Задания высокого уровня сложности с развернутым ответом №18

В действующем формате ЕГЭ задания 18 (задания С5) содержат параметры и предполагают исследование свойств различных элементарных функций. Поэтому подготовку к их решению, очевидно, следует начать с краткого обзора основных методов решения задач с параметрами. Эти методы демонстрируются на соответствующих примерах, которые также можно рассматривать как тренировочные.

Общая постановка задачи с параметром.

Для определенности, рассмотрим задачу с параметром на примере уравнения, поскольку общая ее постановка не зависит от конкретного вида задачи.

Пусть дано уравнение $F(x;a)=0$ (1) с двумя переменными x и a.

Задача с параметром в данном случае формулируется следующим образом: для каждого значения параметра a из некоторого числового множества A решить уравнение (1) относительно переменной x, т.е. привести его к виду $x=f(a)$ (2).

Множество A называется областью изменения параметра и в общем случае (если нет дополнительных условий) считается множеством действительных чисел R.

Таким образом, уравнение (1) можно рассматривать как бесконечное множество (семейство) уравнений относительно x, каждое из которых получается при подстановке в это уравнение любого конкретного значения параметра $a \in R$.

Решить уравнение с параметром – это значит, разбить множество всех значений параметра на подмножества, на каждом из которых выражение $x=f(a)$ имеет различный вид и найти его, если оно существует.

Те значения, которые осуществляют такое разбиение области изменения параметра, называются контрольными. При этих значениях или при переходе через них происходят качественные изменения семейства уравнений. Способы их нахождения определяются конкретными условиями задачи.

Возможно также, что уравнению (1) удовлетворяет конечный набор пар $(x;a)$, которые находятся непосредственно из его решения. Однако и в этом случае переменную a принято считать параметром и исходя из этого, формулировать ответ задачи.

Еще раз следует отметить, что сформулированные выше положения распространяется и на неравенства, и на системы уравнений и неравенств с параметрами.

Основные методы решения задач с параметрами.

1. Поиск решения задачи с параметрами.

В данном разделе рассматриваются задачи, решением которых в определенном смысле "управляют" параметр a или неизвестная величина x. В этом случае выбор контрольных значений и разбиение области изменения на подмножества очевидны и решение сводится к перебору различных случаев зависимости от значений переменных a или x.

1. Для каждого значения параметра a решить неравенство
   $x+2a-\sqrt{3ax+4a^2}>0$

<u>Решение.</u>

Перепишем неравенство в виде $x+2a>\sqrt{3ax+4a^2}$.

Это неравенство равносильно следующей системе неравенств

$$\begin{cases} a(3x+4a)\geq 0 \\ x+2a>\sqrt{a(3x+4a} \end{cases}.$$

Ее решением «управляет» параметр a. Необходимо последовательно рассмотреть три случая: $a<0$; $a=0$ и $a>0$. Получаем совокупность следующих трех систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a<0 \\ a(3x+4a)\geq 0 \\ x+2a>\sqrt{a(3x+4a)} \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} a=0 \\ x>0 \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} a>0 \\ a(3x+4a)\geq 0 \\ x+2a>\sqrt{a(3x+4a)} \end{cases} & (3) \end{array}\right.$$

Решим систему (1):

$$\begin{cases} a<0 \\ 3x+4a\leq 0 \\ x+2a>\sqrt{a(3x+4a)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ x\leq -\dfrac{4a}{3} \\ \dfrac{2a}{3}>\sqrt{a(3x+4a)} \end{cases}$$ Система не имеет решений, т.к.

$\dfrac{2a}{3}<0$.

Решим систему (3):

$$\begin{cases} a>0 \\ x \ge -\dfrac{4a}{3} \\ (x+2a)^2 > a(3x+4a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ x \ge -\dfrac{4a}{3} \\ x(x+a)>0 \end{cases} \quad x \in \left[-\frac{4a}{3}; -a\right] \cup (0;\infty).$$

Ответ: при $a<0$ неравенство не имеет решений; при $a=0$ $x \in (0;\infty)$;

при $a>0$ $x \in \left[-\frac{4a}{3}; -a\right] \cup (0;\infty)$.

2. Решение относительно параметра.

(использование параметра как равноправной переменной).

Метод решения относительно параметра используется, прежде всего, в том случае, когда степень искомой переменной в уравнении или неравенстве выше двух, а степень параметра не превосходит двух. Также он используется и тогда, когда для решения задачи необходимо менять местами переменные и параметры.

2. Для каждого значения параметра а решить уравнение

$$x^4 + 6x^3 + (4-2a)x^2 - (6a+1)x + a^2 + a = 0$$

Решение. Так как данное уравнение является квадратным относительно a, то представим его в следующем виде: $a^2 - (2x^2+6x-1)a + x^4 + 6x^3 + 4x^2 - x = 0$.

Найдем дискриминант этого квадратного уравнения:

$$D = (2x^2+6x-1)^2 - 4x^4 - 24x^3 - 16x^2 + 4x = 4x^4 + 36x^2 + 1 + 24x^3 - 4x^2 - 12x - 4x^4 - 24x^3 -$$
$$-16x^2 + 4x = 16x^2 - 8x + 1 = (4x-1)^2 \ge 0.$$

Следовательно, $a = \dfrac{2x^2+6x-1 \pm (4x-1)}{2}$. Отсюда, $a = x^2+5x-1$ или $a = x^2 + x$.

Отметим, что $D=0$ при $x=\dfrac{1}{4}$. Этот корень существует при $a=\dfrac{5}{16}$.

Решим полученную совокупность квадратных уравнений

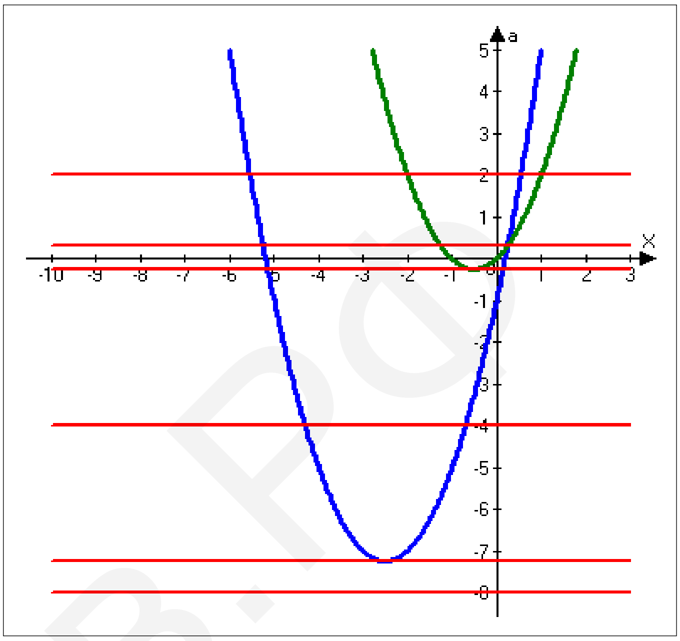
$x^2+5x-a-1=0$ или $x^2+x-a=0$.

$D_1 = 29+4a$; $D_2 = 1+4a$

$D_1 = 0$ при $a=-\dfrac{29}{4}$; $D_2 = 0$ при $a=-\dfrac{1}{4}$.

Очевидно, что $D_1>0$ при $a>-\dfrac{29}{4}$, $D_2>0$ при $a>-\dfrac{1}{4}$.

Ответ: при $a < -\frac{29}{4}$ уравнение не имеет корней; при $a = -\frac{29}{4}$ уравнение имеет один корень: $x = -\frac{5}{2}$; при $-\frac{29}{4} \le a \le -\frac{1}{4}$ уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29+4a}}{2}$; при $a = -\frac{1}{4}$ уравнение имеет три корня: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{28}}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}$;



при $-\frac{1}{4} < a < \frac{5}{16}; a > \frac{5}{16}$ уравнение имеет четыре корня:

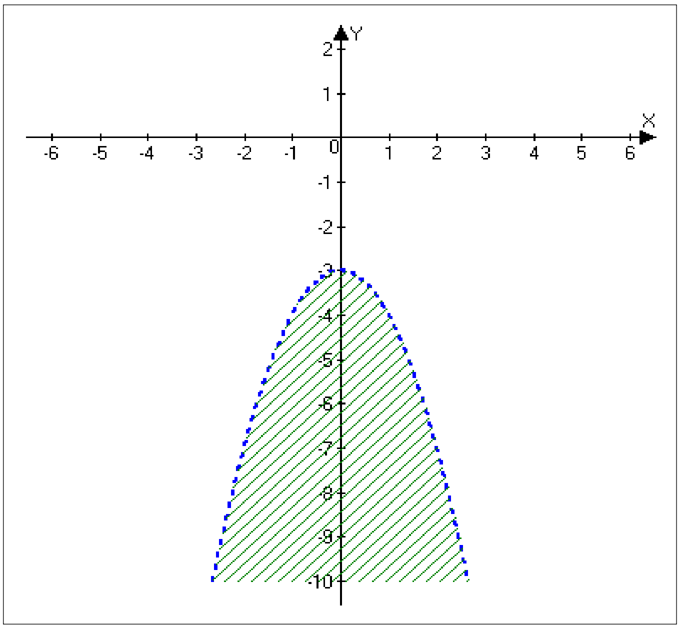
$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29+4a}}{2}$;

$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$;

при $a = \frac{5}{16}$ уравнение имеет три корня: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{21}{4}$, $x_3 = -\frac{5}{4}$.

Полученные результаты можно проиллюстрировать графически, изобразив на плоскости (x,a) параболы $a = x^2 + 5x - 1$ и $a = x^2 + x$, а также прямые $a = const$.

3. На плоскости (x,y) указать все точки, через которые не проходит ни одна из кривых семейства $y = x^2 - 2(1+2ax) + 2a^2 - 1$.



Решение. Ни одна из кривых указанного семейства не проходит через точку плоскости (x,y) тогда и только тогда, когда не существует тройки чисел (a,x,y), удовлетворяющих уравнению $2a^2 - 4xa + x^2 - y - 3 = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\frac{D}{4} = 4x^2 - 2x^2 + 2y + 6 < 0$. Ответ: $y < -x^2 - 3$.

4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $x^4 - 10x^3 + 24x^2 - 2px - p^2 = 0$ имеет три различных корня.

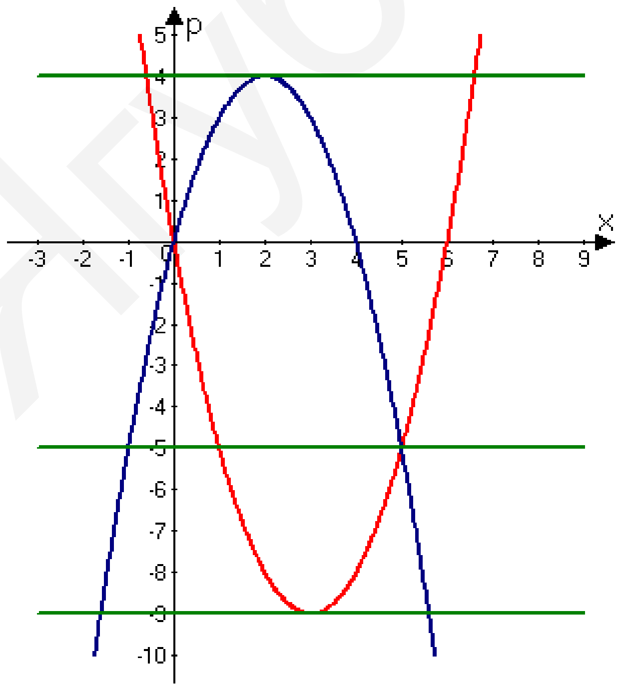
<u>Решение.</u> Так как данное уравнение является квадратным относительно a, то представим его в следующем виде: $p^2 + 2px - x^4 + 10x^3 - 24x^2 = 0$.

Найдем дискриминант этого квадратного уравнения:

$$\frac{D}{4} = x^2 + x^4 - 10x^3 + 24x^2 = x^2 \cdot (x-5)^2 \qquad p_{1,2} = -x \pm x \cdot (x-5)$$

$$\left[\begin{array}{l} p_1 = -x^2 + 4x \\ p_2 = x^2 - 6x \end{array}\right.$$

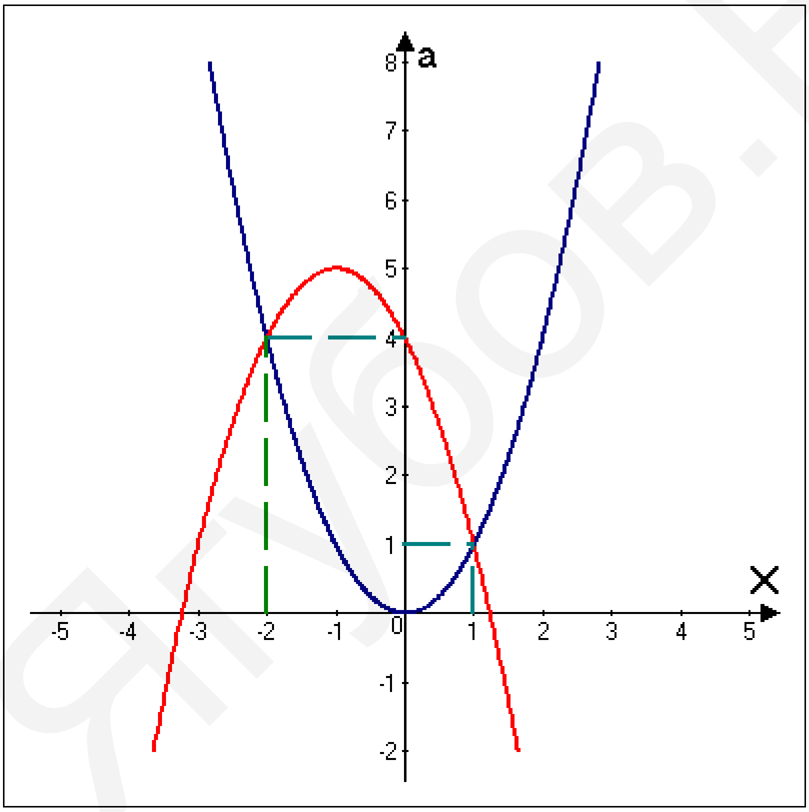
$$D = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} x = 0, p = 0 \\ x = 5, p = -5 \end{array}\right.$$



Ответ: -9; -5; 0; 4.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+2x^3-4x^2-2ax+4a-a^2=0$ имеет не менее трех корней. Найдите все корни, которые получаются при единственном значении параметра a.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $a^2+(2x-4)a-x^2(x^2+2x-4)=0$. Корни этого уравнения $\left[\begin{array}{c} a=x^2 \\ a=-x^2-2x+4 \end{array}\right.$. На плоскости xOa уравнение задает совокупность двух парабол. Найдем их общие точки: $x^2=-x^2-2x+4$; $x^2+x-2=0$; $\left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{array}\right.$. Таким образом, общие точки этих парабол: $(-2;4)$ и $(1;1)$. Координаты вершин парабол: $(0;0)$ и $(-1;5)$.



Уравнение имеет три и более корней при $0 \le a \le 5$. Каждый корень получается при двух различных значениях a, кроме корней $x=-2$ и $x=1$. Корень $x=-2$ получается при единственном значении $a=4$, так как прямая $x=-2$ пересекает график в единственной точке $(-2;4)$. Аналогично, корень $x=1$ получается при единственном значении $a=1$.

Ответ: $0 \le a \le 5$, $x=-2$ при $a=4$, $x=1$ при $a=1$.

3. Симметрия и четность.

Одним из наиболее общих методов решения задач с параметром является поиск необходимых условий. Он состоит в том, что сначала формируется множество значений параметра, которые могут удовлетворять условию задачи, а затем из этого множества находится собственно решение. В данном разделе рассмотрим этот метод на примере использования симметрии аналитических выражений.

Характеристическим признаком ряда задач является присутствие в них неизвестных в качестве аргументов четных функций. Таким образом, при замене x на $-x$ условия задачи не меняются, т.е. геометрические образы этих аналитических выражений симметричны относительно оси ординат. Возможна также симметрия относительно прямых $y = x$ или $y = -x$. В этих случаях условия не меняются соответственно при переменах местами x и y; x и $-y$. Как правило, в таких задачах требуется найти значения параметров, при которых существует единственное решение или нечетное число решений.

6. Определить, при каких значениях параметра а система имеет единственное решение, и найти его:

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5 \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0 \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$(3+2\sqrt{2})\cdot(3-2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1; \quad 3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = (3+2\sqrt{2})^{-1}.$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} (3+2\sqrt{2})^{-y} + (3+2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5 \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0 \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что если $(x_0; y_0)$ - решение этой системы, то и $(x_0; -y_0)$ также является ее решением. Следовательно, для существования единственного решения необходимо, чтобы $y = 0$. При $y = 0$ имеем: $\begin{cases} x^2 + 6x + 3a + 3 = 0 \\ (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0 \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}$.

Решения второго уравнения системы: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ a=2 \\ a=3 \end{array}\right.$.

Решение $(0;0)$ существует только при $a=-1$. Проверим, является ли оно единственным решением системы $\begin{cases}(3+2\sqrt{2})^{-y}+(3+2\sqrt{2})^{y}+3=x^2+6x+5 \\ y^2-12x^2=0 \\ -6\le x\le 0\end{cases}$.

При $-6\le x\le 0$ $x^2+6x+5\le 5$; $(3+2\sqrt{2})^{-y}+(3+2\sqrt{2})^{y}+3\ge 5$. Таким образом, первое уравнение имеет два решения: $(-6;0)$ и $(0;0)$. Второму уравнению удовлетворяет только $(0;0)$.

При $a=2$ система имеет вид $\begin{cases}(3+2\sqrt{2})^{-y}+(3+2\sqrt{2})^{y}-6=x^2+6x+5 \\ y^2=0 \\ -6\le x\le 0\end{cases}$.

$x^2+6x+9=0$, $x=-3$. $(-3;0)$ - единственное решение.

При $a=3$ система имеет вид $\begin{cases}(3+2\sqrt{2})^{-y}+(3+2\sqrt{2})^{y}-9=x^2+6x+5 \\ y^2=0 \\ -6\le x\le 0\end{cases}$.

$x^2+6x+12=0$ - уравнение, а значит и система, не имеет решения.

Ответ: при $a=-1$ система имеет единственное решение $(0;0)$; при $a=2$ - единственное решение $(-3;0)$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$\begin{cases}\left(3\sqrt{x|x|}+|y|-3\right)\cdot\left(|x|+3|y|-9\right)=0 \\ (x-a)^2+y^2=25\end{cases}$ имеет ровно три решения.

Решение.

Если $(x;y)$- решение системы, то и $(x;-y)$- решение системы. Значит, необходимым условием существования нечетного числа решений является равенство $y=-y$ или $y=0$.

Подставляя эти значения в исходную систему, и учитывая, что $x \ge 0$,

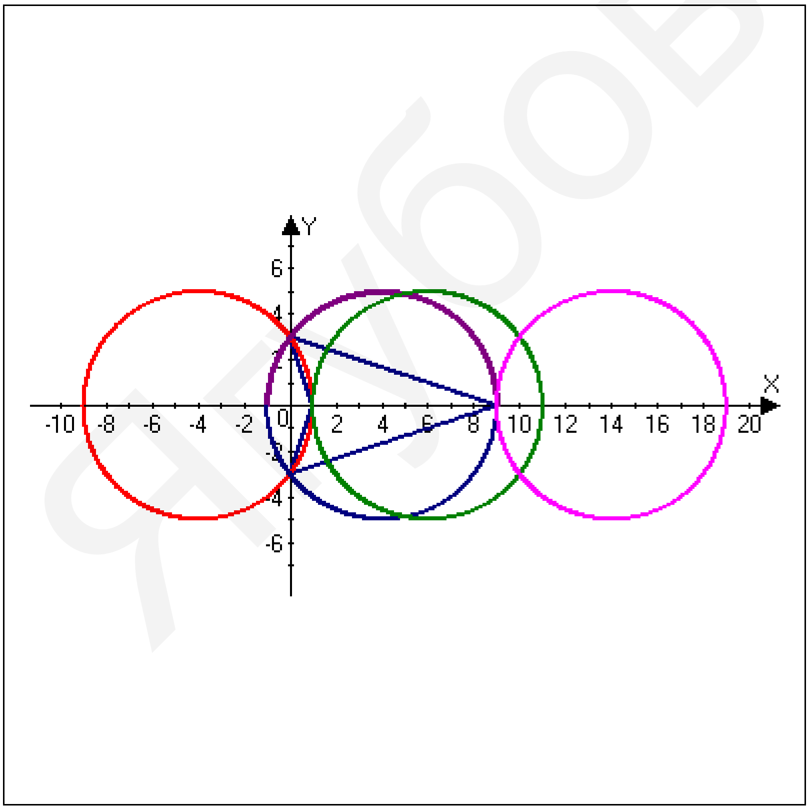
получаем систему $\begin{cases} (3x-3)\cdot(x-9)=0 \\ (x-a)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=9 \end{array}\right. \\ |x-a|=5 \end{cases}$.

Система может иметь нечетное число решений при $a \in \{-4,4,6,14\}$.

Выясним, когда система имеет ровно три решения:

Очевидно, что из четырех окружностей с центрами, соответственно, в точках $x_1=-4$, $x_2=4$, $x_3=6$ и $x_4=14$ только три имеют по три общих точки с множеством точек, заданных уравнением $(3x+|y|-3)\cdot(x+3|y|-9)=0$.

$$\begin{cases} (3x+|y|-3)\cdot(x+3|y|-9)=0 \\ (x-a)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 \le x = 1-\dfrac{|y|}{3} \\ 0 \le x = 9-3|y| \end{array}\right. \\ (x-a)^2+y^2=25 \end{cases}$$



Ответ: -4; 4; 6.

4. Элементы графического исследования в задачах с параметрами.

4.1. Координатная плоскость. Построение параметрического семейства кривых (метод сечений).

Предположим, что уравнение или неравенство, содержащее параметр, приведено к виду $f(x)=g(x,a)$ или $f(x)>g(x,a)$ $(f(x)<g(x,a))$. Тогда уравнение $y=f(x)$ определяет на координатной плоскости (x,y) некоторую кривую, а уравнение $y=g(x,a)$ - семейство кривых, в котором каждому допустимому значению параметра a соответствует одна кривая. При этом в зависимости от значений параметра a кривые семейства $y=g(x,a)$ могут занимать различные положения относительно кривой $y=f(x)$. Графическое исследование сечения кривой $y=f(x)$ семейством кривых $y=g(x,a)$ позволяет найти дальнейшее правильное аналитическое решение исходного уравнения или неравенства.

8. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $2x+2|x-a|+|x-1|>3$ выполняется при всех действительных значениях x.

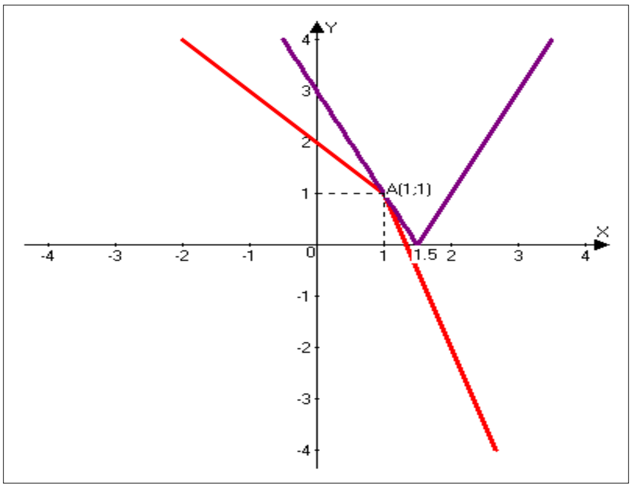
   Решение.

   Перенесем слагаемые, не содержащие параметр, в правую часть неравенства: $2|x-a|>3-2x-|x-1|$.

Построим график функции $y=3-2x-|x-1|$ и найдем те значения a, при которых все точки графиков параметрического семейства функций $y=2|x-a|$ лежат выше этого графика. $3-2x-|x-1|=\begin{cases}2-x; если\, x\le 1\\ 4-3x; если\, x>1\end{cases}$;

$2|x-a|=\begin{cases}2a-2x; если\, x\le a\\ 2x-2a; если\, x>a\end{cases}$.

Очевидно, что контрольным значением параметра является значение параметра a_1, при котором график функции $y=2|x-a|$ проходит через точку $A(1;1)$. Подставим ее координаты в уравнение $y=2a-2x$, получим: $2a-2x=1$; $a_1=\dfrac{3}{2}$.



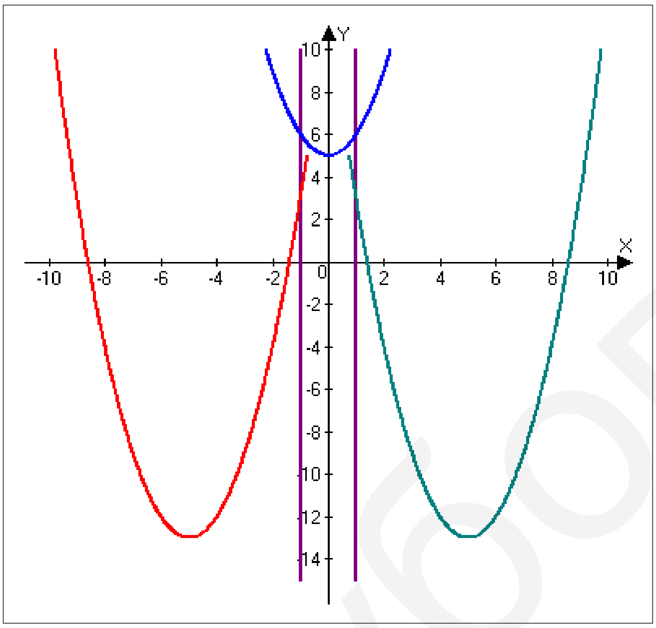
Ответ: $a>\dfrac{3}{2}$.

9. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ выполняется при всех действительных значениях x.

<u>Решение.</u> Представим неравенство как квадратное относительно $\cos x$ и сделаем замену $t = \cos x$. Получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} t^2 - 2at + a^2 + 2a - 3 > 0 & (1) \\ -1 \le t \le 1 & (2) \end{cases}.$$

Абсцисса вершины квадратного трехчлена $y(t) = t^2 - 2at + a^2 + 2a - 3$ зависит от параметра: $t_0 = a$.



Семейство парабол разделим на три группы. К первой отнесем те из них, вершины которых расположены левее промежутка $[-1;1]$; ко второй – вершины которых расположены внутри или на границе промежутка $[-1;1]$; к третьей - вершины которых расположены правее этого промежутка.

Необходимым и достаточным условием положительности функции в указанном промежутке является выполнение неравенства $y_{наим}(t) > 0$ при $t \in [-1;1]$. Для первой группы – это неравенство $y(-1) > 0$, для второй - $y(a) > 0$, для третьей - $y(1) > 0$. Таким образом, получим совокупность трех систем неравенств:

$$\begin{cases} a < -1 \\ y(-1) > 0 \end{cases} (1), \quad \begin{cases} -1 \le a \le 1 \\ y(a) > 0 \end{cases} (2), \quad \begin{cases} a > 1 \\ y(1) > 0 \end{cases} (3).$$

Решим последовательно каждую из них.

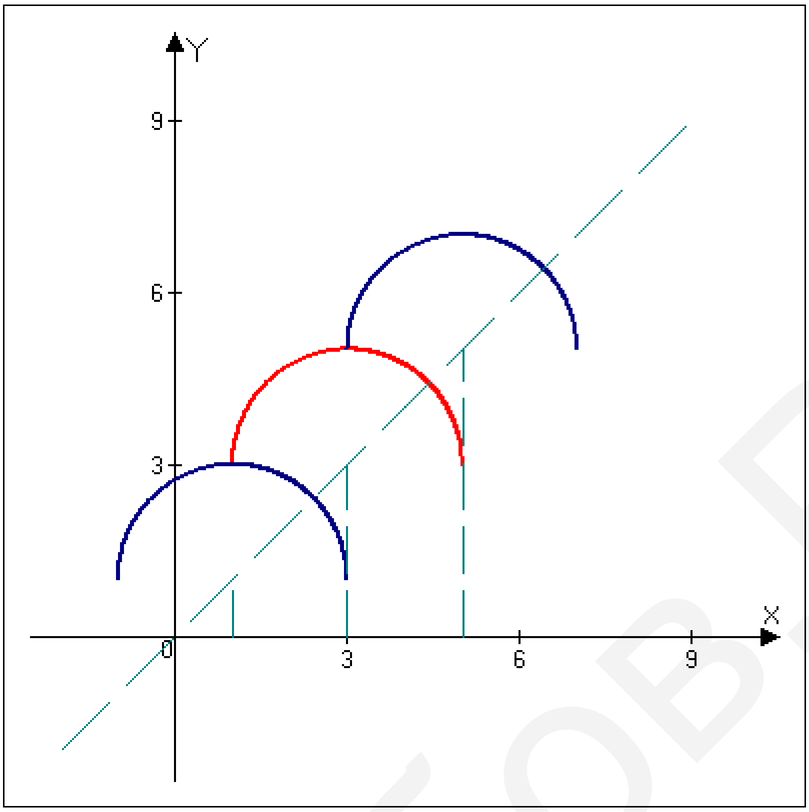
$$\begin{cases} a < -1 \\ a^2 + 4a - 2 > 0 \end{cases} (1), \quad a < -2 - \sqrt{6}.$$

$$\begin{cases} -1 \le a \le 1 \\ 2a - 3 > 0 \end{cases} (2).$$ Система несовместна.

$$\begin{cases} a > 1 \\ a^2 - 2 > 0 \end{cases} (3), \quad a > \sqrt{2}.$$ Ответ: $a < -2 - \sqrt{6}$, $a > \sqrt{2}$.

10. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} y=\sqrt{-5+6x-x^2}+3 \\ y=\sqrt{4-a^2-2ax-x^2}-a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение



Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики функций $y=\sqrt{-5+6x-x^2}+3$ и $y=\sqrt{4-a^2-2ax-x^2}-a$ имеют единственную общую точку.

Первое уравнение запишем в виде $y-3=\sqrt{4-(x-3)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 3 \\ (x-3)^2+(y-3)^2=4 \end{cases}$. Это система задает верхнюю полуокружность с центром $(3;3)$ и радиусом 2. Второе уравнение запишем в виде $y+a=\sqrt{4-(x+a)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq -a \\ (x+a)^2+(y+a)^2=4 \end{cases}$. Это система задает верхнюю полуокружность с центром $(-a;-a)$ и радиусом 2.

При $a=-3$ полуокружности совпадают.

При $a<-5$, $a>-1$ полуокружности не имеют общих точек.

При $-5<a<-3$, $-3<a<-1$ полуокружности имеют единственную общую точку.

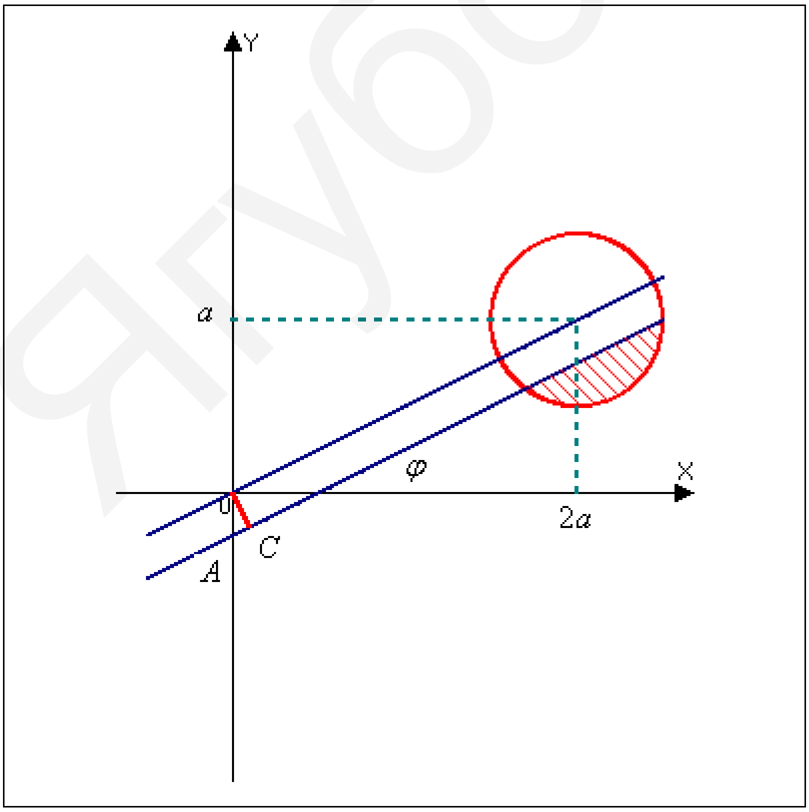
Ответ: $-5<a<-3, -3<a<-1$.

11. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2+(y-a)^2} \le \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}} \\ x-2y \ge 1 \end{cases}$ имеет решения.

Решение

Первое неравенство задает на координатной плоскости круг радиуса $\dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}$ с центром в точке $O_1(2a;a)$. Второе неравенство задает полуплоскость с границей $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$. Очевидно, что центр круга при всех значениях a лежит вне заданной полуплоскости, т.к. $2a-2a=0<1$.

Система имеет решения, если круг и полуплоскость имеют общие точки, т.е. если радиус окружности не меньше расстояния от точки $O_1(2a;a)$ до прямой $x-2y-1=0$. Расстояние от точки $(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+Dy+C=0$ находится по формуле $\rho=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Отсюда $\rho=\dfrac{|2a-2a-1|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{|a|}{6\sqrt{5}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $|a| \ge 6$.



Не используя данную формулу, можно было потребовать, чтобы радиус был не меньше расстояния между параллельными прямыми $y = \frac{x}{2}$ и $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

$OC = \frac{1}{2} \cdot \cos\varphi$; $tg\varphi = \frac{1}{2}$; $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $OC = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее аналогично.

Ответ: $a \le -6$; $a \ge 6$.

12. (ЕГЭ 2011). Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ (x+1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение

Если $x \ge 0$, то уравнение $(|x| - 5)^2 + (y-3)^2 = 9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1\,(5;3)$ радиуса 3, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2\,(-5;3)$ радиуса 3.

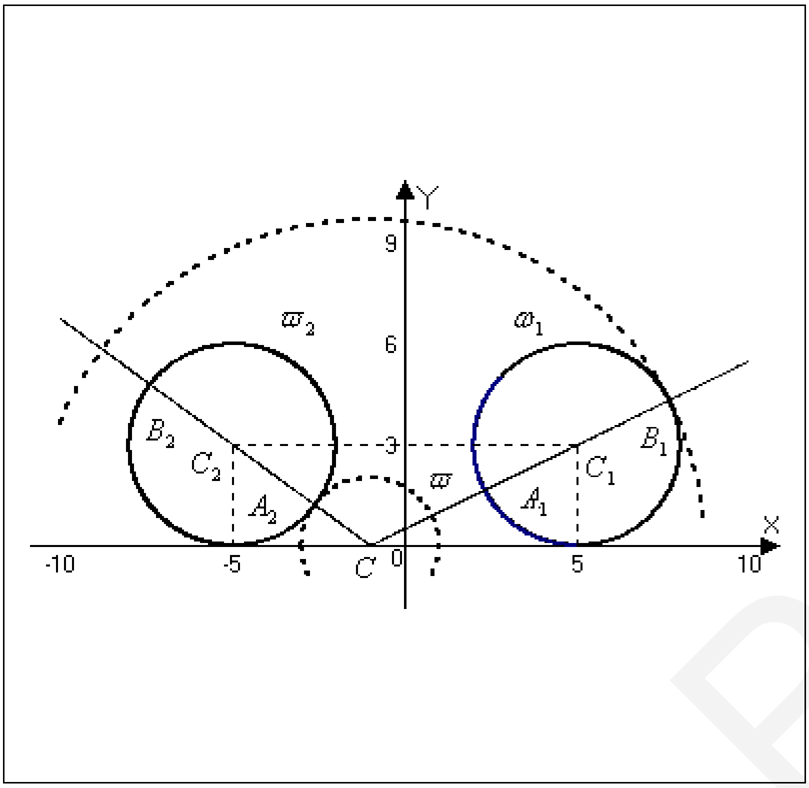
При положительных значениях параметра a уравнение $(x+1)^2 + y^2 = a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C\,(-1;0)$ радиуса a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.

Из точки C проведем луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1 = \sqrt{(5+1)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$, то $CA_1 = 3\sqrt{5} - 3$, $CB_1 = 3\sqrt{5} + 3$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.



Из точки C проведем луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как $CC_2 = \sqrt{-(5+1)^2 + 3^2} = 5$, то $CA_2 = 5 - 3 = 2$, $CB_2 = 5 + 3 = 8$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно с одной из окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой.

Ответ: 2; $3\sqrt{5} + 3$.

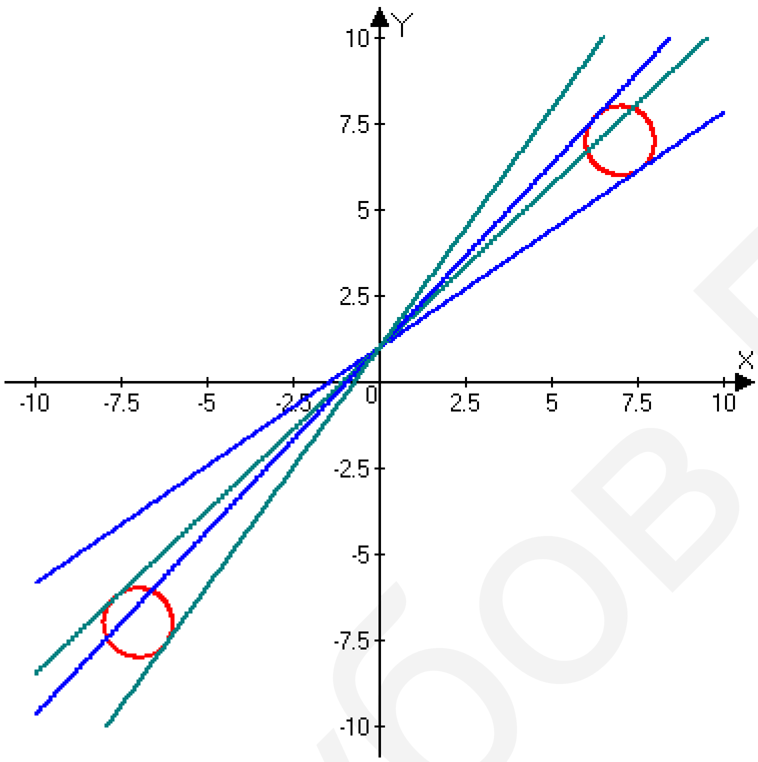
13. (ЕГЭ 2011). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 7)^2 + (|y| - 7)^2 = 1 \\ y = ax + 1 \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение

Первое уравнение при условии $xy > 0$ задает на плоскости две единичные окружности с центрами $(7;7)$ и $(-7;-7)$, а второе – прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$.



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-7;-7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система $\begin{cases} y = ax+1 \\ (x+7)^2 + (y+7)^2 = 1 \end{cases}$ (1) имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение $(x+7)^2 + (ax+1+7)^2 = 1$ имело единственное решение. Приведем уравнение к виду $(a^2+1)x^2 + 2(8a+7)x + 112 = 0$ и из равенства нулю дискриминанта получим: $(8a+7)^2 - 112(a^2+1) = 0$, откуда $48a^2 - 112a + 63 = 0$. Значит, $a_{1,2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{7}}{12}$ и система (1) имеет решения только при $\dfrac{14-\sqrt{7}}{12} \le a \le \dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(7;7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система $\begin{cases} y = ax+1 \\ (x-7)^2 + (y-7)^2 = 1 \end{cases}$ (2) имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение $(x-7)^2+(ax+1-7)^2=1$ имело единственное решение. Приведем уравнение к виду $(a^2+1)x^2-2(6a+7)x+84=0$ и из равенства нулю дискриминанта получим: $(6a+7)^2-84(a^2+1)=0$, откуда $48a^2-84a+35=0$. Значит, $a_{3,4}=\dfrac{21\pm\sqrt{21}}{24}$ и система (2) имеет решения только при $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}\le a\le\dfrac{21+\sqrt{21}}{24}$.

Так как $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}<\dfrac{14-\sqrt{7}}{12}<\dfrac{21+\sqrt{21}}{24}<\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$, то исходная система имеет единственное решение при $a=\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$ и при $a=\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

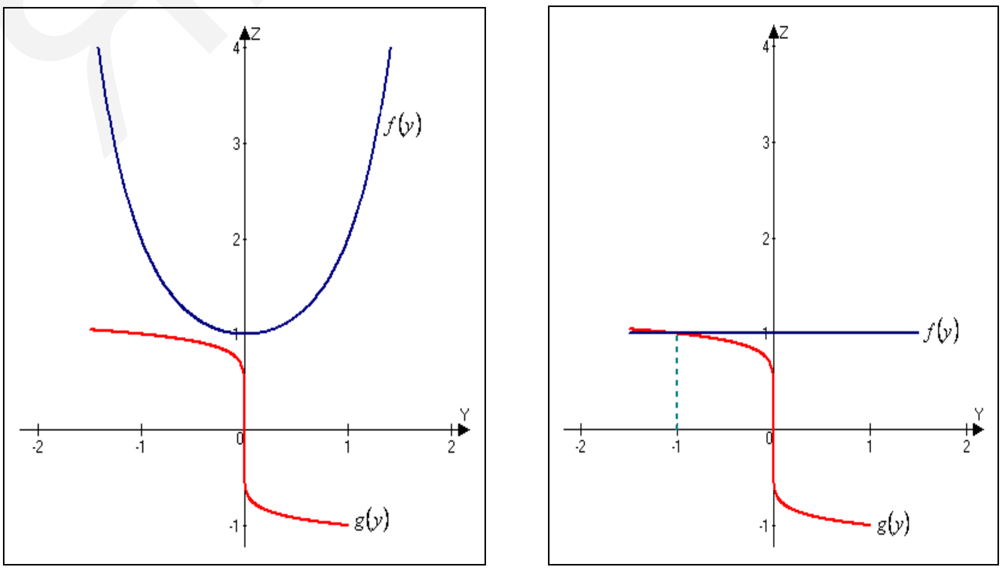
Ответ: $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$; $\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

14. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} a^{y^2}=\sqrt[9]{-0{,}125-3x-2x^2} \\ 16x^2+1=8y-24x \end{cases}$ имеет ровно два решения.

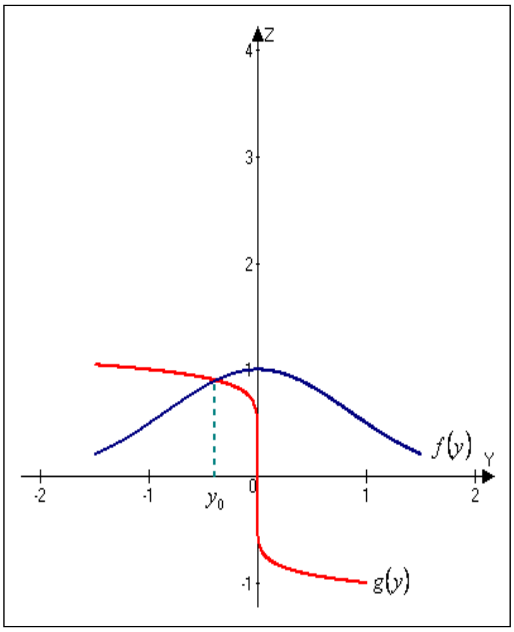
Решение

Выражаем из второго уравнения y и подставляем в первое, получаем следующую систему: $\begin{cases} a^{y^2}=\sqrt[9]{-y} \\ y=0{,}125+3x+2x^2 \end{cases}$. Решим уравнение $a^{y^2}=\sqrt[9]{-y}$.

Рассмотрим взаимное расположение графиков функций $z=f(y)=a^{y^2}$ и $z=g(y)=\sqrt[9]{-y}$ в следующих трех случаях:



$a > 1$ $a = 1$



Итак, при $a > 1$ графики функций $z = f(y)$ и

$z = g(y)$ общих точек не имеют и, следовательно, уравнение $a^{y^2} = \sqrt[9]{-y}$ не имеет корней.

При $a = 1$ графики пересекаются в точке с абсциссой $y_0 = -1$ и уравнение $a^{y^2} = \sqrt[9]{-y}$ имеет один корень $y_0 = -1$.

$0 < a < 1$

При $0 < a < 1$ графики пересекаются в точке с абсциссой y_0 $(-1 < y_0 < 0)$ и уравнение $a^{y^2} = \sqrt[9]{-y}$ имеет один корень $-1 < y_0 < 0$.

Подставим y_0 во второе уравнение системы: $16x^2 + 24x + 1 - 8y_0 = 0$.

$\frac{D}{4} = 144 - 16 + 128y_0 > 0$; $y_0 > -1$.

Ответ: $0 < a < 1$

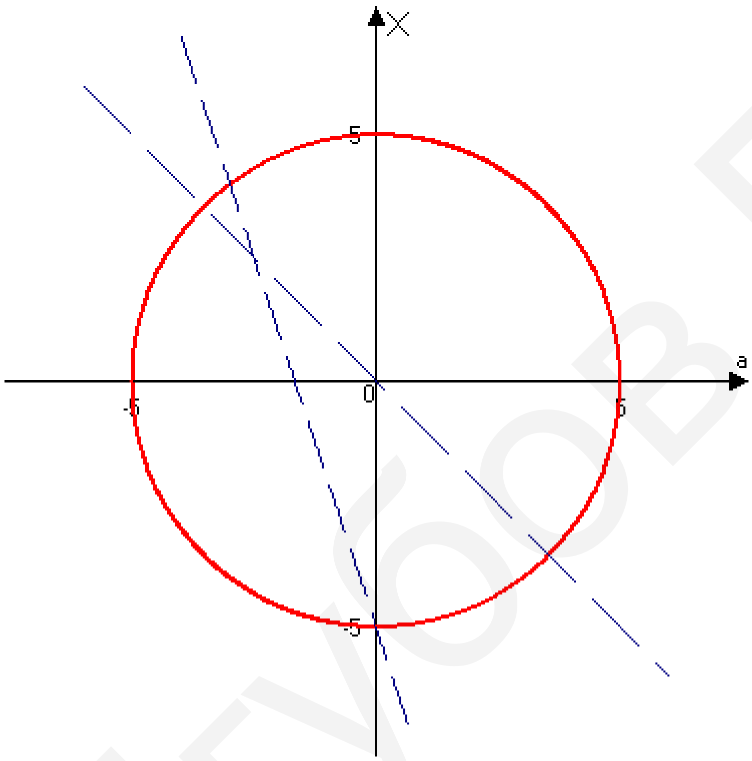
4.2. Координатно – параметрическая плоскость. Метод областей.

При графическом исследовании задач с параметрами наряду с координатной плоскостью (x, y) целесообразно также использовать координатно – параметрическую плоскость (x, a). Если возможно построить на координатно – параметрической плоскости множество всех точек, координаты которых x и a удовлетворяют условию задачи, то затем нетрудно поставить в соответствие каждому значению параметра a этого множества значение соответствующей координаты x. Это и будет решением задачи. Следует также указать те значения параметра, при которых задача не имеет решения. Выбор контрольных значений параметра определяется конкретным видом построенных множеств.

15. (ЕГЭ 2011). Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+(4a+5)x+3a^2+5a<0 \\ x^2+a^2=25 \end{cases}$ имеет решения.

Решение

Разложим левую часть неравенства на множители $(x+3a+5)\cdot(x+a)<0$. Это неравенство задаёт пару вертикальных углов плоскости Oax. Уравнение задаёт окружность с центром $(0;0)$ радиуса 5.



Решения системы – точки дуг окружности, лежащие в указанных вертикальных углах. Абсциссы концов этих дуг находим из систем

$$\begin{cases} x+3a+5=0 \\ x^2+a^2=25 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+a=0 \\ x^2+a^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-3a-5 \\ 9a^2+30a+25+a^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-a \\ 2a^2=25 \end{cases}$$

$a=-3$; $a=0$. $\qquad a=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$; $\quad a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};-3\right)$; $\left(0;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

16. Найдите все значения параметра p, при котором уравнение $4x^6-81x^4-4px^3+p^2=0$ имеет нечетное число различных корней.
Решение

Разложим левую часть уравнения на множители:

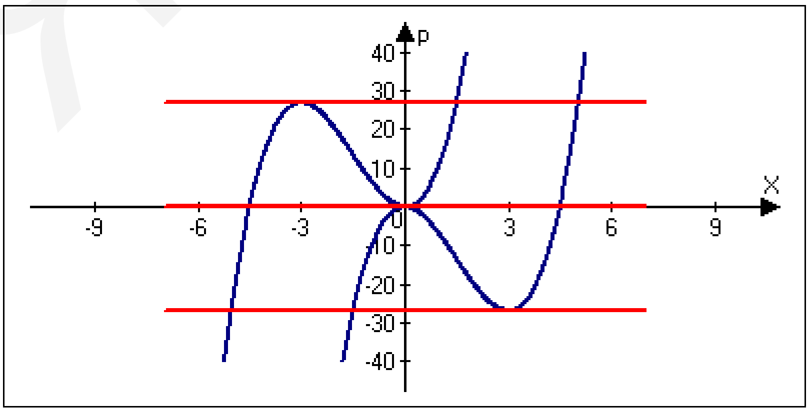
$\left(2x^3-p\right)^2-81x^4=0$; $\left(2x^3-p-9x^2\right)\cdot\left(2x^3-p+9x^2\right)=0$.

Таким образом, получили следующую совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} p=2x^3-9x^2 \\ p=2x^3+9x^2 \end{array}\right..$$

На плоскости xOp построим графики функций

$p=2x^3-9x^2$	и	$p=2x^3+9x^2$
$p'=6x^2-18x$		$p'=6x^2-18x$
$p'=0$		$p'=0$
$x=0$- точка максимума		$x=-3$- точка максимума
$x=3$-точка минимума		$x=0$- точка минимума
$p(0)=0$; $p(3)=-27$.		$p(-3)=27$; $p(0)=0$.



Ответ: -27; 0; 27.

17. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2-2x\le a-1$ и $x^2-4x\le 1-4a$ образуют на числовой оси отрезок длины единица.

Решение.

Представим данные неравенства в виде следующей системы:

$$\begin{cases} a\ge (x-1)^2 \\ a\le \dfrac{1}{4}\left(-x^2+4x+1\right) \end{cases}.$$

На плоскости (x,a) решением этой системы являются точки, лежащие не ниже параболы $a=(x-1)^2$ и не выше параболы $a=\dfrac{1}{4}\left(-x^2+4x+1\right)$.

Найдем точки пересечения этих парабол:

$$x^2-2x+1=-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{4}\ ;$$

$$5x^2-12x+3=0\ ;\quad x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{21}}{5}\ ;\quad a_{1,2}=\left(\frac{6\pm\sqrt{21}}{5}-1\right)^2=\frac{22\pm2\sqrt{21}}{25}\ .$$

Отметим, что так как $\dfrac{6+\sqrt{21}}{5}>2$, то точка пересечения парабол с координатами $(x_2;a_2)$ лежит правее вершины параболы $a=\dfrac{1}{4}\left(-x^2+4x+1\right)$, координаты которой $\left(2;\dfrac{5}{4}\right)$.

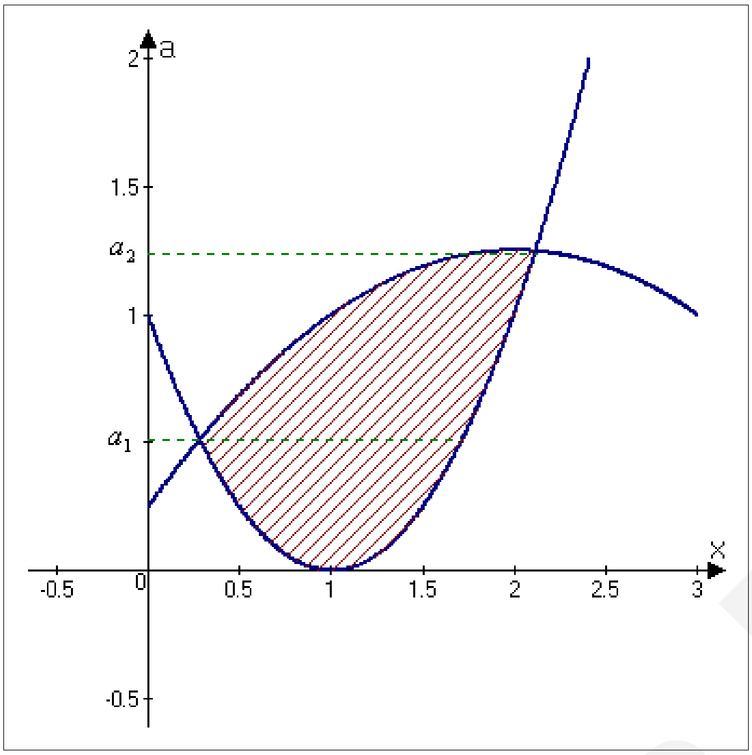
Решим относительно x уравнения

$x^2-2x+1-a=0$ и $x^2-4x-1+4a=0$

$x=1\pm\sqrt{a}$; $x=2\pm\sqrt{5-4a}$.

Таким образом, следует рассмотреть три системы:

$$\begin{cases} 0\le a\le \dfrac{22-2\sqrt{21}}{25} \\ 1+\sqrt{a}-1+\sqrt{a}=1 \end{cases} (1)\ ;\quad \begin{cases} \dfrac{22-2\sqrt{21}}{25}<a\le\dfrac{22+2\sqrt{21}}{25} \\ 1+\sqrt{a}-2+\sqrt{5-4a}=1 \end{cases} (2)\ ;\quad \begin{cases} \dfrac{22+2\sqrt{21}}{25}<a\le\dfrac{5}{4} \\ 2+\sqrt{5-4a}-2+\sqrt{5-4a}=1 \end{cases} (3)$$



Решение системы (1): $a=\frac{1}{4}$;

системы (2): $a=1$.

Система (3) несовместна, так как решение второго уравнения системы $a=\frac{19}{16}<\frac{22+2\sqrt{21}}{25}$.

Ответ: $a=\frac{1}{4}$; $a=1$.

5. Функциональный подход к решению уравнений и неравенств.

Для решения уравнений и неравенств, содержащих различные типы элементарных функций, достаточно часто приходится использовать общие методы исследования свойств функций, такие как область определения и множество значений, четность, монотонность, экстремумы и т.д.

18. Найти все значения a, при которых уравнение $4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим уравнение $f(x)=0$, где $f(x)=9|x-1|+|3x-|x+a||-4x$. Здесь $f(x)$ - кусочно-линейная функция, графиком которой является ломаная линия, имеющая своими звеньями отрезки прямых и два луча.

Любое звено этой ломаной при $x>1$ - часть некоторой прямой с угловым коэффициентом $k\geq 9-4-4=1$. Для $x<1$ любое из звеньев имеет угловой коэффициент $k\leq -9+4-4=-9$. Отсюда следует возрастание $f(x)$ при $x>1$ и ее убывание при $x<1$. Таким образом, $\min f(x)=f(1)=|3-|1+a||-4$.

Условие существования корня данного уравнения имеет вид: $f(1)\leq 0$.

$||a+1|-3|\leq 4$, $\begin{cases}|a+1|-3\leq 4\\ |a+1|-3\geq -4\end{cases}$, $|a+1|\leq 7$, $-8\leq a\leq 6$. Ответ: $-8\leq a\leq 6$.

19. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3$ выполняется для любого значения x.

Решение.

Найдем область изменения функции, стоящей под знаком модуля. $f(x) = 3\sin^2 x + a\sin 2x + \cos^2 x + a = a\sin 2x - \cos 2x + a + 2 = \sqrt{a^2+1}\sin(2x-\varphi) + a + 2$, где φ - дополнительный аргумент.

$a + 2 - \sqrt{a^2+1} \le f(x) \le a + 2 + \sqrt{a^2+1}$.

Таким образом, получаем следующую систему

$$\begin{cases} a + 2 - \sqrt{a^2+1} \ge -3 \\ a + 2 + \sqrt{a^2+1} \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le a \le 1 \\ a \ge -\dfrac{12}{5} \\ a \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{12}{5} \le a \le 0.$$ Ответ: $-\frac{12}{5} \le a \le 0$.

20. (ЕГЭ 2012). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|x^2 - 4x + a\right| \le 10$ выполняется для всех $x \in [a; a+5]$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$.

Эта функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 2]$.

$|f(x)| \le 10; \quad -10 \le f(x) \le 10$.

Отрезок $[a; a+5]$ не должен лежать на участке монотонности, иначе $\Delta f \ge 25$.

Следовательно, $a < 2 < a + 5; \quad -3 < a < 2$.

Наибольшее значение $f(x)$ достигается либо при $x = a$, либо при $x = a + 5$.

Наименьшее значение $f(x)$ достигается при $x = 2$. Итак, имеем систему:

$$\begin{cases} -3 < a < 2 \\ f(a) \le 10 \\ f(a+5) \le 10 \\ f(2) \ge -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 < a < 2 \\ a^2 - 3a - 10 \le 0 \\ a^2 + 7a - 5 \le 0 \\ a \ge -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 < a < 2 \\ -2 \le a \le 5 \\ \dfrac{-7-\sqrt{69}}{2} \le a \le \dfrac{-7+\sqrt{69}}{2} \\ a \ge -6 \end{cases}$$

Ответ: $\left[-2; \frac{-7+\sqrt{69}}{2}\right]$.

21. (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2-10a+5\sqrt{x^2+25}=4|x-5a|-8|x|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим две функции: $f(x)=a^2-10a+5\sqrt{x^2+25}$ и $g(x)=4|x-5a|-8|x|$. Так как $x^2\ge 0$, то $f(x)\ge f(0)=a^2-10a+25$.

Функция $g(x)=4|x-5a|-8|x|$ является кусочно-линейной.

При $x<0$ угловой коэффициент либо 4, либо 12.,

при $x>0$ угловой коэффициент либо -4, либо -12.

Значит, $g(x)$ возрастает при $x<0$ и убывает при $x>0$, поэтому $g(x)\le g(0)=20|a|$.

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда $f(0)\le g(0)$.

$$a^2-10a+25\le 20|a|$$

$\begin{cases} a\ge 0 \\ a^2-30a+25\le 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a<0 \\ a^2+10a+25\le 0 \end{cases}$

$15-10\sqrt{2}\le a\le 15+10\sqrt{2}$ $\qquad a=-5$

Ответ: -5; $\left[15-10\sqrt{2}; 15+10\sqrt{2}\right]$; .

22. (ЕГЭ 2012). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^{10}+(a-2|x|)^5+x^2-2|x|+a=0$ имеет более трех различных решений.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^{10}+x^2=(2|x|-a)^5+(2|x|-a)$ или

$$f(x^2)=f(2|x|-a), \text{ где } f(t)=t^5+t.$$

$f'(t)=5t^4+1>0$, следовательно, $f(t)$ - монотонно возрастающая функция.

$$f\left(x^2\right)=f\left(2|x|-a\right) \Leftrightarrow x^2=2|x-a|.$$

$$x^2-2|x|+a=0; \quad |x|=1\pm\sqrt{1-a}$$

$|x|=1+\sqrt{1-a}$ - два решения при $a\le 1$;

$|x|=1-\sqrt{1-a}$ - два решения при $0<a<1$, отличных от решений первого уравнения.

Ответ: $0<a<1$.

.

23. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin(x-3a)+\sin\left(\dfrac{x^2-6x+7a}{2}\right)=4x-x^2-a$ не имеет действительных решений.

Решение. Обозначим $U=x-3a$, $V=\dfrac{x^2-6x+7a}{2}$, тогда $4x-x^2-a=-2U-2V$.

В результате указанной замены исходное уравнение примет следующий вид:

$\sin U+2U=-\sin V-2V$.

Введем функцию $f(t)=\sin t+2t$ и запишем уравнение в виде $f(U)=-f(V)$ или с учетом нечетности $f(t)$: $f(U)=f(-V)$

Так как $f'(t)=\cos t+2>0$, то $f(t)$-монотонно возрастающая функции, то

$f(U)=f(-V)\Leftrightarrow U=-V$.

Отсюда имеем $x-3a=-\dfrac{x^2-6x+7a}{2}$;

$x^2-4x+a=0$; $\dfrac{D}{4}=4-a<0$; $a>4$.

24. Найдите наибольшее целое значение a, при котором уравнение
$$3x^2-12x+3x+9=4\sin\frac{4x-x^2-a-3}{2}\cdot\cos\frac{x^2-2x-a-1}{2}$$
имеет ровно два различных решения.

Решение

Преобразуем правую часть уравнения по формуле
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha)}{2}.$$

Получим $4\sin\frac{4x-x^2-a-3}{2}\cdot\cos\frac{x^2-2x-a-1}{2}=2\left(\sin(x-a-2)-\sin\left(x^2-3x+1\right)\right).$

Левую часть уравнения преобразуем следующим образом:

$3x^2-12x+3a+9=3\left(x^2-4x+a+3\right)=3\left(\left(x^2-3x+1\right)-(x-a-2)\right).$

Обозначим $U=x-a-2$; $V=x^2-3x+1$, тогда уравнение примет вид: $3V-3U=2\sin U-2\sin V$ или $3U+2\sin U=3V+2\sin V$

Введем функцию $f(t)=3t+2\sin t$.

Так как $f'(t)=3+2\cos t>0$, то $f(t)$-монотонно возрастающая функция.

Следовательно, $f(U)=f(V)\Leftrightarrow U=V$.

Отсюда имеем $x-a-2=x^2-3x+1$

$x^2-4x+a+3+0$; $\frac{D}{4}=4-3-a>0$; $1-a>0$; $a<1$.

Ответ: $a=0$.

25. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left((2x+a)\cdot\sqrt{22a-4a^2-24}-2\left(x^2+x\right)\cdot\lg a\right)\cdot\lg\left(\frac{36a-9a^2}{35}\right)=0$ имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases}22a-4a^2-24\ge 0\\ 36a-9a^2>0\end{cases}\qquad \begin{cases}2a^2-11a+12\le 0\\ a(a-4)<0\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{3}{2}\le a\le 4\\ 0<a<4\end{cases}\qquad \frac{3}{2}\le a<4.$$

$$\left[\begin{array}{l}\lg\left(\frac{36a-9a^2}{35}\right)=0\\ (2x+a)\cdot\sqrt{22a-4a^2-24}-2\left(x^2+x\right)\cdot\lg a=0\end{array}\right.$$

$$\frac{36a-9a^2}{35}=1\qquad 9a^2-36a+35=0\qquad \frac{D}{4}=324-315=9\quad a_{1,2}=\frac{18\pm 3}{9}\qquad \left[\begin{array}{l}a_1=\frac{5}{3}\\ a_2=\frac{7}{3}\end{array}\right.$$

$$2\lg a\cdot x^2+2\left(\lg a-\sqrt{22a-4a^2-24}\right)\cdot x-a\cdot\sqrt{22a-4a^2-24}=0$$

$$f(x)=2\lg a\cdot x^2+2\left(\lg a-\sqrt{22a-4a^2-24}\right)\cdot x-a\cdot\sqrt{22a-4a^2-24}$$

$$\begin{cases} f(-1)\le 0 \\ f(0)\le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-2)\cdot\sqrt{22a-4a^2-24}\ge 0 \\ a\cdot\sqrt{22a-4a^2-24}\ge 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{2} \\ a\ge 2 \end{array}\right. \qquad \frac{7}{3}\in[2;4)\ .$$

Ответ: $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; $[2;4)$.

26. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{4}{3}(x^2-ax)-\frac{\pi}{3}<\sin(x^2-ax)+\cos\left(2x^2-2ax+\frac{\pi}{4}\right)$ справедливо для всех значений x из отрезка $[\pi;2\pi]$?

Решение. Обозначим $t=x^2-ax$, тогда неравенство будет иметь вид

$$\frac{4}{3}t-\frac{\pi}{3}<\sin t+\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{4}{3}t-\frac{\pi}{3}<\sin t-\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{4}{3}(2t-t)-\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4}+\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)<\sin t$$

$$\frac{4}{3}\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{4}{3}t+\sin t$$

$$f(U)=\frac{4}{3}U+\sin U\ ; \qquad f'(U)=\frac{4}{3}+\cos U>0\ ;$$

$f(U)$ - монотонно возрастающая функция;

$$f\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)<f(t); \qquad 2t-\frac{\pi}{4}<t\ ; \qquad t<\frac{\pi}{4}.$$

$$x^2-ax-\frac{\pi}{4}<0 \qquad \begin{cases} \pi^2-a\pi-\frac{\pi}{4}<0 \\ 4\pi^2-2a\pi-\frac{\pi}{4}<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a>\pi-\frac{1}{4} \\ a>2\pi-\frac{1}{8} \end{cases}$$

Ответ; $a>2\pi-\frac{1}{8}$.

27. (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a, при которых для любого действительного x выполнено неравенство

$$|3\sin x+a^2-22|+|7\sin x+a+12|\le 11\sin x+|a^2+a-20|+11$$

Решение. Пусть $t=\sin x$, тогда неравенство запишется в виде $\left|3t+a^2-22\right|+\left|7t+a+12\right|\le 11t+\left|a^2+a-20\right|+11$. Поскольку $-1\le\sin x\le 1$, нам требуется найти все значения a, при которых неравенство выполнено при $-1\le t\le 1$.

Рассмотрим функции $f(t)=\left|3t+a^2-22\right|+\left|7t+a+12\right|$ и $g(t)=11t+\left|a^2+a-20\right|+11$. Функция $f(t)$ - кусочно-линейная. Угловой коэффициент ее звеньев не превосходит 10. Функция $g(t)$ - линейная функция с угловым коэффициентом 11. Значит, функция $g(t)-f(t)$ возрастающая. Свое наименьшее значение на промежутке $[-1;1]$ она принимает при $t=-1$. Таким образом, если неравенство $f(t)\le g(t)$ выполнено при $t=-1$, то оно выполняется и при $t\ge -1$.

При $t=-1$ неравенство принимает вид $\left|a^2-25\right|+\left|a+5\right|\le\left|a^2+a-20\right|$;
$|a+5|\cdot(|a-4|-|a-5|-1)\ge 0$. $|a+5|=0$ при $a=-5$.

$$|a-4|-|a-5|-1=\begin{cases}0 & \text{при} \quad a\ge 5\\ 2a-10 & \text{при} \quad 4<a<5\\ -2 & \text{при} \quad a\le 4\end{cases}.$$

Таким образом, $|a+5|\cdot(|a-4|-|a-5|-1)\ge 0$ при $a=-5$; $a\ge 5$.

Ответ: -5; $[5;+\infty)$.

28. (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(\log_2(x+a)-\log_2(x-a))^2-3a(\log_2(x+a)-\log_2(x-a))+2a^2-a-1=0$ имеет ровно два решения.

Решение. Пусть $t=\log_2(x+a)-\log_2(x-a)$, тогда уравнение имеет вид $t^2-3at+2a^2-a-1=0$; $D=9a^2-8a^2+4a+4=a^2+4a+4$.

$$t_{1,2}=\frac{3a\pm(a+2)}{2};\quad \left[\begin{array}{l}t=a-1\\ t=2a+1\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=a-1\\ \log_2(x+a)-\log_2(x-a)=2a+1\end{array}\right..$$

При $a=0$ решений нет.

ОДЗ: $\begin{cases}x+a>0\\ x-a>0\end{cases}$; $\begin{cases}x>-a\\ x>a\end{cases}$; $x>|a|$.

$$\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=\log_2\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\log_2\left(1+\frac{2a}{x-a}\right).$$

$y=1+\dfrac{2a}{x-a}$ - монотонно убывающая функция.

При $a>0$ $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)=1$.

Таким образом, при $a>0$ выражение $1+\dfrac{2a}{x-a}$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(1;+\infty)$.

При $a<0$ $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)=1$.

При $a<0$ выражение $1+\dfrac{2a}{x-a}$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(0;1)$. При $a-1=2a+1$ имеем одно решение $a=-2$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\a-1>0\\2a+1>0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\a-1<0\\2a+1<0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\a>1\\a>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\a<1\\a<-\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}a>1\\a<-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty;-2)$; $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$; $(1;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-0{,}5$ и/или $a=1$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества a: $(-\infty;-2)$ или $(1;+\infty)$; возможно, с включением граничных точек и/или исключением точки $a=-2$	2
Верно найдена хотя бы одна из граничных точек множества значений $a=1$ или $a=-0{,}5$; ИЛИ получено хотя бы одно из уравнений $\left[\begin{array}{l}\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=a-1\\ \log_2(x+a)-\log_2(x-a)=2a+1\end{array}\right.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

29. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{7a}{a-5}\cdot 2^{|x|}=4^{|x|}+\dfrac{12a+17}{a-5}$ имеет ровно два различных корня.

Решение. Пусть $2^{|x|}=t$, $t\ge 1$.

Если $t>1$, тогда $|x|=\log_2 t$, $x=\log_2 t$ и $x=-\log_2 t$.

Если $t=1$, тогда $|x|=0$; $x=0$.

Обозначим $f(t)=t^2-\frac{7a}{a-5}\cdot t+\frac{12a+17}{a-5}$.

Исходное уравнение имеет ровно два корня тогда и только тогда, когда уравнение $f(t)=0$ имеет единственный корень, больший 1, или два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1.

Уравнение имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:
$\left(\frac{7a}{a-5}\right)^2-4\cdot\frac{12a+17}{a-5}=0$; $\frac{a^2+172a+340}{(a-5)^2}=0$; $a=-2$ или $a=-170$.

При $a=-2$ уравнение $t^2-2t+1=0$ имеет единственный корень $t=1$. В этом случае исходное уравнение имеет единственный корень $x=0$.

При $a=-170$ уравнение $t^2-\frac{34}{5}t+\frac{289}{25}=0$ имеет единственный корень $t=3{,}4$. В этом случае исходное уравнение имеет два корня.

Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Для того, чтобы уравнение $f(t)=0$ имело два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство
$f(1)<0$; $1-\frac{7a}{a-5}+\frac{12a+17}{a-5}<0$; $\frac{6a+12}{a-5}<0$; $-2<a<5$.

Ответ: -170; (-2; 5).

30. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\frac{a+3x-ax}{x^2+2ax+a^2+1}$ содержит отрезок $[0;1]$.

Решение. Перепишем заданную функцию так: $y=\frac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}$.

Для того, чтобы множество значений функции содержало отрезок $[0;1]$, необходимо, чтобы уравнения $\frac{a+(3-a)\cdot x}{(x+a)^2+1}=0$ (1) и $\frac{a+(3-a)\cdot x}{(x+a)^2+1}=1$ (2) имели корни, т.е. нашлись такие значения переменной x, при которых выполняются равенства (1) и (2). Тогда в силу свойства функции, непрерывной на некотором отрезке, функция будет принимать все промежуточные значения между 0 и 1.

Рассмотрим уравнение (1): $\dfrac{a+(3-a)\cdot x}{(x+a)^2+1}=0 \Leftrightarrow a+(3-a)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{a}{a-3}$.

Таким образом, уравнение (1) имеет решение при любых значениях a, кроме $a=3$.

Рассмотрим уравнение (2):

$$\frac{a+(3-a)\cdot x}{(x+a)^2+1}=1 \Leftrightarrow a+3x-ax=x^2+2ax+a^2+1 \Leftrightarrow x^2+3ax-3x+a^2-a+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+3(a-1)x+a^2-a+1=0.$$

$$D=9a^2-18a+9-4a^2+4a-4\geq 0; \quad 5a^2-14a+5\geq 0; \quad \left[\begin{array}{l} a\leq \dfrac{7-2\sqrt{6}}{5} \\ a\geq \dfrac{7+2\sqrt{6}}{5} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{7-2\sqrt{6}}{5}\right)\cup\left(\dfrac{7+2\sqrt{6}}{5};3\right)\cup(3;+\infty)$.

31. **(ЕГЭ – 04.06.15).** Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+2x+y^2+4y=4|2x-y| \\ x+2y=a \end{cases}$ имеет более двух решений.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $2x-y\geq 0$, то уравнение имеет вид

$$x^2+2x+y^2+4y=8x-4y; \quad x^2-6x+y^2+8y=0; \quad (x-3)^2+(y+4)^2=25.$$

Полученное уравнение задает окружность с центром $O_1(3;-4)$ и радиусом 5.

2) Если $2x-y\leq 0$, то уравнение имеет вид

$$x^2+2x+y^2+4y=4y-8x; \; x^2+10x+y^2=0 \; ; \; (x+5)^2+y^2=25.$$

Полученное уравнение задает окружность с центром $O_2(-5;0)$ и радиусом 5.

Полученные окружности пересекаются в точках A и B, лежащих на прямой $y = 2x$. Найдем эти точки: $\begin{cases} x^2 + 10x + y^2 = 0 \\ y = 2x \end{cases}$; $5x^2 + 10x = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 0$.

Таким образом, искомое множество состоит из двух дуг ω_1 и ω_2 с концами в точках $A(-2;-4)$ и $B(0;0)$.

Второе уравнение системы задает семейство параллельных прямых m с угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$. Заметим, что эти прямые перпендикулярны прямой AB и прямая O_1O_2 принадлежит этому семейству (при $a = -5$).

Найдем, при каких значениях параметра прямые m проходят соответственно через точки $A(-2;-4)$ и $B(0;0)$, то есть система имеет три решения:

$-2 - 8 = a$; $a_1 = -10$. $a_2 = 0$.

Найдем, при каких значениях a прямые m касаются дуг ω_1 и ω_2.

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0 \\ x = a - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 10x + y^2 = 0 \\ x = a - 2y \end{cases}$$

$$(a - 2y)^2 - 6(a - 2y) + y^2 + 8y = 0$$

$$(a - 2y)^2 + 10(a - 2y) + y^2 = 0$$

$$5y^2 + 4(5 - a)y + a^2 - 6a = 0$$

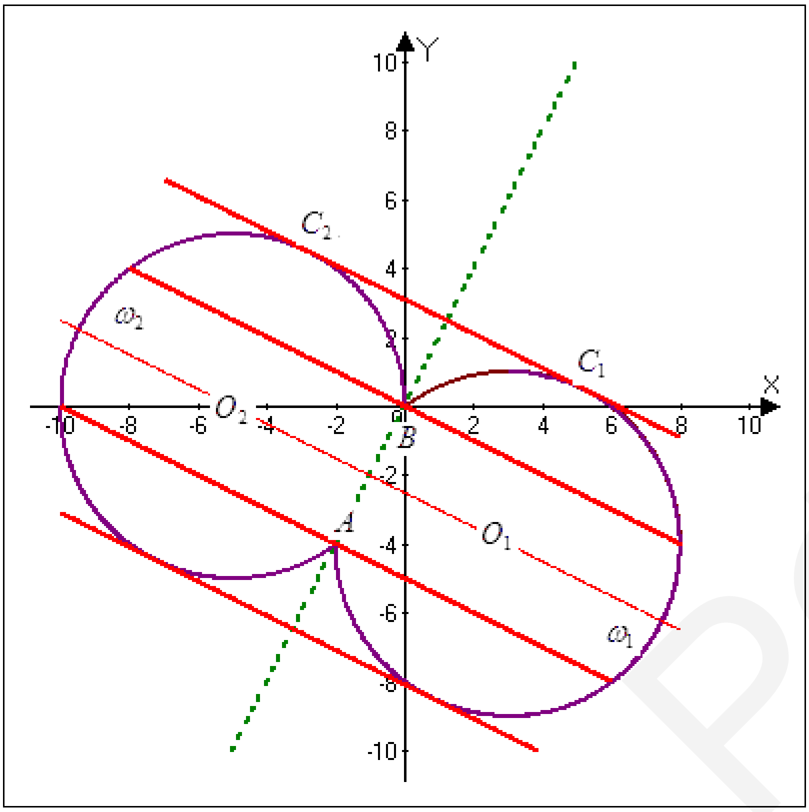
$$5y^2 - 4(5 + a)y + a^2 + 10a = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4(5 - a)^2 - 5a^2 + 30a = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4(5 + a)^2 - 5a^2 - 50a = 0$$

$$a^2 + 10a - 100 = 0 \qquad a^2 + 10a - 100 = 0$$

Следовательно, дуги ω_1 и ω_2 имеют общие касательные. Прямые m касаются дуг ω_1 и ω_2 при $a = -5 \pm 5\sqrt{5}$, то есть при этих значениях параметра система имеет два решения.



Ответ: $-5\sqrt{5}-5 < a \le -10$; $\quad 0 \le a < 5\sqrt{5}-5$.

32. **(ЕГЭ – 27.09.15).** Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} yx^2 + y^2 + 2x^2 = 5y + 14 \\ x \le 2 \\ ax - y = 4a \end{cases}$$ имеет единственное решение.

Решение. Запишем первое уравнение в следующем виде
$yx^2 + y^2 + 2x^2 - 5y - 14 = 0$; $(y+2)(y-7+x^2) = 0$.

$y = -2$; $y = 7 - x^2$.

При $y = -2$ уравнение $ax - y = 4a$ принимает вид $ax + 2 = 4a$, откуда при $a \ne 0$ получаем $x = 4 - \dfrac{2}{a}$. С учетом условия $x \le 2$ получаем, что при $a \le 0$ и $a > 1$ решений нет, а при $0 < a \le 1$ имеется одно решение.

При $y = 7 - x^2$ уравнение $ax - y = 4a$ принимает вид

$ax - 7 + x^2 = 4a$; $x^2 + ax - (4a + 7) = 0$.

Дискриминант данного квадратного уравнения
$D = a^2 + 4(4a+7) = a^2 + 16a + 28 = (a+2)(a+14)$.

Таким образом, уравнение $x^2+ax-(4a+7)=0$ не имеет решений при $-14<a\le -2$, имеет единственное решение при $a=-14$ и при $a=-2$, имеет два решения при $a<-14$ и при $a>-2$. При $x=2$ $x^2+ax-(4a+7)=-3-2a$.

Таким образом, при $a\le -14$ корни уравнения $x^2+ax-(4a+7)=0$ больше 2, поскольку $f(2)>0$, а минимум квадратичной функции $f(x)=x^2+ax-(4a+7)$ достигается при $x=-\frac{a}{2}\ge 7$; при $-2\le a\le -\frac{3}{2}$ корни уравнения $x^2+ax-(4a+7)=0$ не превосходят 2, поскольку $f(2)\ge 0$, а минимум квадратичной функции $f(x)$ достигается при $x=-\frac{a}{2}\le 1$; при $a\ge -\frac{3}{2}$ только один из двух корней уравнения $x^2+ax-(4a+7)=0$ не превосходит 2 , поскольку $f(2)<0$.

Определим значения a, при которых возможны совпадения решений из двух разобранных выше случаев. Имеем: $y=-2=7-x^2$, откуда $x=-3$ или $x=3$. Случай $x=3$ не рассматривается, поскольку $x\le 2$. Значит, $a=\frac{2}{7}$.

Таким образом, исходная система не имеет решений при $a<-2$, имеет единственное решение при $a=-2$; $-\frac{3}{2}<a\le 0$; $a=\frac{2}{7}$ и $a>1$, имеет два решения при $-2<a\le -\frac{3}{2}$; $0<a<\frac{2}{7}$ и $\frac{2}{7}<a\le 1$.

Ответ: $a=-2$; $-\frac{3}{2}<a\le 0$; $a=\frac{2}{7}$; $a>1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением /исключением точек $a=-2$, $a=-\frac{3}{2}$, $a=0$ и/или $a=1$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества a: $\left(-\frac{3}{2};0\right)$ или $(1;+\infty)$; возможно, с включением граничных точек	2
Верно найдено хотя бы одно из значений a : $a=-2$, $a=0$ или $a=\frac{2}{7}$; или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4