. Какие натуральные числа перемножал ученик?

75. Если двухзначное число разделить на сумму его цифр, что в частном получится 4, а в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3, а в остатке 5. Найти это число.

76. Число диагоналей выпуклого многоугольника в 5 раз больше числа его сторон. Сколько сторон у многоугольника?

77. Сын младше отца в 6 раз, а через 1 год он станет младше отца в 5 раз. Через сколько лет сын будет младше отца в 3 раза?

78. Оля задумала трехзначное число. Сумма цифр этого числа равна 7, а сумма квадратов цифр равна 27. Если из задуманного числа вычесть 396, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое число задумала Оля?

79. В четырехзначном числе сумма цифр тысяч и десятков равна 4, сумма цифр сотен и единиц равна 15, а цифра единиц больше цифры тысяч на 7. Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найдите такое, у которого сумма произведения цифры тысяч на цифру единиц и произведения цифры сотен на цифру десятков принимает наименьшее значение.

Тема 6. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Эта тема вплотную связана с последним разделом предыдущей темы. Будут также изучаться числа, связанные определенными закономерностями.

6.1. Арифметическая прогрессия

Последовательность чисел a_n , *каждый член* которой (начиная со второго) *равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d* (разностью прогрессии), называется *арифметической* прогрессией: $a_n = a_{n-1} + d$ ($n \geq 2$). При $d > 0$ арифметическая прогрессия *возрастает*, при $d < 0$ – *убывает*.

Пример 6.1. Найти первые пять членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 5$, $d = 2$.

Решение. Из определения арифметической прогрессии $a_n = a_{n-1} + d$ получаем: при $n = 2$ $a_2 = a_1 + d = 5 + 2 = 7$, при $n = 3$ $a_3 = a_2 + d = 7 + 2 = 9$, при $n = 4$ $a_4 = a_3 + d = 9 + 2 = 11$, при $n = 5$ $a_5 = a_4 + d = 11 + 2 = 13$. Итак, эти члены: 5, 7, 9, 11, 13.

Арифметическая прогрессия обладает следующими *свойствами*:

1) общий член прогрессии a_n выражается через ее первый член a_1 , разность d и порядковый номер этого члена n :
$$a_n = a_1 + d(n-1);$$

2) сумма n первых членов прогрессии вычисляется по формулам $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ или $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$.

3) любой член прогрессии (начиная со второго) равен половине суммы соседних членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ ($n \geq 2$) (характеристическое свойство).

Пример 6.2. В арифметической прогрессии сумма второго и пятого членов равна 8, а третьего и седьмого равна 14. Найти прогрессию.

Решение. Выразим все члены прогрессии через ее первый член и разность: $a_2 = a_1 + d$, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_7 = a_1 + 6d$ и запишем условия задачи: $8 = a_2 + a_5 = (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 5d$, $14 = a_3 + a_7 = 2a_1 + 8d$. Для определения a_1 и d получаем линейную систему уравнений
$$\begin{cases} 8 = 2a_1 + 5d; \\ 14 = 2a_1 + 8d. \end{cases}$$
 Вычитая из второго уравнения

первое, найдем: $6 = 3d$ или $d = 2$ и из любого из уравнений $a_1 = -1$.

Пример 6.3. Первый член арифметической прогрессии a_1 , a_2 , a_3 , ... равен единице. При каком значении разности прогрессии d величина $S = a_1a_3 + a_2a_3$ имеет минимальное значение?

Решение. Как и в предыдущей задаче, выразим члены прогрессии a_2 и a_3 через первый член ($a_1 = 1$) и разность d : $a_2 = a_1 + d = 1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d = 1 + 2d$. Тогда

$$S = 1(1 + 2d) + (1 + d)(1 + 2d) = 2d^2 + 5d + 2.$$

Функция S в зависимости от d является квадратичной функцией (параболой) и достигает минимального значения при
$$d = -\frac{5}{2 \cdot 2} = -\frac{5}{4}.$$

Пример 6.4. Решить уравнение $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + x = 155$.

Решение. В левой части уравнения находится сумма членов арифметической прогрессии: 2; 5; 8; 11; ..., первый член которой 2 и разность 3. Пусть в эту сумму входит n слагаемых. Тогда, используя формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии, получаем: $\frac{2+x}{2}n = 155$. Второе уравнение получим,

записав последний член этой суммы: $x = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$. Подставив второе уравнение в первое, придем к квадратному уравнению относительно n : $\frac{2+(3n-1)}{2}n = 155$ или $3n^2 + n - 310 = 0$,

корни которого $n = 10$ и $n = -\frac{31}{3}$ (не подходит, так как n - число натуральное). После этого находим $x = 3 \cdot 10 - 1 = 29$. Итак, $x = 29$ - единственный корень данного уравнения.

Пример 6.5. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 4 дают остаток 3.

Решение. Первое число легко угадать: $a_1 = 103$. Легко также угадать несколько последующих таких чисел: $a_2 = 107$, $a_3 = 111$, $a_4 = 115$. Видно, что искомые числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом 103 и разностью 4. Общий член этой прогрессии можно записать в виде: $a_n = 103 + 4(n - 1) = 99 + 4n$.

Определим теперь число членов в сумме. Так как последнее трехзначное число 999, то получаем условие $a_n \leq 999$ или $99 + 4n \leq 999$. Решив это неравенство, найдем $n \leq 225$. Итак, в искомую сумму войдет 225 слагаемых. Найдем сумму 225 членов арифметической прогрессии с первым членом 103 и разностью 4:

$$S = \frac{2 \cdot 103 + 4 \cdot (225 - 1)}{2} \cdot 225 = 551 \cdot 225 = 123975.$$

Пример 6.6. Стороны прямоугольного треугольника (рис. 6.1) образуют арифметическую прогрессию. Найти стороны треугольника.

Решение. Пусть наименьший катет $\triangle ABC$: $AB = a$, тогда второй катет $BC = a + d$ и гипотенуза $AC = a + 2d$ (где d – разность прогрессии, $d > 0$). Запишем теорему Пифагора: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ или $(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2 \Rightarrow a^2 - 2ad - 3d^2 = 0$. Решая это однородное уравнение, получим $a = 3d$ и $a = -d$ (не подходит). Имеем $AB = 3d$, $BC = 4d$, $AC = 5d$ (где d – любое число), т.е. условию задачи удовлетворяют прямоугольные треугольники, подобные египетскому.

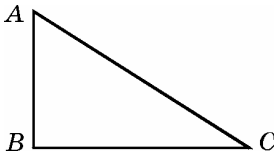


Рис. 6.1

6.2. Геометрическая прогрессия

Последовательность чисел b_n , первый член которой отличен от нуля и *каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q* , называется *геометрической* прогрессией (q – знаменатель прогрессии): $b_n = b_{n-1}q$ ($n \geq 2$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$).

Пример 6.7. Найти первые четыре члена геометрической прогрессии, если $b_1 = 2$, $q = 3$.

Решение. Из определения геометрической прогрессии $b_n = b_{n-1}q$ имеем: при $n = 2$ $b_2 = b_1q = 2 \cdot 3 = 6$, при $n = 3$, $b_3 = b_2q = 6 \cdot 3 = 18$, при $n = 4$ $b_4 = b_3q = 18 \cdot 3 = 54$. Итак, эти члены: 2, 6, 18, 54.

Геометрическая прогрессия имеет следующие *свойства*:

1) общий член прогрессии b_n выражается через ее первый член b_1 , знаменатель q и порядковый номер этого члена n : $b_n = b_1q^{n-1}$;

2) сумма n первых членов вычисляется по формулам:

$$S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q - 1} \text{ или } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1) \text{ и } S_n = nb_1 \quad (q = 1);$$

3) квадрат любого члена прогрессии (начиная со второго) равен произведению соседних членов: $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ ($n \geq 2$) (характеристическое свойство).

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессии*. Для нее, разумеется, как и для любой геометрической прогрессии, справедливы свойства и формулы, приведенные выше. Кроме того, можно вычислить сумму бесконечного числа членов такой прогрессии по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

При решении задач, связанных с геометрической прогрессией, удобно выразить члены прогрессии через *ее первый член и знаменатель*.

Пример 6.8. Четвертый член геометрической прогрессии больше второго члена на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найти эту прогрессию.

Решение. Выразим второй, третий, четвертый члены прогрессии через ее первый член: $b_2 = b_1q$, $b_3 = b_1q^2$, $b_4 = b_1q^3$ и запишем условия задачи:

$$\begin{aligned} 24 &= b_4 - b_2 = b_1q^3 - b_1q = b_1q(q^2 - 1); \\ 6 &= b_2 + b_3 = b_1q + b_1q^2 = b_1q(1 + q). \end{aligned}$$

Получили систему нелинейных уравнений:
$$\begin{cases} 24 = b_1q(q^2 - 1); \\ 6 = b_1q(q + 1). \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, найдем: $4 = q - 1$, откуда $q = 5$. Тогда из второго уравнения $b_1 = \frac{1}{5}$.

Пример 6.9. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти эту прогрессию.

Решение. Пусть дана прогрессия $b_1, b_1q, b_1q^2, \dots, |q| < 1$. Тогда ее сумма $4 = \frac{b_1}{1-q}$. Кубы членов данной прогрессии: $b_1^3, b_1^3q^3, b_1^3q^6, \dots$ также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3 . Так как при $|q| < 1$ величина $|q^3| = |q|^3 < 1$, то эта прогрессия также бесконечно убывающая и ее сумма: $192 = \frac{b_1^3}{1-q^3}$. Получаем систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 4 = \frac{b_1}{1-q}; \\ 192 = \frac{b_1^3}{1-q^3}. \end{cases} \quad \text{Для решения этой системы возведем первое уравнение в куб: } 64 = \frac{b_1^3}{(1-q)^3}, \text{ разделим второе уравнение системы на}$$

полученное уравнение: $3 = \frac{(1-q)^3}{1-q^3} = \frac{(1-q)^2}{1+q+q^2}$ или $2q^2 + 5q + 2 = 0$.

Корни этого уравнения $q = -\frac{1}{2}$ и $q = -2$ (не подходит, так как прогрессия бесконечно убывающая и $|q| < 1$). Теперь из первого уравнения находим $b_1 = 4(1-q) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$.

Пример 6.10. Решить уравнение $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + x = 225$.

Решение. В левой части уравнения находится сумма геометрической прогрессии с первым членом 1, знаменателем 2. Пусть число слагаемых равно n . Тогда эта сумма $\frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1 = 255$,

отсюда $2^n = 256 = 2^8$. Так как x является n членом прогрессии, то $x = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{8-1} = 2^7 = 128$.

Пример 6.11. Найти сумму: $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_n$.

Решение. Умножим и разделим искомую сумму на 9:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{9}(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_n) = \\ &= \frac{1}{9}[(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^n - 1)]. \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые суммы:

$$S = \frac{1}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - (\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_n)].$$

Первая скобка представляет собой сумму геометрической прогрессии с первым членом 10 и знаменателем 10. Учитывая это, получим $S = \frac{1}{9} \left[\frac{10 \cdot (10^n - 1)}{10 - 1} - n \right] = \frac{1}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right)$.

Рассмотрим еще некоторые применения геометрической прогрессии.

Пример 6.12. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - x + a = 0$ и x_3 и x_4 – корни уравнения $x^2 - 4x + b = 0$. Известно, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 (в указанном порядке) составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Решить уравнения и найти числа a, b .

Решение. Для данных квадратных уравнений запишем форму-

лы Виета:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 x_2 = a; \\ x_3 + x_4 = 4; \\ x_3 x_4 = b. \end{cases}$$
 Рассмотрим сначала первое и третье урав-

нение этой системы и учтем, что $x_2 = x_1 q$, $x_3 = x_1 q^2$, $x_4 = x_1 q^3$. Тогда

получим:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_3 + x_4 = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1(1 + q) = 1; \\ x_1 q^2(1 + q) = 4. \end{cases}$$
 Разделив второе урав-

нение на первое, найдем $q^2 = 4$, откуда $q = 2$ и $q = -2$ (не подходит, так как прогрессия возрастающая, т.е. $q > 0$). Из первого

уравнения получаем: $x_1 = \frac{1}{1+q} = \frac{1}{3}$, тогда $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$ и $x_4 = \frac{8}{3}$.

Из второго и четвертого уравнений исходной системы находим:

$$a = x_1 x_2 = \frac{2}{9} \text{ и } b = x_3 x_4 = \frac{32}{9}. \text{ Итак: } x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{4}{3}, x_4 = \frac{8}{3},$$

$$a = \frac{2}{9}, b = \frac{32}{9}.$$

Пример 6.13. Сторона квадрата равна a . Середины сторон этого квадрата соединим отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с данным, и т.д. Найти суммы сторон, периметров и площадей всех этих квадратов.

Решение. Обозначим стороны этих квадратов (начиная с данного): $a, a_2, a_3, \dots$. Рассмотрим прямоугольный равнобедренный

$\triangle ABC$: $AB = AC = \frac{a}{2}$, $BC = a_2$ (рис. 6.2).

Запишем для него теорему Пифагора:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ или } a_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4},$$

откуда $a_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Аналогично из прямо-

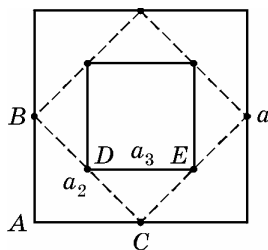


Рис. 6.2

угольного $\triangle DEC$ находим: $a_3 = \frac{a_2\sqrt{2}}{2}$ и т. д.

Таким образом, стороны квадратов образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию: $a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \dots$, у которой

первый член a и знаменатель $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдем ее сумму:

$$\frac{a}{1 - \sqrt{2}/2} = \frac{2a}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2a(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = a(2 + \sqrt{2}) \approx 3,4a.$$

Так как периметр квадрата $4a$, то периметры приведенных квадратов также образуют бесконечно убывающую геометри-

ческую прогрессию с первым членом $4a$ и знаменателем $\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому ее сумма $4a(2 + \sqrt{2})$. Площадь квадрата a^2 и площади квадратов: $a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \dots$ образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом a^2 и знаменателем $1/2$, поэтому сумма площадей $\frac{a^2}{1-1/2} = 2a^2$. Итак, сумма сторон $a(2 + \sqrt{2})$, периметров – $4a(2 + \sqrt{2})$, площадей – $2a^2$.

6.3. Смешанные задачи на прогрессии

Очень распространены задачи, в условиях которых говорится о *двух прогрессиях сразу*: арифметической и геометрической. Как правило, для решения этих задач достаточно учесть *характеристические свойства* этих прогрессий.

Пример 6.14. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 8, получится геометрическая прогрессия с суммой членов 26. Найти эти числа.

Решение. Пусть эти числа a, b, c . Так как они образуют арифметическую прогрессию, то выполнено соотношение (свойство арифметической прогрессии): $2b = a + c$.

После сложения первого числа с числом 8 получаем числа $(a + 8), b, c$, которые образуют геометрическую прогрессию. Запишем ее свойство: $b^2 = (a + 8)c$. Кроме того, известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 26, т.е. $(a + 8) + b + c = 26$. Получаем для определения a, b, c систему уравнений:

$$\begin{cases} 2b = a + c; \\ b^2 = (a + 8)c; \\ (a + 8) + b + c = 26. \end{cases}$$

Запишем третье уравнение системы в виде: $(a + c) + b = 18$. Учтя первое уравнение системы, получим: $b + 2b = 18, b = 6$.

Тогда из первого и второго уравнений получаем систему для определения a и c :
$$\begin{cases} 12 = a + c; \\ 36 = (a + 8)c. \end{cases}$$
 Выразив из первого уравнения

$c = 12 - a$ и подставив во второе, получим уравнение

$$36 = (a + 8)(12 - a) \text{ или } a^2 - 4a - 60 = 0.$$

Корни этого уравнения $a = -6$ и $a = 10$. Соответствующие им числа $c = 18$ и $c = 2$. Таким образом, искомые числа: $-6, 6, 18$ и $10, 6, 2$.

Пример 6.15. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из третьего числа вычесть 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по единице, то снова получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение. Так как три числа образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в виде: a, aq, aq^2 . После вычитания из последнего числа 4 получаем числа $a, aq, (aq^2 - 4)$, образующие арифметическую прогрессию. На основании свойства арифметической прогрессии имеем: $2aq = a + (aq^2 - 4)$ или $4 = a(1 - q)^2$. Если из второго и третьего членов этой арифметической прогрессии вычесть по единице, то получим числа: $a, (aq - 1), (aq^2 - 5)$, образующие геометрическую прогрессию. Запишем ее свойство: $(aq - 1)^2 = a(aq^2 - 5)$ или $1 = a(2q - 5)$. Для определения

a и q имеем систему уравнений:
$$\begin{cases} 4 = a(1 - q)^2; \\ 1 = a(2q - 5). \end{cases}$$
 Разделив уравне-

ния друг на друга, получим $4 = \frac{(1 - q)^2}{2q - 5}$ или $q^2 - 10q + 21 = 0$.

Корни этого уравнения $q = 3$ и $q = 7$, тогда соответствующие значения: $a = 1$ и $a = \frac{1}{9}$. Теперь находим сами числа: $1, 3, 9$ и $\frac{1}{9},$

$\frac{7}{9}, \frac{49}{9}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

– А –

1. Найти седьмой член арифметической прогрессии, разность которой равна ее восьмому члену.

2. Найти сумму первых восьми членов арифметической прогрессии, первый член которой равен -12 , а второй равен -9 .

3. Сумма седьмого и двенадцатого членов арифметической прогрессии меньше суммы ее шестого и одиннадцатого членов на 8. Найти разность прогрессии.

4. Найти девятый член геометрической прогрессии, если ее десятый член равен 12, а одиннадцатый равен 4.

5. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, знаменатель которой равен 3, а третий член равен 36.

6. Найти седьмой член геометрической прогрессии, знаменатель которой равен ее восьмому члену.

7. Пятый член геометрической прогрессии в 5 раз больше ее первого члена. Во сколько раз тринадцатый член этой прогрессии больше ее пятого члена?

8. Первый член арифметической прогрессии равен 6, а ее разность равна 4. Начиная с какого номера члены этой прогрессии больше 260?

9. Между числами 6 и 17 вставьте еще четыре числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали арифметическую прогрессию.

10. Найти сумму всех последовательных натуральных чисел с 60 до 110 включительно.

11. Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если ее четвертый член равен $\frac{1}{24}$, знаменатель равен $\frac{1}{2}$.

12. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 40, знаменатель прогрессии равен 3. Найти сумму первых восьми членов этой прогрессии.

13. Решите уравнение: $1 + 3 + 5 + \dots + x = 64$.

14. Найти сумму дробей: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$.

– В –

15. Первый член арифметической прогрессии равен 1, разность прогрессии 7. Какие из чисел 28, 55, 9150 являются членами этой прогрессии?

16. В арифметической прогрессии второй член равен 4, а двадцать восьмой 56. Найти сумму первых тридцати ее членов.

17. Существует ли арифметическая прогрессия, в которой $a_6 = 14$, $a_{10} = 20$, $a_{16} = 28$?

18. В арифметической прогрессии $a_5 + a_9 = 40$. Найти $a_3 + a_7 + a_{11}$.

19. Какое наибольшее число последовательных нечетных чисел, начиная с 1, можно сложить, чтобы получившаяся сумма осталась меньше 300?

20. Найти сумму всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящий 150.

21. Найти сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1.

22. Найти арифметическую прогрессию, если сумма ее n первых членов вычисляется по формуле $2n^2 - 3n$.

23. Решить уравнение $(x + 1) + (x + 4) + \dots + (x + 28) = 155$.

24. Найти знаменатель геометрической прогрессии, у которой отношение десятого члена к восьмому в 5 раз больше отношения одиннадцатого члена к десятому.

25. Существует ли геометрическая прогрессия, в которой восьмой член равен 12, а двенадцатый член равен -8 ?

26. Отношение суммы третьего и восьмого членов геометрической прогрессии к сумме второго и седьмого ее членов равно 13. Найти знаменатель прогрессии.

27. Между числами 2 и 18 вставить три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

28. В геометрической прогрессии $b_1 + b_2 + b_3 = 31$, $b_1 + b_3 = 26$. Найти прогрессию.

29. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма их квадратов 91. Найти второй член прогрессии.

30. В геометрической прогрессии $2n$ членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна S_1 , а на нечетных — S_2 . Найти знаменатель прогрессии.

31. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов ее членов равна $\frac{108}{13}$. Найти сумму пяти первых членов.

32. Сторона равностороннего треугольника равна a . На его высоте построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового равностороннего треугольника построен еще равносторонний треугольник и т.д. Найти сумму периметров и сумму площадей всех этих треугольников.

33. Длины сторон треугольника выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию. Периметр этого треугольника равен 15. Найти стороны треугольника.

34. Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма любого числа (начиная с первого) в четыре раза больше квадрата числа членов.

35. Вычислить сумму чисел: $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \dots + 2^2 + 1^2$.

36. Найти сумму дробей: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 101}$.

37. Доказать, что простые числа не могут образовывать арифметическую прогрессию с разностью 14 (прогрессия должна содержать только простые числа). Например: 3, 17, 31, 45,...

38. Для некоторой арифметической прогрессии выполнено равенство $S_m : S_n = m^2 : n^2$ (где S_m – сумма m первых членов прогрессии). Доказать, что $a_m : a_n = (2m - 1) : (2n - 1)$ (где a_m – m -й член прогрессии).

39. Найти отношение корней биквадратного уравнения, если они составляют арифметическую прогрессию.

40. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии на 32 меньше суммы следующих четырех ее членов. На сколько сумма первых десяти членов этой прогрессии меньше суммы следующих десяти ее членов?

41. Найти сумму первых двадцати совпадающих членов двух арифметических прогрессий: 3, 8, 13, ... и 4, 11, 18, ...

42. Решить уравнение: $\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{(x+1)^2} + \frac{x-2}{(x+1)^2} + \dots + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{19}{40}$.

43. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, кратных 3, но не кратных 5.

44. Найти разность арифметической прогрессии, в которой первый член равен 66, а произведение второго и двенадцатого членов является наименьшим из возможных.

45. Найти знаменатель геометрической прогрессии, отношение суммы первых четырех членов которой к сумме первых двух членов равно $\frac{82}{81}$.

46. Найти произведение двенадцатого, семнадцатого, двадцать второго и двадцать седьмого членов геометрической прогрессии, если произведение десятого и двадцать девятого членов равно 22.

47. Разность пятого и третьего членов геометрической прогрессии равна 4, а разность седьмого и пятого членов равна 12. Найти разность девятого и седьмого членов этой прогрессии.

48. Найти сумму n чисел: $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots3}_n$.

49. Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

50. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 3x + a = 0$ и x_3 и x_4 – корни уравнения $x^2 - 12x + b = 0$. Числа x_1, x_2, x_3, x_4 (в указанном порядке) образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Найти a и b и корни уравнений.

51. Решить уравнение $x^3 - 6x^2 - 24x + a = 0$, если его корни образуют геометрическую прогрессию.

52. Доказать равенство $\underbrace{(66\dots6)^2}_n + \underbrace{88\dots8}_n = \underbrace{44\dots4}_{2n}$. Например, $6^2 + 8 = 44$, $66^2 + 88 = 4356 + 88 = 4444$ и т.д.

53. Сумма трех чисел, образующих убывающую арифметическую прогрессию, равна 60. Если от первого числа отнять 10, от второго отнять 8, а третье оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

54. Три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найти эти числа, если их сумма равна 42.

55. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Найти знаменатель этой прогрессии, если известно, что $|q| < 1$.

56. Три различных числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a + b, b + c, a + c$ составляют арифметическую прогрессию. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

Тема 7. ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)

Рассмотрим основные *геометрические фигуры* и их *свойства*.

7.1. Треугольники

В планиметрии *треугольник*, пожалуй, является *наиболее изученной* фигурой и наибольшее количество задач связано именно с треугольниками. Поэтому обратите внимание на изучение этого раздела самое серьезное внимание.

Соотношение между сторонами треугольника (неравенство треугольника): любая сторона в треугольнике меньше суммы двух других сторон, т. е. $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$ (где a, b, c – стороны треугольника).

Соотношение между углами треугольника: сумма внутренних углов треугольника равна 180° , т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (где α, β, γ – внутренние углы треугольника).

Соотношение между сторонами и углами треугольника:

1) против равных сторон в треугольнике лежат равные углы. И наоборот, против равных углов треугольника лежат равные стороны;

2) против *бóльшей* стороны треугольника лежит *бóльший* угол. И наоборот, против *бóльшего* угла треугольника лежит *бóльшая* сторона.

Признаки равенства треугольников

Треугольники называются *равными*, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны. Другими словами, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если выполнены равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Напомним три признака равенства треугольников.

Признак 1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признак 2. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признак 3. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пример 7.1. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC , а точка E – на отрезке AD , причем $AC = AD$ и $AB = AE$ (рис. 7.1). Доказать, что $\angle CBD = \angle DEC$.

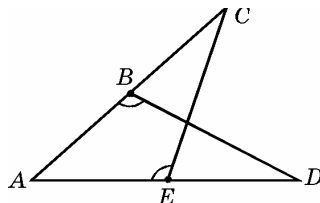


Рис. 7.1

Решение. Рассмотрим $\triangle CAE$ и $\triangle BAD$: $AC = AD$, $AB = AE$ и $\angle CAD$ – общий. Поэтому $\triangle CAE = \triangle BAD$ (по признаку 1) и $\angle CEA = \angle ABD$. Следовательно: $\angle CED = 180^\circ - \angle CEA$ и $\angle CBD = 180^\circ - \angle ABD$ равны друг другу, т.е. $\angle CED = \angle CBD$.

Пример 7.2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов A и C , которые пересекаются под углом α (рис. 7.2). Найти $\angle ABC$.

Решение. Пусть AD и CE – биссектрисы $\angle A$ и $\angle C$ данного $\triangle ABC$. Для $\triangle AOC$ запишем теорему о сумме углов треугольника: $\angle 1 + \angle 2 + \alpha = 180^\circ$, откуда $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - \alpha$.

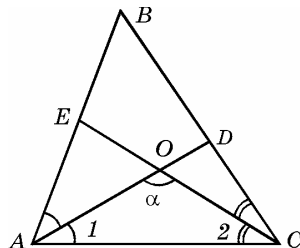


Рис. 7.2

Рассмотрим теперь $\triangle ABC$: $\angle A = 2\angle 1$, $\angle C = 2\angle 2$ и опять запишем теорему о сумме углов треугольника: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ или $2\angle 1 + \angle B + 2\angle 2 = 180^\circ$ или $2(180^\circ - \alpha) + \angle B = 180^\circ$, откуда $\angle B = 2\alpha - 180^\circ$.

Пример 7.3. Про треугольник ABC известно, что $AC = 7$ и $AB - BC = 10$. Определить, существует ли такой треугольник.

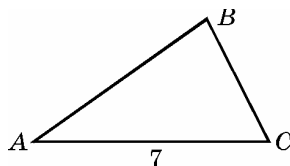


Рис. 7.3

Решение. Проверим неравенство треугольника. Найдем $AC + BC = 7 + BC$.

Определим сторону $AB = 10 + BC$ (из условия задачи). Так как $7 + BC < 10 + BC$, то получаем $AC + BC < AB$ (что противоречит неравенству треугольника). Итак, такой треугольник существовать не может.

Признаки подобия треугольников

Если *стороны* одного треугольника *пропорциональны* сторонам другого треугольника и соответственные *углы* (т. е. углы, лежащие между пропорциональными сторонами) этих треугольников *равны*, то такие треугольники называются *подобными*.

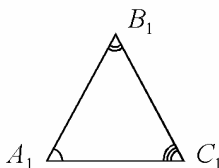
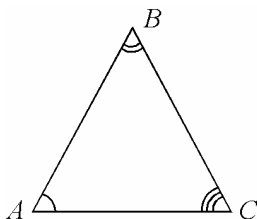


Рис. 7.4

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ на рис. 7.4 подобны: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$ (где k – коэффициент подобия), $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Напомним три признака подобия треугольников.

Признак 1. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Признак 2. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Признак 3. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

Отношение *периметров* подобных треугольников *равно* отношению их соответственных сторон (*коэффициенту подобия*).

Отношение *площадей* подобных треугольников *равно* квадрату отношения их соответственных сторон (*квадрату коэффициента подобия*).

Пример 7.4. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол (рис. 7.24). Найти периметр квадрата.

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ катеты $AC = a$ и $BC = b$. Сторону квадрата $CDFE$ обозначим x . Рассмотрим $\triangle ADE$ и $\triangle EFB$: $\angle DAE = \angle FEB$, $\angle DEA = \angle FBE$ (как соответствующие углы при параллельных прямых DE и FB). Поэтому такие треуголь-

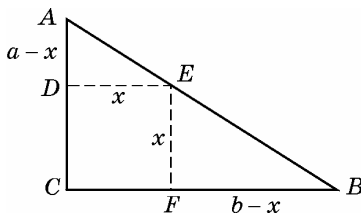


Рис. 7.5

ники подобны (по признаку 2) и, следовательно: $\frac{AD}{DE} = \frac{EF}{FB}$ или

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x} \quad \text{или} \quad ab - (a+b)x + x^2 = x^2, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{ab}{a+b}.$$

Тогда периметр квадрата $P = 4x = \frac{4ab}{a+b}$.

Пример 7.5. Внутри треугольника (рис. 7.6) взята произвольная точка, через которую проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые образуют внутри данного треугольника три малых треугольника, площади которых S_1 , S_2 и S_3 . Найти площадь исходного треугольника.

Решение. По условию задачи $DE \parallel AC$, $FG \parallel AB$, $KL \parallel BC$. Легко показать, что три малых треугольника DOK , GOE и FOL подобны исходному треугольнику ABC (по второму признаку). Пусть S – площадь $\triangle ABC$. Тогда на основании свойства подобных треугольников запишем:

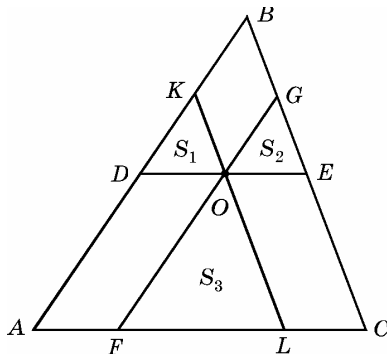


Рис. 7.6

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{DO}{AC}, \quad \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{OE}{AC},$$

$\sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{FL}{AC}$. Почленно сложим эти три равенства и получим:

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{DO + OE + FL}{AC}. \text{ Учтем, что } ADOF \text{ и } OECL -$$

параллелограммы и $DO = AF$, $OE = CL$. Из предыдущего равенства имеем:

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{AF + LC + FL}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1.$$

Отсюда находим: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

В любом треугольнике наиболее важными являются следующие отрезки: биссектриса, медиана, высота, средняя линия.

Линии в треугольнике и их свойства

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.

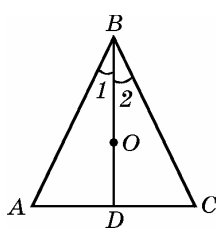


Рис. 7.7

На рис. 7.7 BD – биссектриса угла B в $\triangle ABC$.

При этом, разумеется, $\angle 1 = \angle 2$.

Биссектриса треугольника обладает следующими *свойствами*:

- биссектриса BD – геометрическое место точек, равноудаленных от сторон AB и BC угла B ;

- биссектриса BD делит сторону AC треугольника на части AD и DC , пропорциональные прилежащим к AC сторонам AB и BC (т. е. $AD:DC = AB:BC$);

- все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке O , которая является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны.

На рис. 7.8 отрезок BD – медиана $\triangle ABC$. При этом отрезки AD и DC равны, т.е. $AD = DC$.

Медиана треугольника обладает следующими *свойствами*:

- медиана BD делит $\triangle ABC$ на треугольники ABD и BDC , имеющие равные площади (т.е. равновеликие треугольники);

- все медианы треугольника пересекаются в одной точке O и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника (т.е. $BO:OD = 2:1$).

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

Высота треугольника обладает только *одним свойством*. Все высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рис. 7.9 изображена средняя линия DE треугольника ABC . При этом $AD = DB$ и $CE = EB$.

Отметим основные *свойства* средней линии треугольника:

- средняя линия DE треугольника ABC параллельна основанию AC , т.е. $DE \parallel AC$;

- средняя линия DE треугольника ABC равна половине основания AC , т.е. $DE = \frac{1}{2} AC$.

Пример 7.6. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD . Доказать, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Решение. Проведем высоту BE в $\triangle ABD$ и в $\triangle BDC$, найдем площади этих треугольников:

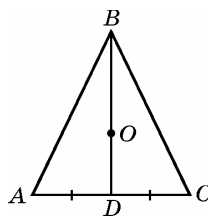


Рис. 7.8

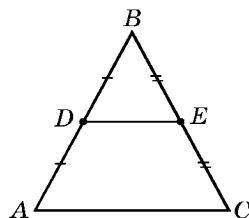


Рис. 7.9

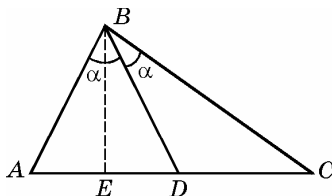


Рис. 7.10

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE, \quad S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} DC \cdot BE.$$

Запишем эти площади и другим образом:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \alpha, \quad S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} BD \cdot BC \cdot \sin \alpha.$$

Приравняв соответствующие площади, получим:

$$AD \cdot BE = AB \cdot BD \cdot \sin \alpha, \quad DC \cdot BE = BD \cdot BC \cdot \sin \alpha.$$

Разделим эти соотношения друг на друга:

$$\frac{AD \cdot BE}{DC \cdot BE} = \frac{AB \cdot BD \cdot \sin \alpha}{BD \cdot BC \cdot \sin \alpha} \quad \text{или} \quad \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

Пример 7.7. В треугольнике ABC длина медианы AD равна m , длина стороны AC равна b . Найти длину третьей стороны, если длина стороны BC в два раза больше длины медианы AD .

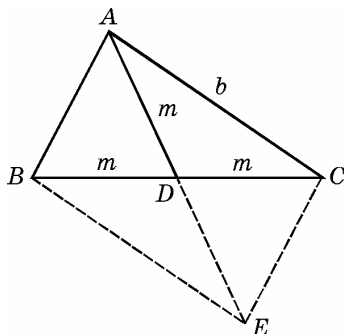


Рис. 7.11

Решение. Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABEC$ (рис. 7.11). В нем $AE = BC = 2m$. Так как в параллелограмме диагонали AE и BC равны, то фигура $ABEC$ – прямоугольник, и $\triangle ABC$ – прямоугольный и в нем гипотенуза $BC = 2m$, катет $AC = b$. По теореме Пифагора находим катет

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{(2m)^2 - b^2} = \\ &= \sqrt{4m^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Теоремы синусов и косинусов

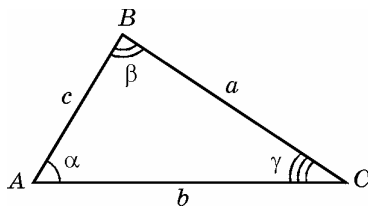


Рис. 7.12

Две теоремы по известным сторонам и углам треугольника позволяют определить все его неизвестные элементы (рис. 7.12):

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

(теорема синусов).

Здесь a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – его углы, лежащие против этих сторон, соответственно; R – радиус окружности, описанной около треугольника.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

(теорема косинусов)

Пример 7.8. В $\triangle ABC$ проведена медиана AD (рис. 7.13). Найти ее длину, если $BC = a, AC = b, AB = c$.

Решение. Пусть $AD = m$. Запишем теорему косинусов для $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ соответственно:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \alpha;$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos(180^\circ - \alpha)$$

или

$$c^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m \frac{a}{2} \cos \alpha; \quad b^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2m \frac{a}{2} \cos \alpha.$$

Сложим эти равенства и получим: $c^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$, откуда

$$m = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

Пример 7.9. Найти площадь равнобедренного треугольника (рис. 7.14), если угол при вершине 150° , а радиус описанной окружности равен $\sqrt{3} + 1$.

Решение. Очевидно, что для нахождения площади надо знать боковую сторону a . Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то $\angle A = \angle C = 15^\circ$.

Для $\triangle ABC$ запишем теорему синусов: $\frac{a}{\sin A} = 2R$, откуда $a = 2R \sin A$. Тогда

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin B = 2R^2 \sin^2 A \sin B = 2(\sqrt{3} + 1)^2 \sin^2 15^\circ \sin 150^\circ =$$

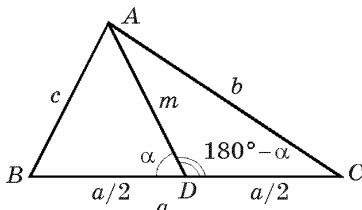


Рис. 7.13

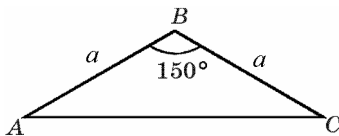


Рис. 7.14

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{3} + 1)^2 (1 - \cos 30^\circ) \sin 30^\circ \frac{1}{2} = (4 + 2\sqrt{3}) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{2 \cdot 2} = \frac{2(4 - 3)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Здесь были использованы формулы понижения степени: $2\sin^2 15^\circ = 1 - \cos 30^\circ$ и формулы приведения $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$.

Свойства линий в треугольниках специального вида

1. Высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является также биссектрисой и медианой.

2. Высота, медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины равностороннего треугольника, совпадают. Центр окружности, вписанной в равносторонний треугольник, совпадает с центром окружности, описанной около этого треугольника, и эта точка называется центром треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике катеты a , b и гипотенуза c связаны равенством $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора).

4. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Радиус этой окружности равен половине гипотенузы (а также равен медиане, проведенной из вершины прямого угла).

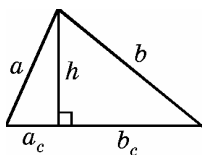


Рис 7.15

5. Высота h прямоугольного треугольника, проведенного из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное (или среднее геометрическое) между проекциями a_c , b_c катетов на гипотенузу, т. е. $h = \sqrt{a_c b_c}$ (рис. 7.15)

Пример 7.10. Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника, равны m_1 и m_2 (рис. 7.16). Найти гипотенузу треугольника.

Решение. Пусть катеты $AC = 2x$, $BC = 2y$, медианы $AD = m_1$ и $BE = m_2$. Запишем теорему Пифагора для $\triangle ACD$ и $\triangle BCE$:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \quad \text{и} \quad BE^2 = BC^2 + CE^2$$

или

$$m_1^2 = 4x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad m_2^2 = 4y^2 + x^2.$$

Сложим эти равенства:

$$m_1^2 + m_2^2 = 5(x^2 + y^2),$$

откуда

$$x^2 + y^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{5}.$$

Теперь запишем теорему Пифагора для $\triangle ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4(x^2 + y^2) = 4 \frac{m_1^2 + m_2^2}{5},$$

откуда $AB = \frac{2\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{\sqrt{5}}.$

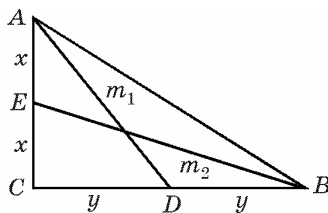


Рис 7.16

Пример 7.11. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12, а боковой стороны – 18. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Найти длину отрезка с концами в основаниях высот.

Решение. В $\triangle ABC$ ($AB = BC = 18$) AD и CE – высоты (рис. 7.17). Пусть $BD = x$, $DC = 18 - x$. Из прямоугольных $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ найдем:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 - BD^2 = 18^2 - x^2, \\ AD^2 &= AC^2 - DC^2 = 12^2 - (18 - x)^2 = \\ &= 12^2 - 18^2 + 36x - x^2. \end{aligned}$$

Приравняем эти выражения:

$$18^2 - x^2 = 12^2 - 18^2 + 36x - x^2,$$

откуда $x = \frac{648 - 144}{36} = 14.$

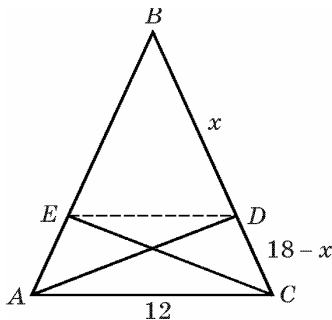


Рис. 7.17

Теперь рассмотрим подобные $\triangle ABC$ и $\triangle BED$: $\frac{ED}{AC} = \frac{BD}{BC}$ или

$$\frac{ED}{12} = \frac{14}{18}, \quad \text{откуда} \quad ED = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

7.2. Четырехугольники

Основные виды четырехугольников

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

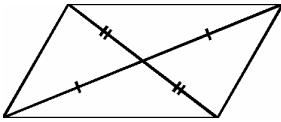


Рис. 7.18

Свойства параллелограмма (рис. 7.18):

- 1) противоположные стороны равны;
- 2) противоположные углы равны;
- 3) диагонали делятся точкой пересечения пополам.

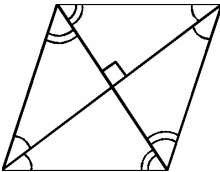


Рис. 7.19

Ромб – параллелограмм, все стороны которого равны. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма и, кроме того, имеет свои специфические свойства (рис. 7.19):

- 1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
- 2) диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

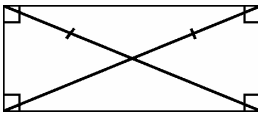


Рис. 7.20

Прямоугольник – параллелограмм, все углы которого прямые. Имеет все свойства параллелограмма и, кроме того, диагонали прямоугольника равны (рис. 7.20).

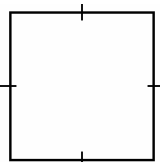


Рис. 7.21

Квадрат – прямоугольник, все стороны которого равны (рис. 7.21). Обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

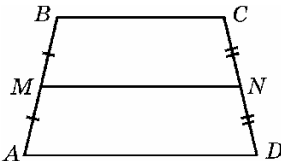


Рис. 7.22

Трапеция – четырехугольник, две стороны которого параллельны (основания), а две другие стороны непараллельны (боковые стороны) (рис. 7.22). Отрезок, соединяющий середины боковых сторон называется средней линией трапеции.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме, т. е. $MN \parallel AD \parallel BC$, $MN = \frac{AD + BC}{2}$.

Пример 7.12. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках P и Q (рис. 7.23). Найти длину отрезка PQ , если длины оснований a и b .

Решение. Рассмотрим подобные $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$:

$$\frac{BO}{OD} = \frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{b}.$$

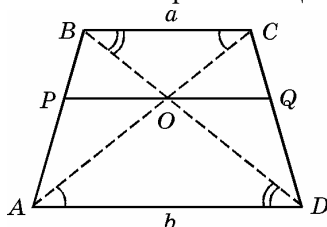


Рис. 7.23

Теперь рассмотрим подобные $\triangle APO$ и $\triangle ABC$: $\frac{PO}{BC} = \frac{AO}{AC}$,

$$\text{откуда } PO = \frac{BC \cdot AO}{AC} = \frac{a \cdot AO}{AO + OC} = \frac{a}{1 + OC/AO} = \frac{a}{1 + a/b} = \frac{ab}{a + b}.$$

Рассмотрим подобные $\triangle DOQ$ и $\triangle DBC$: $\frac{OQ}{BC} = \frac{OD}{BD}$, откуда

$$OQ = \frac{BC \cdot OD}{BD} = \frac{a \cdot OD}{BO + OD} = \frac{a}{\frac{BO}{OD} + 1} = \frac{a}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{ab}{a + b}.$$

Найдем длину отрезка PQ :

$$PQ = PO + OQ = \frac{ab}{a + b} + \frac{ab}{a + b} = \frac{2ab}{a + b}.$$

Пример 7.13. В параллелограмме (рис. 7.24) длины сторон a и b . Найти сумму квадратов длин диагоналей.

Решение. Для $\triangle ABD$ запишем теорему косинусов:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

$$\text{или } BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

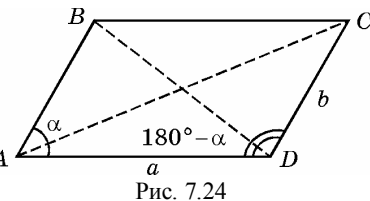


Рис. 7.24

Также для $\triangle ADC$ используем теорему косинусов: $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$ или $AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$.

Сложим $BD^2 + AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$ или $BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Таким образом, *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон*. Запомните это утверждение, оно часто оказывается полезным при решении задач.

Площади многоугольников

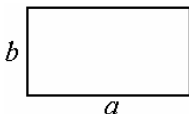


Рис. 7.25

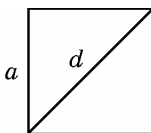


Рис. 7.26

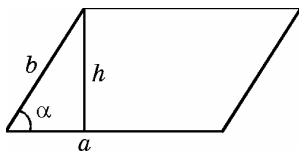


Рис. 7.27

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон: $S = ab$ (рис. 7.25).

Площадь квадрата равна квадрату его стороны: $S = a^2$ (рис. 7.26) Также площадь квадрата можно вычислить по формуле $S = \frac{d^2}{2}$, где d – диагональ квадрата.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, опущенного на основание $S = ah$ (рис. 7.27). Также ее можно вычислить по формуле $S = absin\alpha$, где b – боковая сторона параллелограмма, а α – острый угол между основанием и боковой стороной.

Площадь ромба вычисляют также, как площадь параллелограмма. Кроме того, используют формулы $S = a^2\sin\alpha$, $S = \frac{d_1d_2}{2}$, где a – сторона ромба, α – острый угол ромба, d_1, d_2 – диагонали ромба.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту $S = \frac{1}{2}ah$ (рис. 7.28). Также существует еще четыре формулы для вычисления площади треугольника:

$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$, где α – угол образованный сторонами a и b ;

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{формула}$$

Герона), где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр;

$S = \frac{abc}{4R}$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника;

$S = pr$, где r – радиус окружности, вписанной в треугольник.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2}h \quad (\text{рис. 7.29}).$$

Пример 7.14. Данный квадрат со стороной a срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник (рис. 7.30). Найти площадь этого восьмиугольника.

Решение. Пусть сторона правильного восьмиугольника $EN = x$. Тогда его площадь можно найти, если из площади квадрата вычесть площади уголков (т.е. четырех равнобедренных треугольников типа $\triangle AEN$).

Так как $NM = x$, то найдем $AN = \frac{a-x}{2}$. Для $\triangle AEN$ запишем теорему Пифагора: $EN^2 = AE^2 + AN^2$ или

$$x^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 \Rightarrow 2x^2 = (a-x)^2 \Rightarrow \sqrt{2}x = a-x,$$

откуда $x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2}-1)$. Тогда

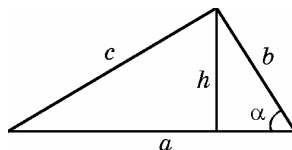


Рис. 7.28

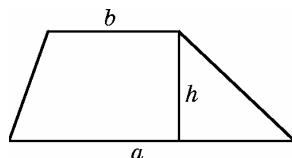


Рис. 7.29

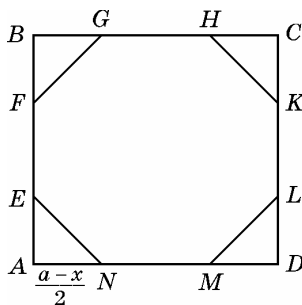


Рис. 7.30

$$S_{\triangle AEN} = \frac{1}{2} AE \cdot AN = \frac{1}{2} \frac{a^2(2-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4}$$

(здесь учтено, что $AE = AN = \frac{a-x}{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$).

Найдем площадь восьмиугольника

$$S = a^2 - 4S_{\triangle AEN} = a^2 - 4 \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4} = a^2(2\sqrt{2} - 2) \approx 0,8a^2.$$

Итак, $S = 2a^2(\sqrt{2} - 1)$.

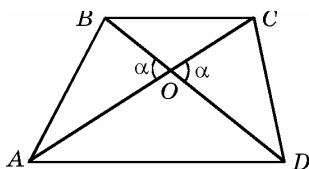


Рис. 7.31

Пример 7.15. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника (рис. 7.31). Найти отношение площадей треугольников, прилежающих к боковым сторонам трапеции.

Решение. Запишем площади этих треугольников: $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \alpha$, $S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin \alpha$.

Рассмотрим подобные $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$: $BO/OD = CO/AO$, откуда $AO \cdot BO = CO \cdot OD$. Поэтому $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle COD}$ и отношение этих площадей равно единице.

7.3. Окружность и круг

Окружность – геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой центром.

Круг – состоит из окружности и внутренних точек.

Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности.

Свойства хорд:

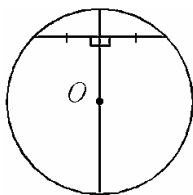


Рис. 7.32

1) диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде (рис. 7.32);

2) равные хорды окружности равноудалены от ее центра и, наоборот, равноудаленные от центра хорды равны;

3) если через точку M лежащую внутри окружности, проведены две хорды AB и CD (рис. 7.33), то

произведения отрезков хорд равны: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ (теорема о хордах).

Касательная – прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точке касания.

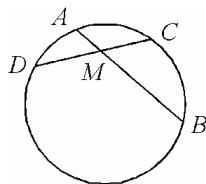


Рис. 7.33

Секущая – прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

Если из точки M , лежащей вне окружности, проведены касательная MC и секущая MA (рис. 7.34), то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной: $MA \cdot MB = MC^2$ (теорема о касательной и секущей).

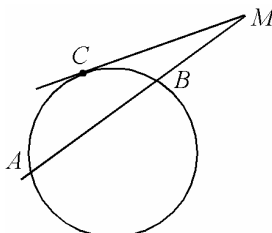


Рис. 7.34

Пример 7.16. К окружности радиуса 5 см из точки A проведена касательная в точке B (рис. 7.35). Расстояние $AB = 12$ см. Найти расстояние от точки A до центра окружности.

Решение. Из точки A проведем секущую AC через центр окружности O . Пусть расстояние $AD = x$. Тогда $AC = x + 10$. Запишем теорему о касательной и секущей: $AB^2 = AC \cdot AD$ или $144 = x(x + 10)$ или $x^2 + 10x - 144 = 0$. Корни этого уравнения: $x = 8$ и $x = -18$ (не подходит), тогда $AO = AD + OD = 8 + 5 = 13$.

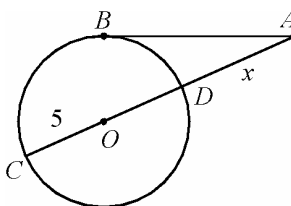


Рис. 7.35

Углы в окружности:

центральный – угол с вершиной в центре окружности. Измеряется дугой, на которую опирается: $\angle AOB = \overset{\frown}{ACB}$ (рис. 7.36);

вписанный – угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность. Измеряется половиной дуги, на которую опирается: $\angle BAC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BDC}$ (рис. 7.37);

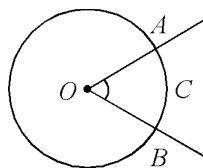


Рис. 7.36

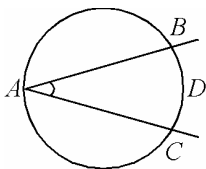


Рис. 7.37

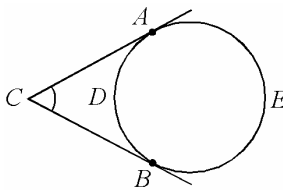


Рис. 7.38

описанный – угол, образованный двумя касательными, выходящими из одной точки. Измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами: $\angle ACB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AEB} - \overset{\frown}{ADB})$ (рис. 7.38).

Длина окружности l определяется по формуле $l = 2\pi R$, площадь круга S по формуле $S = \pi R^2$ (где R – радиус окружности).

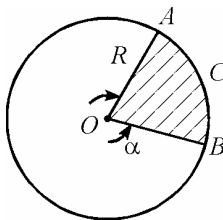


Рис. 7.39

Сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами (рис. 7.39).

Длина дуги ABC сектора находится по формуле $l = R\alpha$, площадь сектора $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$

(где α – угол раствора сектора измеренный в радианах).

Пример 7.17. В сектор, дуга которого содержит 60° , вписан круг (рис. 7.40). Найти отношение площади сектора к площади этого круга.

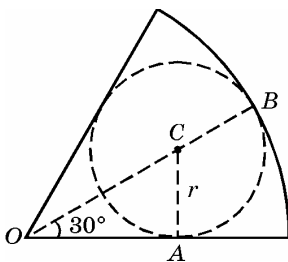


Рис. 7.40

Решение. Пусть радиус сектора R , а радиус окружности r . Проведем радиусы CA и CB в точки касания.

В прямоугольном $\triangle OCA$: $\angle COA = 30^\circ$, $CA = r$, тогда $OC = 2CA$ (как катет, лежащий против угла в 30°), т.е. $OC = 2r$. Тогда $OB = OC + CB = 2r + r = 3r$, т.е. $R = 3r$. Найдем площадь сектора

$$S_c = \frac{1}{2}R^2 \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}(3r)^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$$

(учтено, что $60^\circ = \pi/3$) и площадь круга $S_{кр} = \pi r^2$. Тогда $\frac{S_c}{S_{кр}} = \frac{3}{2}$.

7.4. Многоугольники и окружности

1. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит в точке пересечения перпендикуляров к серединам сторон треугольника (серединных перпендикуляров): $R = \frac{abc}{4S}$.

2. Центр окружности, вписанной в треугольник лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника: $r = \frac{S}{p}$.

3. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, если суммы длин противоположных сторон четырехугольника равны.

4. Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность, если суммы противолежащих внутренних углов четырехугольника равны 180° .

Пример 7.18. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

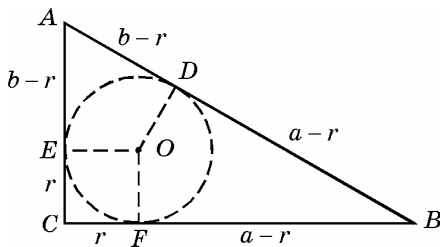


Рис. 7.41

Решение. Из центра вписанной окружности O проведем радиусы в точки касания окружности со сторонами треугольника (рис. 7.41). Тогда $CEOF$ – квадрат и $CE = CF = r$ (где r – радиус вписанной окружности). Пусть $BC = a$, $AC = b$ и имеем: $BF = BD = a - r$, $AE = AD = b - r$. Тогда $AB = BD + AD = a - r + b - r = a + b - 2r$. Но AB является диаметром описанной окружности, так как прямой $\angle ACB$ опирается на диаметр. Поэтому $a + b - 2r = 2R$ (где R – радиус описанной окружности) и $a + b = 2r + 2R$.

Заметим, что эту задачу можно сделать и алгебраически.

Обозначим c – гипотенузу $\triangle ABC$. Тогда $S = \frac{ab}{2}$ и $p = \frac{a+b+c}{2}$,

получаем: $R = \frac{abc}{4ab/2} = \frac{c}{2}$ и $r = \frac{ab/2}{(a+b+c)/2} = \frac{ab}{a+b+c}$. Найдем сумму

$$\begin{aligned} 2R + 2r &= c + \frac{2ab}{a+b+c} = \frac{ac+bc+c^2+2ab}{a+b+c} = \frac{ac+bc+(a^2+b^2+2ab)}{a+b+c} = \\ &= \frac{c(a+b)+(a+b)^2}{a+b+c} = \frac{(a+b)(c+a+b)}{a+b+c} = a+b \end{aligned}$$

(в ходе решения была учтена теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$).
Итак, $2R + 2r = a + b$.

Пример 7.19. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

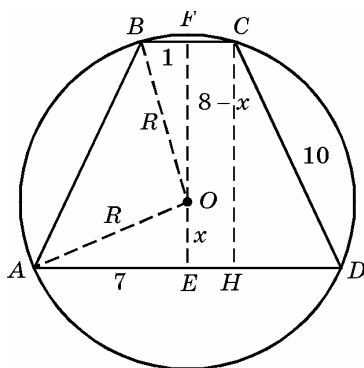


Рис. 7.42

Решение. Пусть F – середина основания BC (рис. 7.68), E – середина основания AD : $BF = 1$ и $AE = 7$. Проведем высоту CH . Тогда в прямоугольном $\triangle CHD$

$$HD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{14 - 2}{2} = 6,$$

$$CD = 10,$$

$$CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Обозначим $OE = x$ и $FO = 8 - x$.
Запишем теорему Пифагора для

прямоугольных треугольников:

$$\triangle AOE: AO^2 = AE^2 + OE^2 \quad \text{или} \quad R^2 = 7^2 + x^2;$$

$$\triangle BFO: BO^2 = BF^2 + FO^2 \quad \text{или} \quad R^2 = 1^2 + (8 - x)^2.$$

Приравняем полученные выражения: $7^2 + x^2 = 1^2 + (8 - x)^2 \Rightarrow 49 + x^2 = 1 + 64 - 16x + x^2 \Rightarrow 16x = 16$, откуда $x = 1$.

Теперь найдем $R^2 = 7^2 + 1^2 = 50$ и $R = 5\sqrt{2}$.

7.5. Методы решения задач

Даже знание основных сведений из геометрии не всегда обеспечивает успех в решении задач. По-видимому, это связано с тем, что геометрические задачи являются *достаточно сложными* и не существует рецепта или набора рецептов, позволяющих решить любую задачу. Во многих задачах успех определяется удачно выполненным чертежом, в других задачах – логикой рассуждений, в третьих задачах – накопленным опытом решения более простых задач и т. д.

Метод непосредственных вычислений

Как правило, используется при решении самых *простых* задач, условие которых позволяет *непосредственными* вычислениями получить результат.

Пример 7.20. Углы треугольника α и β (рис. 7.43). Найти отношение его площади к площади описанного круга.

Решение. Пусть описан круг радиусом R с площадью $S = \pi R^2$. Выразим через R , α , β площадь треугольника $S_{\text{тр}} = \frac{abc}{4R}$. Запишем теорему синусов:

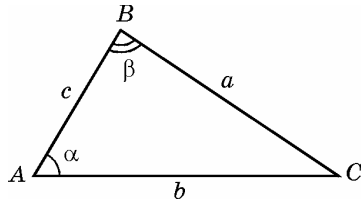


Рис. 7.43

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} = 2R.$$

Тогда $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, $c = 2R \sin(\alpha + \beta)$. Получаем:

$$S_{\text{тр}} = \frac{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot 2R \sin(\alpha + \beta)}{4R} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta);$$

$$\frac{S_{\text{тр}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{2}{\pi} \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta).$$

Пример 7.21. В равнобокой трапеции длина одного из оснований равна $2\sqrt{3}$, а длина основания равна длине боковой стороны

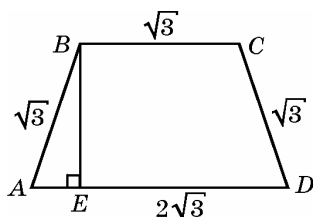


Рис. 7.44

и равна $\sqrt{3}$ (рис. 7.44). Найти длину диагонали трапеции.

Решение. Проведем высоту трапеции BE . Очевидно, что

$$AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В прямоугольном $\triangle ABE$ гипотенуза $AB = \sqrt{3}$, катет $AE = \sqrt{3}/2$. Тогда угол $\angle ABE = 30^\circ$ (как угол, против которого лежит катет, равный половине гипотенузы), $\angle BAE = 90^\circ - \angle ABE = 60^\circ$. Для $\triangle ABD$ запишем теорему косинусов:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAE = \\ &= (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 9 \text{ и } BD = 3. \end{aligned}$$

Метод введения неизвестного (неизвестных)

Вводится *неизвестное* (неизвестные), для которой (которых) по условию задачи можно *составить* и *решить уравнение* (систему уравнений). В качестве неизвестных выбираются как линейные размеры, так и углы.

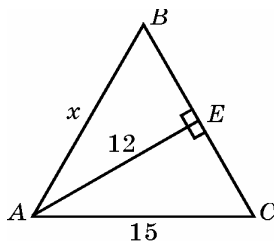


Рис. 7.45

Пример 7.22. В равнобедренном $\triangle ABC$ ($AB = BC$) высота $AE = 12$, основание $AC = 15$ (рис. 7.45). Найти площадь треугольника.

Решение. Для нахождения площади треугольника необходимо знать высоту и сторону, на которую она опущена. Поэтому найдем, например, сторону BC . Введем

неизвестное $x = BC = AB$.

Из прямоугольного $\triangle AEC$ по теореме Пифагора получим: $EC^2 = AC^2 - AE^2 = 15^2 - 12^2 = 81$ и $EC = 9$.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABE$ и запишем теорему Пифагора: $AB^2 = AE^2 + BE^2$. Так как $AB = x$, $BE = BC - EC = x - 9$,

$AE = 12$, то для определения x имеем уравнение $x^2 = 12^2 + (x - 9)^2$, откуда $x = \frac{25}{2}$. Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 12 = 75$.

Пример 7.23. Найти катеты прямоугольного треугольника (рис. 7.46), если они относятся между собой как 3 : 4, а разность между радиусами описанной и вписанной окружности равна 9.

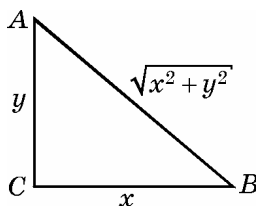


Рис. 7.46

Решение. Введем в качестве неизвестных искомые катеты: $BC = x$, $AC = y$. Тогда первое

уравнение сразу следует из условия задачи: $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$. Получим

второе уравнение. Для этого радиусы вписанной и описанной окружностей необходимо выразить через x и y . Площадь $\triangle ABC$:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{xy}{2}, \text{ полупериметр}$$

$$p = \frac{AC + BC + AB}{2} = \frac{x + y + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}$$

(учтено на основании теоремы Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = x^2 + y^2$).

Тогда радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{xy}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2}}$,

радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S} = \frac{xy\sqrt{x^2 + y^2}}{2xy} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$.

Получаем уравнение $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} - \frac{xy}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2}} = 9$. Решим

полученную систему уравнений. Из первого уравнения $x = \frac{3}{4}y$,

тогда $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}y\right)^2 + y^2} = \frac{5}{4}y$. Подставив эти выражения во

второе уравнение системы, получим: $\frac{5/4 y}{2} - \frac{3/4 y^2}{3/4 y + y + 5/4 y} = 9$
 или $\frac{5}{8}y - \frac{y}{4} = 9$, откуда $y = 24$. Тогда $x = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18$. Итак, катеты равны 18 и 24.

Метод введения вспомогательной величины

В ряде задач может *не хватать* для записи условий задачи. Тогда эти *величины* необходимо *ввести* и записать условия задачи. Сами введенные величины *найти* из условия задачи *невозможно*, тем не менее они позволяют решить задачу и получить ее ответ.

Пример 7.24. В прямоугольном треугольнике катеты равны. Найти отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

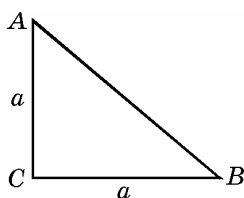


Рис. 7.47

Решение. Так как в данной задаче нет ни одной величины, имеющей размерность длины, то трудно выразить радиусы окружностей. Поэтому введем вспомогательную величину a , которая равна длине катета (рис. 7.47). Тогда по теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2a^2 \quad \text{и} \quad AB = a\sqrt{2}.$$

Радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4ab/2} = \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$

радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{a^2/2}{(2a + a\sqrt{2})/2} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}.$

Тогда $\frac{R}{r} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$

Разумеется, найти величину a из условий задачи невозможно, так как вычисленное отношение радиусов окружностей будет одним и тем же для любого прямоугольного равнобедренного треугольника.

Пример 7.25. В $\triangle ABC$ проведена биссектриса BD (рис. 7.48). Найти отношение площадей, на которые биссектриса разделила треугольник, если $AB = a$, $BC = b$.

Решение. Введем две вспомогательные величины: длину биссектрисы $BD = c$ и угол $ABC = \alpha$. Тогда легко записать площади рассматриваемых треугольников:

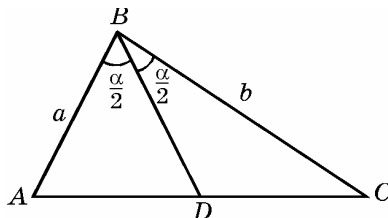


Рис. 7.48

$$S_{\triangle ABD} = \frac{ac}{2} \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot BC \cdot \sin \angle DBC = \frac{cb}{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Отношение этих площадей $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{ac/2 \sin \alpha/2}{cb/2 \sin \alpha/2} = \frac{a}{b}$. Таким

образом, удалось решить задачу, хотя величины c и α из условия задачи найти невозможно.

Метод площадей

Этот метод эффективно используется как самостоятельно, так и в сочетании с другими методами. Суть его состоит в том, что *площадь* фигуры выражается *через известные величины*, а затем та же площадь выражается *и через неизвестную величину*, что позволяет ее найти.

Пример 7.26. Внутри равностороннего треугольника со стороной a находится точка O . Найти сумму расстояний от этой точки до сторон треугольника.

Решение. Соединим точку O с вершинами равностороннего $\triangle ABC$ и из точки O опустим перпендикуляры на стороны треугольника (рис. 7.49). Площадь $\triangle ABC$

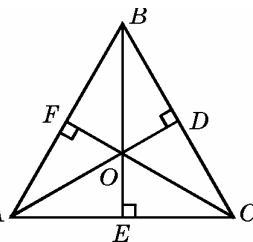


Рис. 7.49

найдем по формуле $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} \sin \angle B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

С другой стороны, $\triangle ABC$ состоит из треугольников AOB , BOC и AOC , тогда

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB} = \frac{AB \cdot OF}{2} + \frac{BC \cdot OD}{2} + \frac{AC \cdot OE}{2} = \\ &= \frac{a \cdot OF}{2} + \frac{a \cdot OD}{2} + \frac{a \cdot OE}{2} = \frac{a(OF + OD + OE)}{2}. \end{aligned}$$

Приравняв два выражения для $S_{\triangle ABC}$, получим:

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a(OF + OD + OE)}{2},$$

откуда сумма расстояний от точки O до сторон треугольника

$$OF + OD + OE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Заметим, что $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ равняется высоте правильного $\triangle ABC$

поэтому сумма расстояний от точки O до сторон треугольника равна высоте этого треугольника.

Пример 7.27. Высоты треугольника равны $1/4$, $1/5$, $1/6$. Найти стороны треугольника.

Решение. Пусть стороны треугольника, на которые опущены высоты в $1/4$, $1/5$, $1/6$ единиц, равны соответственно a , b и c . Выразим площадь треугольника через соответствующие стороны

и высоты: $S = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4} = \frac{a}{8}$, $S = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{b}{10}$, $S = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{c}{12}$. Из этих

выражений имеем $a = 8S$, $b = 10S$, $c = 12S$. Видно, что для определения сторон треугольника достаточно найти его площадь S . Запишем площадь треугольника, используя формулу Герона (с

учетом, что $p = \frac{(a+b+c)}{2} = 15S$: $S = \sqrt{15S \cdot 7S \cdot 5S \cdot 3S} = 15S^2 \sqrt{7}$.

Таким образом, для нахождения S имеем уравнение $S = 15S^2 \sqrt{7}$.

Откуда $S = \frac{1}{15\sqrt{7}}$. Тогда $a = \frac{8}{15\sqrt{7}}$, $b = \frac{10}{15\sqrt{7}}$, $c = \frac{12}{15\sqrt{7}} = \frac{4}{5\sqrt{7}}$.

Легко убедиться, что такой треугольник действительно существует, так как выполнены неравенства треугольника: $a < b + c$; $b < a + c$, $c < a + b$.

Метод дополнительных построений

Во многих случаях задача может быть решена значительно *проще и нагляднее*, если выполнить необходимые *геометрические построения*, определяемые условиями задачи.

Пример 7.28. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 10 (рис. 7.50). Найти третью сторону.

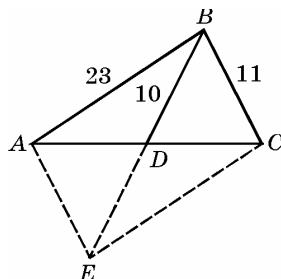


Рис. 7.50

Решение. Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCE$, проведя $AE \parallel BC$ и $CE \parallel AB$. Так как диагонали в точке пересечения делятся пополам, то $ED = BD$ и $BE = 2BD = 20$.

В параллелограмме $ABCE$ известны стороны AB и BC , диагональ BE . Для нахождения второй диагонали AC запишем соотношение между диагоналями и сторонами параллелограмма: $AC^2 + BE^2 = AB^2 + BC^2 + EC^2 + AE^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ или $AC^2 + 20^2 = 2(23^2 + 11^2)$ или $AC^2 + 400 = 1300$. Тогда $AC^2 = 900$ и $AC = 30$.

Пример 7.29. Один из углов трапеции равен 30° , а продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10, а одно из оснований 8 (рис. 7.51).

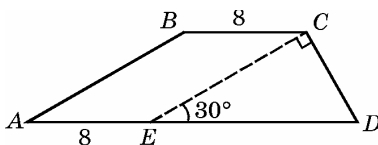


Рис. 7.51

Решение. В трапеции $ABCD$ проведем отрезок EC параллельный стороне AB . Рассмотрим $\triangle ECD$: $\angle CED = 30^\circ$, $\angle ECD = 90^\circ$ (по условию). Тогда $CD < EC = AB$, т. е. CD – меньшая боковая сторона трапеции и $CD = \frac{1}{2}ED$ (как катет лежащий против угла в 30°).

и $CD = \frac{1}{2}ED$ (как катет лежащий против угла в 30°).

Так как средняя линия $\frac{BC + AD}{2} = 10$, то $AD = 20 - BC = 20 - 8 = 12$. Тогда $ED = AD - AE = 12 - 8 = 4$ и $CD = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

– А –

1. На стороне AC треугольника ABC взята точка M , причем $AM : MC = 3 : 5$. Найти площадь треугольника ABC , если площадь треугольника ABM равна 48 см^2 .

2. Найти высоту равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 30 см , а основание равно 36 см .

3. Найти площадь прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 16 см , а гипотенуза 34 см .

4. Найти площадь треугольника, если его высота, проведенная к одной из сторон, равна 25 см , а средняя линия, параллельная этой стороне, равна 11 см .

5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 28 \text{ см}$, а синус угла A равен $\frac{4}{5}$. Найти AB .

6. Найти медиану прямоугольного треугольника, проведенную к гипотенузе, если гипотенуза равна 54 см .

7. В прямоугольном треугольнике, один из углов которого равен 30° , меньший катет равен 27 см . Найти остальные стороны треугольника.

8. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что угол BMN равен углу BCA . Найти MN , если $AC = 48 \text{ см}$, $AB = 42 \text{ см}$, $BN = 28 \text{ см}$.

9. Средняя линия MN треугольника ABC отсекает от него треугольник MBN , площадь которого равна 32 см^2 . Найти площадь треугольника ABC .

10. Расстояния от точки пересечения диагоналей прямоугольника до двух его сторон равна 6 см и 9 см . Найти площадь прямоугольника.

11. Найти сторону ромба, если его диагонали равны 12 и 16 см .

12. Найти высоту трапеции, если ее площадь равна 28 см^2 , а средняя линия 7 см .

13. Стороны параллелограмма равны 10 и 24 см , а одна из диагоналей равна 26 см . Найти длину другой диагонали.

14. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найти периметр параллелограмма, если $BK = 7 \text{ см}$, $CK = 12 \text{ см}$.

15. Одно из оснований трапеции в 17 раз меньше ее средней линии. Во сколько раз оно меньше другого основания трапеции?

16. Длина окружности равна $16\pi \text{ см}$. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

17. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Найти MA , если $MB = 8$ см, $MC = 6$ см, $MD = 4$ см.

18. Радиус окружности равен 15 см. Найти расстояние от центра окружности до хорды, длина которой равна 18 см.

19. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC в точках M , K и P соответственно. Найти периметр треугольника ABC , если $AP = 4$ см, $BM = 6$ см, $CK = 3$ см.

20. Найти диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если синус одного из углов треугольника равен $\frac{3}{7}$, а противолежащий этому углу катет равен 15 см.

21. Найти радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 20 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 24 см.

22. Найти радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 42 см.

23. В квадрате вписана окружность. Найти ее радиус, если диагональ квадрата равна $18\sqrt{2}$ см.

24. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Найти угол ACD , если углы BAD и ADB равны соответственно 73° и 48° .

25. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке M . Найти MB , если $CM = 14$ см.

– В –

26. Гипотенуза BC прямоугольного треугольника ABC равна 25 см. Найти биссектрису треугольника, проведенную из вершины C , если $AC = 7$ см.

27. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см. Найти сторону AB этого треугольника.

28. В треугольнике со сторонами 10, 17 и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны треугольника.

29. Найти площадь треугольника, если его основание равно 2 см, углы при основании равны 30° и 45° .

30. В треугольнике ABC известны длины трех сторон: $BC = 41$ см, $AC = 51$ см, $AB = 58$ см. Найти площадь этого треугольника и длину высоты, опущенной из вершины B .

31. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12 см. Радиус вписанного в треугольник круга равен 3 см. Найти площадь треугольника.

32. Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10 см, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12 см.

33. Вписанная окружность касается гипотенузы прямоугольного треугольника в точке, делящей гипотенузу на отрезки, длины которых равны 2 и 3 см. Найти радиус этой окружности.

34. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади последнего. Найти углы прямоугольного треугольника.

35. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 2 см. Найти площадь трапеции, если длина ее боковой стороны 10 см.

36. Длины оснований трапеции равны 10 и 24 см, длины боковых сторон 13 и 15 см. Найти площадь трапеции.

37. Около круга радиусом 4 см описана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 10 см. Найти стороны трапеции.

38. В равнобедренную трапецию, основания которой 8 и 2 см, вписана окружность. Найти радиус окружности.

39. Найти площадь параллелограмма, если его диагонали равны 3 и 5 см, а острый угол равен 60° .

40. Тупой угол ромба в 5 раз больше его острого угла. Во сколько раз сторона ромба больше радиуса вписанной в него окружности?

41. В квадрат площадью 18 см^2 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как 1 : 2. Найти площадь прямоугольника.

42. Периметр параллелограмма равен 90 см, а острый угол 60° . Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найти стороны параллелограмма.

43. В ромб вписан круг, а в круг вписан квадрат. Найти углы ромба, если его площадь в 4 раза больше площади квадрата.

44. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5 см.

45. Дано круговое кольцо, площадь которого равна $9\pi \text{ см}^2$. Найти длину хорды большего круга, которая касается меньшего круга.

46. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 и 15 см, длина общей хорды 24 см. Найти расстояние между центрами этих окружностей (центр каждой окружности лежит вне другой окружности).

47. Точка лежит вне круга на расстоянии диаметра от центра круга. найти угол между касательными, проведенными из данной точки к данному кругу.

48. Три круга касаются внешним образом. Расстояния между центрами кругов равны 7, 8 и 9 см. Найти радиусы кругов.

– С –

49. Найти стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из вершины одного угла, делят этот угол на три равные части, а сама медиана равна 10 см.

50. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : CD = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит биссектрису.

51. В треугольнике ABC известны высоты h_a, h_b, h_c . Найти радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

52. В треугольнике ABC $BC = a, AC = b, AB = c$, точка D – точка пересечения его биссектрис. В каком отношении делит эта точка биссектрисы треугольника?

53. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 36° , длина биссектрисы угла при основании равна a . Найти длины сторон треугольника.

54. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота AD . Расстояния от точки D до катетов треугольника равны a и b . Найти катеты треугольника и его площадь.

55. В треугольнике ABC величина угла при вершине A равна α . Найти длину биссектрисы треугольника, проведенной из вершины A , если $AC = b$ и $AB = c$.

56. В треугольнике ABC медианы AD и CE взаимно перпендикулярны, $BC = a, AB = c$. Найти сторону AC .

57. В равнобедренном треугольнике основание равно a , боковая сторона b . Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне треугольника.

58. Из точки, расположенной внутри правильного треугольника ABC , длина стороны которого равна a , опущены перпендикуляры на стороны AB, BC, CA . Длины этих перпендикуляров равны m, n и k . Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

59. Найти стороны прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности делит один из катетов на отрезки m и n .

60. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе,

разбивает его на два треугольника с периметрами p_1 и p_2 . Найти стороны треугольника.

61. Площадь равнобедренной трапеции равна S , угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α . Найти высоту трапеции.

62. Около круга радиуса R описана трапеция с острыми углами α и β при большем основании. Найти площадь трапеции.

63. Три окружности касаются друг друга внешним образом. Центрами их служат вершины треугольника со сторонами a , b и c . Найти радиусы этих окружностей.

64. Две окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная и в полученный криволинейный треугольник вписана окружность. Найти радиус этой окружности.

65. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равнее r , а описанной R . Найти площадь треугольника.

66. В равнобедренную трапецию вписан круг. Точкой касания одна из боковых сторон делится на отрезки длиной a и b . Найти площадь трапеции.

67. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = a$, $BC = b$. Найти диаметр окружности.

68. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на нижнем основании. Длина боковой стороны равна a , длина диагонали b ($b > a$). Найти длины оснований трапеции.

69. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) внутренним образом касаются друг друга. Найдите длину стороны правильного треугольника, одна из вершин которого находится в точке касания окружностей, вторая вершина – на внешней, а третья – на внутренней окружности.

70. Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, длины катетов которого являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

71. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, длины катетов которого являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Тема 5

- | | | |
|--|---|---|
| <p>1. 3 ч.
 2. 61 км/ч.
 3. 33 км/ч.
 4. 2 км/ч.
 5. 900 м.
 6. 45 км/ч.
 7. 12 ч.
 8. 3 ч.
 9. 79 л/мин, 82 л/мин, 10 мин.
 10. 12 вопросов.
 11. 600 руб.
 12. 8 %.
 13. 2,5 раза.
 14. 87,5 %.
 15. 11 %.
 16. 20 л.
 17. 10000 руб. под 8 % и 20000 руб. под 10%.
 18. Первый факультет 480, второй факультет 650.
 19. 15.
 20. 3.
 21. 60.
 22. Отцу 43 года, сыну 9 лет.
 23. 1.
 24. 91.
 25. 1.
 26. 48 км/ч.
 27. 225 м, 15 м/с (54 км/ч).
 28. 12 км/ч.</p> | <p>29. 50 км/ч.
 30. 15 км.
 31. 4 км/ч и 5 км/ч.
 32. $65\frac{5}{11}$ мин.
 33. За 12 мин; за 15 мин.
 34. 200 задач.
 35. За 28 дней и за 22 дня.
 36. 10 ч и 15 ч.
 37. Первый автомат – за 20 ч, второй – за 30 ч.
 38. 4 мин.
 39. 648 приборов.
 40. На 55 %.
 41. 7800 жителей.
 42. 110000 руб.
 43. 13 %.
 44. 500 кг сена.
 45. 42 г.
 46. 44 %.
 47. 2 см и 19 см.
 48. Не может.
 49. 499.
 50. 27 и 72.
 51. 63.
 52. 15.
 53. 20 км/ч и 20 км.
 54. 40 км.
 55. 72 км/ч и 60 км/ч.
 56. 3,6 км.
 57. За 6 ч.
 58. 4 ч.
 59. 9 км/ч.</p> | <p>60. $\frac{l_1 - l_2}{t_1 - t_2}$ (м/с),
 $\frac{l_1 t_2 - l_2 t_1}{t_1 - t_2}$ (м),
 $\frac{l_1 t_1 - l_2 t_2}{l_1 - l_2}$ (с).
 61. 4 ч.
 62. Первая мельница 475 ц, вторая 480 ц, третья 375 ц.
 63. За 2 ч. 40 мин.
 64. 67 %.
 65. 4,75 кг.
 66. На 75 %.
 67. 4 кг.
 68. На 5 %.
 69. 36 учеников.
 70. $\frac{60 - 2p}{p - 40}$ (кг) при $p \in [30; 36]$.
 71. 0 л при $p \in [0; 70]$; a л при $p = 70$ (где $a \in [0; 4]$),
 4 л при $p \in (70; 100]$.
 72. $\frac{7}{10}$.
 73. 3 м.
 74. 132 и 94.
 75. 23.
 76. 13.
 77. Через 6 лет.
 78. 511.
 79. 1738.</p> |
|--|---|---|

Тема 6

1. 0.
2. -12.
3. -4.
4. 36.
5. 484.
6. 1.
7. В 25 раз.
8. Начиная с номера 65.
9. 6; 8,2; 10,4; 12,6; 14,8; 17.
10. 4335.
11. $\frac{21}{32}$.
12. 121.
13. $x = 15$.
14. 1.
15. 9150.
16. 930.
17. Не существует.
18. 60.
19. 17 чисел.
20. 3825.
21. 963.
22. $a_1 = -1, d = 4$.
23. $x = 71$.
24. $q = 5$.
25. Не существует.
26. $q = 13$.
27. 2; $2\sqrt{3}$; 6; $6\sqrt{3}$; 18.
28. 1, 5, 25, ... или 25, 5, 1, ...
29. 3.
30. S_2/S_1 .
31. $\frac{242}{81}$.

32. $S = a^2\sqrt{3}$,
 $p = 6a(2 + \sqrt{3})$.
33. 3, 5, 7; 4, 5, 6 и 5, 5, 5.
34. $a_1 = 4, d = 8$.
35. 1275.
36. $\frac{25}{101}$.
39. 3.
40. На 200.
41. 7010.
42. $x = 19$.
43. 65700.
44. $d = -6$.
45. $q = \pm \frac{1}{9}$.
46. 484.
47. 36.
48. $\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$.
49. $q = 2$.
50. $a = 2, x_1 = 1, x_2 = 2,$
 $b = 32, x_3 = 4, x_4 = 8$.
51. $a = 64, x_1 = 2,$
 $x_2 = -4, x_3 = 8$.
53. 34; 20; 6.
54. $14 - 14\sqrt{2}$; 14;
 $14 + 14\sqrt{2}$.
55. $q = 2 - \sqrt{3}$.
56. $q = -2$.
5. 35 см.
6. 27 см.
7. $27\sqrt{3}$ см и 54 см.
8. 32 см.
9. 128 см^2 .
10. 216 см^2 .
11. 10 см.
12. 4 см.
13. 26 см.
14. 52 см.
15. В 33 раза.
16. $64\pi \text{ см}^2$.
17. 3 см.
18. 12 см.
19. 26 см.
20. 35 см.
21. 26 см.
22. 84 см.
23. 9 см.
24. 59° .
25. 14 см.
26. $\frac{35}{4}$ см.
27. $\sqrt{5}$ см.
28. $\frac{72}{13}$ см и $\frac{84}{13}$ см.
29. $\sqrt{3} - 1 \text{ см}^2$.
30. 1020 см^2 и 40 см.
31. 48 см^2 .
32. 75 см^2 .
33. 1 см.
34. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.
35. 40 см^2 .
36. 204 см^2 .
37. 4 см, 16 см, 10 см, 10 см.
38. 2 см.
39. $4\sqrt{3} \text{ см}^2$.

Тема 7

1. 128 см^2 .
2. 24 см.
3. 240 см^2 .
4. 275 см^2 .

40. В 4 раза.

41. 8 см^2 .

42. 15 см и 30 см.

43. 30° и 150° .

44. $\frac{85}{8} \text{ см}$.

45. 6 см.

46. 14 см.

47. 60° .

48. 3 см, 4 см, 5 см.

49. 10 см, $10\sqrt{3} \text{ см}$, 20 см.

50. 3 : 1.

51. $\frac{h_a h_b h_c}{h_a h_b + h_b h_c + h_a h_c}$.

52. $\frac{a+c}{b}, \frac{a+b}{c}, \frac{b+c}{a}$.

53. $a, \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$.

54. $\frac{a^2+b^2}{a}, \frac{a^2+b^2}{b}, \frac{(a^2+b^2)^2}{2ab}$.

55. $\frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}$;

56. $\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{5}$.

57. $\frac{ab}{a+b} \sqrt{\frac{a+2b}{b}}$.

58. $\frac{a^2}{kn+mn+mk}$.

59. $m+n, \frac{2mn}{n-m}$,

$\frac{m^2+n^2}{n-m}$.

60. $\sqrt{2p_1 p_2} - p_1$,

$\sqrt{2p_1 p_2} - p_2$,

$p_1 + p_2 - \sqrt{2p_1 p_2}$.

61. $\sqrt{\text{Stg} \frac{\alpha}{2}}$.

62. $\frac{2R^2(\sin \alpha + \sin \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$.

63. $\frac{a+b-c}{2}, \frac{a+c-b}{2}, \frac{b+c-a}{2}$.

64. $\frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$.

65. $r^2 + 2Rr$.

66. $2\sqrt{ab}(a+b)$

67. $\sqrt{a^2+b^2}$.

68. $\sqrt{a^2+b^2}$;
 $\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

69. $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 - Rr + r^2}}$.

70. $\frac{\pi(b^2 - 2ac)}{4a^2}$.

71. $\pi \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 2ac}}{2a} \right)^2$.

Список рекомендуемой литературы

1. Галицкий М.П., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8–9 классов. – М.: Просвещение, 1994. – 271 с.
2. Говоров В.М. и др. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. Егерев В.К. и др. Сборник задач для поступающих во втузы. – М.: Высшая школа, 1998. – 528 с.
4. Кочагина М.Н., Кочагин В.В. Малое ЕГЭ по математике. – М.: ЭКСМО, 2007. – 192 с.
5. Кузнецова Л.В. и др. Алгебра: Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе. – М.: Просвещение, 2007. – 192 с.
6. Куланин Е.Д. и др. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 2000. – 624 с.
7. Мочалов В.В., Сильвестров В.В. Уравнения и неравенства с параметрами. – Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 2000. – 144 с.
8. Рурукин А.Н. Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике. – М.: ВАКО, 2006. – 304 с.
9. Рурукин А.Н. Решение задач по алгебре и геометрии для учащихся 9 класса. – М.: ЗИШ МИФИ, 2007. – 312 с.
10. Рурукин А.Н. Молочников Д.В. Подробный разбор заданий к «Сборнику заданий для подготовки к итоговой аттестации по алгебре». 9 класс. – М.: ВАКО, 2008. – 320 с.
11. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Школа решения задач с параметрами. – М.: Илекса, 2007. – 212 с.
12. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс. – М.: АСТ, 2006. – 256 с.