

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова



Галеев Э. М., Галеева А.Э.

Подготовка к ЕГЭ по математике

- Алгебра
- Тригонометрия
- Текстовые задачи
- Производные
- Исследование функций
- Задачи с параметрами
- Планиметрия и стереометрия

Издание восьмое, исправленное

Москва 2018

ББК 22.1 я 729
УДК 373.3

Учебно-методическое пособие

Подготовка к ЕГЭ по математике. Алгебра. Тригонометрия. Текстовые задачи. Производные. Исследование функций. Задачи с параметрами. Планиметрия и стереометрия. Изд.8-е, исправленное. Издательство “Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова”. 2018.- 88 с.

В пособии содержатся задачи из демоверсий ЕГЭ с 2002 (первого года введения ЕГЭ) по 2018 г.г., экзаменационные варианты ЕГЭ, тренировочные варианты. Пособие является продолжением книг автора “Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ” Части 1-6 и предлагается для подготовки именно к ЕГЭ. К подавляющему большинству задач (кроме тестовых) даны ответы.

Предназначено для абитуриентов МГУ, выпускников школ при подготовке к ЕГЭ, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов.

Пособие написано при поддержке подготовительных курсов НОУ “Университетская математическая школа”, преподавателями которой в течении многих лет являются авторы. Записаться на занятия по подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ или по подготовке к ЕГЭ можно по телефону 8-916-195-04-34.

Рецензент: д.ф.-м.н., Богатый С. А.

ISBN

© Галеев Э.М., Галеева А.Э., 2018 г.
© Издательство “Попечительский совет мех-мат. ф-та МГУ”, 2018 г.

Оглавление

1	Алгебра	4
2	Тригонометрия	19
3	Текстовые задачи	27
4	Производные	39
5	Исследование функций	52
6	Задачи с параметрами	59
7	Планиметрия	68
8	Стереометрия	74
	Ответы	84
	Литература	88

1 Алгебра

Задачи из демоверсий

1.1. (ЕГЭ, 2002, В5)

Пусть (x_0, y_0) — решение системы
$$\begin{cases} 2^{x-2} - y = 0, \\ |x - 4| - y = 1. \end{cases}$$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

1.2. (ЕГЭ, 2003, В1)

Пусть (x_0, y_0) — решение системы
$$\begin{cases} \sqrt{25 - 10x + x^2} + y = 4, \\ y - 3x + 11 = 0. \end{cases}$$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

1.3. (ЕГЭ, 2003, В3)

“Тест”

Найдите значение $\log_{\pi^2} \left(\frac{a^2 b}{\pi^3} \right)$, если $\log_{\pi} \sqrt{a} = 3$, $\log_{\pi} b = 5$.

1.4. (ЕГЭ, 2004, В2)

“Тест”

Найдите сумму корней уравнения $(3^{2x^2-29} - 27) \sqrt[4]{5x+18} = 0$.

1.5. (ЕГЭ, 2004, В6)

“Тест”

Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \ln(x - 2|x - 3|)$.

1.6. (ЕГЭ, 2005, В1)

$$3^{4x+5} = 81.$$

1.7. (ЕГЭ, 2005, В2)

$$x - \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = 3.$$

1.8. (ЕГЭ, 2005, В4)

Вычислите $6 \cdot \log_2 125 \cdot \log_5 2 + 2^{\lg 7} \cdot 5^{\lg 7}$.

1.9. (ЕГЭ, 2005, В7)

Найдите значение $f(x) = \sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[4]{(x-7,5)^4}$ при $x = \sqrt{10}$.

1.10. (ЕГЭ, 2006, В2)

$$\sqrt{2x+37} = x+1.$$

1.11. (ЕГЭ, 2006, В3)

$$\log_{1,6}(5x+8) - \log_{1,6} 3 = \log_{1,6} 7.$$

1.12. (ЕГЭ, 2006, В4)

“Тест”

Вычислите $\left(3,4\sqrt[3]{25\sqrt{5}} + 1,6\sqrt{5\sqrt[3]{25}}\right)^{-\frac{6}{11}}$.

1.13. (ЕГЭ, 2007, В1)

$$7 \cdot 5^{\log_5 x} = x + 21.$$

1.14. (ЕГЭ, 2007, В3)

Решите уравнение $x^2\sqrt{x-1} - 4\sqrt{x-1} = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней).

1.15. (ЕГЭ, 2007, В4)

Найдите значение выражения $2^x - y$, если (x, y) является решением системы уравнений $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$

1.16. (ЕГЭ, 2007, В6)

Найдите значение $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ при $x = 1,2007$.

1.17. (ЕГЭ, 2007, В7)

“Тест”

Найдите наименьший корень уравнения $\log_3(x+1)^2 + \log_3|x+1| = 6$.

1.18. (ЕГЭ, 2008, В2)

$$7^{x+1} - 5 \cdot 7^x = 98.$$

1.19. (ЕГЭ, 2008, В3)

$$\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x.$$

1.20. (ЕГЭ, 2008, В6)

Найдите количество целочисленных решений неравенства $6 - 5x - x^2 \geq 0$, удовлетворяющих условию $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} > 0$.

1.21. (ЕГЭ, 2009, В1)

$$8 \cdot 3^{\log_3 x} = 13x - 6.$$

1.22. (ЕГЭ, 2009, В4)

Решите уравнение $5^x + 20 \cdot (\sqrt{5})^x - 125 = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите их произведение.)

1.23. (ЕГЭ, 2009, В6)

Вычислите $6^{\log_6 5} + 100^{\lg \sqrt{8}}$.

1.24. (ЕГЭ, 2009, В7)

Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{1 + \sqrt{4 - x^2}} \leq 0.$$

1.25. (ЕГЭ, 2010–2011, В3)

$$3^{x-2} = 27.$$

1.26. (ЕГЭ, 2012–2013, В5)

$$\log_3(x - 3) = 2.$$

1.27. (ЕГЭ, 2014, В7; 2015, 6; 2016–2018, 5)

$$3^{x-5} = 81.$$

1.28. (ЕГЭ, 2003, С1)

$$2 \log_{12} \left(x + \frac{6}{x-5} \right) = \log_{12} \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} \right) + 3.$$

1.29. (ЕГЭ, 2005, С2)

Найдите нули функции $y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$.

1.30. (ЕГЭ, 2006, С2)

“Тест”

При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_2 x$ и $g(x) = \log_2(3 - x)$ будут отличаться меньше, чем на 1?

1.31. (ЕГЭ, 2008, С2)

$$\log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3 - 4x^2)}.$$

1.32. (ЕГЭ, 2009, С3 – МИОО; МГУ, мех-мат, март 1990, 3(6))

$$\frac{\sqrt{1 - x^3} - 1}{1 + x} \leq x.$$

1.33. (ЕГЭ, 2010–2011, С3)

$$\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x - 3)^2 \geq 2.$$

1.34. (ЕГЭ, 2015, 17; 2016, 15)

$$\frac{\log_9(2 - x) - \log_{15}(2 - x)}{\log_{15} x - \log_{25} x} \leq \log_{25} 9.$$

1.35. (ЕГЭ, 2017–2018, 15)

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5.$$

1.36. (ЕГЭ, 2012–2013, С3)

$$\begin{cases} 4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

1.37. (ЕГЭ, 2014, С3)

$$\begin{cases} \log_{3-x} \frac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{21x^2 + 3x - 12}{x-4} \leq 3. \end{cases}$$

1.38. (ЕГЭ, 2012–2014, С6; 2017–2018, 19)

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 . а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Задачи ЕГЭ

1.39. (ЕГЭ, 2006, В1)

$$\log_7(8x - 20) - \log_7 2 = \log_7 3.$$

1.40. (ЕГЭ, 2006, В1)

$$x \cdot 6^{3x} - 36 \cdot 6^{3x} = 0.$$

1.41. (ЕГЭ, 2006, В3)

$$\sqrt{4x^2 - 27} = -x.$$

1.42. (ЕГЭ, 2006, В3)

“Тест”

Вычислите $\sqrt[3]{38} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{19}}.$

1.43. (ЕГЭ, 2006, В4)

“Тест”

Вычислите $\frac{49 - a^{-1}}{a^{-0,5} - 7} + 9a^{0,5}$ при $a = 4$.

1.44. (ЕГЭ, 2007, В5)

Решите уравнение $\sqrt{-2x} \cdot \sqrt{-2x + 15} = 4$. (Если уравнение имеет больше одного корня, то в ответе запишите произведение корней.)

1.45. (ЕГЭ, 2007, В7)

“Тест”

Вычислите $(\log_6^2 3 + 1 - \log_6 9)^{0,5} - \log_6(12\sqrt{6})$.

1.46. (ЕГЭ, 2008, В1)

“Тест”

$$\sqrt{2x^2 - 2x - 3} + 1 = x.$$

1.47. (ЕГЭ, 2008, В2)

$$3 \cdot 2^{\log_2 x} = 4,2 - 4x.$$

1.48. (ЕГЭ, 2008, В3)

Найдите значение выражения $0,8^{2y}$, если $0,8^y = 4$.

1.49. (ЕГЭ, 2008, В4)

Решите уравнение $\log_{11} x \cdot \log_5 x = \log_{11} 5$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите их произведение.)

1.50. (ЕГЭ, 2008, В4)

Решите уравнение $\sqrt{7x - 12} + \sqrt[4]{7x - 12} - 30 = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите их произведение.)

1.51. (ЕГЭ, 2008, В6)

Вычислите $\log_{\sqrt{2}}(4\sqrt{2} - \sqrt{28}) + \log_{\sqrt{2}}(4\sqrt{2} + \sqrt{28})$.

1.52. (ЕГЭ, 2008, В7)

Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 + 5x - 50}{\sqrt{81 - x^2} + 10} > 0.$$

1.53. (ЕГЭ, 2008, В7)

Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{6,4 + \sqrt{16 - x^2}}{8 - 2^x} > 0.$$

1.54. (ЕГЭ, 2009, В2)

Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 9} = 4$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение.)

1.55. (ЕГЭ, 2009, В4 – *досрочный*)

Вычислите $\sqrt[3]{2\sqrt{10} - 4} \cdot \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{10}} \cdot \sqrt[3]{72}$.

1.56. (ЕГЭ, 2009, В4)

Решите уравнение $\log_6(x - 5)^2 = (\log_4(x + 13)) \cdot \log_6(x - 5)$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму корней.)

1.57. (ЕГЭ, 2009, В6 – *досрочный*)

Решите уравнение $(\log_2(8 - x)) \cdot \log_9(10 + x) = 4 \log_9(10 + x)$. (Если уравнение имеет больше одного корня, то в бланк ответов запишите сумму корней.)

1.58. (ЕГЭ, 2010, В3)

$$2^{x-13} = \frac{1}{8}.$$

1.59. (ЕГЭ, 2010, В3)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{18-5x} = 128.$$

1.60. (ЕГЭ, 2016, 5)

$$2^{4x-14} = \frac{1}{64}.$$

1.61. (ЕГЭ, 2010, В7)

Вычислите $3^{2+\log_3 2}$.

1.62. (ЕГЭ, 2013, В7)

Вычислите $\log_5 312,5 - \log_5 2,5$.

1.63. (ЕГЭ, 2016, 9)

Вычислите $\frac{\log_8 20}{\log_8 5} + \log_5 0,05$.

1.64. (ЕГЭ, 2015, 6)

$$(2x - 3)^2 = (2x + 9)^2.$$

1.65. (ЕГЭ, 2016-2017, 13)

а) Решите уравнение $2 \log_2^2(2 \sin x) - 7 \log_2(2 \sin x) + 3 = 0$, б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

1.66. (ЕГЭ, 2002, C1)

$$32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}.$$

1.67. (ЕГЭ, 2002, C1)

$$2^{5x-1} \cdot 3^{4x+1} \cdot 7^{3x+3} = 504^{x-2}.$$

1.68. (ЕГЭ, 2002, C1)

$$\sqrt{9 - 4x|x - 4|} - 4x = 3.$$

1.69. (ЕГЭ, 2002, C1)

$$2 + \sqrt{25x|x - 1| + 4} = 5x.$$

1.70. (ЕГЭ, 2002, C2) Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,2} \frac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)}.$$

1.71. (ЕГЭ, 2002, С2) Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,25} \frac{30 + \sqrt{4 + \log_4^2 x}}{2}.$$

1.72. (ЕГЭ, 2002, С2)

Найдите множество значений функции $y = \frac{3x}{|x|} + 2^{|x|}$, если $x \geq -2$.

1.73. (ЕГЭ, 2002, С2)

Найдите множество значений функции $y = 3^{|x|} - \frac{4x}{|x|}$, если $x \leq 1$.

1.74. (ЕГЭ, 2003, С1)

$$\sqrt{13 + \frac{4}{\log_x 3}} = 2 \log_3 (3\sqrt{x}).$$

1.75. (ЕГЭ, 2003, С1)

$$\sqrt{105 - \frac{8}{\log_x 2}} = 3 \log_2 (0,5x\sqrt[3]{x}).$$

1.76. (ЕГЭ, 2003, С1)

$$\log_{81}(15 - 7x) \cdot \log_{3-x} 9 = 1.$$

“Тест”

1.77. (ЕГЭ, 2003, С1)

$$\log_9(37 - 12x) \cdot \log_{7-2x} 3 = 1.$$

“Тест”

1.78. (ЕГЭ, 2003, С1)

$$4 \log_2 \left(2 + \frac{6}{2x - 5} \right) - 8 = 3 \log_2 \left(2 - \frac{3}{x - 1} \right).$$

1.79. (ЕГЭ, 2005, С1)

Найдите все значения x , для которых точки графика функции

$y = \frac{\log_7(10 - 2x)}{3 - x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{2}{3 - x}$.

1.80. (ЕГЭ, 2005, С1)

Найдите все значения x , для которых точки графика функции $y = \frac{\log_{0,7}^2(23 + 4x)}{45 - 4x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{83}{4x - 45}$.

1.81. (ЕГЭ, 2005, С1)

Найдите все значения x , для которых точки графика функции $y = \frac{4^x - 18 \cdot 2^x}{20 - 3x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y = \frac{-32}{20 - 3x}$.

1.82. (ЕГЭ, 2005, С2)

$$\sqrt{1 - 2x + x^2} + \sqrt{26 + 3x - 5x^2} = x - 1.$$

1.83. (ЕГЭ, 2005, С2)

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 - 17x + 15} = 2 - x.$$

1.84. (ЕГЭ, 2005, С2)

$$\sqrt{(3^x - 4)^2} + \sqrt{(3^x - 6)(3^x + 9)} = 3^x - 4.$$

1.85. (ЕГЭ, 2006, С1)

$$\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 31 = (\sqrt{25 - x^2})^2 + x^2.$$

1.86. (ЕГЭ, 2006, С1)

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 1 = (\sqrt{5 - x^2})^2 + x^2.$$

1.87. (ЕГЭ, 2006, С1)

$$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 11 = (\sqrt{2 - 2x^2})^2 + 2x^2.$$

1.88. (ЕГЭ, 2006, С1)**“Тест”**

$$\cos 7x = (\sqrt{1 - x^2})^2 + x^2.$$

1.89. (ЕГЭ, 2006, С2)

Найдите все значения x , при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = 0,5 \cdot 7^{4x+9}$ и $g(x) = 2$ меньше, чем 1,5.

1.90. (ЕГЭ, 2007, C2)

$$2 - 3x + x^2 = 2(x - 1)\sqrt{x}.$$

1.91. (ЕГЭ, 2007, C2)

$$x^2 + 1 = 0,5(2 + 6x + 4\sqrt{2x^2 - 6x + 5}).$$

1.92. (ЕГЭ, 2007, C2)

$$x^2 + x = 0,6(x + 3 - \sqrt{5x^2 + 2x + 1}). \quad \text{“Тест”}$$

1.93. (ЕГЭ, 2008, C2)

$$\log_{3-4x}(4x^2 - 13x + 7) = 1 + \frac{1}{\log_2(3 - 4x)}.$$

1.94. (ЕГЭ, 2008, C2)

Найдите все значения x , при каждом из которых выражения $6^{\log_3(9-4x^2)}$ и $6^{\log_3(2x+3)+\log_3(2x^2+3x+6)}$ принимают равные значения.

1.95. (ЕГЭ, 2008, C2)

Найдите все x , при каждом из которых выражения $9^{\log_7(9-25x^2)}$ и $9^{\log_7(3-5x)+\log_7(10x^2-6x+6)}$ принимают равные значения.

1.96. (ЕГЭ, 2008, C2)

Найдите все x , при каждом из которых выражения $3x^2 + 2x$ и $3x^2 \log_3(2 + 3x) - 6x \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2 + 3x}$ принимают равные значения.

1.97. (ЕГЭ, 2008, C2)

Найдите все x , при каждом из которых выражения $5\sqrt{x} \cdot 49^x - 30 \cdot 49^x$ и $14\sqrt{x} \cdot 7^{x-1} - 84 \cdot 7^{x-1}$ принимают равные значения.

1.98. (ЕГЭ, 2008, C2)

Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y = \log_2^3 x + 3 \log_2^2 x$ и $y = -\frac{1}{\log_x \sqrt{2}}$.

1.99. (ЕГЭ, 2015, 17)

$$\frac{96}{(5^{2-x^2} - 1)^2} - \frac{28}{5^{2-x^2} - 1} + 1 \geq 0.$$

1.100. (ЕГЭ, 2015, 17)

$$\frac{3^x}{3^x - 9} + \frac{3^x + 9}{3^x - 4} + \frac{83}{9^x - 13 \cdot 3^x + 36} \leq 0.$$

1.101. (ЕГЭ, 2017, 15)

$$9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0.$$

1.102. (ЕГЭ, 2017, 15)

$$\frac{\log_2(2x^2 - 17x + 35) - 1}{\log_7(x + 6)} \leq 0.$$

1.103. (ЕГЭ, 2010, С3)

$$\log_5((7^{-x^2} - 5)(7^{-x^2+16} - 1)) + \log_5 \frac{7^{-x^2} - 5}{7^{-x^2+16} - 1} > \log_5(7^{4-x^2} - 3)^2.$$

1.104. (ЕГЭ, 2010, С6)

Перед каждым из чисел 4, 5, ..., 8 и 11, 12, ..., 19 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1.105. (ЕГЭ, 2010, С6)

Каждое из чисел 9, 10, ..., 17 умножают на каждое из чисел 3, 4, ..., 8 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, а затем все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1.106. (ЕГЭ, 2011, С3)

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \left(\frac{x}{3} \right) > 0.$$

1.107. (ЕГЭ, 2011, С3)

$$3 \log_{11}(x^2 + 8x - 9) \leq 4 + \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9}.$$

1.108. (ЕГЭ, 2011, С3)

$$\frac{2 \log_5(x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \leq 1.$$

1.109. (ЕГЭ, 2011, С6)

Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

1.110. (ЕГЭ, 2011, С6)

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 8 раз больше, либо в 8 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2618.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- б) Может ли последовательность состоять из трех членов?
- в) Какое наибольшее число членов может быть в последовательности?

1.111. (ЕГЭ, 2011, С6)

На доске написано более 42, но менее 56 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 4, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7 . а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

1.112. (ЕГЭ, 2012, С3)

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \leq 87, \\ \log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

1.113. (ЕГЭ, 2012, С3)

$$\begin{cases} \frac{160 - 4^x}{32 - 2^x} \geq 5, \\ \log_{0,25x^2} \left(\frac{6 - x}{4} \right) \leq 1. \end{cases}$$

1.114. (ЕГЭ, 2012, С6)

Моток веревки режут без остатка на куски длиной не менее 168 см, но не больше 175 см (назовем такие куски стандартными). а) Некоторый моток веревки разрезали на 24 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки? б) Найдите такое наименьшее число l , что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски?

1.115. (ЕГЭ, 2012, С6)

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них смог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, сходивших в театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино. а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся? б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что в группе было 20 учащихся? в) Какую наименьшую долю могли составить девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия а) и б)?

1.116. (ЕГЭ, 2013, С3)

$$\begin{cases} \log_{6-x} \frac{(x-6)^2}{x-2} \geq 2, \\ \frac{x^2 - x - 14}{x-4} + \frac{x^2 - 8x + 3}{x-8} \leq 2x + 3. \end{cases}$$

1.117. (ЕГЭ, 2013, С3)

$$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{x+6}{(x-4)^6} \geq -6, \\ x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

1.118. (ЕГЭ, 2013, С6)**“Тест”**

а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \leq a_i \leq 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

- б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \leq a_i \leq 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 130 способами?
- в) Сколько существуют чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \leq a_i \leq 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 130 способами?

Тренировочные задачи

1.119. $5^{4-x} = 25.$

1.120. $6^{x+1} - 4 \cdot 6^x = 72.$

1.121. $4^{x+1} + 8 \cdot 4^x = 3.$

1.122. $\log_6 x = \log_6 5 + \log_6 4.$

1.123. $5 \cdot 10^{\lg x} = 7x - 15.$

1.124. Найдите сумму корней уравнения $(2 \cdot 2^x + 1)(2^x - 3) = -5.$

1.125. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{4 + 3x - x^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2}} \geq 0?$$

1.126. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{6 - 5x - x^2}{2 + \log_3^2 x} \geq 0? \quad \text{“Тест”}$$

1.127. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{10 + 3x - x^2}{2 + \sqrt[4]{x}} \geq 0?$$

В задачах №**1.128.**–**1.134.** вычислите значение выражений.

1.128. $81^{\log_9 \sqrt{19}} - 7^{\log_7 8}.$

1.129. $7^{\log_7 3} + 25^{\log_5 \sqrt{11}}.$

$$1.130. \left(7^{\log_6 7}\right)^{\log_7 6}.$$

$$1.131. \log_6 126 - \log_6 3,5.$$

$$1.132. \frac{\lg 125}{\lg 75 - \lg 3}.$$

$$1.133. \log_{\frac{1}{3}}(3\sqrt{3} - \sqrt{18}) + \log_{\frac{1}{3}}(3\sqrt{3} + \sqrt{18}).$$

$$1.134. \log_4 \log_8 \sqrt[16]{\sqrt[4]{8}}.$$

1.135. Найдите координаты всех общих точек графиков функций $f(x) = \frac{27^x + 3}{3^x - 1}$ и $g(x) = \frac{9^{x+0,5} + 3^x}{3^x - 1}$.

$$1.136. \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} \geq 1.$$

$$1.137. \log_{0,1}(x^2 + x - 2) \geq \log_{0,1}(x + 3).$$

$$1.138. \frac{x^2 - 4}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)} \leq 0.$$

$$1.139. \log_2 \frac{3x - 2}{x - 1} + 3 \log_8 \frac{(x - 1)^3}{3x - 2} \leq 1.$$

$$1.140. \log_3((x + 2)(x + 4)) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 2) \leq \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 7.$$

$$1.141. \frac{\log_2(3x + 2)}{\log_3(2x + 3)} \leq 0. \quad \text{“Тест”}$$

$$1.142. \frac{\log_2(2x^2 - 13x + 20) - 1}{\log_3(x + 7)} \leq 0.$$

$$1.143. \log_{2-x}(x + 2) \cdot \log_{x+3}(3 - x) \leq 0.$$

$$1.144. \log_{x+2}(36 + 16x - x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+2}^2(x - 18)^2 \geq 2.$$

2 Тригонометрия

Задачи из демоверсий

2.1. (ЕГЭ, 2002, В6)

Вычислите $2\sqrt{5} \operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{2}{3} \right)$.

2.2. (ЕГЭ, 2002, В3)

Сколько решений имеет уравнение $(\cos^2 x - \sin^2 x)\sqrt{1-x^2} = 0$?

2.3. (ЕГЭ, 2003, В4)

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt[3]{\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x} - 7.$$

2.4. (ЕГЭ, 2003, В5)

Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $\cos^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

2.5. (ЕГЭ, 2004, В1)

“Тест”

Вычислите $\cos 15^\circ (\cos 50^\circ \sin 65^\circ - \cos 65^\circ \sin 50^\circ)$.

2.6. (ЕГЭ, 2005, В8)

Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}.$$

2.7. (ЕГЭ, 2006, В1)

Вычислите $\frac{3 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{2 \cos(\pi - \alpha)}$, если $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

2.8. (ЕГЭ, 2007, В2)

Вычислите $5 \sin(\pi + \alpha) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$, если $\sin \alpha = 0,5$.

2.9. (ЕГЭ, 2008, В1; 2006, В2)

Вычислите $3 \sin^2 \alpha - 7 \cos^2 \alpha$, если $\cos \alpha = -0,1$.

2.10. (ЕГЭ, 2008, В4)

Вычислите $\log_2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \sin \frac{\pi}{6} + \log_2 \sin \frac{5\pi}{12}$.

2.11. (ЕГЭ, 2009, В1)

Вычислите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2.12. (ЕГЭ, 2009, В3; 2006, В2)

Вычислите $8 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha$, если $\sin \alpha = -0,2$.

2.13. (ЕГЭ, 2012–2013, В7; 2014, В11; 2015, 10; 2016–17, 9)

Вычислите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

2.14. (ЕГЭ, 2002, С1)

Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции $f(x) = 16 \log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

2.15. (ЕГЭ, 2005, С1)

$$|\sin x| = \sin x \cdot \cos x.$$

2.16. (ЕГЭ, 2006, С1)

$$4 \cos x \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} x + \sin x = 0.$$

2.17. (ЕГЭ, 2007, С2)

$$\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3 \sin x.$$

2.18. (ЕГЭ, 2009, С2)

Найдите все значения x , при каждом из которых выражения $\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$ и $\frac{\sqrt{2} \sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos^4 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$ принимают равные значения.

2.19. (ЕГЭ, 2010, С1)

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} \sin y = x. \end{cases}$$

2.20. (ЕГЭ, 2011, С1)

$$\frac{6 \cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0.$$

2.21. (ЕГЭ, 2012, C1)

Решите уравнение $6 \sin^2 x + \cos x - 5 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

2.22. (ЕГЭ, 2012–2014, C1; 2015, 15; 2016, 13)

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Задачи ЕГЭ**2.23.** (ЕГЭ, 2002, B6)

Вычислите $5 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

2.24. (ЕГЭ, 2002, B6)

Вычислите $3 \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

2.25. (ЕГЭ, 2002, B6)**“Тест”**

Вычислите $\sqrt{15} \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

2.26. (ЕГЭ, 2006, B2)

Вычислите $\sqrt{21} \sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{5}{21}}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

2.27. (ЕГЭ, 2006, B2)**“Тест”**

Вычислите $\sqrt{19} \sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{3}{19}}$, $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$.

2.28. (ЕГЭ, 2006, B2)

Вычислите $2 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha$, если $\sin \alpha = -0,2$.

2.29. (ЕГЭ, 2006, B4)

Вычислите $\sqrt{6} \operatorname{tg} \alpha \cos(\pi + \alpha)$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

2.30. (ЕГЭ, 2008, В3; 2006, В2)

Вычислите $\sqrt{11} \cos \alpha$, если $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{11}}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

2.31. (ЕГЭ, 2008, В7)

Вычислите $\frac{25 - 49^{\cos \alpha}}{7^{-\cos(\pi - \alpha)} - 5} + 8,3 + 7^{\cos \alpha}$ при $\alpha = \frac{2\pi}{11}$.

2.32. (ЕГЭ, 2009, В1 – *досрочный*)

Вычислите $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha - 6$, если $\cos \alpha = 0,8$.

2.33. (ЕГЭ, 2009, В1)

Вычислите $4 - 5 \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0,2$.

2.34. (ЕГЭ, 2009, В6)

Вычислите $\frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{10}}{\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10} \cdot \sin \frac{\pi}{5}}$.

2.35. (ЕГЭ, 2013, В7)

Найдите значение выражения $-50 \operatorname{tg} 9^\circ \cdot \operatorname{tg} 81^\circ + 31$.

2.36. (ЕГЭ, 2013, В7)

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

2.37. (ЕГЭ, 2015, 10)

Найдите значение выражения $\sqrt{72} \cos^2 \frac{5\pi}{8} - \sqrt{18}$.

2.38. (ЕГЭ, 2015, 15)

Дано уравнение $\cos 2x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

а) Решите уравнение. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

2.39. (ЕГЭ, 2002, С1)

$$7 \operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3 \sin 2x = 1.$$

2.40. (ЕГЭ, 2002, C1)

$$\sin 2x + 1 = \sin^2 x + 6 \operatorname{ctg} x.$$

2.41. (ЕГЭ, 2002, C2)

“Тест”

Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in [\arctg 0,5; \arctg 3]$.

2.42. (ЕГЭ, 2002, C2)

“Тест”

Найдите множество значений функции

$$y = \frac{3}{\pi} \arccos(\sqrt{0,125}(\cos x - \sin x)).$$

2.43. (ЕГЭ, 2002, C2)

Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если

$$x \in \left[\arccos 0,8; \frac{5\pi}{12} \right].$$

2.44. (ЕГЭ, 2002, C2)

Найдите множество значений функции

$$y = \frac{12}{\pi} \arcsin \left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) - 0,25 \right).$$

2.45. (ЕГЭ, 2005, C2)

$$\sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9 \sin^2 3x - 24 \sin 3x + 16} = -4.$$

2.46. (ЕГЭ, 2005, C2)

$$\sqrt{\sin^2 0,5x - 6 \sin 0,5x + 9} + \sqrt{(2 \sin 0,5x - 5)^2} = 8.$$

2.47. (ЕГЭ, 2007, C2)

$$\sin^2 \frac{2x}{5} - 10 \sin \frac{2x}{5} \sin \frac{x}{5} + 25 = 25 \cos^2 \frac{x}{5}.$$

2.48. (ЕГЭ, 2007, C2)

$$\sin^2 x + 6 \sin x \sin \frac{x}{2} + 9 = 9 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

2.49. (ЕГЭ, 2010, C1)

$$\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (5\sqrt{\cos x} - 1)(7y + 5) = 0. \end{cases}$$

2.50. (ЕГЭ, 2010, C1)

$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (2\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 5) = 0. \end{cases}$$

2.51. (ЕГЭ, 2011, C1)

$$(2 \sin x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0.$$

2.52. (ЕГЭ, 2011, C1)

$$(6 \sin^2 x + 5 \sin x - 4)\sqrt{-7 \cos x} = 0.$$

2.53. (ЕГЭ, 2011, C1)

$$(2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2) \log_{11}(-\sin x) = 0.$$

2.54. (ЕГЭ, 2012, C1)

“Тест”

а) Решите уравнение $4 \cos^3 x + \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

2.55. (ЕГЭ, 2012, C1)

а) Решите уравнение $4 \cos^2 x - 8 \sin x + 1 = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

2.56. (ЕГЭ, 2012, C1)

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,25$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2} \right]$.

2.57. (ЕГЭ, 2013, C1)

а) Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{3} \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right)$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

2.58. (ЕГЭ, 2013, C1)

“Тест”

а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

2.59. (ЕГЭ, 2013, C1)

а) Решите уравнение $21^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0 \right]$.

Тренировочные задачи

2.60. Вычислите $\sin x$, если $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ 8 \sin x - 3 \cos y = 4. \end{cases}$

2.61. Вычислите $\cos y$, если $\begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{2}, \\ 8 \sin x - 2 \cos y = 7. \end{cases}$ “Тест”

2.62. Вычислите $1 - 3 \sin^2 x$, если $\cos^2 x = 0,9$.

2.63. Вычислите $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - 4 \cos(\pi - \alpha)$, если $\cos \alpha = -0,4$.

2.64. Сколько корней уравнения $\cos(7\pi x) + \operatorname{tg}(4\pi x) \sin(7\pi x) = \cos(3\pi x)$ принадлежит отрезку $[1; 2]$. “Тест”

2.65. Вычислите $2 - 5 \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0,6$.

2.66. Вычислите $4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \cos(\pi - \alpha)$, если $\cos \alpha = -0,9$.

2.67. Вычислите $\log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8}$.

2.68. Вычислите $\log_4 \sin \frac{\pi}{12} + \log_4 \sin \frac{\pi}{6} + \log_4 \sin \frac{5\pi}{12}$.

2.69. Найдите наименьший корень уравнения $\operatorname{tg}(\pi x) \cos(3\pi x) + \sin(3\pi x) = \sin(4\pi x)$ на промежутке $(1; 3)$.

2.70. Найдите наименьший корень уравнения $\cos(9\pi x) - \operatorname{tg}(\pi x) \sin(9\pi x) = \cos(10\pi x)$ на промежутке $(0; 2]$.

2.71. Найдите все x , при каждом из которых выражения $\sin^2 x + 9$ и $9 \cos^2 \frac{x}{2} - 6 \sin x \sin \frac{x}{2}$ принимают равные значения.

2.72. Найдите все x , при которых выражения $8 \sin \frac{2x}{3} \sin \frac{x}{3} + 16$ и $16 \cos^2 \frac{x}{3} - \sin^2 \frac{2x}{3}$ принимают равные значения. “Тест”

2.73. Найти количество корней уравнения $\cos x - 2 \sin x = 1$ на промежутке $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2.74. (ЕГЭ, 2017-2018, 13 – демоверсия)

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

$$\mathbf{2.75.} \quad \begin{cases} x^2 = 8 \sin y + 1, \\ x + 1 = 2 \sin y. \end{cases}$$

$$\mathbf{2.76.} \quad \begin{cases} x \operatorname{tg} y = 9, \\ x \operatorname{ctg} y = 3. \end{cases} \quad \text{“Тест”}$$

$$\mathbf{2.77.} \quad \begin{cases} 3^y + 2 \cos x = 0, \\ 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{2.78.} \quad \begin{cases} \cos 2y = \cos y, \\ \sqrt{x^2 - 2x} = 2 \sin y. \end{cases} \quad \text{“Тест”}$$

3 Текстовые задачи

Задачи из демоверсий

3.1. (ЕГЭ, 2003, В7)

Владелец дискотеки имел стабильный доход. В погоне за увеличением прибыли он повысил цену на билеты на 25%. Количество посетителей резко уменьшилось, и он стал нести убытки. Тогда он вернулся к первоначальной цене билетов. На сколько процентов владелец дискотеки снизил новую цену билетов, чтобы она стала равна первоначальной?

3.2. (ЕГЭ, 2003, В8)

“Тест”

Студенческая бригада подрядилась выложить керамической плиткой пол в зале молодежного клуба площадью 288 м². Приобретая опыт, студенты в каждый последующий день, начиная со второго, выкладывали на 2 м² больше, чем в предыдущий, и запасов плитки им хватило ровно на 11 дней работы. Планируя, что производительность труда будет увеличиваться таким же образом, бригадир определил, что для завершения работы понадобится еще 5 дней. Сколько коробок с плитками ему надо заказать, если 1 коробки хватает на 1,2 м² пола, а для замены некачественных плиток понадобится 3 коробки?

3.3. (ЕГЭ, 2004, В7)

Планируя выпуск нового электронного прибора, экономисты предприятия определили, что в первый месяц может быть изготовлено 200 приборов. Далее предполагалось ежемесячно увеличивать выпуск на 20 изделий. За сколько месяцев предприятие сможет изготовить по этому плану 11000 приборов?

3.4. (ЕГЭ, 2005, В9)

Торговая база закупила у изготовителя партию альбомов и поставила ее магазину по оптовой цене, которая на 30% больше цены изготовителя. Магазин установил розничную цену на альбом на 20% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 10%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с ценой изготовителя, если на распродаже он приобрел альбом за 70,2 р.?

3.5. (ЕГЭ, 2006, В9)

По пенсионному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года эти проценты капитализируются, т. е. начисленная сумма присоединяется к вкладу. На данный вид вклада был открыт счёт в 50 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

3.6. (ЕГЭ, 2007, В9)**“Тест”**

Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11%. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11%) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

3.7. (ЕГЭ, 2008, В9)

В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена магнитофона, если, выставленный на продажу за 4000 руб, после двух снижений он был продан за 2250 руб.

3.8. (ЕГЭ, 2009, В9)

Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 6 : 7 : 10. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 10% и из второй – тоже на 10%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился?

3.9. (ЕГЭ, 2009–2013, В1)

Билет на автобус стоит 15 рублей. Объявлено повышение цены билета на 20%. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены?

3.10. (ЕГЭ, 2014, В1; 2015, 1; 2016–2018, 1)

Поезд отправился из Санкт-Петербурга в 23 часа 50 минут и прибыл в Москву в 7 часов 50 минут следующих суток. Сколько часов поезд находился в пути?

3.11. (ЕГЭ, 2014, В2)

Футболка стоила 800 рублей. Затем цена была снижена на 15 рублей сдачи с 1000 рублей должен получить покупатель при покупке этой футболки после снижения цены?

3.12. (ЕГЭ, 2010–2011, В12) **“Тест”**

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

3.13. (ЕГЭ, 2012–2013, В10; 2014, В6; 2015, 5; 2016–2018, 4)

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

3.14. (2010–11, В10; 2012–13, В12 – *демоверсии*; ЕГЭ, 2011, В10)

Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

3.15. (2014, В12; 2015, 11; 2016–2018, 10)

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемого сигнала (в МГц), f — частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту (в МГц) отражённого сигнала, если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

3.16. (ЕГЭ, 2012–2013, В13; 2014, В14; 2015, 13; 2016–2018, 11)

Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

3.17. (ЕГЭ, 2017–2018, 17)

Пятнадцатого января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн. рублей. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r —целое число; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей. Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн. рублей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0

Задачи ЕГЭ**3.18.** (ЕГЭ, 2006, В9)

Два каменщика, работая вместе, могут выполнить задание за 12 ч. Производительности труда первого и второго каменщиков относятся как 1 : 3. Каменщики договорились работать поочередно. Сколько времени должен проработать первый каменщик, чтобы это задание было выполнено за 20 ч?

3.19. (ЕГЭ, 2006, В9)**“Тест”**

Отец с сыном должны вскопать огород. Производительность труда у отца в два раза больше, чем у сына. Работая вместе, они могут вскопать весь огород за 4 часа. Однако вместе они проработали только один час, потом некоторое время работал один сын, а заканчивал работу уже один отец. Сколько часов в общей сложности проработал на огороде отец, если вся работа на огороде была выполнена за 7 часов?

3.20. (ЕГЭ, 2006, В9)

Бак заполняют керосином за 2 часа 30 минут с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 3 : 5 : 8. Сколько процентов объема будет заполнено за 1 час 18 минут совместной работы второго и третьего насосов?

3.21. (ЕГЭ, 2008, В9)

За 80 км до станции назначения поезд был задержан у семафора на 24 минуты. Затем машинист увеличил на 10 км/ч скорость, с которой поезд ехал до остановки, и поэтому поезд прибыл в пункт назначения по расписанию. С какой скоростью ехал поезд после остановки?

3.22. (ЕГЭ, 2008, В9)

Объемы ежегодной добычи угля первой, второй и третьей шахтами относятся как 1 : 2 : 4. Первая шахта планирует уменьшить годовую добычу угля на 8%, а вторая — на 2%. На сколько процентов должна увеличить годовую добычу угля третья шахта, чтобы суммарный объем добываемого за год угля не изменился?

3.23. (ЕГЭ, 2009, В9 – досрочный)

В разгар летнего сезона ягоды дешевеют на 30% по сравнению с началом сезона, а сахар дорожает на 20%, в результате чего приготовление варенья из ягод по определенному рецепту обходится на 10% дешевле. Сколько процентов от стоимости варенья (приготавливаемого по тому же рецепту) составляет стоимость ягод в начале сезона?

3.24. (ЕГЭ, 2009, В9)

Зимой цена на говядину снизилась на 12,5% по сравнению с осенью. На сколько процентов больше нужно продать говядины зимой, чтобы выручка от ее продажи увеличилась на 5% по сравнению с осенью?

3.25. (ЕГЭ, 2010, В1)

Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 400 рублей после повышения цены на 20%?

3.26. (ЕГЭ, 2010, В1)

Тетрадь стоит 20 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 550 рублей после понижения цены на 25%?

3.27. (ЕГЭ, 2010, В10)

Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. руб.) задается формулой: $q = 65 - 5p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 110 тыс. руб.

3.28. (ЕГЭ, 2010, В12)

Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B , расположенный в 15 км от A . Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 6 км/ч.

3.29. (ЕГЭ, 2010, В12)

Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. За час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

3.30. (ЕГЭ, 2011, В10)**“Тест”**

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 100$ мг. Период его полураспада $T = 2$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 12,5 мг?

3.31. (ЕГЭ, 2012, В10)

В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменов: 6 из Венгрии, 21 из Румынии, остальные из Болгарии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Болгарии.

3.32. (ЕГЭ, 2012, В10)

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 10 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

3.33. (ЕГЭ, 2012, В13)

На изготовление 720 деталей первый рабочий затрачивает на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 840 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

3.34. (ЕГЭ, 2012, В13)

Заказ на 247 деталей первый рабочий выполняет на 6 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 6 деталей больше?

3.35. (ЕГЭ, 2013, В1)**“Тест”**

Одна таблетка лекарства весит 70 мг и содержит 4% активного вещества. Ребенку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребенку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток?

3.36. (ЕГЭ, 2013, В1)**“Тест”**

В квартире, где проживает Анастасия, установлен прибор учета холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 122 куб.м воды, а 1 октября — 142 куб.м. Какую сумму должна заплатить Анастасия за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб.м холодной воды составляет 9 руб. 90 коп.? Ответ дайте в рублях.

3.37. (ЕГЭ, 2015, 1)

В доме, в котором живет Игорь, один подъезд. На каждом этаже по шесть квартир. Игорь живет в квартире 47. На каком этаже живет Игорь?

3.38. (ЕГЭ, 2015, 5)

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 20 спортсменов, среди них 3 прыгуна из Чехии и 2 прыгуна из Боливии. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым будет выступать прыгун из Чехии.

3.39. (ЕГЭ, 2013, В10)

В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по логарифмам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном билете на экзамене школьнику достанется вопрос по логарифмам.

3.40. (ЕГЭ, 2013, В10)

Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 17 спортсменов из России, в том числе Денис Полянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Денис Полянкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

3.41. (ЕГЭ, 2013, В13)

Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 6%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

3.42. (ЕГЭ, 2013, В13)

Катер в 10:00 вышел из пункта A в пункт B , расположенный в 15 км от A . Пробыв в пункте B 4 часа, катер отправился назад и вернулся в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

3.43. (ЕГЭ, 2015, 13)

Расстояние между городами A и B равно 790 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 85 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 450 км от города A . Ответ дайте в км/ч.

3.44. (ЕГЭ, 2016, 10)

Груз массой $0,8$ кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 16$ с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 10 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

3.45. (ЕГЭ, 2016, 11)

Шесть одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов девять таких же рубашек дороже куртки?

3.46. (ЕГЭ, 2017, 17)

Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, 300 рублей. Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Тренировочные задачи

3.47. Велосипедист рассчитывает попасть на станцию, расположенную в 42 км, к приходу поезда. Через 3 ч после отправления он сделал остановку на 10 мин, а затем увеличил первоначальную скорость на 1 км/ч и приехал на станцию к приходу поезда. С какой скоростью ехал велосипедист после остановки?

3.48. Подарочный набор состоит из трех сортов конфет. Массы конфет первого, второго и третьего сорта в этом наборе относятся как $1 : 2 : 8$. Массу конфет первого сорта увеличили на 20%, а второго — на 6%. На сколько % надо уменьшить массу конфет третьего сорта, чтобы масса всего набора не изменилась? **“Тест”**

3.49. (ЕГЭ, 2009, В9)**“Тест”**

Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

3.50. (ЕГЭ, 2009, В9)

Расстояние между пристанями А и В по реке равно 36 км. Из А в В отплыл плот, а из В в А спустя 8 часов отошла лодка. В пункты назначения они прибыли одновременно. Какова скорость плота, если собственная скорость лодки 12 км в час?

3.51. (ЕГЭ, 2009, В9)

За 200 км до станции назначения поезд был задержан у семафора на час. Затем машинист увеличил на 10 км/ч скорость, с которой поезд ехал до остановки, и поэтому поезд прибыл в пункт назначения по расписанию. С какой скоростью ехал поезд после остановки?

3.52. (ЕГЭ, 2009, В9)

По истечении года банк начислил к сумме вклада 20%. Вкладчик после этого прибавил к вкладу 15% от получившейся суммы. Обе операции повторились и год спустя. После этого он заметил, что если добавить еще 3824 рубля, получится сумма, вдвое превышающая первоначальный вклад. Какая сумма была положена в банк первоначально?

3.53. (ЕГЭ, 2009, В9)

На заводе изготовили сплав из золота, серебра и платины в пропорциях 3, 12 и 6 соответственно общей массой m . В него добавили ещё золота в количестве 10% от имеющегося серебра, после чего отлили $\frac{2}{3}$ сплава, а к оставшейся части добавили платину в количестве 20% от количества золота в первоначальном сплаве. Какова концентрация серебра в получившемся сплаве?

3.54. (ЕГЭ, 2009, В9)

Масса первого сплава на 3 кг больше массы второго сплава. Первый сплав содержит 10% цинка, второй 40% цинка. Новый сплав, полученный из двух первоначальных, содержит 20% цинка. Определите массу нового сплава.

3.55. (ЕГЭ, 2009, В9)

“Тест”

Расстояние между пристанями A и B равно 72 км (по реке). От пристани A в сторону пристани B отправился плот. Спустя 12 ч от пристани B навстречу плоту вышла моторная лодка, собственная скорость которой равна 16 км/ч. Найдите скорость плота, если к пристаням A и B плот и лодка прибыли одновременно.

3.56. (ЕГЭ, 2010, В5)

Поставщик газа может заключить договор на транзит своего газа до клиента через любой из трех газопроводов: Южный, Центральный или Восточный. Длина Южного газопровода равна 350 километрам, длина Центрального газопровода равна 400 километрам, а длина Восточного газопровода равна 330 километрам. Транспортировка 1000 кубометров газа на 100 километров по Южному газопроводу стоит 11 долларов, по Центральному газопроводу — 9,5 долларов, по Восточному газопроводу — 12 долларов. Сколько долларов придется заплатить за самый выгодный транзит 1,5 миллионов кубометров газа?

3.57. (ЕГЭ, 2010, В5)

Двое решают, как им обойдется дешевле доехать из Москвы в Санкт-Петербург — на поезде или в автомобиле. Билет на поезд стоит 540 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 6 литров бензина на 100 км пути, расстояние по шоссе равно 700 километрам, а цена бензина равна 18 рублям за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на двоих?

3.58. (ЕГЭ, 2010, В10)

В электросеть включён предохранитель, рассчитанный на силу тока 20 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление электроприбора. (Ответ выразите в омах.)

3.59. (ЕГЭ, 2010, В10)

Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 12$ мг изотопа натрия-24, период полураспада которого равен $T = 15$ ч. В течение скольких часов содержание натрия-24 в веществе будет превосходить 3 мг?

3.60. (ЕГЭ, 2010, В12)

Из пункта A в пункт B вышел пешеход, движущийся со скоростью 6 км/ч. Одновременно навстречу ему из пункта B в пункт A вышел второй пешеход, движущийся со скоростью 4 км/ч. Расстояние между пунктами A и B равно 15 км. Через сколько часов пешеходы встретятся?

3.61. (ЕГЭ, 2010, В12)

Города A , B и C соединены прямолинейным шоссе, причем город B расположен между городами A и C . Из города A в сторону города C выехал легковой автомобиль, движущийся со скоростью 60 км/ч, и одновременно с ним из города B в сторону города C выехал грузовик, движущийся со скоростью 40 км/ч. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если расстояние между городами A и B равно 80 км?

3.62. (ЕГЭ, 2010, В12)

Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

3.63. (ЕГЭ, 2010, В12)

Цена телевизора в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена телевизора, если выставленный на продажу за 8000 рублей, он через два года был продан за 6480 рублей.

3.64. (ЕГЭ, 2010, В12)**“Тест”**

Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси?

4 Производные

Задания на исследование функций встречаются во всех частях ЕГЭ. Исследование функций проводится элементарными методами или с помощью производных. Решения заданий в группе А требуют применения стандартного алгоритма. Задания групп В и С отличаются более сложной формулой, задающей функцию, и их решение требует применения некоторых утверждений из математического анализа.

Теоретические сведения

Нахождение производной данной функции называют дифференцированием. Для нахождения производной используют формулы дифференцирования и правила дифференцирования.

Таблица производных простейших функций

$$\begin{array}{ll} (ax + c)' = a & (\sin x)' = \cos x \\ (x^a)' = ax^{a-1} & (\cos x)' = -\sin x \\ (e^x)' = e^x & (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ (a^x)' = a^x \ln a & (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} & (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \end{array}$$

Таблица производных сложных функций

$$\begin{array}{ll} (f^a)' = af^{a-1} \cdot f' & (\sin f)' = \cos f \cdot f' \\ (e^f)' = e^f \cdot f' & (\cos f)' = -\sin f \cdot f' \\ (a^f)' = a^f \cdot f' \ln a & (\operatorname{tg} f)' = \frac{f'}{\cos^2 f} \\ (\ln f)' = \frac{f'}{f} & (\operatorname{ctg} f)' = -\frac{f'}{\sin^2 f} \\ (\log_a f)' = \frac{f'}{f \ln a} & \end{array}$$

Правила дифференцирования

1. Дифференцирование суммы: $(f + g)' = f' + g'$.
2. Дифференцирование произведения: $(fg)' = f'g + fg'$.
3. Дифференцирование частного: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
4. Производная сложной функции: $(g(f))' = g'(f) \cdot f'$.

Геометрический смысл производной.

Касательная к графику функции

Существование производной функции f в точке x_0 эквивалентно существованию (невертикальной) касательной $y = kx + b$ в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику f . При этом тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox (угловой коэффициент касательной) равен k : $\operatorname{tg} \alpha = k = f'(x_0)$.

Уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Механический смысл производной

Если материальная точка движется по координатной прямой, причем задан закон движения, т. е. координата x этой точки есть известная функция $x(t)$ времени t , то мгновенная скорость $v(t)$ определена для любой дифференцируемой функции $x(t)$, при этом $v(t) = x'(t)$. Механический смысл производной состоит в том, что производная от координаты по времени есть скорость. Аналогично и с ускорением движения: $a = v'(t)$, т. е. производная от скорости по времени есть ускорение.

Применение производной к исследованию функции

Признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I , то функция f возрастает на интервале I .

Признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I , то функция f убывает на интервале I .

Промежутки возрастания и убывания функции называют *промежутками монотонности функции*.

Критические точки функции, максимумы и минимумы

Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками*.

Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции. Иными словами, если в точке x_0 производная функции f меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума функции f .

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции. Иными словами, если в точке x_0 производная функции f меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума функции f .

Точки максимума и минимума называют *точками экстремума*. Значения функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название — *экстремум функции*).

Задачи из демоверсий

4.1. (ЕГЭ, 2002, A11)

“Тест”

Найдите значение производной функции $y = \frac{x-18}{x}$ в точке $x_0 = -3$.

4.2. (ЕГЭ, 2002, B1)

Найдите минимум функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4$.

4.3. (ЕГЭ, 2002, B7)

Найдите наименьшее значение функции $g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(4 - x^2)$.

4.4. (ЕГЭ, 2003, A14)

Найдите значение производной функции $y = xe^x$ в точке $x_0 = 1$.

4.5. (ЕГЭ, 2003, A16)

При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки движения изменяется по закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t - 1$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость (м/с) тела через 4 секунды после начала движения.

4.6. (ЕГЭ, 2004, A9)

Вычислите значение производной функции $y = \sin x - 2x$ в точке $x_0 = 0$.

4.7. (ЕГЭ, 2004, А14)

Через точку графика функции $y = e^x - x^2$ с абсциссой $x_0 = 1$ проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

4.8. (ЕГЭ, 2004, В5)

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{40}{2^x + 3^x}$ на промежутке $[1; 7]$.

4.9. (ЕГЭ, 2005, А6)

Найдите производную функции $y = e^x + 3x^2$.

4.10. (ЕГЭ, 2005, В3)**“Тест”**

Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = t^2 + t + 2$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t (время измеряется в секундах, расстояние — в метрах). В какой момент времени скорость точки будет равна 5 м/с?

4.11. (ЕГЭ, 2006, А6)

Укажите наибольшее значение функции $y = 1 - \cos 3x$.

4.12. (ЕГЭ, 2006, В6)

Найдите наибольшее значение функции $y = 2,7 \cdot e^{3x^2 - x^3 - 4}$ на отрезке $[1; 3]$.

4.13. (ЕГЭ, 2007, А5)

Найдите производную функции $y = (x - 3) \cos x$.

4.14. (ЕГЭ, 2008, А5)

Найдите производную функции $y = x^6 - 4 \sin x$.

4.15. (ЕГЭ, 2008, В5)

Прямая, проходящая через начало координат, является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(-7, 14)$. Найдите $f'(-7)$.

4.16. (ЕГЭ, 2009, А5)

Найдите производную функции $y = 12x^3 - e^x$ из указанного списка: 1) $y' = 15x^2 - xe^{x-1}$; 2) $y = 3x^2 - \frac{e^x}{x+1}$; 3) $y = 36x^2 - xe^{x-1}$; 4) $y = 36x^2 - e^x$.

4.17. (ЕГЭ, 2009, А5)

Найдите производную функции $h(x) = e^x - 4x^2$ из указанного списка: 1) $h'(x) = e^x - \frac{4}{3}x^3$; 2) $h'(x) = e^x - 8x$; 3) $h'(x) = e^x - 2x$; 4) $h'(x) = e^x - 4x$.

4.18. (ЕГЭ, 2009, В11)

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 12x + 3$ на отрезке $[-1; 3]$.

4.19. (ЕГЭ, 2010-2011, В11; 2012-2013, В14)

Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

4.20. (ЕГЭ, 2014, В15; 2015, 14; 2016-2018, 12)

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$.

4.21. (ЕГЭ, 2004, С2)

Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

4.22. (ЕГЭ, 2006, С3)

Для монтажа оборудования необходима подставка объёмом 1296 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет вмонтировано в пол, а её задняя стенка — в стену цеха. Для соединения подставки по рёбрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

4.23. (ЕГЭ, 2007, С1)

Найдите значение функции $f(x) = 10^{\lg \frac{x^3-3x}{x+5} - \log_{0,1}(x+5)}$ в точке максимума.

4.24. (ЕГЭ, 2008, С1)

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = |\sqrt{1-x^2} - 2| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2.$$

4.25. (ЕГЭ, 2005, С2, 2009, С1 – демоверсия;)

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x(2x-3)^6$ при $|x-1,5| \leq 0,5$.

4.26. (ЕГЭ, 2009, С1)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{2x}{x^2+16}$ при $|x-5,5| \leq 2,5$.

Задачи ЕГЭ**4.27.** (ЕГЭ, 2010, В11)

Найдите наибольшее значение функции $y = 2x - 2 \operatorname{tg} x - 5$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

4.28. (ЕГЭ, 2010, В11)

Найдите наименьшее значение функции $y = 2 \sin x + \frac{24}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

4.29. (ЕГЭ, 2011, В11)

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 4$ на отрезке $[3; 6]$.

4.30. (ЕГЭ, 2012, В14)

Найдите наибольшее значение функции $y = (x+9)^2(x+6) - 5$ на отрезке $[-10; -8]$.

4.31. (ЕГЭ, 2012, В14)**“Тест”**

Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 1)^2(x + 3) + 4$ на отрезке $[0; 8]$.

4.32. (ЕГЭ, 2013, В14)

Найдите наибольшее значение функции $y = 43x - 40 \sin x + 34$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

4.33. (ЕГЭ, 2013, В14)

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 81}{x}$ на отрезке $[4; 20]$.

4.34. (ЕГЭ, 2015, 14)

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5$ на отрезке $[9; 36]$.

4.35. (ЕГЭ, 2016, 12)

Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x + 8)^2$.

4.36. (ЕГЭ, 2004, С2)**“Тест”**

Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B — на оси Ox , и ее абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A . Найдите наибольшее значение площади треугольника AOB , где точка O — начало координат и $f(x) = \sqrt{7 + 3 \sin x} - (3x + 1) \cos x$, $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{8}$.

4.37. (ЕГЭ, 2004, С2)**“Тест”**

Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю OM , где O — начало координат, а M — точка на графике функции $y = 1 - 3 \ln(0,25x - 2)$, $9 \leq x \leq 11,5$.

4.38. (ЕГЭ, 2004, С2)

Найдите наибольшее значение площади треугольника OPK , где O — начало координат, P — точка на графике функции $y = 64x^5 e^{6-4x} + \frac{5}{x}$, $0,7 \leq x \leq 2$, а K — точка на оси Ox , абсцисса которой равна абсциссе точки P .

4.39. (ЕГЭ, 2007, С1)**“Тест”**

Найдите точки максимума функции

$$f(x) = 48x^2 - 3x^4 - 9x^3 + 0,1^{-\lg(x^3+8)}.$$

4.40. (ЕГЭ, 2007, С1)

Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 72x^2 + 2^{-\log_{0,5}(x^3+8)}.$$

4.41. (ЕГЭ, 2007, С1)

Найдите точки минимума функции

$$f(x) = (6^{\sqrt{1-x}} + 7)^2 - 4x^2 - 36^{\sqrt{1-x}} - 14 \cdot 6^{\sqrt{1-x}} + 0,5x^4.$$

4.42. (ЕГЭ, 2007, С1)

Найдите точки максимума функции

$$f(x) = \frac{6 - 6 \sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^2 + 2x^3 - 15x^4.$$

4.43. (ЕГЭ, 2007, С1)**“Тест”**

Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 15x^4 - 26x^3 + \frac{12 - 12 \cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} \cdot x^2.$$

4.44. (ЕГЭ, 2008, С1)

Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (2x + 4)^5 - 4(2x + 4)^4 \text{ при } |x + 2| \leq 1.$$

4.45. (ЕГЭ, 2008, С1)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{-5x}{x^2 + 4}$ при $|x + 3,5| \leq 2,5$.

4.46. (ЕГЭ, 2008, С1)

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 0,25(x-3)(x+3)(x^2+9) - 2x^2 \text{ при } |x-1,5| \leq 1,5.$$

4.47. (ЕГЭ, 2009, С1)

Найдите абсциссы всех точек графика функции

$$f(x) = \frac{25-x^2}{5+x} - \frac{1}{3}x^3, \text{ касательные в которых параллельны прямой } y = -26x \text{ или совпадают с ней.}$$

4.48. (ЕГЭ, 2009, С1)

Найдите абсциссы всех точек графика функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4^{\log_4(5-x)}, \text{ касательные в которых параллельны прямой } y = 37x \text{ или совпадают с ней.}$$

4.49. (ЕГЭ, 2009, С2 – *досрочный*)

В точке $D(x, y)$ графика функции $y = x + 4x^{-2}$ проведена касательная к графику функции, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты точки D .

4.50. (ЕГЭ, 2009, С1)

Найдите абсциссы всех точек графика функции

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} - 2x^3, \text{ касательные в которых параллельны прямой } y = -23x \text{ или совпадают с ней.}$$

Тренировочные задачи

4.51. Найдите производную функции: а) $y = 9 - 9x^8 - \frac{6}{5}x^5$; б) $y = 3x^2 \cos x$; в) $y = e^x - 2x^2$; г) $y = e^x \cdot (1 + \sin x)$.

4.52. Найдите производную функции: а) $y = 8 - 5x^4 + \frac{7}{6}x^6$; б) $y = 5x^2 \sin x$; в) $y = -3,6x^2 \cos x$; г) $y = e^x - x^7$; е) $y = e^x - \sin x$; ф) $y = x^{12} + \sin x$.

4.53. Найдите значение производной функции:

- а) $f(x) = \frac{1-4x}{2x+1}$ в точке $x_0 = -1$; б) $f(x) = \frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$ ($x_0 = 2005$);
 в) $f(x) = (x^2+1)^2 - 2(x^2+1) + 1$ ($x_0 = 2$); д) $f(t) = \cos t + \operatorname{tg} t$ ($t_0 = \pi$); е) $f(x) = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$ ($x_0 = -1$).

4.54. Найдите значение производной функции: а) $f(x) = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$; б) $f(x) = \ln x - 2 \cos x$ ($x_0 = 1$); в) $f(x) = \frac{5}{x} + 4e^x$ ($x_0 = 1$); д) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ($x_0 = 0$); е) $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{16}{x}$ ($x_0 = 4$); ф) $f(x) = x + e^{-2x}$ ($x_0 = 0$).

4.55. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (3x^2+1)(3x^2-1)$.

4.56. Укажите число целых решений неравенства $f'(x) \leq 0$, если $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{16}{3}x^3$. “Тест”

4.57. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = 4 + 2t - e^{4-t}$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . Найдите скорость точки при $t = 4$.

4.58. Точка движется по координатной прямой согласно закону а) $x(t) = 3 + 2t + t^2$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . В какой момент времени скорость точки будет равна 5? б) $x(t) = 0,5t^2 - 3t + 5$. В какой момент времени скорость точки будет равна 9?

4.59. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции а) $y = -0,5x^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = -3$; б) $y = -\frac{4}{x}$ в его точке с абсциссой $x_0 = -2$.

4.60. Найдите угловой коэффициент касательной, к графику функции: а) $f(x) = 3x - 2 \cos x$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$; б) $f(x) = 3x - 4 \ln x$ ($x_0 = 2$); в) $f(x) = 2x + e^x$ ($x_0 = 0$); д) $f(x) = 2 - x^2 + 3x^4$ ($x_0 = -1$).

4.61. Найдите угловой коэффициент касательной, к графику функции: а) $f(x) = 3 \sin x + 12x$ в его точке с абсциссой $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; б) $f(x) = 7x - 5 \ln x$ ($x_0 = 1$); в) $f(x) = 3 + 2x - x^2$ ($x_0 = 1$); д) $f(x) = 9x - 4x^3$ ($x_0 = 1$); е) $f(x) = x^5 - 5x^2 - 3$ ($x_0 = -1$); ф) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 8x - 5$ ($x_0 = 2$); г) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2 - (x^2+1)^2$ ($x_0 = 1$); х) $f(x) = \frac{1-2x}{4x+1}$ ($x_0 = -0,5$); и) $f(x) = 2 \sin x - 3 \operatorname{ctg} x$ ($x_0 = \frac{\pi}{3}$).

4.62. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к графику функции $f(x) = x^5 - x$ в начале координат? В ответе запишите градусную меру этого угла. **“Тест”**

4.63. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$, параллельной прямой $y = 4x - 5$. В ответе укажите площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.

4.64. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x$, параллельной оси абсцисс. В ответе укажите расстояние от точки $(0, 0)$ до этой касательной.

4.65. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{2x} - x + 2005$, образующей с осями координат равнобедренный прямоугольный треугольник.

4.66. При каком значении a прямая $y = -10x + a$ является касательной к параболе $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$? **“Тест”**

4.67. Укажите точку графика функции $f(x) = x^2 + 4x$, в которой касательная параллельна прямой $y - 2x + 5 = 0$. В ответе укажите сумму координат этой точки.

4.68. Через точку $M(-1, 0)$ к графику функции $f(x) = \sqrt{2x-1}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение. В ответе укажите градусную меру угла между касательной и положительным направлением оси Ox .

4.69. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке $B(-6, 6)$. Найдите $f'(-6)$.

4.70. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = \varphi(x)$ в точке $O(4, -8)$. Найдите $\varphi'(4)$.

4.71. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ в точке с абсциссой $x_0 = -\pi$.

4.72. При каких значениях a прямая $y = a$ пересекает график функции $y = x^3 - 3x^2$ в единственной точке? **“Тест”**

4.73. Найдите наименьший из возможных углов, образующий с положительным направлением оси абсцисс касательной к графику функции $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 1$. В ответе запишите его градусную меру.

4.74. Определите размеры бассейна с квадратным дном и объемом 32 м^3 таким образом, чтобы сумма площади боковой поверхности и площади дна была минимальной. В ответе укажите площадь боковой поверхности. **“Тест”**

4.75. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = -5x + 4 \sin x - 2005$.

4.76. Найдите множество значений функции $h(x) = 2\sqrt{x+14} + \sqrt{6-x}$.

4.77. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 0,25x - \frac{x+1}{x+2} + x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2$.

4.78. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = |\sqrt{4-x^2} - 3| + \sqrt{4-x^2} + x^3 - 4,5x^2$.

4.79. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = (3x+2)^3 \cdot (-x+2)$ на промежутке $(-\infty; 1]$.

4.80. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = (1 - 5x)^3 \cdot (3x - 1)$ на промежутке $[1; +\infty)$. **“Тест”**

4.81. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = (2x - 1)^3(-0,4x + 1)$.

4.82. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = (x^2 + 2x - 3)^3$.

4.83. Функция $f(x) = (x - 3)(2x - 1)^4$ определена на промежутке $[1; 3]$. Найдите множество ее значений.

4.84. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = -4(9x^2 + 3x - 2)^2$ при $|3x + 2| \leq 2$.

4.85. Найдите множество значений функции $g(x) = 2\sqrt{-x + 3} - 3\sqrt{5x - 10}$.

4.86. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{2x - 1}}$.

4.87. Найдите множество значений функции $g(x) = 4 \cos x - 4\sqrt{4 \cos x + 5}$. **“Тест”**

4.88. Найдите наибольшее значение функции $y = 3 \operatorname{tg} x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

4.89. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 7)e^{x-6}$ на отрезке $[5; 7]$.

4.90. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4, 5; 0]$.

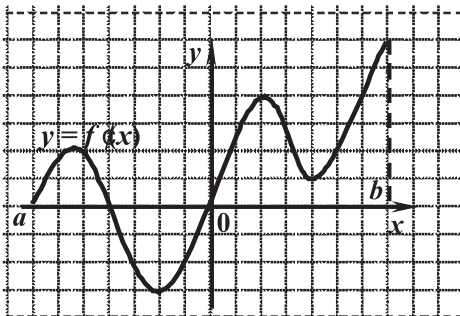
5 Исследование функций

Задачи из демоверсий

5.1. (ЕГЭ, 2003, В2)

“Тест”

Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. На рисунке изображен график ее производной $y = f'(x)$. Исследуйте на монотонность функцию $y = f'(x)$. В ответе укажите количество промежутков, на которых функция возрастает.



5.2. (ЕГЭ, 2006, В7)

Решите уравнение $0,2^{x+1} = \sqrt{35 + 5x}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

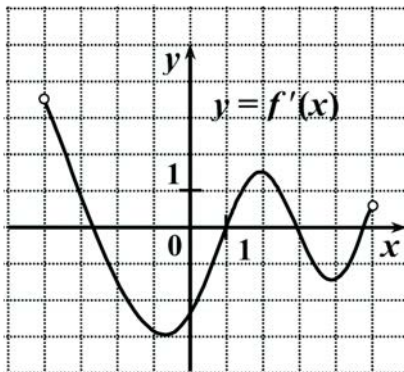
5.3. (ЕГЭ, 2006, В8)

Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(2x + 1) \times (x - 2)(x - 3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

5.4. (ЕГЭ, 2007, В5)

“Тест”

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс.



5.5. (ЕГЭ, 2007, В8)

Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 2 и $f(1) = 5$. Найдите значение выражения $3f(7) - 4f(-3)$. **“Тест”**

5.6. (ЕГЭ, 2008, В7)

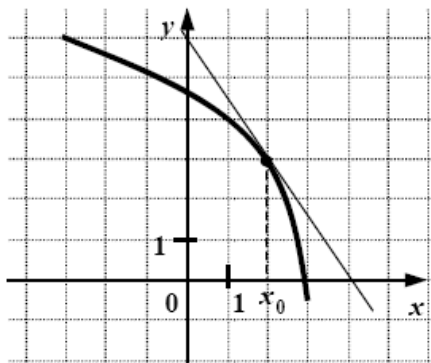
Решите уравнение $25x^2 - 20x + 6 = \left(\sqrt{2} - \cos \frac{5\pi x}{4}\right) \left(\sqrt{2} + \cos \frac{5\pi x}{4}\right)$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней).

5.7. (ЕГЭ, 2008, В8)

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция задана формулой $f(x) = 2 + 2x - x^2$. Определите количество нулей этой функции на отрезке $[-5; 4]$.

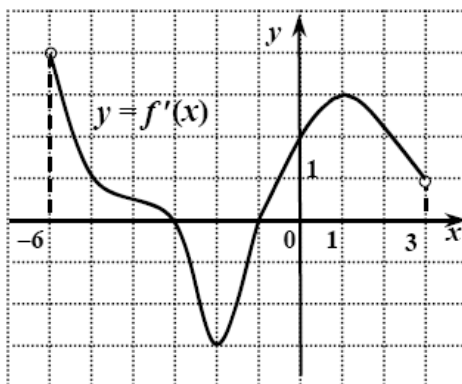
5.8. (ЕГЭ, 2009, В2)

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной в точке x_0 .



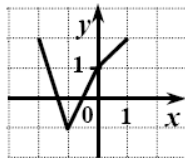
5.9. (ЕГЭ, 2009, В5)

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6; 3)$.



5.10. (ЕГЭ, 2009, В7 – 2-я демоверсия)

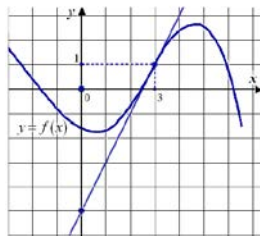
Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке изображен график этой функции при $-2 \leq x \leq 1$. Найдите значение выражения $\frac{f(-1) \cdot f(9)}{f(-2)}$.

**5.11.** (ЕГЭ, 2009, В8)

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 6. При $-2 \leq x < 4$ она задается формулой $f(x) = |x - 2| - 3$. Найдите значение выражения $4f(11) - 2f(-15)$.

5.12. (ЕГЭ, 2010, В8)

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.

**5.13.** (ЕГЭ, 2007, С5)

Найдите количество всех решений системы уравнений

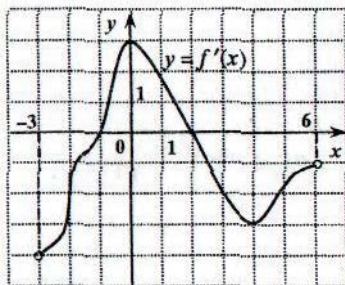
$$\begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0, \\ 2x - \frac{10}{x \log_y 2} = 5 \log_{32}(0,125y^2) - 7. \end{cases}$$

5.14. (ЕГЭ, 2009, С3)

Найдите все значения $x > 1$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = \log_2 x + 2 \log_x 32 - 2$ и $b = 41 - \log_2^2 x^2$ больше 5.

Задачи ЕГЭ**5.15.** (ЕГЭ, 2006, В5)

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-3; 6)$.



5.16. (ЕГЭ, 2006, В6)

Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = \sqrt{81 - x^2}$ на отрезке $[-3\sqrt{5}; 4\sqrt{2}]$.

5.17. (ЕГЭ, 2006, В6)**“Тест”**

Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = 2,5 \log_{\frac{1}{3}} (3 - x^2)$ на отрезке $[-1; \sqrt{2}]$.

5.18. (ЕГЭ, 2006, В7)

Решите уравнение $2^{(\sqrt{2} - \cos 15\pi x)(\sqrt{2} + \cos 15\pi x)} = 4 + (10x + 1)^2$.

5.19. (ЕГЭ, 2006, В7)

Решите уравнение $\sqrt{16 - (4x + 5)^2} = 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5}$.

5.20. (ЕГЭ, 2006, В8)

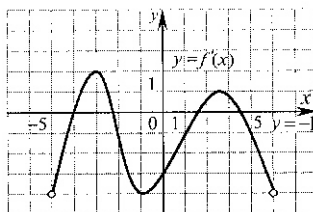
Четная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = x + (x - 11)f(x - 11) + 11$ вычислите сумму $g(9) + g(11) + g(13)$.

5.21. (ЕГЭ, 2006, В8)**“Тест”**

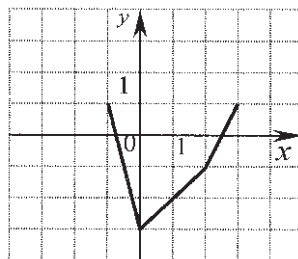
Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 0,8 + \frac{f(x - 3,5)}{x - 3,5}$ вычислите сумму $g(3) + g(4)$.

5.22. (ЕГЭ, 2007, В6)**“Тест”**

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y = 2 - x$ (или совпадающие с ней). Найдите наибольшую из абсцисс точек, в которых проведены эти касательные.

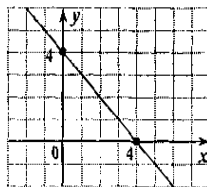
**5.23.** (ЕГЭ, 2007, В8)

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4. На рисунке изображен график этой функции при $-1 \leq x \leq 3$. Найдите значение выражения $f(-3) \cdot f(1) \cdot f(11)$.



5.24. (ЕГЭ, 2008, В5)

На рисунке изображена касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

**5.25.** (ЕГЭ, 2008, В8)

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 5. На промежутке $(-1; 4]$ она задается формулой $f(x) = 3 - |1 - x|$. Найдите значение выражения $5f(20) - 3f(-12)$.

5.26. (ЕГЭ, 2008, В8)

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 8. На промежутке $[-4; 1)$ она задается формулой $f(x) = -x^2 - 4x - 2$. Найдите значение выражения $4f(-18) + 3f(16)$.

5.27. (ЕГЭ, 2008, В8)**“Тест”**

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1; 5]$.

5.28. (ЕГЭ, 2009, В7 – досрочный)

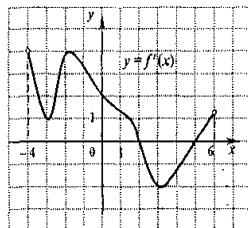
Найдите все значения x , при каждом из которых выполняется соотношение $\left(\cos \frac{3\pi x}{4} + \sin \frac{3\pi x}{4} \right)^2 \geq 3 + 2x + x^2$. (Если таких значений больше одного, то в бланке ответов запишите наименьшее значение.)

5.29. (ЕГЭ, 2009, В7)

Функция $y = f(x)$ определена на множестве всех действительных чисел и является периодической с периодом 5. Найдите значение выражения $\frac{f(8) + 2f(-12)}{4f(14)}$, если $f(-2) = -4$ и $f(-1) = 1,5$.

5.30. (ЕГЭ, 2009, В5)

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите длину промежутка убывания.

**5.31.** (ЕГЭ, 2009, В8 – досрочный)

Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 2,1 + \frac{f(x - 9,5)}{x - 9,5}$ вычислите сумму $g(9) + g(10)$.

5.32. (ЕГЭ, 2009, В8)

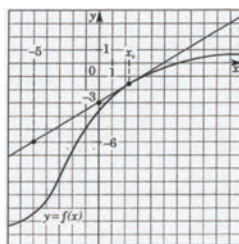
Найдите все значения x , при каждом из которых выполняется соотношение $2^{3-2x+x^2} \leq 3+2x-x^2$. (Если таких значений x более одного, то в бланке ответов запишите наибольшее из них.)

5.33. (ЕГЭ, 2009, В8)

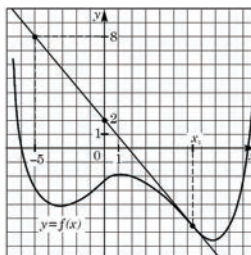
Найдите все значения x , при каждом из которых выполняется соотношение $\left(\frac{1}{5}\right)^{8+6x+x^2} \geq 14+6x+x^2$. (Если таких значений x более одного, то в бланке ответов запишите наименьшее из них.)

5.34. (ЕГЭ, 2010, В8)

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**5.35.** (ЕГЭ, 2010, В8)

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



5.36. (ЕГЭ, 2005, С3)

Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b = 9^a + 3^{2+a} - 1$ и $c = 3^{2-a} - 9^{-a} - 5$ меньше 9.

5.37. (ЕГЭ, 2009, С2)**“Тест”**

Найдите все значения x , при каждом из которых произведение значений выражений $2 + \sqrt[4]{10 - 3x - x^2}$ и $1 - \cos 2x$ положительно.

5.38. (ЕГЭ, 2009, С2)

Найдите все значения x , при каждом из которых произведение значений выражений $\sqrt{4 - 2^{x-2}}$ и $3^{x^2-4x} - 3^{(x-2)^2-2} + 72$ положительно.

5.39. (ЕГЭ, 2009, С5 – *досрочный*)**“Тест”**

Решите уравнение $f(f(-x^2)) = f(x^2)$, где

$$f(t) = \begin{cases} \text{если } t \geq -1, \\ 8 - 8(t+1)^{-1} \\ \text{если } t < -1. \end{cases}$$

5.40. (ЕГЭ, 2009, С5)

$$x^6 - |7 - 6x|^3 = 26 \cos(x^2) - 26 \cos(7 - 6x).$$

5.41. (ЕГЭ, 2009, С5)

$$x^8 + 92 \cos(12x + 13) = 92 \cos(x^2) + (12x + 13)^4.$$

6 Задачи с параметрами

Задачи из демоверсий

6.1. (ЕГЭ, 2002, В4)

“Тест”

При каком наименьшем значении параметра a функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax$ возрастает на всей числовой прямой?

6.2. (ЕГЭ, 2003, В6)

При каком a функция $y = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум при $x = 4$?

6.3. (ЕГЭ, 2009, В8)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $||x| + 5 - a| = 2$ имеет ровно 3 корня. (Если значений более одного, то в бланке ответов запишите их сумму.)

6.4. (ЕГЭ, 2002, С2)

Найдите наибольшее значение a , при котором уравнение $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2 .

6.5. (ЕГЭ, 2003, С2)

При каких значениях параметра n уравнение $15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$ не имеет корней?

6.6. (ЕГЭ, 2003, С4)

Найдите все положительные значения параметра a , при которых в области определения функции $y = (a^x - a^{ax+2})^{-0,5}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

6.7. (ЕГЭ, 2004, С4)

Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $x(x-2) \leq (a+1)(|x-1|-1)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным $1,7$, и положительным знаменателем.

6.8. (ЕГЭ, 2005, С5)

Известно, что уравнение $(2p+3)x^2 + (p+3)x + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p , при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

6.9. (ЕГЭ, 2007, С3)

Найдите все значения x , которые удовлетворяют неравенству $(2a - 1)x^2 < (a + 1)x + 3a$ при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $(1; 2)$.

6.10. (ЕГЭ, 2007, С3; 2008, С3 – *демоверсия*)

Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению выражения ax^2 .

6.11. (ЕГЭ, 2009, С5)

Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $(1,5p - 7) \cdot 32^{0,4x+0,2} + (29p - 154) \cdot 0,125^{-\frac{x}{3}} + 11p - 41 = 0$ имеет ровно $10p - p^2 - 24$ различных корней.

6.12. (ЕГЭ, 2010, С5; “Ломоносов-2005”, 8(10))

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$ имеет хотя бы один корень.

6.13. (ЕГЭ, 2011, С5)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$ имеет единственное решение.

6.14. (ЕГЭ, 2012–2014, С5)

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

Задачи ЕГЭ**6.15.** (ЕГЭ, 2002, В4)

При каком наибольшем значении параметра a функция $f(x) = -x^3 + ax^2 - 3ax - 11$ убывает на всей числовой прямой?

6.16. (ЕГЭ, 2002, В4) **“Тест”**

При каком наименьшем целом значении a функция $f(x) = e^{2x} \cdot x^2 + ae^{2x} + 3$ возрастает на всей числовой прямой?

6.17. (ЕГЭ, 2002, С3)

При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x + 1)$ и $\log_a(\cos^2 x + 5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x ?

6.18. (ЕГЭ, 2002, С3)

При каких значениях a сумма $\log_a \frac{3+2x^2}{1+x^2}$ и $\log_a \frac{5+4x^2}{1+x^2}$ будет больше единицы при всех x ?

6.19. (ЕГЭ, 2002, С3)

При каких значениях a сумма $\log_a (\sqrt{1-x^2}+1)$ и $\log_a (\sqrt{1-x^2}+7)$ будет меньше единицы при всех допустимых значениях x ?

6.20. (ЕГЭ, 2002, С3)

При каких значениях a выражение $1 + \sin x(3 \sin x + a \cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x ?

6.21. (ЕГЭ, 2002, С3)**“Тест”**

При каких значениях a выражение $3 + \sin x(2 \sin x + a \cos x)$ будет равно -1 хотя бы при одном значении x ?

6.22. (ЕГЭ, 2002, С3)

При каких значениях a сумма $\log_a \frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ и $\log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ не равна единице ни при каких значениях x ?

6.23. (ЕГЭ, 2002, С3)

При каких значениях a выражение $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4}$ больше выражения $0,25^{1-|a|-\log_2 \sqrt{1-x^2}}$ при всех допустимых значениях x ?

6.24. (ЕГЭ, 2003, С2)

Найдите все значения p , при которых уравнение $4 \sin x + 9 = p(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень?

6.25. (ЕГЭ, 2003, С2)

Найдите все значения p , при которых уравнение $\cos 2x + \frac{p}{\sin x} = -7$ имеет решения?

6.26. (ЕГЭ, 2003, С2)**“Тест”**

Найдите все значения p , при которых уравнение $4 \sin^3 x = p - 3 \cos 2x$ не имеет корней?

6.27. (ЕГЭ, 2003, С2)

Найдите все значения p , при которых уравнение $3 - 2 \cos x = p(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень?

6.28. (ЕГЭ, 2003, С4)

Найдите все положительные значения параметра a , при которых область определения функции $y = ((\sqrt{a})^{2x+1} + \sqrt{x} \cdot a^3 - x^{0,5+x \log_x a} - (\sqrt{a})^7)^{0,5}$ содержит не более двух целых чисел.

6.29. (ЕГЭ, 2003, С4)

Найдите все значения параметра a , при которых область определения функции $y = (a^{x+0,5} + \sqrt{a}^{8+\log_a x} - x^{0,5+x \log_x a} - a^{4,5})^{0,5}$ содержит ровно два целых чисел.

6.30. (ЕГЭ, 2003, С4)**“Тест”**

Из области определения функции $y = \log_3 \left(a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}} \right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a , при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 13.

6.31. (ЕГЭ, 2004, С4)**“Тест”**

Найдите все значения параметра a , при которых в множестве решений неравенства $x(x - 2a - 4) < \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$ нельзя расположить два отрезка длиной 1,5 каждый, которые не имеют общих точек.

6.32. (ЕГЭ, 2004, С4)

Найдите все значения параметра a , при которых в множестве решений неравенства $x(x - 2a - 6) + a^2 < \frac{6a^2}{x} - 12a$ можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек.

6.33. (ЕГЭ, 2004, С4)

Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $1 - \frac{a}{x} < \frac{8}{x} \left(1 - \frac{a+2}{x} + \frac{2a}{x^2} \right)$ содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

6.34. (ЕГЭ, 2005, С5)

Даны два уравнения $\log_5(x(p^2 + 6)) = p + 5 - 2x$ и $x + \frac{3}{x} = \frac{x^2(5p+1) + (4-3p)x + 3}{x(3p+2)}$. Значение параметра p выбирается так, что $3p+2 \neq 0$ и число различных корней первого уравнения равно сумме числа $p-3$ и числа различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

6.35. (ЕГЭ, 2005, С5)

Даны два уравнения $\sqrt{54p+73-3(24+19p)x} = 3x-3-2p$ и $\left(1 + 9^{\frac{p+2}{p+3}}\right)^x = 37-x$. Значение параметра $p \neq -3$ выбирается так, что число различных корней первого уравнения равно сумме числа $p+2$ и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

6.36. (ЕГЭ, 2006, С5)

Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $4 \sin a - 3$ и $8 \cos 2a + 16 \sin a + 1$ являются решениями неравенства $\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3 |x-9| - 2} \geq 0$.

6.37. (ЕГЭ, 2006, С5)

Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a \cdot 2^{a-2}$ и $3a \cdot 2^a - 4a^2 \cdot 4^{a-3} - 27$ являются решениями неравенства $\log_{x-5,5} \left(\log_4 \frac{x-13}{x-10} \right) \geq 0$.

6.38. (ЕГЭ, 2006, С5)**“Тест”**

Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a\sqrt{a-2} - 5$ и $2a^2 + 24a\sqrt{a-2} - a^3 - 131$ являются решениями неравенства $\log_{2x-12}(\log_5(2x^2 - 41x + 200)) \geq 0$.

6.39. (ЕГЭ, 2007, С3)

Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-5; -1)$ значение выражения $x^2 - 3$ не равно значению выражения $(a + 4)|x|$.

6.40. (ЕГЭ, 2007, С3)

Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(4; 8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a - 1)\log_2 x$.

6.41. (ЕГЭ, 2007, С3)

Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[1; 2)$ значение выражения $4^x - 2 \cdot 2^x - 6$ не равно значению выражения $a2^x$.

6.42. (ЕГЭ, 2008, С3)

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\frac{(2^x + 3\sqrt{2} \cdot 2^{-x} - 5) - a}{a - (2 \sin \sqrt{x} - 1 - 3)} \leq 0$ не имеет решений.

6.43. (ЕГЭ, 2008, С3)

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\frac{a - (2x^7 + \sqrt{6}x^{-7} - 5)}{(3 \sin \sqrt{x} - 1 - 4) - a} \leq 0$ не имеет решений.

6.44. (ЕГЭ, 2008, С3)

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\frac{(\log_2 x + 3\sqrt{3} \cdot \log_x 2 - 6) - a}{a - (2 \sin \sqrt{x} - 4 - 4)} \leq 0$ не имеет решений.

6.45. (ЕГЭ, 2008, С3)**“Тест”**Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{a - (4 \sin \sqrt{x-1} - 1)}{(3\sqrt[5]{x^3} + \sqrt{10}\sqrt[5]{x^{-3}} - 3) - a} \leq 0$$

не имеет решений.

6.46. (ЕГЭ, 2009, С3 – *досрочный*)Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{x - (2^a + 2^{3-a})}{x - (\cos a - 1)} \leq 0$$

выполнено при всех x , принадлежащих промежутку $(6; 9)$.

6.47. (ЕГЭ, 2009, С3)

Найдите все значения $a \neq 0$, при каждом из которых значения хотя бы одно значение функции $y = 2 + \frac{a^2}{1+x^2}$ не принадлежит промежутку $(-5; 7a^{-2} - 4]$.

6.48. (ЕГЭ, 2009, С3)

Найдите все значения $a > 1$, при каждом из которых все значения функции $y = \frac{2}{\log_2(a+|x|)}$ принадлежит промежутку $[-6; \log_2 a - 1)$.

6.49. (ЕГЭ, 2010, С5)

Найдите все значения a , при каждом из которых функция $x^2 - 2|x - a^2| - 6x$ имеет более двух точек экстремума.

6.50. (ЕГЭ, 2010, С5)

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$ меньше 1.

6.51. (ЕГЭ, 2011, С5)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$ имеет ровно три различных решения.

6.52. (ЕГЭ, 2011, С5)Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1, \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

6.53. (ЕГЭ, 2011, С5; 2015, 20; 2016, 18; 2017–2018, 18–демоверсия)

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2, \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение.}$$

6.54. (ЕГЭ, 2012, С5)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{2}{x+1} = a|x-3| \quad \text{на промежутке } [0; +\infty) \quad \text{имеет более двух корней.}$$

6.55. (ЕГЭ, 2012, С5)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 2 \quad \text{на промежутке } (0; +\infty) \quad \text{имеет более двух корней.}$$

6.56. (ЕГЭ, 2013, С5)

“Тест”

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + 3 + a| = |x - a - 3| - (a + 3)^2 \quad \text{имеет единственный корень.}$$

6.57. (ЕГЭ, 2013, С5)

“Тест”

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-8 - 6x - x^2} = 2a + 1 \quad \text{имеет единственный корень.}$$

6.58. (ЕГЭ, 2015, 20)

Для каждого значения a найдите количество решений системы

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x - y|, \\ x + 2y = a. \end{cases}$$

6.59. (ЕГЭ, 2017, 18)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a} \cdot \sin x = -\sqrt{x-a} \cdot \cos x \quad \text{имеет единственный корень на отрезке } [0; \pi].$$

6.60. (ЕГЭ, 2017, 18)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x \cdot \sqrt{x-a} = \sqrt{4x^2 - (4a+2)x + 2a} \quad \text{имеет ровно один корень на отрезке } [0; 1].$$

6.61. (ЕГЭ, 2017, 18)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\ln(4x-1) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 6a - a^2} = 0 \quad \text{имеет ровно один корень на отрезке } [0; 3].$$

Тренировочные задачи

6.62. Найдите все значения a , при которых уравнение $|x^2 - 4| = a + 1$ имеет ровно 3 различных корня. (Если значений a более одного, то в ответе запишите их сумму.)

6.63. Найдите все значения a , при которых уравнение $|2a - 5 + 3|x|| = 3$ имеет ровно 3 различных корня. (Если значений a более одного, то в ответе запишите их сумму.)

6.64. Найти все значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} (x - a)(ax - 2a - 3) \geq 0, \\ ax \geq 4, \end{cases}$$
 не имеет решений.

6.65. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$ имеет два корня.

6.66. Найти все такие a , что наименьшее значение функции $f(x) = |x^2 - (a + 1)x + a| + (a - 1)|x + 1|$ меньше 2.

6.67. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 1$ имеет ровно 10 решений.

6.68. (ЕГЭ, 2010, С5)

Найти все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5 - x} + |x + a| \leq 3$ является отрезок.

6.69. (ЕГЭ, 2010, С5)

Найдите все значения a , при которых функция $f(x) = x^2 + 4x + \left|x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right| - a$ принимает 1) только неотрицательные значения; 2) как положительные, так и отрицательные значения.

6.70. (ЕГЭ, 2010, С5)

Найдите все пары чисел p и q , для каждой из которых неравенство $|x^2 + px + q| > 2$ не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

7 Планиметрия

Задачи из демоверсий

7.1. (ЕГЭ, 2002, В8)

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2 м и 5 м.

7.2. (ЕГЭ, 2003, В10)

Площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$. Найдите AC , если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC , а медиана BM равна 5.

7.3. (ЕГЭ, 2004, В9)

“Тест”

В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60° , а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

7.4. (ЕГЭ, 2005, В11)

В треугольнике ABC проведена медиана AM . Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45^\circ$.

7.5. (ЕГЭ, 2006, В11)

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.

7.6. (ЕГЭ, 2007, В11)

“Тест”

Дан ромб $ABCD$ с острым углом B . Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K . Найдите длину отрезка CK .

7.7. (ЕГЭ, 2008, В11)

“Тест”

Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK , если M, P и K — середины сторон AB, CD, EF соответственно.

7.8. (ЕГЭ, 2009, В11)

В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A . Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E . Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$, $BE = 4\sqrt{5}$.

7.9. (ЕГЭ, 2009, В11 – 2-я демоверсия)

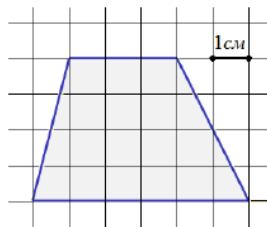
Средняя линия прямоугольной трапеции равна 9, а радиус вписанной в нее окружности равен 4. Найдите большее основание трапеции.

7.10. (ЕГЭ, 2010–2011, В4)

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 5$, $\cos A = 0,8$. Найдите BC .

7.11. (ЕГЭ, 2010–2011, В6; 2012–2013, В3)

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**7.12.** (ЕГЭ, 2012–2013, В6; 2014, В8; 2015, 7; 2016–2018, 6)

Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Найдите угол BOC , если угол BAC равен 32° .

7.13. (ЕГЭ, 2010–2013, С4; “Покори Воробьевы горы”, 2006, 3(10))

На стороне AB угла $\angle ABC = 30^\circ$ взята такая точка D , что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A , D и касающейся прямой BC .

7.14. (ЕГЭ, 2014, С4; 2015, 18; 2016–2018, 16)

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C . а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны. б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Задачи ЕГЭ

7.15. (ЕГЭ, 2002, В8)

В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания со вписанной окружностью в отношении $8 : 5$, считая от вершины, лежащей против основания. Найдите основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.

7.16. (ЕГЭ, 2002, В8)

Около окружности с центром O описан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB . Луч AO пересекает катет BC в точке L . Найдите длину отрезка CL , если точка касания с окружностью делит катет BC на отрезки $CH = 4$ и $BH = 12$.

7.17. (ЕГЭ, 2002, В8)

Окружность с центром O вписана в прямоугольный треугольник ABC . Она касается гипотенузы AB в точке M , причем $AM = 12$ и $BM = 8$. Найдите площадь треугольника AOB .

7.18. (ЕГЭ, 2002, В8)

В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, медиана BM равна $10\sqrt{3}$. Окружность, вписанная в треугольник ABM , касается гипотенузы AC в точке T . Найдите катет BC , если $AT : TC = 1 : 3$.

7.19. (ЕГЭ, 2002, В8)

В треугольник ABC вписана окружность с центром O . Луч AO пересекает сторону BC в точке K . Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 13$, $AC = 15$, $BK = 6,5$.

7.20. (ЕГЭ, 2006, В11)

Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна $\sqrt{10}$, а косинус угла при основании трапеции равен $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

7.21. (ЕГЭ, 2006, В11)

“Тест”

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M . Найдите периметр треугольника CBT , если $AB = 21$, $BM = 35$, $MD = 9$.

7.22. (ЕГЭ, 2007, В11)

Найдите периметр правильного шестиугольника $ABCDEF$, если $AE = 10\sqrt{3}$.

7.23. (ЕГЭ, 2008, В11)

Точка L лежит на стороне AB параллелограмма $ABCD$ так, что $AL : LB = 3 : 4$. Прямая CL пересекает луч DA в точке K , а площадь треугольника AKL равна 36. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

7.24. (ЕГЭ, 2008, В11)

Равнобедренная трапеция описана около окружности. Точка касания с окружностью делит боковую сторону трапеции в отношении $2 : 3$, а радиус окружности равен $12\sqrt{6}$. Найдите меньшее основание трапеции.

7.25. (ЕГЭ, 2009, В11 – досрочный)

Найдите диагональ равнобедренной трапеции, если ее площадь равна $10\sqrt{6}$, а средняя линия равна 5.

7.26. (ЕГЭ, 2009, В11)

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 21, диагональ BD равна $3\sqrt{2}$, $\angle ABD = 45^\circ$. Найдите сторону BC .

7.27. (ЕГЭ, 2010, В4)

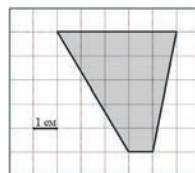
В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos B = \frac{4}{5}$, $AB = 10$. Найдите AC .

7.28. (ЕГЭ, 2010, В4)

В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 30$, $AC = 24$. Найдите $\sin A$.

7.29. (ЕГЭ, 2010, В6)

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



7.30. (ЕГЭ, 2015, 6)

В четырехугольник $ABCD$, периметр которого равен 48, вписана окружность, $AB = 15$. Найдите CD .

7.31. (ЕГЭ, 2015, 7)

Угол ACB равен 51° . Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точек D и E , равна 144° . Найдите $\angle DAE$. Ответ дайте в градусах.

7.32. (ЕГЭ, 2017, 16)

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 8MB$ и $DN = 2CN$. а) Докажите, что $AD = 4BC$. б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{6}$.

7.33. (ЕГЭ, 2017, 16)

В треугольник ABC , в котором длина стороны AC меньше длины стороны BC , вписана окружность с центром O . Точка B_1 симметрична точке B относительно CO . а) Докажите, что A, B, O и B_1 лежат на одной окружности. б) Найдите площадь четырехугольника $AOBB_1$, если $AB = 10$, $AC = 6$ и $BC = 8$.

7.34. (ЕГЭ, 2010, C4)

В параллелограмме $ABCD$ $AB = 24$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 3 : 5$. Найдите BC .

7.35. (ЕГЭ, 2011, C4)

Дана окружность радиуса 4 с центром в точке O , расположенной на биссектрисе угла, равного 60° . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

7.36. (ЕГЭ, 2011, C4)

Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключенный внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $\frac{5}{6}$.

7.37. (ЕГЭ, 2011, С4)

Окружность радиуса 6 вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 18. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

7.38. (ЕГЭ, 2012, С4)

Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом 120° . Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

7.39. (ЕГЭ, 2013, С4)**“Тест”**

Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внутренним образом в точке K , MO_1 и NO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причем $\angle MO_1O_2 = 120^\circ$. Найдите MN .

7.40. (ЕГЭ, 2013, С4)

Окружности радиусов 2 и 10 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает меньшую окружность в точке B , а большую — в точке C . Найдите площадь треугольника BCO_2 , если $\angle ABO_1 = 22,5^\circ$.

Тренировочные задачи**7.41.** (ЕГЭ, 2009, В3)

Бассейн прямоугольной формы, ширина которого равна 12 м, длина 25 м, а глубина 2 м, доверху заполняется водой с постоянной скоростью за 1 час. Найдите площадь (в м^2) выступающих над водой стенок бассейна, если известно, что система подачи воды работала только 45 минут.

7.42. (ЕГЭ, 2007, В11)

В правильном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ сторона равна $8\sqrt{3}$. Отрезок BC соединяет середины сторон A_3A_4 и A_5A_6 . Найдите длину отрезка, соединяющего середину стороны A_1A_2 с серединой отрезка BC .

“Тест”**7.43.** (ЕГЭ, 2010, С4)

Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B . Известно, что расстояние между центрами равно a , причем $r < R$ и $r + R < a$. Найдите AB .

8 Стереометрия

Задачи из демоверсий

8.1. (ЕГЭ, 2003, В9)

Дана призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60° . Отрезок $D_1 A$ перпендикулярен плоскости основания. Найдите длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6(\sqrt{3} + 2)$.

8.2. (ЕГЭ, 2004, В8)

“Тест”

Двугранные углы при основании правильной четырехугольной пирамиды равны 45° , а площадь боковой поверхности равна $36\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.

8.3. (ЕГЭ, 2005, В10)

Концы отрезка BC лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка BC равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра равен 45° . Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки B и C .

8.4. (ЕГЭ, 2006, В10)

Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является прямоугольник $ABCD$, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$. Высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину D_1 и середины ребер AD и CD . Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

8.5. (ЕГЭ, 2007, В10)

Высота правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 8, а сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости $A_1 BD$.

8.6. (ЕГЭ, 2008, В10)

Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — правильный треугольник ABC , сторона которого равна $8\sqrt{3}$. На ребре отмечена точка P так, что $BP : PB_1 = 3 : 5$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP , если расстояние между прямыми BC и A_1C_1 равно 16.

8.7. (ЕГЭ, 2009, В10)**“Тест”**

Через образующую цилиндра AB проведены два сечения, пересекающие основание цилиндра: одно — по диаметру AM , другое — по хорде AD . Угол между плоскостями этих сечений равен 60° . Площадь боковой поверхности цилиндра равна 60π . Найдите площадь того из данных сечений цилиндра, которое проходит через хорду AD .

8.8. (ЕГЭ, 2009, В10)

Концы отрезка MK лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой MK и плоскостью основания равен 30° , $MK = 8$, площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π . Найдите периметр осевого сечения цилиндра.

8.9. (ЕГЭ, 2009, В10 – демоверсия МИОО)

В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Объем параллелепипеда равен 4. Чему станет равен объем параллелепипеда, если его высоту увеличить в 3 раза, а стороны квадрата, лежащего в основании, уменьшить в два раза?

8.10. (ЕГЭ, 2010–2011, В9; 2012–2013, В11)

Объем первого цилиндра равен 12 м^3 . У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в м^3 .

8.11. (ЕГЭ, 2012–2013, В9)

Диагональ AC основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 6. Высота пирамиды SO равна 4. Найдите длину бокового ребра SB .

8.12. (ЕГЭ, 2014, В10; 2015, 9; 2016-2018, 8)

В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

8.13. (ЕГЭ, 2014, В13; 2015, 12)

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

8.14. (ЕГЭ, 2004, С3)

Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке A . В этой же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку C) и точку сферы, диаметрально противоположную точке A , проходит через точку M . Точка M является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если $AC = 1$.

8.15. (ЕГЭ, 2005, С4)

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1 , BB_1 и CC_1 — боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1 , пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости $CB B_1$. Известно, что $AB = 12$, $A_1M : MC_1 = 3 : 1$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

8.16. (ЕГЭ, 2007, С4)**“Тест”**

Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

8.17. (ЕГЭ, 2005, С4; 2008, С4)

Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN , если T — середина ребра ML .

8.18. (ЕГЭ, 2004, С3; 2009, С4)

В шар радиуса $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 45° . Найдите объем призмы.

8.19. (ЕГЭ, 2009, С2 – демоверсия МИОО)

К диагонали куба провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

8.20. (ЕГЭ, 2010–2013, С2)

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

8.21. (ЕГЭ, 2014, С2)

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 5$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2 : 3$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

8.22. (ЕГЭ, 2015, 16; 2016–2018, 14)

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно. а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны. б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

Задачи ЕГЭ

8.23. (ЕГЭ, 2002, В9)

В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной, равной 2. Одна из боковых граней также равносторонний треугольник и перпендикулярна основанию. Найдите объем пирамиды.

8.24. (ЕГЭ, 2002, В9)

В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 10, 8 и 6. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

8.25. (ЕГЭ, 2002, В9)

Основание пирамиды — квадрат, сторона которого равна 3. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом, тангенс которого равен $\frac{4}{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

8.26. (ЕГЭ, 2002, В9)

В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Точка M делит ребро SB в отношении $2 : 3$, считая от точки S . Через точку M проходит сечение, параллельное основанию пирамиды. Найдите его площадь.

8.27. (ЕГЭ, 2002, В9)**“Тест”**

Боковое ребро MC пирамиды $MABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC и равно 4. Плоскость, параллельная основанию, проходит через середину высоты пирамиды и пересекает боковые ребра в точках A_1, B_1 и C_1 . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $MA_1B_1C_1$, если $AC = BC = 5$, а высота CK треугольника ABC равна 3.

8.28. (ЕГЭ, 2006, В10)

Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 18. Основание призмы — треугольник ABC , площадь которого равна 12, $AB = 5$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC_1 и плоскостью основания призмы.

8.29. (ЕГЭ, 2006, В10)

Основание прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 60^\circ$. Тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью $A_1 BC$ равен 6. Найдите высоту параллелепипеда.

8.30. (ЕГЭ, 2007, В10)**“Тест”**

Угол между образующими CA и CB конуса равен 60° , высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

8.31. (ЕГЭ, 2008, В10)

Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно $\sqrt{44}$, точка O — середина стороны BC основания призмы, $BC = 4$. Найдите синус угла между прямой B_1O и плоскостью боковой грани ABB_1A_1 .

8.32. (ЕГЭ, 2008, В10)

Радиус основания цилиндра равен 7, высота цилиндра равна 25. В окружность основания вписан остроугольный треугольник ABC такой, что $AC = 4\sqrt{10}$ и $BA = BC$. Отрезки AA_1 и BB_1 — образующие цилиндра. Найдите тангенс угла между плоскостью ACA_1 и плоскостью AB_1C .

8.33. (ЕГЭ, 2009, В10 – досрочный)

Диаметр и хорда AB основания конуса равны 34 и 30, а тангенс угла наклона образующей к плоскости основания равен 2. Найдите тангенс угла наклона между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения, проходящего через вершину конуса и хорду AB .

8.34. (ЕГЭ, 2009, В10)**“Тест”**

Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $2\sqrt{6}$. Отрезки AB и CD — диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA_1 — его образующая. Известно, что $AD = \sqrt{3}$. Найдите косинус угла между прямыми A_1C и BD .

8.35. (ЕГЭ, 2010, В9)

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3. Объем параллелепипеда равен 72. Найдите высоту цилиндра.

8.36. (ЕГЭ, 2010, В9)

Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 2 и 2. Боковые ребра равны $\frac{10}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

8.37. (ЕГЭ, 2011, В9)**“Тест”**

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите объем параллелепипеда.

8.38. (ЕГЭ, 2012, В11)

В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 324 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 9 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

8.39. (ЕГЭ, 2013, В11)

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 6.

8.40. (ЕГЭ, 2015, 9)

В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 17, а сторона основания равна 8. Найдите высоту пирамиды.

8.41. (ЕГЭ, 2016, 8)

Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

8.42. (ЕГЭ, 2015, 12)

В цилиндрический сосуд налили 600 куб. см. воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,6 раза. Найдите объем детали. Ответ выразите в куб. см.

8.43. (ЕГЭ, 2017, 8)

Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

8.44. (ЕГЭ, 2003, С3)

Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

8.45. (ЕГЭ, 2003, С3)**“Тест”**

В правильную треугольную призму, объем которой равен 36, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

8.46. (ЕГЭ, 2004, С3)**“Тест”**

Все ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Углы BAA_1 и CAA_1 равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CA_1B_1 , если площадь грани ABB_1A_1 равна $8\sqrt{3}$.

8.47. (ЕГЭ, 2005, С4)

Отрезок PN , равный 8, — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите площадь треугольника KLT , где K и T — середины ребер PM и NM соответственно.

8.48. (ЕГЭ, 2005, С4)

Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D — последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды $FABCD$ наибольший. Найдите синус угла между прямой AM и плоскостью BFD , если M — середина ребра FB .

8.49. (ЕГЭ, 2007, С4)

В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC в котором $\angle C = 60^\circ$, $AC = 14$, $BC = 8$. Боковые грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а ребро AD равно $4\sqrt{3}$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD , является основанием второй пирамиды, вершина которой в точке C . Найдите объем второй пирамиды.

8.50. (ЕГЭ, 2007, С4)

Стороны AB и BC основания прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ равны 7 и 5 соответственно, боковое ребро AA_1 равно 3. Точки L, K, M лежат на ребрах AD, A_1B_1, B_1C_1 так, что $AL : AD = 3 : 5$, $A_1K : A_1B_1 = 4 : 7$, $B_1M : B_1C_1 = 2 : 5$. Найдите объем пирамиды с вершиной K и основанием AMC_1L .

8.51. (ЕГЭ, 2008, С4)

Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен 6. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, AMC, CMB равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB .

8.52. (ЕГЭ, 2009, С4)

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1B_1C_1D_1$, $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6\sqrt{5}$. Точка M лежит на диагонали BC_1 . Точка N лежит на диагонали BD . Прямые AM и A_1N пересекаются. Определить тангенс угла между прямой MN и плоскостью ABC , если $BN : ND = 2 : 3$.

8.53. (ЕГЭ, 2010, С2)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 12\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM , где M — точка пересечения медиан грани SBC .

8.54. (ЕГЭ, 2010, С2)

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 4$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1 .

8.55. (ЕГЭ, 2011, С2)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

8.56. (ЕГЭ, 2011, С2)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 4. Найдите расстояние от точки C до прямой $D_1 E_1$.

8.57. (ЕГЭ, 2012, С2)

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка D — середина ребра CC_1 . Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1 .

8.58. (ЕГЭ, 2012, С2)

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

8.59. (ЕГЭ, 2013, С2)

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ известны ребра $AB = 8$, $AD = 7$, $AA' = 5$. Точка W принадлежит ребру DD' и делит его в отношении $1 : 4$, считая от вершины D . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C , W и A' .

8.60. (ЕГЭ, 2013, С2)

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD .

8.61. (ЕГЭ, 2017, 14)

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$.

Ответы

- 1.1. 2. 1.2. 20. 1.6. $-0,25$. 1.7. 4. 1.8. 25. 1.9. 4,5.
 1.10. 6. 1.11. 2,6. 1.13. 3,5. 1.14. 3. 1.15. 17. 1.16. 2.
 1.18. 2. 1.19. -2 . 1.20. 6. 1.21. 1,2. 1.22. 2. 1.23. 13.
 1.24. 5. 1.25. 5. 1.26. 12. 1.27. 9. 1.28. 6; 11. 1.29. -2 .
 1.31. $\pm \frac{1}{2}$. 1.32. $[-2; -1] \cup [0; 1]$. 1.33. -1 . 1.34. $(0; 1), (1; 2)$.
 1.35. $(-\infty; 1], (\log_3 5; 2)$. 1.36. $(2; \log_2 11]$. 1.37. $\{-3\} \cup \{0\} \cup [1; 2)$.
 1.38. а) 44; б) отрицательных; в) 17. 1.39. 3,25. 1.40. 36.
 1.41. -3 . 1.44. $-0,5$. 1.47. 0,6. 1.48. 16. 1.49. 1.
 1.50. 91. 1.51. 4. 1.52. 4. 1.53. 7. 1.54. -25 .
 1.55. 12. 1.56. 6. 1.57. -17 . 1.58. 10. 1.59. 5. 1.61. 18. 1.62. 3.
 1.63. 0. 1.66. 3. 1.67. $-\frac{5}{2}$. 1.68. 0. 1.69. 0,9. 1.70. $[-1; +\infty)$.
 1.71. $(-\infty; -2]$. 1.72. $(-2; 1] \cup (4; +\infty)$. 1.73. $(-3; -1] \cup (5; +\infty)$.
 1.74. 27. 1.75. 8. 1.78. 4. 1.79. $(-\infty; -19,5) \cup (3; 5)$.
 1.80. $(-5,75; 11,25)$. 1.81. $(1; 4) \cup (\frac{20}{3}; +\infty)$. 1.82. 2,6. 1.83. 1,25.
 1.84. $\log_3 6$. 1.85. 4. 1.86. $\frac{1}{8}$. 1.87. -1 . 1.89. $(-\frac{9}{4}; -2)$.
 1.90. $1; 4 + 2\sqrt{3}$. 1.91. $-2; 5$. 1.93. 0,25. 1.94. -1 . 1.95. 0,5.
 1.96. $0; \frac{1}{3}$. 1.97. 36. 1.98. 0,25; 0,5.
 1.99. $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1] \cup \{0\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.
 1.100. $\{0\} \cup (\log_3 4; 2)$. 1.101. $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.
 1.102. $(-6; -5) \cup [3; \frac{7}{2}) \cup (5; \frac{11}{2}]$. 1.103. $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
 1.104.1 и 945. 1.105. 1 и 3861. 1.106. $(1; \frac{3}{2}) \cup (2; \frac{5}{2}) \cup (3; +\infty)$.
 1.107. $[-20; -9) \cup (1; 2]$. 1.108. $(-1; 0) \cup (5; 6]$. 1.109. 40 и 3.
 1.110. а) Нет; б) Да; в) 581. 1.111. а) 49; б) положительных; в) 22.
 1.112. $(0; \frac{1}{3}) \cup [1; 2 - \log_3 2]$. 1.113. $(-\infty; -3] \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup$
 $(2; \log_2 5] \cup (5; 6)$. 1.114. а) 24; б) 4032. 1.115. а) Да; б) 9; в) $\frac{9}{17}$.
 1.116. $(5; 6)$. 1.117. $\{-5\} \cup \{0\} \cup [1; 3)$. 1.119. 2. 1.120. 2.
 1.121. -1 . 1.122. 20. 1.123. 7,5. 1.124. 0. 1.125. 3. 1.127. 6.
 1.128. 11. 1.129. 14. 1.130. 7. 1.131. 2. 1.132. 1,5. 1.133. -2 .
 1.134. -3 . 1.135. $(1; 15)$. 1.136. $[-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}]$.
 1.137. $[-\sqrt{5}; -2) \cup (1; \sqrt{5}]$. 1.138. $(-\infty; -2] \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup$
 $(1; \sqrt{2}) \cup [2; +\infty)$. 1.139. $[1 - \sqrt{2}; \frac{2}{3}) \cup (1; 1 + \sqrt{2}]$.
 1.140. $(-2; 3]$. 1.142. $(-7; -6) \cup [2; 2,5) \cup (4; 4,5]$.
 1.143. $(-2; -1] \cup (1; 2)$. 1.144. 2.
 2.1. 5. 2.2. 4. 2.3. -2 . 2.4. 1. 2.6. 8. 2.7. $-1,5$.
 2.8. -3 . 2.9. 2,9. 2.10. -3 . 2.11. 0,6. 2.12. 7,6. 2.13. $-0,8$.

- 2.14.** 5. **2.15.** $\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.16.** $\pm \arccos \left(-\frac{1}{3} \right) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.
2.17. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. **2.18.** $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2.19. $x = 2, y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.
2.20. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2.21. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; корни,
 принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$: $\frac{7\pi}{3}, 3\pi - \arccos \frac{1}{3}$.
2.22. а) $\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$. б) $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$.
2.23. 4. **2.24.** 4. **2.26.** 4. **2.28.** 5,84. **2.29.** -1,5.
2.30. -3. **2.31.** 3,3. **2.32.** -5,2. **2.33.** 3,8. **2.34.** 1. **2.35.** -19.
2.36. 1,5. **2.37.** -3. **2.38.** а) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$.
2.39. $\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.40.** $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.43.** $[0,5; 1]$. **2.44.** $[-6; 2]$.
2.45. $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$. **2.46.** $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.47.** $5\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2.48. $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.49.** $\left(\pm \arccos \frac{1}{25} + 2k\pi, \frac{1}{25} \right), k \in \mathbb{Z}$.
2.50. $\left((-1)^k \arcsin \frac{1}{4} + k\pi, -\frac{1}{4} \right), k \in \mathbb{Z}$.
2.51. $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.52.** $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2.53. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2.55. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{11\pi}{6}$.
2.56. а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.
2.57. а) $k\pi, \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. б) $-3\pi, -\frac{17\pi}{6}, -2\pi$.
2.59. а) $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$. **2.60.** 0,8. **2.62.** 0,7.
2.63. -2. **2.65.** 0,2. **2.66.** -2,7. **2.67.** -3. **2.68.** -1,5.
2.69. 1,25. **2.70.** 0,05. **2.71.** $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.73.** 1.
2.74. а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$.
2.75. $(-1, k\pi), k \in \mathbb{Z}$. **2.77.** $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{1}{2} \right), k \in \mathbb{Z}$.
3.1. 20. **3.3.** 25. **3.4.** 20,2. **3.5.** 16550. **3.7.** 25.
3.8. 13. **3.9.** 5. **3.10.** 8. **3.11.** 320. **3.13.** 0,92.
3.14. 2,4. **3.15.** 751. **3.16.** 5. **3.17.** 7. **3.18.** 6. **3.20.** 42,25. **3.21.** 50.

- 3.22.** 3. **3.23.** 60%. **3.24.** 20. **3.25.** 8. **3.26.** 36.
3.27. 11. **3.28.** 3. **3.29.** 10. **3.31.** 0,46. **3.32.** 0,99. **3.33.** 30.
3.34. 13. **3.37.** 8. **3.38.** 0,15. **3.39.** 0,4. **3.40.** 0,64. **3.41.** 41.
3.42. 8 км/ч. **3.43.** 75 км/ч. **3.44.** 0,05. **3.45.** 47. **3.46.** 80.
3.47. 10. **3.50.** 3. **3.51.** 50. **3.52.** 40000.
3.53. 50. **3.54.** 9. **3.56.** 57000. **3.57.** 756. **3.58.** 11.
3.59. 30. **3.60.** 1,5. **3.61.** 4. **3.62.** 21. **3.63.** 10.
- 4.2.** 0. **4.3.** -1. **4.4.** 2e. **4.5.** 9. **4.6.** -1. **4.7.** $e - 2$. **4.8.** 8.
4.9. $y' = e^x + 6x$. **4.11.** 2. **4.12.** 2,7. **4.13.** $y' = \cos x - (x - 3) \sin x$.
4.14. $y' = 6x^5 - 4 \cos x$. **4.15.** -2. **4.16.** 4. **4.17.** 2. **4.18.** -13.
4.19. 1. **4.20.** -5. **4.21.** $\frac{22}{3}$. **4.22.** 12 дм, 12 дм и 9 дм. **4.23.** 2.
4.24. 2. **4.25.** 2. **4.26.** 0,2. **4.27.** -5. **4.28.** -16. **4.29.** 12.
4.30. 5. **4.32.** 34. **4.33.** 18. **4.34.** -77. **4.35.** -7. **4.38.** 367.
4.40. 3. **4.41.** -2. **4.42.** -0,4. **4.44.** -96. **4.45.** 0,75.
4.46. -18. **4.47.** 5. **4.48.** -6. **4.49.** (2, 3). **4.50.** 2.
4.51. а) $-72x^7 - 6x^4$; б) $6x \cos x - 3x^2 \sin x$; в) $e^x - 4x$;
 д) $e^x(1 + \sin x + \cos x)$. **4.52.** а) $-20x^3 + 7x^5$; б) $10x \sin x + 5x^2 \cos x$;
 в) $3,6x^2 \sin x - 7,2x \cos x$; д) $e^x - 7x^6$; е) $e^x - \cos x$;
 ф) $12x^{11} + \cos x$. **4.53.** а) -6; б) 1; в) 32; д) 1; е) -6.
4.54. а) $2\pi - 1$; б) $1 + 2 \sin 1$; в) $-5 + 4e$; д) -1; е) -0,5; ф) -1.
4.55. 0. **4.57.** 3. **4.58.** а) 1,5; б) 12. **4.59.** а) 3; б) 1.
4.60. а) 3; б) 1; в) 3; д) -10. **4.61.** а) 12; б) 2; в) 0; д) -3;
 е) 15; ф) 8; г) -8; х) -6; и) 5. **4.63.** 0,125. **4.64.** 4. **4.65.** $x + 2006$.
4.67. -4. **4.68.** 30. **4.69.** -1. **4.70.** -2. **4.71.** 3. **4.73.** 45.
4.75. $(-\infty; +\infty)$. **4.76.** $[2\sqrt{5}; 10]$. **4.77.** $\frac{3}{4}$. **4.78.** 3.
4.79. 125. **4.81.** 5,4. **4.82.** -64. **4.83.** $[-128; 0]$. **4.84.** -400.
4.85. $[-3\sqrt{5}; 2]$. **4.86.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.88.** 5. **4.89.** -1. **4.90.** 20.
- 5.2.** -2. **5.3.** 5. **5.6.** 0,4. **5.7.** 4. **5.8.** -1,5. **5.9.** -3. **5.10.** -0,5.
5.11. 4. **5.12.** 2. **5.13.** 2. **5.14.** $(1; 8) \cup (32; +\infty)$. **5.15.** 2. **5.16.** 3.
5.18. -0,1. **5.19.** -1,25. **5.20.** 66. **5.23.** 4. **5.24.** -1. **5.25.** 7.
5.26. 2. **5.28.** -1. **5.29.** -2. **5.30.** 3. **5.31.** 4,2. **5.32.** 1. **5.33.** -3.
5.34. 0,6. **5.35.** -1,2. **5.36.** $(-\infty; -\log_3 7) \cup (-\log_3 2; 0)$.
5.38. $(2 - \sqrt{6}; 4)$. **5.40.** -7; 1; $3 \pm \sqrt{2}$. **5.41.** -1; 13; $6 \pm \sqrt{23}$.
- 6.2.** 8. **6.3.** 7. **6.4.** 7. **6.5.** $[-20; -1,5]$. **6.6.** (0,8; 0,98]. **6.7.** $(-\infty; 0,7]$.
6.8. -1,5; -1. **6.9.** $(-1; 2]$. **6.10.** $(-\infty; -9) \cup [\frac{7}{9}; +\infty)$. **6.11.** 6.
6.12. $[-8; 6]$. **6.13.** $a = 4$. **6.14.** $(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6})$. **6.15.** 9. **6.17.** $[5; 12]$.
6.18. (1; 8]. **6.19.** $(0; 1) \cup (16; +\infty)$. **6.20.** (-4; 4).

- 6.22.** $(0; 1) \cup (1; 6] \cup (12; +\infty)$. **6.23.** $(-1; 1)$. **6.24.** $(0; 13]$.
6.25. $[-6; 0) \cup (0; 6]$. **6.27.** $(0; 5]$. **6.28.** $(1; 5)$. **6.29.** $(2; 3] \cup [5; 6)$.
6.32. $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$. **6.33.** $[-7; -4)$.
6.34. $x = 2, 5$. **6.35.** $x = 5$. **6.36.** $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. **6.37.** 3.
6.39. $(-\infty; -6] \cup (\frac{2}{5}; +\infty)$. **6.40.** $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$.
6.41. $(-\infty; -3) \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$. **6.42.** $[-1; 2\sqrt[4]{18} - 5)$.
6.43. $[-1; 2\sqrt[4]{24} - 5)$. **6.44.** $[-2; 2\sqrt[4]{27} - 6)$.
6.46. $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. **6.47.** $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
6.48. $(4; +\infty)$. **6.49.** $a \in (-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2)$.
6.50. $a \in (-\infty; \frac{1}{6}) \cup (4 + \sqrt{14}; +\infty)$. **6.51.** 3, 5; 4; 4, 5.
6.52. $8 - 3\sqrt{2}, 5, 2 + 3\sqrt{2}$. **6.53.** $3; 2 + \sqrt{65}$. **6.54.** $(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}]$.
6.55. $(\frac{6}{5}; \frac{5}{4})$. **6.58.** При $a < -5\sqrt{5} - 5$ и $a > 5\sqrt{5} - 5$ решений нет;
 при $a = \pm 5\sqrt{5} - 5$ и $a \in (-10; 0)$ — два решения;
 при $a = -10; 0$ — три решения;
 при $a \in (-5\sqrt{5} - 5; -10) \cup (0; 5\sqrt{5} - 5)$ — четыре решения.
6.59. $a \in (-\infty; 0) \cup [\frac{3\pi}{4}; \pi]$. **6.60.** $a < 0; 2 - \sqrt{2} \leq a \leq 1$.
6.61. $a \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \cup [5\frac{1}{2}; 5\frac{3}{4})$. **6.62.** 3. **6.63.** 1. **6.64.** $-2 < a \leq 0$.
6.65. $-24 < a < 18$. **6.66.** $a < 2$. **6.67.** $-10\pi < a < -8\pi, 8\pi < a < 10\pi$.
6.68. $a \in (-8; -\frac{9}{4}] \cup (-2; 4)$. **6.69.** 1) $a \leq -\frac{57}{32}$; 2) $a > -\frac{57}{32}$.
6.70. $p = -6, q = 7$.
7.1. 24. **7.2.** 14. **7.4.** 21. **7.5.** 12. **7.8.** 8. **7.9.** 12. **7.10.** 3. **7.11.** 18.
7.12. 64. **7.13.** $R_1 = 1; R_2 = 7$. **7.14.** 3, 2. **7.15.** 30. **7.16.** 6.
7.17. 40. **7.18.** 30. **7.19.** 84. **7.20.** 1, 5. **7.22.** 60. **7.23.** 224.
7.24. 48. **7.25.** 7. **7.26.** 5. **7.27.** 6. **7.28.** 0, 6. **7.29.** 15. **7.30.** 9.
7.31. 21° . **7.32.** 4. **7.33.** 18. **7.34.** 88 или 33. **7.35.** 2 или 14.
7.36. $\frac{9}{2}$ или $\frac{21}{4}$. **7.37.** $\frac{1}{2}$ или $\frac{162}{299}$. **7.38.** $\sqrt{3} - 1$ или $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. **7.40.** $20\sqrt{2}$;
 или $30\sqrt{2}$. **7.41.** 37. **7.43.** $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ или $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.
8.1. 3. **8.3.** 24. **8.4.** 0, 6. **8.5.** 4, 8. **8.6.** 0, 5. **8.8.** 28.
8.9. 3. **8.10.** 9. **8.11.** 5. **8.12.** 4. **8.13.** 20. **8.14.** $\frac{4}{15}$.
8.15. $324\sqrt{3}$. **8.17.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **8.18.** 36. **8.19.** На три равные части.
8.20. 30° . **8.21.** $\sqrt{133}$. **8.22.** $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$. **8.23.** 1. **8.24.** 40. **8.25.** 15.
8.26. 4. **8.28.** 3, 75. **8.29.** 18. **8.31.** 0, 25. **8.32.** 0, 4. **8.33.** 4, 25.
8.35. 2. **8.36.** 20. **8.38.** 4. **8.39.** 12. **8.40.** 15. **8.41.** 12.
8.42. 360. **8.43.** 166, 5. **8.44.** 144. **8.47.** $4\sqrt{5}$. **8.48.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **8.49.** 28. **8.50.** 9.
8.51. $2\sqrt{6}$. **8.52.** 5. **8.53.** $\operatorname{arctg} \frac{5}{48}$. **8.54.** $\operatorname{arctg} \frac{6}{5}$. **8.55.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.56.** $\frac{\sqrt{91}}{2}$.
8.57. $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **8.58.** $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{13}}{2}$. **8.59.** $2\sqrt{4209}$. **8.60.** $13\sqrt{2}$. **8.61.** 120.

Литература

- [1] Денищева Л. О., Бойченко Е. М., Глазков Ю. А. и др. Математика. Единый государственный экзамен. КИМ. М.: Изд-во “Просвещение”, 2003.
- [2] Денищева Л. О., Глазков Ю. А., Краснянская К. А. и др. ЕГЭ 2009. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся/ ФИПИ-М.: Изд-во “Интеллект-Центр”, 2009.
- [3] Клово А. Г. Единственные реальные варианты заданий для подготовки к ЕГЭ-2007. ФИПИ. М.: Изд-во “Астрель”, 2007.
- [4] Кочагин В. В., Бойченко Е. М., Глазков Ю. А. и др. Федеральный институт педагогических измерений. ЕГЭ-2008. Математика. М.: Изд-во “АСТ, Астрель”, 2007.
- [5] Кочагин В. В., Кочагина М. Н. Интенсивная подготовка. Единый государственный экзамен. ЕГЭ-2008. Математика. Репетитор. М.: Изд-во “ЭКСМО”, 2008.
- [6] Некрасов В. Б., Гущин Д. Д., Математика. Единый государственный экзамен. КИМ. М.: Изд-во “Просвещение”, 2009.
- [7] Сергеев И. Н. Математика. Единый государственный экзамен. Задания типа С. М.: Изд-во “Экзамен”, 2009.
- [8] Математика. ЕГЭ. Типовые текстовые задания. Разработано МИОО. Под ред. Семенова А. Л., Яценко И. В.: Изд-во “Экзамен”, 2010.