Новосибирский государственный университет
Специализированный учебно-научный центр

Н.А. Бунеева
А.М. Каргаполов

Задачи по стереометрии (координатный метод)

Новосибирск
2006

Бунеева Н.А., Каргаполов А.М.

Задачи по стереометрии (координатный метод).

Пособие содержит основные формулы и подходы для решения задач по стереометрии с помощью координатного метода. Рассмотрено большое количество задач различной степени трудности.

Сборник будет полезен для учителей и школьников старших классов и всем, кто готовится к вступительным экзаменам по математике в вузы.

Глава 1. "Симпатичные " фигуры

Рассмотрим, какие фигуры чаще всего встречаются в задачах по стереометрии. Из них выберем те, с которыми нам было бы приятнее работать при решении той или иной задачи. Конечно,

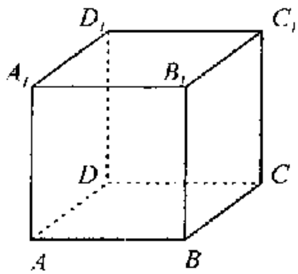


Рис. 1

о вкусах не спорят, но очевидно, что куб нам будет симпатичнее, чем какая – либо другая фигура, например, правильная пирамида, а она в свою очередь симпатичнее произвольной. С чем же это связано? Давайте попробуем разобраться в этом, рассмотрев некоторые фигуры, которые нам нравятся по тем или иным причинам.

Пусть первой фигурой будет куб (рис.1). Согласны? Вторая фигура - прямоугольный параллелепипед (рис.2). Теперь рассмотрим четырехугольные пирамиды с основанием квадрат, либо прямоугольник.

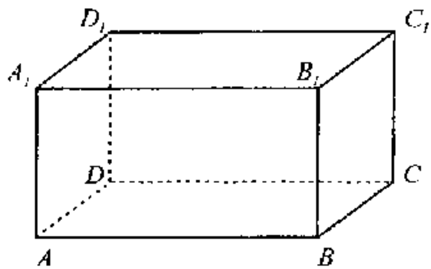


Рис. 2

Фигура (3) - правильная четырехугольная пирамида, у которой основание ABCD – квадрат и высота SF попадает в центр описанной (около

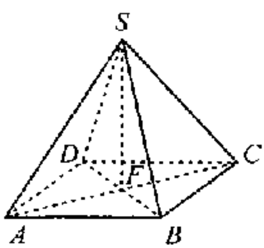


Рис. 3

основания) окружности, т.е. в точку пересечения диагоналей основания. Следующей нашей фигурой (4) является пирамида, у которой основание ABCD также квадрат, одно боковое ребро (например, SD) перпендикулярно основанию. Следовательно, ребро SD является высотой пирамиды.

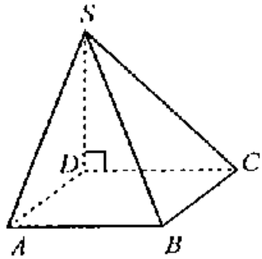


Рис. 4

Фигуры (5) и (6) аналогичны фигурам (3) и (4), соответственно. Только основания у этих фигур не квадраты, а прямоугольники.

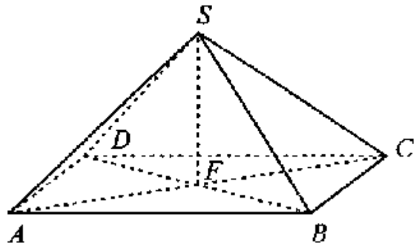


Рис. 5

Теперь рассмотрим треугольные пирамиды. Фигура (7) – правильный тетраэдр. Известно, что высота тетраэдра DF попадает в центр описанной (около основания ABC) окружности.

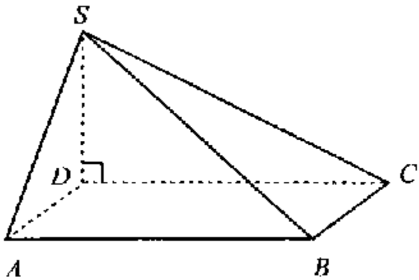


Рис. 6

Рассмотрим также и фигуру (8) – правильную

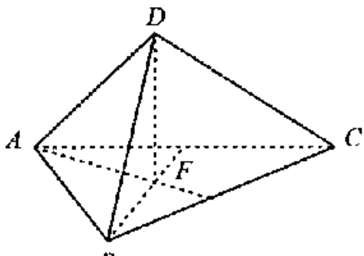


Рис. 7

треугольную пирамиду, у которой основание ABC – правильный треугольник, боковые ребра равны между собой (DA = DB = DC).

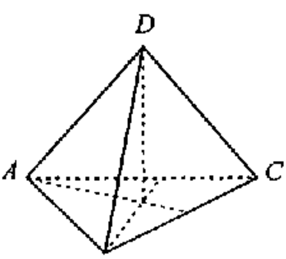


Рис. 8

Высота пирамиды DF попадает в центр правильного треугольника ABC.

Фигура (9) – треугольная пирамида, которая в основании имеет правильный треугольник ABC и одно боковое ребро (например, AD), перпендикулярное основанию.

Далее рассмотрим пирамиды, у которых основания - прямоугольные треугольники. Фигура (10) имеет вид: ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A, ребро AD перпендикулярно основанию ABC.

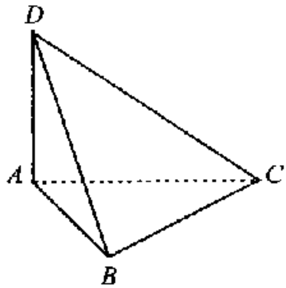


Рис. 9

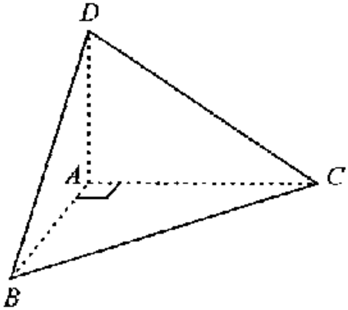


Рис. 10

Другими словами, ребра AB, AC и AD попарно перпендикулярны.

Фигура (11) имеет вид: ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A, ребро CD перпендикулярно основанию ABC. Другими словами, ребра AB, AC и CD попарно перпендикулярны.

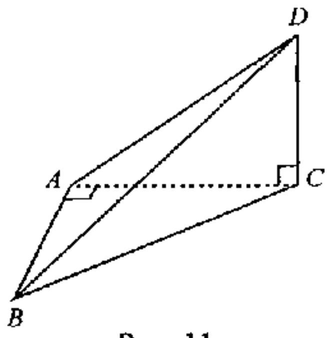


Рис. 11

Следующая фигура (12) имеет в основании прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A и её боковые ребра равны между собой.

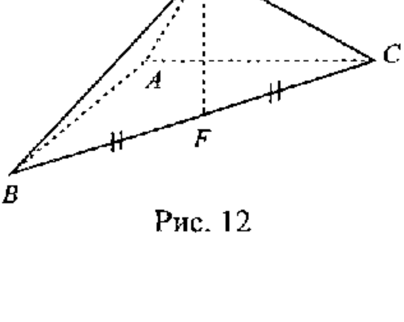


Рис. 12

Это означает, что высота DF пирамиды попадает в центр описанной (около основания ABC) окружности, т.е. точка F - середина гипотенузы BC.

Осталось рассмотреть треугольные призмы.

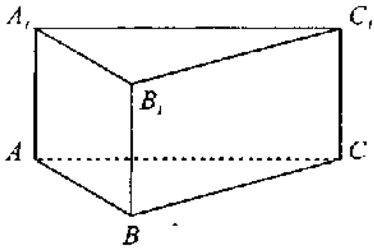


Рис. 13

Фигура (13) – правильная призма, основаниями являются правильные треугольники, боковые ребра перпендикулярны основанию.

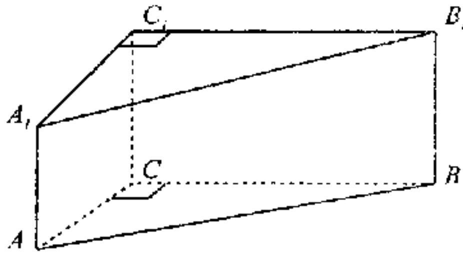


Рис. 14

Фигура (14) также прямая призма, но в основании лежит прямоугольный треугольник ABC.

Рассмотренные фигуры договоримся называть "симпатичными". Что объединяет эти фигуры?

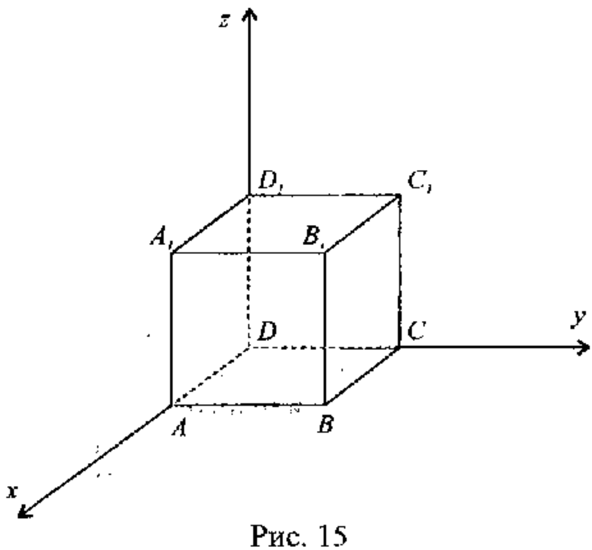


Рис. 15

Простая возможность введения системы координат и, как следствие, решение задач, содержащих в условии "симпатичную" фигуру, с помощью метода координат. Рассмотрим самую "симпатичную" фигуру (1) - куб.

Введем систему координат, как показано на рисунке (15).

Если длина ребра куба равна 1, то координаты вершин записываются просто. Например, A(1; 0; 0), B(1; 1; 0), C(0; 1; 0), D(0; 0; 0), A_1(1; 0; 1) и так далее.

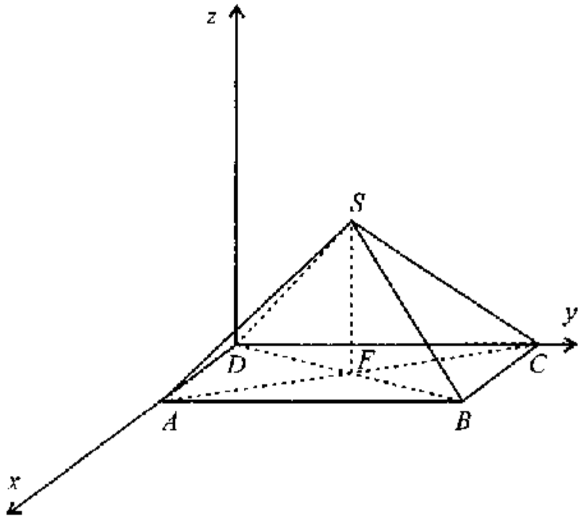


Рис. 16

Понятно, что для фигур (2), (3), (4), (5) и (6) оси вводим аналогично. И координаты вершин вычисляются легко (при заданных рёбрах). Рассмотрим, например, фигуру (5). Пусть AD = 4, AB = 10, высота SF – 6.

Введём систему координат, как показано на рисунке (16).

Очевидно, что координаты вершин пирамиды: A(4; 0; 0), B(4; 10; 0), C(0; 10; 0), D(0; 0; 0), S(2; 5; 6). Понятно, что для фигур (10), (11), (12), (14) при заданных ребрах и высотах координаты

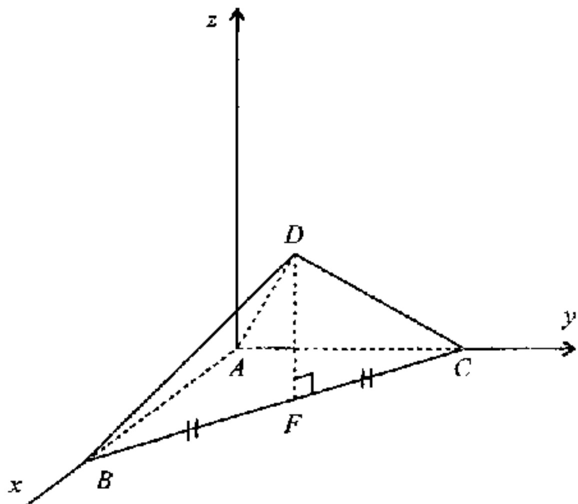


Рис. 17

вершин находятся просто.

Например, рассмотрим фигуру (12). Пусть AB = 6, AC – 8, AD = BD – CD – 13. Введём систему координат, как показано на рисунке (17).

Имеем A(0; 0; 0),
B(6; 0; 0),
C(0; 8; 0).
Очевидно, что
BC = 10.
Пусть точка F – середина BC.
Тогда просто найти координаты точки F (3; 4; 0). Так как

$FC = \frac{1}{2}BC = 5$,

тогда

$DF = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

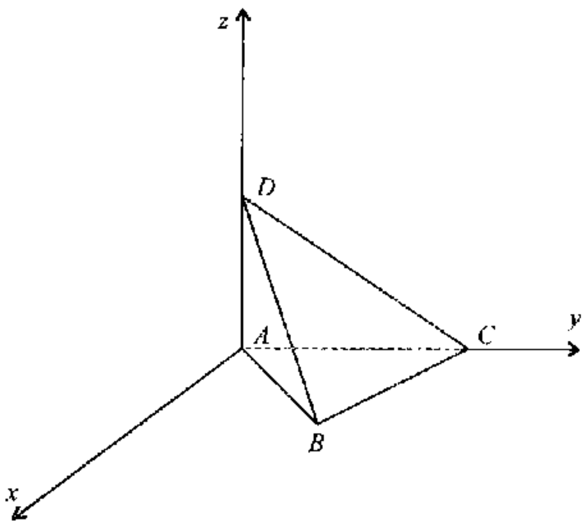


Рис. 18

Следовательно, координаты точки D(3; 4; 12).

Осталось рассмотреть фигуры (7), (8), (9), (13).

Рассмотрим фигуру (9) и введём систему координат, как показано на рисунке (18).

Понятно, что A(0; 0; 0), C(0; 1; 0), D(0; 0; 4).

Найдем координаты вершины B.

Сделаем следующий чертеж (вид сверху).

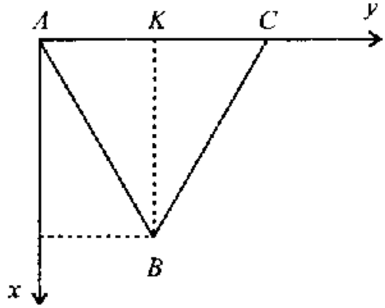


Рис. 19

Ясно, что $z_B = 0$, $y_B = AK = \frac{1}{2}$,

$x_B = BK = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Заметим, что x_B равен длине высоты в правильном треугольнике ABC (этот факт можно использовать для запоминания $x_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

В итоге имеем координаты точки B($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0).

Координаты фигуры (13) находятся аналогично. Остались две фигуры (7) и (8). Заметим, что координаты точек A, B и C вычисляются одинаково для обеих фигур: A(0; 0; 0), C(0; 1; 0), B($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0).

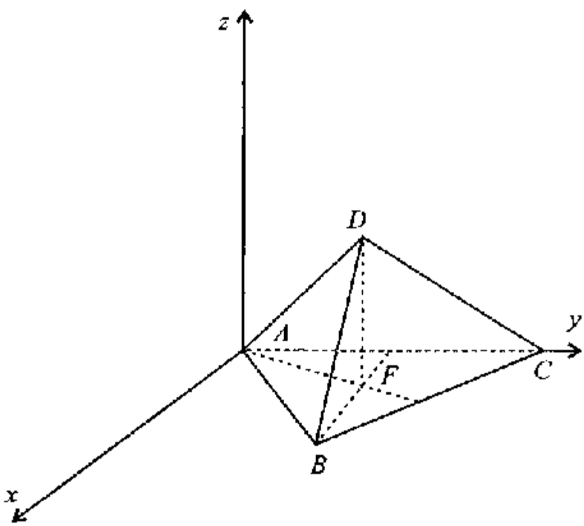


Рис. 20

Найдем координаты вершины D для фигуры (7).
Пусть DF – высота. Тогда F – пересечение медиан в треугольнике ABC. Сделаем следующий чертеж (рис.21)(вид сверху).

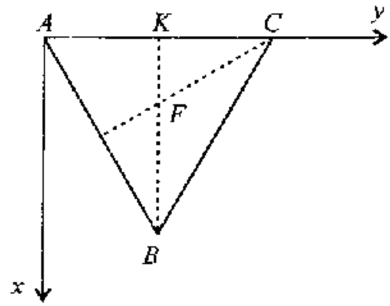


Рис. 21

Так как медианы в треугольнике делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, значит, KF = $\frac{1}{3}$BK. Следовательно, $x_F = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y_F = \frac{1}{2}$. Очевидно, что $x_D = x_F$, $y_D = y_F$, т.е. осталось найти z_D.

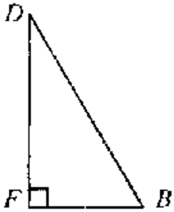


Рис. 22

Сделаем дополнительный чертеж (рис.22). Зная, что $z_D = DF = \sqrt{DB^2 - FB^2}$ и

$FB = \frac{2}{3} BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

вычислить z_D просто:

$z_D = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

В итоге имеем $D(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3})$.

Рассмотрим последнюю фигуру (8)(рис.23). Если задана высота $H = DF$, то координаты вершины D выглядят следующим образом:

$D(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}; H)$.

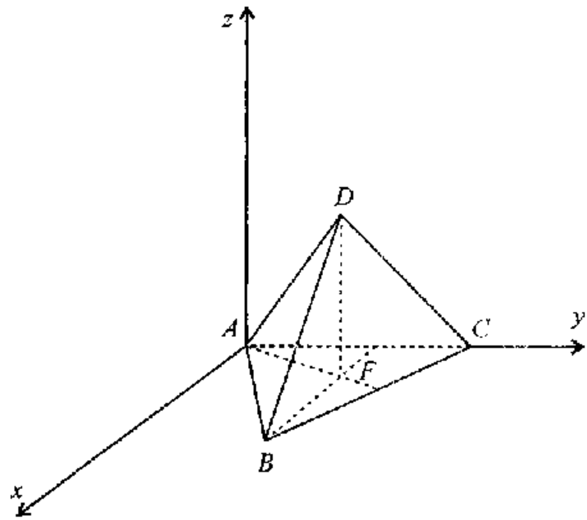


Рис. 23

А если задано боковые ребра, например, AD = BD = CD = 10, то

$DF = \sqrt{100 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{299}{3}}$. В итоге имеем $D(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}; \sqrt{\frac{299}{3}})$.

Обратим внимание, если в основании фигуры находится правильный треугольник ABC со стороной f, то имеем

следующие координаты: A(0; 0; 0), C(0; f; 0), $B(\frac{\sqrt{3}}{2} f; \frac{1}{2} f; 0)$.

Если система координат введена, как показано на рисунке (рис.24).

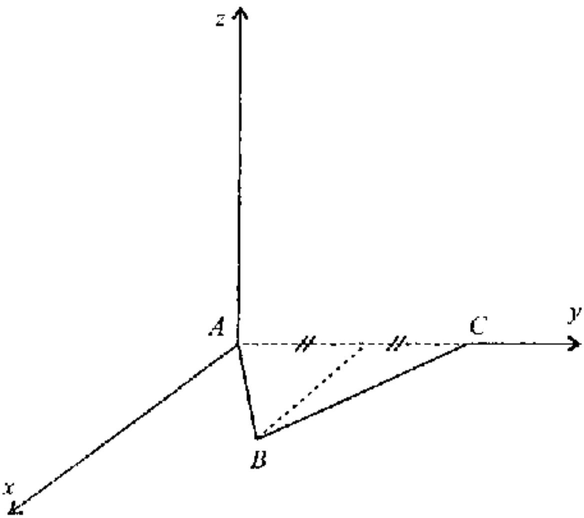


Рис. 24

Понятно, что множество "симпатичных" фигур содержит и не только фигуры (1 – 14). Например, шестиугольная пирамида SABCDEF (где основание ABCDEF – правильный шестиугольник, а высота попадает в центр, описанной вокруг основания окружности) также является "симпатичной" фигурой. Нетрудно убедиться, что можно ввести систему координат и легко вычислить координаты всех вершин. Кстати, для этой фигуры можно поместить начало координат в центр основания. В данном случае, очевидно, так будет удобнее.

Глава 2. Уравнение плоскости

Конечно, для того, чтобы научиться решать задачи с помощью координатного метода умения находить координаты вершин недостаточно. Очень часто условие задачи содержит некоторую плоскость. В одних задачах плоскость задается тремя точками, в других, - точкой и перпендикулярной плоскости прямой и многие другие. Давайте научимся писать уравнения плоскостей, заданных различными способами, которые чаще всего встречаются в задачах.

1. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

Дано: *точка М (0; 2; 4); точка К (3; 0; -1), точка Р (0; 1;0).*
Найти: *общее уравнение плоскости МКР.*
Решение:

Запишем общее уравнение плоскости β:

$$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z + \boldsymbol{d} = 0. \qquad (*)$$

1) Так как точка М принадлежит плоскости МКР, значит, координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Следовательно, нужно подставить координаты точки М в уравнение (*) вместо x, y, z. Получаем следующее уравнение:

$$\boldsymbol{a}\cdot 0 + \boldsymbol{b}\cdot 2 + \boldsymbol{c}\cdot 4 + \boldsymbol{d} = 0.$$

Или проще:

$$2\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = 0. \qquad (1)$$

2) Так как точка К принадлежит плоскости МКР, значит, координаты этой точки удовлетворяют общему уравнению плоскости. Следовательно, нужно подставить координаты точки К в уравнение (*) вместо x, y, z. Получаем следующее уравнение:

$$\boldsymbol{a}\cdot 3 + \boldsymbol{b}\cdot 0 + \boldsymbol{c}\cdot(-1) + \boldsymbol{d} = 0.$$

Или проще:

$$3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = 0. \qquad (2)$$

3) Так как точка P принадлежит плоскости МКР, значит, координаты этой точки удовлетворяют общему уравнению плоскости. Следовательно, нужно подставить координаты точки P в уравнение (*) вместо x, y, z. Получаем следующее уравнение:

$$\boldsymbol{a}\cdot 0 + \boldsymbol{b}\cdot 1 + \boldsymbol{c}\cdot 0 + \boldsymbol{d} = 0.$$

Или проще:

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} = 0. \qquad (3)$$

В итоге получаем систему уравнений, составленную из (1), (2) и (3) уравнений:

$$\begin{cases} 2b + 4c + d = 0, \\ 3a - c + d = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

*Так как система состоит из трех уравнений, но содержит четыре неизвестных **a**, **b**, **c**, **d**, давайте попробуем все неизвестные, выразить через какую-нибудь одну. Наиболее "легким" нам кажется третье уравнение, из которого **d** можно выразить через **b**, т.е.*

$$\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{b}.$$

*Далее, подставляя вместо **d** в первое уравнение **–b**, получаем*

$2\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{b}) = 0$. *Откуда, выражаем **c**, через **b**:*

$$\boldsymbol{c} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{b}.$$

Аналогично, делая подстановку во второе уравнение, получаем

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{4}\boldsymbol{b}.$$

В итоге имеем:

$$\begin{cases} d = -b, \\ c = -\dfrac{1}{4}b, \\ a = \dfrac{1}{4}b. \end{cases}$$

*(т.е. все неизвестные (**d**, **c**, **a**), выражены через одну(**b**).)*

Возвращаясь к общему уравнению плоскости, получаем

$$\frac{1}{4}\boldsymbol{b}x + \boldsymbol{b}y - (-\frac{1}{4}\boldsymbol{b})z + (-\boldsymbol{b}) = 0.$$

*Полагая, **b** = 4 (чтобы в уравнении плоскости не было дробей), получаем искомое уравнение плоскости МКР:*

$$x + 4y - z - 4 = 0.$$

Проверка.

Давайте проверим, что плоскость МКР действительно проходит через точки М, К, Р.

Подставим координаты точки М в полученное уравнение плоскости: $0 + 4 \cdot 2 - 4 - 4 = 0$. Как видим, получается верное равенство. Значит, точка М принадлежит плоскости МКР.

Аналогично доказывается, что точки К и Р принадлежат данной плоскости.

***Ответ**: общее уравнение плоскости МКР:* $\boldsymbol{x + 4y - z - 4 = 0}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки К (0; 2; 4); М (2; 0; 0) и Р (2; 2; 2).*

Ответ: $x - y + z - 2 = 0.$

Или проще:

$$-3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = 0. \qquad (2)$$

3) Так как вектор $\overline{KP}\ \{0;3;-1\}$ *параллелен плоскости* β, *значит он перпендикулярен вектору нормали* $\bar{n}\ \{a;b;c\}$ *к плоскости* β. *Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно 0, т.е.* $\overline{KP}\cdot\bar{n} = 0$. *Получаем третье уравнение:*

$$0\cdot\boldsymbol{a} + 3\cdot\boldsymbol{b} - 1\cdot\boldsymbol{c} = 0.$$

Или проще:

$$3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 0. \qquad (3)$$

В итоге получаем систему уравнений, составленную из (1), (2) и (3) уравнений:

$$\begin{cases} 2a + d = 0, \\ -3a + c + d = 0, \\ 3b - c = 0. \end{cases}$$

Так как система состоит из трех уравнений, но содержит четыре неизвестных ***a, b, c, d****, давайте попробуем все неизвестные выразить через какую-нибудь одну. Наиболее "легкими" нам кажутся первое и третье уравнения. Выразим, к примеру, из первого уравнения* ***d*** *через* ***a****, т.е.*

$$\boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{a}.$$

Далее, подставляя вместо ***d*** *во второе уравнение* ***–2a,*** *получаем*

$-3\boldsymbol{a} + c + (-2\boldsymbol{a}) = 0$. *Откуда :*

$$\boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{a}.$$

Аналогично, делая подстановку в третье уравнение, получаем:

$$\boldsymbol{b} = \frac{5}{3}\boldsymbol{a}.$$

В итоге имеем:

$$\begin{cases} d = -2a, \\ c = 5a, \\ b = \dfrac{5}{3}a. \end{cases}$$

*(т.е. все неизвестные (**d**, **c**, **b**), выражены через одну (**a**))*

Возвращаясь к общему уравнению плоскости, получаем

$$ax + \frac{5}{3}ay + 5az + (-2a) = 0.$$

*Полагая, **a** = 3 (чтобы в уравнении плоскости не было дробей), получаем искомое уравнение плоскости β:*

$$3x + 5y + 15z - 6 = 0.$$

Проверка:

Давайте проверим, верно ли мы написали уравнение плоскости β. Подставим координаты точки M в полученное уравнение плоскости: $3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 15 \cdot 0 - 6 = 0$. Как видим, получается верное равенство. Значит, точка M принадлежит плоскости β.

Аналогично доказывается, что точка N принадлежат данной плоскости.

Вектор нормали $\overline{n}$ к плоскости β имеет координаты $\{3;5;15\}$, вектор $\overline{KP}$ $\{0;3;-1\}$ параллелен плоскости β. Следовательно, проверяем, будет ли их скалярное произведение равно 0. Получили верное равенство:

$$3 \cdot 0 + 5 \cdot 3 + 15 \cdot (-1) = 0.$$

Значит, искомое уравнение плоскости β:

$$3x + 5y + 15z - 6=0.$$

***Ответ**: общее уравнение плоскости β:* $3x + 5y + 15z - 6=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки T (3; 1; 1) и R (0; 2; 1), параллельно вектору* $\overline{KP}\,\{0;3;-1\}$.

Ответ: $x + 3y + 9z - 15 = 0$.

2. *Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки P (1; 2; 2) и S (2; 2; 1), параллельно вектору* $\overline{KN}\,\{2;-1;2\}$.

Ответ: $x+ 4y + z - 11 = 0$.

4. Уравнение плоскости, проходящей через точку, параллельно двум ненулевым векторам

***Дано**: точка M (2; 0; 0); вектор* $\overline{TN}$ *{-3; 0; 1}, вектор* $\overline{KP}\,\{0;3;-1\}$.

***Найти**: общее уравнение плоскости β, проходящей через точку M, параллельно векторам* $\overline{TN}$ *и* $\overline{KP}$.

Решение:

Запишем общее уравнение плоскости β:

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (*)$$

1) Так как точка M принадлежит плоскости β, значит координаты этой точки удовлетворяют общему уравнению плоскости. Следовательно можно подставить координаты точки M в уравнение (*) вместо x, y, z. Получаем следующее уравнение:

$$a\cdot 2 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0.$$

Или проще:

$$2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = 0. \qquad (1)$$

2) Так как вектор $\overline{TN}\ \{-3;0;1\}$ *параллелен плоскости* β, *значит он перпендикулярен вектору нормали* $\overline{n}\ \{a;b;c\}$ *к плоскости* β. *Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно 0, т.е.* $\overline{TN}\cdot\overline{n} = 0$). *Получаем второе уравнение:*

$$\boldsymbol{a}\cdot(-3) + \boldsymbol{b}\cdot 0 + \boldsymbol{c}\cdot 1 = 0.$$

Или проще:

$$-3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = 0. \qquad (2)$$

3) Так как вектор $\overline{KP}\ \{0;3;-1\}$ *параллелен плоскости* β, *значит он перпендикулярен вектору нормали* $\overline{n}\ \{a;b;c\}$ *к плоскости* β. *Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно 0, т.е.* $\overline{KP}\cdot\overline{n} = 0$. *Получаем третье уравнение:*

$$0\cdot\boldsymbol{a} + 3\cdot\boldsymbol{b} - 1\cdot\boldsymbol{c} = 0.$$

Или проще:

$$3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 0. \qquad (3)$$

В итоге получаем систему уравнений, составленную из (1), (2) и (3) уравнений:

$$\begin{cases} 2a + d = 0, \\ -3a + c = 0, \\ 3b - c = 0. \end{cases}$$

Так как система состоит из трех уравнений, но содержит четыре неизвестных ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, *давайте попробуем все неизвестные, выразить через какую-нибудь одну. Например, из первого уравнения* ***d*** *можно выразить через* ***a***, *т.е.*

$$\boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{a}.$$

Из второго уравнения выражаем ***c***, *через* ***a***:

$$\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a}.$$

*Далее, подставляя вместо с в третье уравнение 3**a**:*

$$3\mathbf{b} + (-3\mathbf{a}) = 0.$$

Откуда получаем:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}.$$

В итоге имеем:

$\begin{cases} d = -2a, \\ c = 3a, \\ b = a. \end{cases}$ *(т.е. все неизвестные (**d**, **c**, **b**), выражены через одну(**a**))*

Возвращаясь к общему уравнению плоскости, получаем

$$\mathbf{a}x + \mathbf{a}y + 3\mathbf{a}z + (-2\mathbf{a}) = 0.$$

*Полагая, **a** = 1, получаем искомое уравнение плоскости β:*

$$\mathbf{x + y + 3z - 2 = 0.}$$

***Проверка:** см. 3 задачу.*

***Ответ**: общее уравнение плоскости β:* $\mathbf{x + y + 3z - 2 = 0}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точку К (3; 0; 2), параллельно векторам* $\overline{AB}\ \{2;0;1\}$ *и* $\overline{CD}\ \{1;2;0\}$.

Ответ: $2x - y - 4z + 2 = 0.$

2. *Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точку Т (1; 2; 3), параллельно векторам* $\overline{PQ}\ \{-1;3;2\}$ *и* $\overline{RS}\ \{2;-1;2\}$.

Ответ: $8x + 6y - 5z - 5 = 0.$

Глава 3. Параметрическое уравнение прямой

Параметрическое уравнение прямой часто применяется для решения задач, в условиях которых рассматриваются точки, находящиеся на заданных прямых. Давайте научимся писать параметрические уравнения прямых, заданных различными способами, которые чаще всего встречаются в задачах.

1. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через две точки

Дано: *Точка* $M(x_m, y_m, z_m)$, *точка* $N(x_n, y_n, z_n)$.

Найти: *параметрическое уравнение прямой* MN.

Решение:

Пусть точка P *находится на прямой, проходящей через точки* M *и* N *(рис.25).*

Обозначим координаты точки $P(x_p, y_p, z_p)$ *и рассмотрим два вектора* $\overline{MP}$ *и* $\overline{MN}$. *Координатами этих векторов будут* $\overline{MP}(x_p - x_m, y_p - y_m, z_p - z_m)$ *и* $\overline{MN}(x_n - x_m, y_n - y_m, z_n - z_m)$.

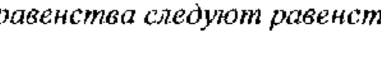


Рис. 25

Так как векторы $\overline{MP}$ *и* $\overline{MN}$ *коллинеарны, то существует число* φ, *что выполняется равенство* $\overline{MP} = \varphi\overline{MN}$. *Из этого равенства следуют равенства для координат:*

$$x_p - x_m = \varphi(x_n - x_m),$$

$$y_p - y_m = \varphi(y_n - y_m),$$

$$z_p - z_m = \varphi(z_n - z_m).$$

В итоге получаем следующую систему для координат произвольной точки P, *принадлежащей прямой* MN:

$$\begin{cases} x_p = \varphi(x_n - x_m) + x_m, \\ y_p = \varphi(y_n - y_m) + y_m, \\ z_p = \varphi(z_n - z_m) + z_m. \end{cases}$$

Координаты точки P выражены через координаты точек M, N и параметр φ. Данную систему будем называть параметрической записью ***(параметрическим уравнением)*** *прямой MN. Меняя значение параметра φ можно получать координаты соответствующих точек прямой MN.*
Заметим, что при $\varphi = 0$ происходит совпадение точек P и M. А совпадение точек P и N получается при $\varphi = 1$.

2. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку, параллельно некоторой прямой (вектору)

Дано: *Точки $M(x_m, y_m, z_m)$, $N(x_n, y_n, z_n)$, $T(x_t, y_t, z_t)$*
Найти: *параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку T, параллельно прямой MN.*
Решение:
Пусть точка P находится на искомой прямой (рис.26).

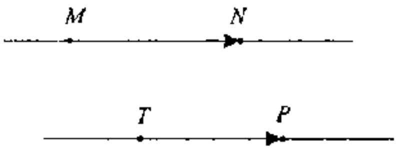


Рис. 26

Обозначим координаты точки $P(x_p, y_p, z_p)$ и рассмотрим два вектора $\overline{TP}$ и $\overline{MN}$. По условию векторы $\overline{TP}$ и $\overline{MN}$ коллинеарны, значит, существует число φ, такое, что выполняется равенство $\overline{TP} = \varphi \overline{MN}$. Из этого равенства следуют равенства для координат:

$$x_p - x_t = \varphi(x_n - x_m),$$
$$y_p - y_t = \varphi(y_n - y_m),$$
$$z_p - z_t = \varphi(z_n - z_m).$$

В итоге получаем следующую систему для координат произвольной точки P, принадлежащей искомой прямой:

$$\begin{cases} x_p = \varphi(x_n - x_m) + x_t, \\ y_p = \varphi(y_n - y_m) + y_t, \\ z_p = \varphi(z_n - z_m) + z_t. \end{cases}$$

Координаты точки P выражены через координаты точек M, N, T и параметр φ.

Данная система является ***параметрическим уравнением*** *прямой, проходящей через точку T, параллельно прямой MN.*

Рассмотрим следующий пример.

***Дано**: Точка $F(1,2,3)$, точка $K(3,0,6)$.*

***Найти**: параметрическое уравнение прямой FK.*

Решение:

Пусть точка P находится на прямой, проходящей через точки F и K.

Обозначим координаты точки $P(x_p, y_p, z_p)$.

Так как точки F, K и Pлежат на одной прямой, то верно равенство: $\overline{FP} = \varphi\overline{FK}$.

Вычислим координаты векторов $\overline{FP}$ и $\varphi\overline{FK}$.

$\overline{FP}(x_p - 1, y_p - 2, z_p - 3)$, $\overline{FK}(2,-2,3)$, $\varphi\overline{FK}(2\varphi,-2\varphi,3\varphi)$.

Приравняем координаты векторов $\overline{FP}$ и $\varphi\overline{FK}$.

$$\begin{cases} x_p - 1 = 2\varphi, \\ y_p - 2 = -2\varphi, \\ z_p - 3 = 3\varphi. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_p = 2\varphi + 1, \\ y_p = -2\varphi + 2, \\ z_p = 3\varphi + 3. \end{cases}$$

Полученная система и есть параметрическое уравнение прямой FK.

В итоге имеем координаты точки $P(2\varphi + 1, -2\varphi + 2, 3\varphi + 3)$.

Проверка.

Пусть $\varphi = 0$, тогда $P(1,2,3)$, и точки F и Pсовпадают.

Пусть $\varphi = 1$, *тогда* $P(3,0,6)$, *и точки* P *и* K *совпадают.*

Ответ: *параметрическое уравнение прямой* FK :

$$\begin{cases} x_0 = 2\varphi + 1, \\ y_0 = -2\varphi + 2, \\ z_0 = 3\varphi + 3. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. *Найти параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки* $A(-3,-4,8)$ *и* $B(4,-2,5)$.

Ответ: *параметрическое уравнение прямой* AB : $\begin{cases} x_0 = 7\varphi - 3, \\ y_0 = 2\varphi - 4, \\ z_0 = -3\varphi + 8. \end{cases}$

2. *Найти параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку* $C(5,-2,-7)$, *параллельно прямой* DA, *где* $D(8,2,-6)$ *и* $A(-2,4,3)$.

Ответ: *параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку* C, *параллельно прямой* DA : $\begin{cases} x_0 = -10\varphi + 5, \\ y_0 = 2\varphi - 2, \\ z_0 = 9\varphi - 7. \end{cases}$

Глава 4. Основные формулы и определения

1. Расстояние ρ между точками $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ равно
$$\rho = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

2. Координаты середины К отрезка АВ равны средним арифметическим координат его концов. Таким образом, если $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$, то
$$K\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

3. Координаты вектора $\overline{AB}$ равны разности соответствующих координат конца В и начала А данного вектора. Таким образом, если $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$, то
$$\overline{AB} = \{b_1 - a_1; b_2 - a_2\}$$

4. Длина вектора $\overline{a}$, имеющего координаты $\{a_1, a_2\}$, равна
$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

5. Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

6. Ненулевые векторы называются компланарными, если они лежат на одной плоскости либо на параллельных плоскостях; нулевой вектор считается компланарным любому вектору.

7. Для того, чтобы векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало некоторое ненулевое число λ, что $\overline{a} = \lambda\overline{b}$.

8. Для того, чтобы три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других, т.е. $\overline{a} = \alpha\overline{b} + \beta\overline{c}$, где α, β - некоторые числа.

9. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.

10. Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Таким образом,

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\,\overline{b})$$

11. Скалярное произведение векторов $\overline{a}\,\{a_1, a_2\}$ и $\overline{b}\,\{b_1, b_2\}$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

12. Ненулевые векторы $\overline{a}\,\{a_1, a_2\}$ и $\overline{b}\,\{b_1, b_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

13. Если φ - угол между ненулевыми векторами $\overline{a}\,\{a_1, a_2\}$ и $\overline{b}\,\{b_1, b_2\}$, то

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

14. Всякое уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$ задает на координатной плоскости единственную прямую, которая

перпендикулярна вектору $\overline{n}\ \{A, B\}$. Вектор $\overline{n}$ называется вектором нормали к данной прямой.

15. Если ρ - расстояние от точки M(m_1, m_2) до прямой $Ax + By + C = 0$, то

$$\rho = \frac{|Am_1 + Bm_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

16. Если φ - угол между прямыми, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

17. Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

18. Если φ - угол между прямыми, направляющие векторы которых $\overline{m}\ \{m_1, m_2\}$ и $\overline{n}\ \{n_1, n_2\}$, то

$$\cos\varphi = \frac{|n_1m_1 + n_2m_2|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$$

19. Параметрическое уравнение прямой, которая проходит через точку M(x_0, y_0) и имеет направляющий вектор $\overline{n}\ \{a, b\}$, имеет вид:

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0. \end{cases}$$

20. Уравнение окружности с центром O(a, b) и радиусом R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

21. Если A^*B^* - длина перпендикулярной проекции вектора $\overline{AB}$ на прямую $\alpha: Ax + By + C = 0$, то

$$A^*B^* = \left|\overline{AB}\right| \cos\varphi ,$$

где φ - угол между вектором $\overline{AB}$ и прямой α.

Глава 5. Примеры решения задач

§1. Расстояние от точки до плоскости

Задача №1. (НГУ ФЕН 1982, В 4). В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$, точка M - середина ребра AB. Боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, ее высота равна $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Через прямую DM параллельно прямой SA проходит плоскость α. Найти расстояние от вершины C до плоскости α.

Решение.

Так как все боковые ребра пирамиды равны, то основанием высоты является центр окружности, описанной вокруг основания. Так как основанием пирамиды является прямоугольник $ABCD$, то основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей AC и BD.

Введем систему координат (рис.27) и выпишем координаты точек: $A(1,0,0)$, $B(1,2,0)$, $C(0,2,0)$, $D(0,0,0)$, $M(1,1,0)$,

$S\left(\frac{1}{2},1,\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$.

Запишем уравнение плоскости α, которая проходит через точки D и M и параллельна вектору $\overline{SA}$.

По условию плоскость α параллельна вектору $\overline{SA}$.

Следовательно, $\bar{n} \perp \overline{SA}$, а из этого вытекает, что $\bar{n} \cdot \overline{SA} = 0$.

Координаты вектора $\overline{SA}\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, следовательно:

$$\begin{cases} d = 0, \\ a + b + d = 0, \\ \frac{1}{2}a - b - \frac{3\sqrt{2}}{4}c = 0. \end{cases}$$

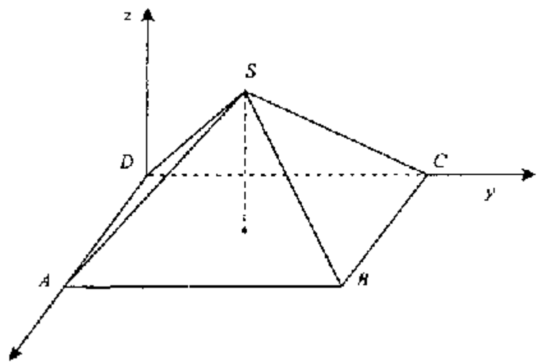


Рис. 27

Из второго уравнения следует, что $b = -a$. Пусть $a = \sqrt{2}$, тогда $b = -\sqrt{2}$ и $c = 2$.

Уравнение плоскости α: $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z = 0$. В итоге:

$x - y + \sqrt{2}z = 0$, $\bar{n} = \left(1, -1, \sqrt{2}\right)$.

В итоге расстояние от точки $C(0,2,0)$ до плоскости α:

$$\rho(C, \alpha) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + \sqrt{2} \cdot 0|}{\sqrt{1+1+2}} = 1.$$

Ответ: *1.*

Задача № 2. (НГУ ММФ 1987, В 1). Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'

равно 1, точка M - середина AD. Через середину N отрезка $B'M$ перпендикулярно прямой $B'M$ проведена плоскость α. Найти расстояние от центра куба до плоскости α.

Решение.

Так как плоскость α перпендикулярна вектору $B'M$, то этот вектор можно приравнять вектору нормали к плоскости α.

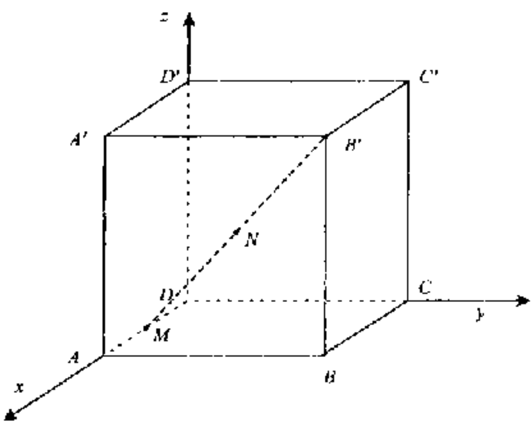


Рис. 28

Введем систему координат (рис.28) и выпишем координаты точек: $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $C'(0,1,1)$, $M\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $B'(1,1,1)$, $N\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ - центр куба. Координаты вектора $\vec{B'M}(-\frac{1}{2},-1,-1)$.

Если уравнение плоскости α: $ax+by+cz+d=0$ и вектор нормали $\overline{n}(a,b,c)$, то приравниваем вектора $\overline{n}$ и $\overline{B'M}$ и получаем, что $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=-1$.

Для нахождения d используем, что плоскость α проходит через точку N (подставим координаты точки N в уравнение плоскости α): $-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-1\cdot\frac{1}{2}-1\cdot\frac{1}{2}+d=0$.

В итоге $d=\frac{11}{8}$, и уравнение плоскости α принимает следующий вид: $-\frac{1}{2}x-y-z+\frac{11}{8}=0$.

Расстояние от точки $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ до плоскости α:

$$\rho(F,\alpha)=\frac{\left|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{11}{8}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}}=\frac{1}{12}.$$

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Задача № 3. (НГУ ФФ 1997, В 2). В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 2. Через середину L ребра AD и вершину B проведена плоскость α, которая перпендикулярна плоскости SAD и пересекает ребро SA в точке M. Определить отношение $SM:MA$.

Решение.

Введем систему координат (рис.29) и выпишем координаты точек: $A\left(2\sqrt{2},0,0\right)$, $B\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0\right)$, $C\left(0,2\sqrt{2},0\right)$, $S\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\right)$, $L\left(\sqrt{2},0,0\right)$, $D(0,0,0)$.

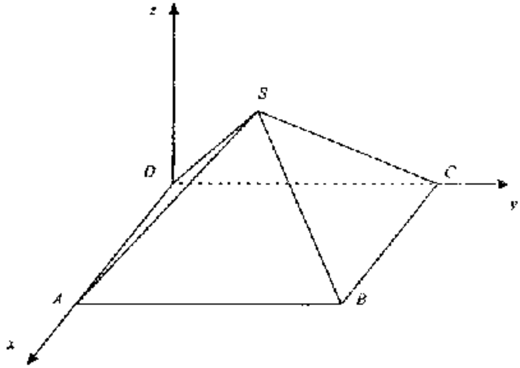


рис. 29

Запишем уравнение плоскости SAD:

$$\begin{cases}\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+2c+d=0,\\ 2\sqrt{2}a+d=0,\\ d=0.\end{cases}$$

Ясно, что $a=0$. Пусть $b=\sqrt{2}$. Тогда получаем, что $c=-1$.

И уравнение плоскости SAD: $\sqrt{2}y-z=0$. А вектор нормали этой плоскости $\overline{n}_1$ имеет координаты $\left(0,\sqrt{2},-1\right)$.

Теперь запишем уравнение плоскости α, которая проходит через две заданные точки $L\left(\sqrt{2},0,0\right)$ и $B\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0\right)$ и перпендикулярна плоскости SAD. Так как угол между плоскостями равен 90^o, то вектор нормали $\overline{n}(a,b,c)$ плоскости α перпендикулярен вектору $\overline{n}_1\left(0,\sqrt{2},-1\right)$. Следовательно, $\overline{n}\cdot\overline{n}_1=0$.

$$\begin{cases} \sqrt{2}a + d = 0, \\ 2\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b + d = 0, \\ \sqrt{2}b - c = 0. \end{cases}$$

Пусть $a = 1$, тогда $d = -\sqrt{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ и $c = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

И уравнение плоскости α имеет вид: $x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}z - \sqrt{2} = 0$ или

$2x - y - \sqrt{2}z - 2\sqrt{2} = 0$.

Вычислим расстояние от точек S и A до плоскости α (рис.30).

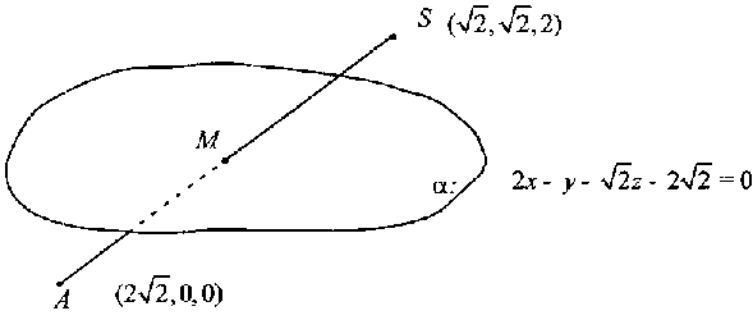


рис. 30

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{4+1+2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

$$\rho(S, \alpha) = \frac{|2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{4+1+2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

Получили, что $\dfrac{SM}{MA} = \dfrac{\rho_{S,\alpha}}{\rho_{A,\alpha}} = \dfrac{3}{2}$

Ответ: 3:2.

Задачи для самостоятельного решения

1. В основании пирамиды лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB = 3, BC = 4. Боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, её высота равна 12/5. Плоскость α проходит через прямую SA параллельно диагонали BD основания. Найти расстояние от вершины C до плоскости α.
Ответ: $12\sqrt{2}/5$.
2. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны $\sqrt{3}$. Точки M, N, P – середины ребер BC, CC_1, A_1C_1 соответственно. Плоскость α проходит через точки M, N, P. Найти расстояние от точки A до плоскости α.
Ответ: $3\sqrt{3}/4$.

§2. Угол между двумя плоскостями

Задача №4. (НГУ ФФ 1987, В 1). В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC и BD взаимно перпендикулярны и имеют длину 2. Через точки M и N середины ребер AC и BD соответственно – проведена плоскость, которая пересекает ребро AB и образует равные двугранные углы с плоскостями граней ABC и ABD. Найти величины этих углов.

Решение.

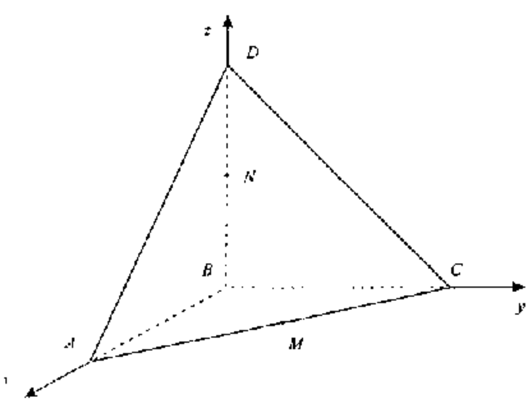


Рис. 31

Введем систему координат (рис.31) и выпишем координаты точек: $A(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $D(0,0,2)$, $M(1,1,0)$, $N(0,0,1)$.

Уравнение плоскости ABC: $z=0$. Уравнение плоскости ABD: $y=0$.

Пусть точка $F(f,0,0)$ - точка пересечения ребра AB и искомой плоскости. Заметим, что $0 \le f \le 2$.

Запишем уравнение плоскости (M,N,F) по трем точкам.

$$\begin{cases} a+b+d=0, \\ c+d=0, \\ af+d=0. \end{cases}$$

Пусть $a=1$. Тогда из (3) $d=-f$. Подставим в (2) и (1) величины d и a. Получим, что $c=f$, $b=f-1$.

Уравнение плоскости (M,N,F): $x+(f-1)y+fz-f=0$.

Из равенства углов между плоскостями вытекает и равенство косинусов этих углов. Обозначим через φ угол между плоскостью (M,N,F) и плоскостями $z=0$, $y=0$.

$$\cos\varphi=\frac{|f|}{\sqrt{1+(f-1)^2+f^2}\sqrt{1}}=\frac{|f-1|}{\sqrt{1+(f-1)^2+f^2}\sqrt{1}},\ |f|=|f-1|.$$

$\left[\begin{array}{l} f=f-1, \\ f=-f+1 \end{array}\right.$, откуда $2f=1$. и $f=\frac{1}{2}$.

Координаты точки $F\left(\frac{1}{2},0,0\right)$.

Уравнение плоскости (M,N,F): $x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0$.

$\cos\varphi=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$. В итоге $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Задача №5. (НГУ ФЕН 1985, В4). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка M   середина ребра C_1D_1, точка N выбрана на ребре AB так, что AN − 2NB. Через вершину D и точки M, N проведена плоскость α. Определить двугранный угол между плоскостью α и плоскостью грани ABCD.

Решение.

Введем систему координат (рис.32) и выпишем координаты точек: $D(0,0,0)$, $M(0,\frac{1}{2},1)$, $N(1,\frac{2}{3},0)$.

Ясно, что уравнение плоскости грани $ABCD$: $z = 0$.

Найдем уравнение плоскости $\alpha(D,M,N)$:

$$\begin{cases} d = 0, \\ \frac{1}{2}b + c + d = 0, \\ a + \frac{2}{3}b + d = 0. \end{cases}$$

Пусть $b = -6$, тогда $c = 3$ и $a = 4$.

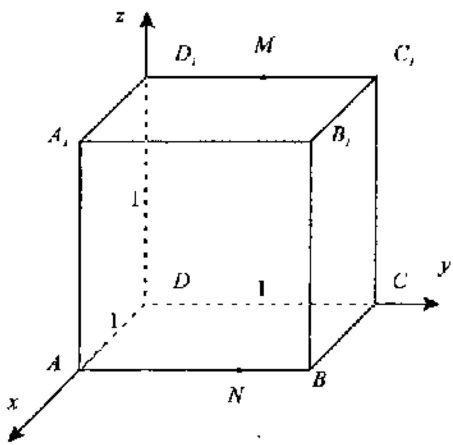


Рис. 32

Получили уравнение плоскости α : $4x - 6y + 3z = 0$ и вектор нормали $\overline{n}(4,-6,3)$.

Следовательно, угол φ между плоскостями α и $ABCD$:

$$\cos\varphi = \frac{|3 \cdot 1|}{\sqrt{16+36+9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{\sqrt{61}} \text{ и } \varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{61}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{61}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 1. Точка M выбрана на ребре AB так, что AM = 2MB, точка N – середина ребра A_1C_1. Через вершину C и точки M и N проведена плоскость α. Определить двугранный угол между плоскостью α и плоскостью основания ABC.
   Ответ: $\operatorname{arctg} 2\sqrt{7/3}$.
2. В основании треугольной пирамиды SABC лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $SA = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Найти угол между плоскостями α и β.
   Ответ: arccos 1/5.

§3. Параметрическое уравнение прямой

Задача №6. (НГУ ФЕН 1997, B1.4). Квадрат ABCD со стороной равной 2 является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны 1. На отрезке B_1D_1 выбрана точка P так, что угол между векторами AB и AP равен $\operatorname{arctg}\sqrt{5}/3$. Найти отношение $B_1P : PD_1$.

Решение.

Введем систему координат (рис.33) и выпишем координаты вершин параллелепипеда:

$A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$, $D(0,0,0)$, $A_1(2,0,1)$, $B_1(2,2,1)$, $C_1(0,2,1)$, $D_1(0,0,1)$. Для нахождения координат точки $P(x_p, y_p, z_p)$ используем параметрическое уравнение прямой B_1D_1:

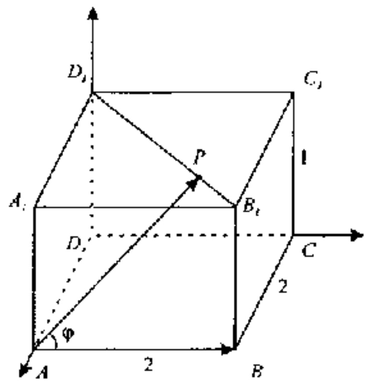


Рис. 33

$\overline{B_1P} = \alpha\overline{B_1D_1}$ (заметим, что $0 \le \alpha \le 1$).

$$\begin{cases} x_p - 2 = -2\alpha, \\ y_p - 2 = -2\alpha, \\ z_p - 1 = 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_p = -2\alpha + 2, \\ y_p = -2\alpha + 2, \\ z_p = 1. \end{cases}$$

Имеем координаты векторов: $\overline{AB}(0,2,0)$ и $\overline{AP}(-2\alpha, -2\alpha + 2, 1)$.

Для угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AP}$ справедливо равенство

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot(-2\alpha+2)}{\sqrt{4\alpha^2+(-2\alpha+2)^2+1}\cdot\sqrt{4}}$$. Упростив, получаем

$$\cos\varphi = \frac{-2\alpha+2}{\sqrt{8\alpha^2-8\alpha+5}}$$. Из условия, что $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}$, следует, что

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{14}}$$. Получили равенство $\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{-2\alpha+2}{\sqrt{8\alpha^2-8\alpha+5}}$. Из этого

равенства имеем, что $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ и $\alpha_2 = -\frac{11}{4}$. Но при $\alpha = -\frac{11}{4}$ точка

P не находится на отрезке B_1D_1. При $\alpha = \frac{1}{4}$ точка P делит

отрезок B_1D_1 в отношении $B_1P : PD_1 = 1:3$.

Ответ: 1 : 3.

Задача №7. (НГУ ФФ 1997, В 2). В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 2. Через середину L ребра AD и вершину B проведена плоскость α, которая перпендикулярна плоскости SAD и пересекает ребро SA в точке M. Определить отношение $SM : MA$.

Решение.

Введем систему координат (рис.34) и выпишем координаты точек: $A\left(2\sqrt{2},0,0\right)$, $B\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0\right)$, $C\left(0,2\sqrt{2},0\right)$, $S\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\right)$,

$L\left(\sqrt{2},0,0\right)$, $D(0,0,0)$.

Запишем уравнение плоскости SAD по трем заданным точкам:

$S\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\right)$, $A\left(2\sqrt{2},0,0\right)$,

$D(0,0,0)$.

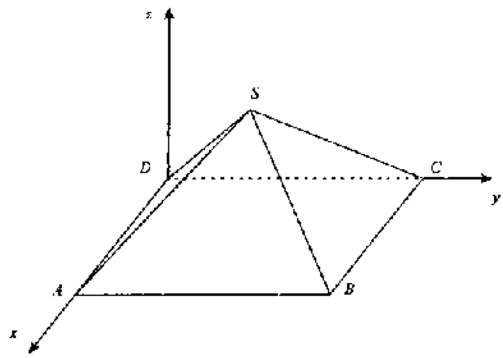


Рис. 34

$$\begin{cases} \sqrt{2}a+\sqrt{2}b+2c+d=0, \\ 2\sqrt{2}a+d=0, \\ d=0. \end{cases}$$

Ясно, что $a=0$. Пусть $b=\sqrt{2}$, тогда получаем, что $c=-1$.

И уравнение плоскости SAD: $\sqrt{2}y-z=0$. А вектор нормали этой плоскости $\bar{n}_1$ имеет координаты $\left(0,\sqrt{2},-1\right)$.

Теперь запишем уравнение плоскости α, которая проходит через две заданные точки $L\left(\sqrt{2},0,0\right)$ и $B\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0\right)$ и перпендикулярна плоскости SAD. Так как угол между плоскостями равен 90°, то вектор нормали $\bar{n}(a,b,c)$ плоскости α перпендикулярен вектору $\bar{n}_1\left(0,\sqrt{2},-1\right)$.

Следовательно, $\bar{n}\cdot\bar{n}_1=0$.

$$\begin{cases} \sqrt{2}a + d = 0, \\ 2\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b + d = 0, \\ \sqrt{2}b - c = 0. \end{cases}$$

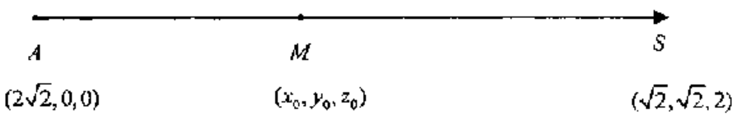
Пусть $a = 1$, тогда $d = -\sqrt{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ и $c = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

И уравнение плоскости α имеет вид: $x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}z - \sqrt{2} = 0$ или

$2x - y - \sqrt{2}z - 2\sqrt{2} = 0$.

Запишем параметрическую форму прямой AS. Координаты:

$A\left(2\sqrt{2}, 0, 0\right)$, $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $S\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right)$, $\overline{AM} = \beta\overline{AS}$.



Координаты точки M имеют вид:

$$\begin{cases} x_0 = -\beta\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\ y_0 = \beta\sqrt{2} \\ z_0 = \beta \cdot 2 \end{cases}$$

Так как точка M принадлежит и плоскости α, то подставим координаты в уравнение плоскости:

$2\left(-\beta\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) - \beta\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\beta - 2\sqrt{2} = 0$, откуда $\beta = \dfrac{2}{5}$.

Следовательно, $AM = \frac{2}{5}AS$ и $MS = \frac{3}{5}AS$. В итоге получили, что

$\frac{SM}{MA} = \frac{3}{2}$.

Отметим, что при найденном значении $\beta = \frac{2}{5}$, легко вычислить

координаты точки M: $x_0 = \frac{8\sqrt{2}}{5}$, $y_0 = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, $z_0 = \frac{4}{5}$.

Ответ: 3:2.

Задача № 8. *(* НГУ ММФ, 1990, В 2). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и его длина равна 4. Точки M и N - середины боковых ребер SB и SC, точка K - середина ребра AB. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых MN и CK, пересекается с прямой SA в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.

Решение.

Введем систему координат (рис.35) и выпишем координаты

точек: $A(0,0,0)$, $S(0,0,4)$, $B(\sqrt{3},1,0)$, $C(0,2,0)$, $K\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,

$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},2\right)$, $N(0,1,2)$.

Для записи координат точек P,Q,O будем использовать параметрическую форму записи прямых MN, CK, AS.

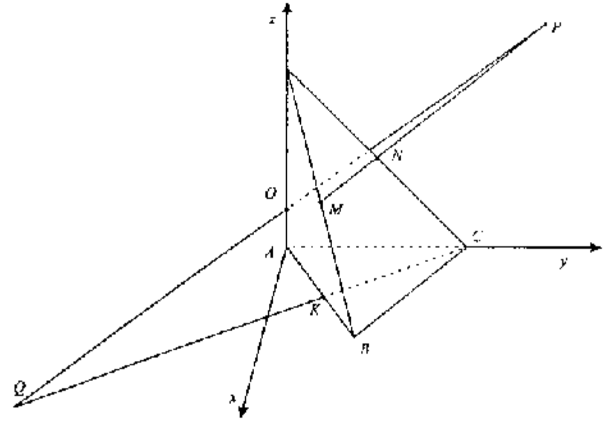


Рис. 35

Пусть $\overline{MP} = \alpha\overline{MN}$. Вычислим координаты векторов $\overline{MP}$ и $\alpha\overline{MN}$: $\overline{MP}(x_p - \frac{\sqrt{3}}{2}, y_p - \frac{1}{2}, z_p - 2)$, $\overline{MN}(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\alpha\overline{MN}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, 0)$.

$$\begin{cases} x_p - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \\ y_p - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} \\ z_p - 2 = 0 \end{cases}$$

. В итоге координаты P:

$$\begin{cases} x_p = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y_p = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \\ z_p = 2. \end{cases}$$

Пусть $\overline{CQ} = \beta\overline{CK}$. Вычислим координаты векторов $\overline{CQ}$ и $\beta\overline{CK}$: $\overline{CQ}(x_q, y_q - 2, z_q)$, $\overline{CK}(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$, $\beta\overline{CK}(\frac{\sqrt{3}}{2}\beta, -\frac{3}{2}\beta, 0)$.

В итоге координаты Q: $\begin{cases} x_Q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta \\ y_Q = -\dfrac{3}{2}\beta + 2 \\ z_Q = 0 \end{cases}$.

Координаты точки $O(0,0,\gamma)$. Вектор $\overline{PO}$ имеет координаты

$\left(x_0 - x_p, y_0 - y_p, z_0 - z_p\right)$.

Следовательно, $\overline{PO}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{1}{2}, \gamma - 2)$.

Вектор $\overline{OQ} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta, -\dfrac{3}{2}\beta + 2, -\gamma\right)$.

Из равенства $\overline{PO} = \overline{OQ}$ следует равенство координат, т.е.

получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta, \\ -\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}\beta + 2, \\ \gamma - 2 = -\gamma. \end{cases}.$$

Откуда $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 1$.

Тогда $\overline{PQ} = 2\overline{OQ}$, значит $\overline{PQ} = 2(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{9}{2} + 2, -1) = (3\sqrt{3}, -5, -2)$.

В итоге $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{27+25+4} = \sqrt{56}$.

Ответ: $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{56}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна из его вершин совпадает с серединой ребра AA_1, а две другие лежат на прямых AD_1 и CD соответственно. Найти длину биссектрисы этого треугольника.

   Ответ: $\sqrt{30}/4$.
2. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ со стороной 3. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 2. Точки M, N и F – середины ребер BB_1, AD и C_1D_1 соответственно. Плоскость ACF пересекает отрезок MN в точке L. Найти длину отрезка NL.
   Ответ: 1.

§4. Угол между прямыми

Задача № 9. В правильной пирамиде SABC ребра основания ABC равны 4,боковые ребра равны 3. Точка M – середина ребра AC. Найти угол между прямыми MB и AS.

Решение.

Введем систему координат (рис.36) и выпишем координаты вершин пирамиды и точки M: $A(0,0,0)$, $B(2\sqrt{3},2,0)$, $C(0,4,0)$, $M(0,2,0)$. Для нахождения координат вершины S найдем высоту пирамиды H. Имеем

$$H=\sqrt{3^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

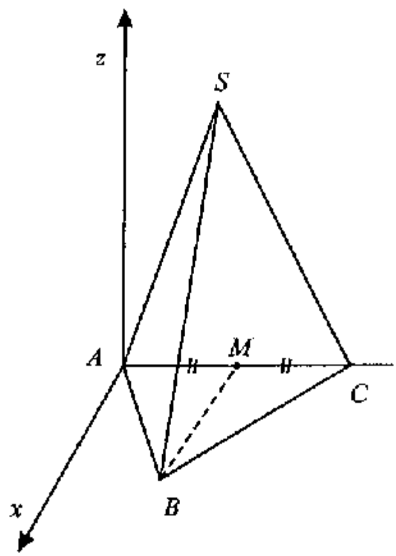


Рис. 36

Следовательно, $S(\frac{2\sqrt{3}}{3},2,\sqrt{\frac{11}{3}})$.

Найдем координаты векторов $\overline{MB}(2\sqrt{3},0,0)$ и $\overline{AS}(\frac{2\sqrt{3}}{3},2,\sqrt{\frac{11}{3}})$.

Угол φ между прямыми MB и

AS можно найти по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left|2\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}+4+\frac{11}{3}}} = \frac{4}{2\sqrt{3}\cdot 3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

В итоге $\varphi = \arccos\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть ABCD – правильная треугольная пирамида, все ребра которой равны 1. На луче AB выбрана точка M ($AM > AB$) так, что косинус угла между прямыми AC и DM равен 1/4. Найти BM.

   Ответ: $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

2. В основании правильной четырехугольной пирамиды SABCD лежит квадрат ABCD со стороной 6. Точка P середина ребра SB. Найти объем пирамиды, если известно, что прямые AP и SC перпендикулярны.
   Ответ:72.

§5. Угол между прямой и плоскостью

Задача № 10. (НГУ ФЕН 1986, В 4). В кубе $ABCDA'B'C'D'$ плоскость α проходит через вершины A, B', D', плоскость β проходит через вершины A', C' и середину M ребра BC. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найти угол между прямой l и плоскостью грани $ABCD$.

Решение.

Пусть ребро куба равно 1.

Введем систему координат (рис.37) и запишем координаты точек.

$A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$,

$C(0,1,0)$, $D(0,0,0)$,

$A'(1,0,1)$, $B'(1,1,1)$,

$C'(0,1,1)$, $D'(0,0,1)$,

$M\left(\frac{1}{2},1,0\right)$.

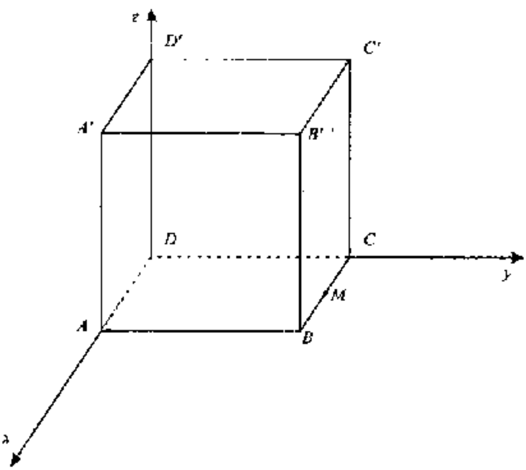


Рис. 37

Запишем уравнение плоскости $\alpha(A, B', D')$.

$$\begin{cases} a + d = 0, \\ a + b + c + d = 0, \\ c + d = 0. \end{cases}.$$

Пусть $a = 1$, тогда $d = -1$, $c = 1$, $b = -1$.

Получим уравнение плоскости α: $x - y + z - 1 = 0$.

Запишем уравнение плоскости $\beta(A', C', M)$.

$$\begin{cases} a + c + d = 0, \\ b + c + d = 0, \\ \dfrac{a}{2} + b + d = 0. \end{cases}.$$

Пусть $a = 2$,тогда $c = 1$, $d = -3$, $b = 2$.

Получим уравнение плоскости β: $2x + 2y + z - 3 = 0$.

Уравнением прямой l в пространстве является система

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Найдем координаты двух точек, принадлежащих прямой l.

Пусть точка K является пересечением прямой l и плоскости $z = 0$.

Следоватсльно, ее координаты являются решением системы:

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Решим систему и получим $x=\frac{5}{4}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=0$.

Пусть точка L является пересечением прямой l и плоскости $z-1=0$. Следовательно, ее координаты являются решением

системы: $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+2y+z-3=0. \\ z-1=0 \end{cases}$

Решим систему и получим $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=1$.

Имея точки $K\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},0\right)$ и $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$, получаем вектор

$\overline{KL}\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},1\right)$.

Уравнение плоскости $ABCD$: $z=0$ и вектор нормали

$\overline{n}=(0,0,1)$. Угол между прямой l (вектором $\overline{KL}$) и плоскостью

$ABCD$: $\sin\varphi=\dfrac{\left|-\frac{3}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 0+1\cdot 1\right|}{\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}+1}\sqrt{1}}=\frac{4}{\sqrt{26}}$. В итоге $\varphi=\arcsin\frac{4}{\sqrt{26}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{4}{\sqrt{26}}$.

Задача №11. (НГУ ММФ 1995, В 1.1). В основании прямоугольного параллелепипеда с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' является прямоугольник $ABCD$ со сторонами

$AB=\sqrt{7}$, $BC=1$. Точка M - середина ребра AB. Найти объем параллелепипеда, если известно, что отрезки MC' и $B'D$ образуют равные углы с плоскостью $A'BCD'$.

Решение.

Введем систему координат (рис.38) и выпишем координаты точек: $A(1,0,0)$, $M\left(1,\frac{\sqrt{7}}{2},0\right)$, $B\left(1,\sqrt{7},0\right)$, $C\left(0,\sqrt{7},0\right)$. Пусть высота

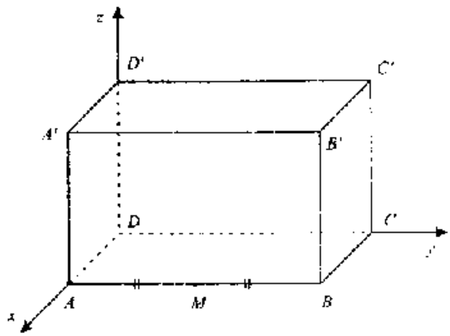


Рис. 38

параллелепипеда будет H. Тогда координаты вершин:

$A'(1,0,H)$, $B'\left(1,\sqrt{7},H\right)$, $C'\left(0,\sqrt{7},H\right)$, $D'(0,0,H)$.

Так как отрезки MC' и $B'D$ образуют равные углы с плоскостью $A'BCD'$, то будут равны и синусы этих углов.

Запишем координаты векторов: $\overline{MC'}\left(-1,\frac{\sqrt{7}}{2},H\right)$,

$\overline{B'D}\left(-1,-\sqrt{7},-H\right)$.

Запишем уравнение плоскости $A'BCD'$, используя точки A',C,D'.

$$\begin{cases} a + Hc + d = 0, \\ \sqrt{7}b + d = 0, \\ Hc + d = 0. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений следует, что $a = 0$.

Пусть $b = H$, тогда $d = -\sqrt{7}H$, $c = \sqrt{7}$.

И уравнение плоскости $A'BCD'$: $Hy + \sqrt{7}z - \sqrt{7}H = 0$.

Обозначим через φ угол между вектором $\overline{MC'}$ и плоскостью $A'BCD'$. А через β обозначим угол между вектором $\overline{B'D}$ и плоскостью $A'BCD'$. Тогда $\sin\varphi = \dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{7}}{2}\cdot H + \sqrt{7}\cdot H\right|}{\sqrt{H^2+7}\cdot\sqrt{1+\dfrac{7}{4}+H^2}}$,

$$\sin\beta = \frac{\left|-\sqrt{7}H - \sqrt{7}H\right|}{\sqrt{H^2+7}\cdot\sqrt{1+7+H^2}}.$$

И справедливо равенство $\sin\varphi = \sin\beta$. Имеем:

$$\frac{\left|\dfrac{\sqrt{7}}{2}H + \sqrt{7}H\right|}{\sqrt{H^2+7}\cdot\sqrt{1+\dfrac{7}{4}+H^2}} = \frac{\left|-\sqrt{7}H - \sqrt{7}H\right|}{\sqrt{H^2+7}\cdot\sqrt{1+7+H^2}}.$$

Решаем это уравнение: $\frac{3}{2}\sqrt{8+H^2}=2\sqrt{\frac{11}{4}+H^2}$,

$9\left(8+H^2\right)=16\left(\frac{11}{4}+H^2\right)$, $72+9H^2=44+16H^2$, $28=7H^2$,

$4=H^2 \Rightarrow H=2\ (H>0)$.

Искомый объем будет равен $1\cdot\sqrt{7}\cdot 2$, т.е. $2\sqrt{7}$.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

Задача № 12. (НГУ ММФ 1989, В 1). Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Через прямую $B'C$ проведена плоскость, пересекающая ребро AB и составляющая угол в $60°$ с прямой $A'B$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB?

Решение.

Пусть ребро куба равно 1. Введем систему координат (рис.39) и выпишем координаты

точек: $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$,

$C(0,1,0)$

$A'(1,0,1)$, $B'(1,1,1)$,

координаты вектора

$\overline{A'B}(0,1,-1)$.

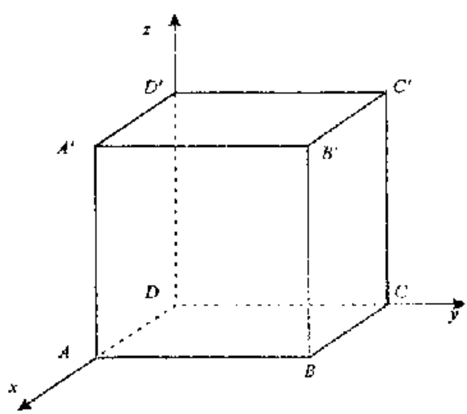


Рис. 39

Запишем уравнение плоскости α, которая содержит две точки (B',C) и составляет угол 60° с вектором $A'B$.

$$\begin{cases} a+b+c+d=0, \\ b+d=0, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{|b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1+1}}. \end{cases}$$

Третье уравнение получается из формулы вычисления (нахождения) угла φ между плоскостью $\alpha: ax+by+cz+d=0$ и вектором $\overline{f}(x_{\overline{f}}, y_{\overline{f}}, z_{\overline{f}})$: $\sin\varphi=\dfrac{\left|a\cdot x_{\overline{f}}+b\cdot y_{\overline{f}}+c\cdot z_{\overline{f}}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x_{\overline{f}}^2+y_{\overline{f}}^2+z_{\overline{f}}^2}}$.

Пусть $a=1$, тогда $c=-1$. Имеем: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{2}|b-c|$, $\sqrt{3}\sqrt{b^2+2}=\sqrt{2}|b+1|$, $3(b^2+2)=2(b^2+2b+1)$ и $b=2$.

Следовательно, $d=-2$.

Получили уравнение плоскости α: $x+2y-z-2=0$.

Пусть F - точка пересечения плоскости α и ребра AB. Тогда координаты точки $F(1,f,0)$ подставим в уравнение плоскости α и получим: $1+2f-2=0 \Rightarrow f=\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, F - середина AB. И искомое отношение 1:1.

Ответ: 1:1.

Замечание 1.

Искомое отношение можно найти как отношение расстояний от концов отрезка AB до плоскости α: $\frac{AF}{FB}=\frac{\rho(A,\alpha)}{\rho(B,\alpha)}$, где

$\rho_{A,\alpha}=\frac{|1-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\rho_{B,\alpha}=\frac{|1+2-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$. В итоге $\frac{AF}{FB}=\frac{1}{1}$.

Замечание 2.

Уравнение плоскости α записано, используя координаты двух точек (B',C) и величины угла в $60°$ с заданным вектором. Затем находятся координаты точки перессчения с ребром AB.

Можно решить эту задачу несколько иначе.

Запишем уравнение плоскости α, используя координаты трех точек $B'(1,1,1)$, $C(0,1,0)$ и $F(1,f,0)$:

$$\begin{cases} a+b+c+d=0, \\ b+d=0, \\ a+bf+d=0. \end{cases}$$

Пусть $b=1$, тогда $d=-1$, $a=1-f$ и $c=f-1$.

И уравнение плоскости α: $(1-f)x+y+(f-1)z-1=0$, где f - некоторая неизвестная, которую надо найти. Для этого используем заданный угол.

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\left|1-(f-1)\right|}{\sqrt{(1-f)^2+1+(f-1)^2}\cdot\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-2f+f^2+1+f^2-2f+1} = \sqrt{2}\left|2-f\right|,$$

$$3\left(2f^2-4f+3\right) = 2\left(4-4f+f^2\right),\ 4f^2-4f+1=0 \Rightarrow f=\frac{1}{2}.$$

Вычислив значение f, получили и искомое отношение $\frac{AF}{FB}=\frac{1}{1}$,

и также получили уравнение плоскости α: $\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z-1=0$

или $x+2y-z-2=0$.

Ответ: 1:1.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольной пирамиде SABC ребра SA, AB и BC взаимно перпендикулярны и SA = 4, AB = 3, BC = $2\sqrt{5}$. Точки K и L – середины ребер AC и SB соответственно. Найти угол между прямой KL и плоскостью BSC.
   Ответ: arcsin $2/5$.
2. Основанием прямоугольного параллелепипеда с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 является прямоугольник ABCD со сторонами AB = 5, BC = 1. Точка M – середина ребра AB. Найти объем параллелепипеда, если известно, что отрезки MC_1 и B_1C образуют равные углы с плоскостью A_1BCD_1.
   Ответ: 10.

§6. *Расстояние между прямыми*

Задача № 13. (НГУ ФФ 1989, В 1). Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Длина ребра куба равна 1. Точки M и N - середины ребер CD и CC' соответственно. Найти расстояние между прямыми AN и BM.

Решение.

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми (т.е. длину их общего перпендикуляра) будем искать по следующему алгоритму.

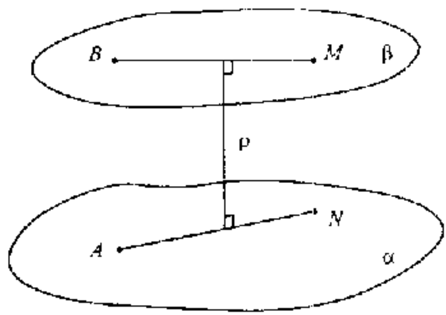


Рис. 40

Через две данные прямые проведем две параллельные плоскости α и β (рис.40). Плоскость α содержит прямую AN, плоскость β содержит прямую BM, и $\alpha \parallel \beta$. Тогда расстояние между прямыми ρ равно расстоянию от любой точки плоскости β (например, от точки B) до плоскости α. Ясно, что для нахождения величины ρ плоскость β можно и не строить.

А плоскость α должна содержать прямую AN и быть параллельна прямой BM.

Введем систему координат (рис.41) и построим плоскость α.

Выпишем координаты точек: $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $A'(1,0,1)$, $C'(0,1,1)$, $M\left(0,\frac{1}{2},0\right)$, $N\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$, $\overline{BM}=\left(-1,-\frac{1}{2},0\right)$.

Если плоскость $\alpha \parallel \overline{BM}$, то $\overline{n} \perp \overline{BM}$, где $\overline{n}$ - вектор нормали плоскости α. А если $\overline{n} \perp \overline{BM}$, то $\overline{n} \cdot \overline{BM} = 0$.

Запишем уравнение плоскости α:

$$\begin{cases} a+d=0, \\ b+\frac{c}{2}+d=0, \\ -a-\frac{1}{2}b=0. \end{cases}$$

Пусть $b=2$, тогда $a=-1$, $d=1$, $c=-6$.

И уравнение плоскости α:

$-x+2y-6z+1=0$.

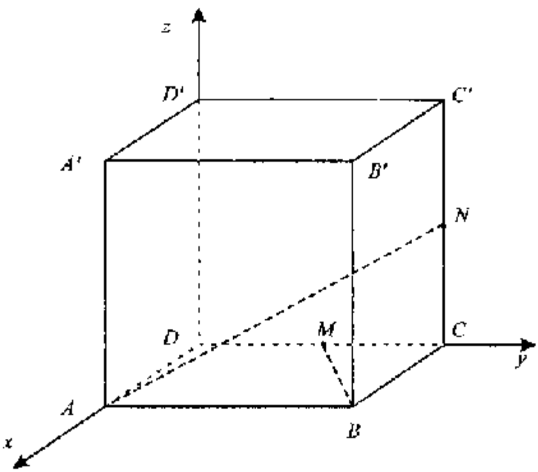


Рис. 41

Расстояние от точки B до плоскости α:

$$\rho_{B,\alpha} = \frac{|-1+2+1|}{\sqrt{1+4+36}} = \frac{2}{\sqrt{41}}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{41}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 1, её боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны 2. Точки K и L – середины ребер AB и CC_1 соответственно. Найти расстояние между прямыми KL и A_1C.

   Ответ: $\sqrt{3/115}$.

2. В основании треугольной пирамиды ABCD лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AD, BD, CD равны $\sqrt{3}$. Точки K и L – середины ребер AC и BD соответственно. Найти расстояние между прямыми BK и AL.

   Ответ: $\sqrt{5/17}$.

§7. Построение сечений

Задача № 14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$. Длина ребра куба равна 1. Точки M и N лежат на ребрах CC_1 и AA_1 соответственно, $CM = \frac{1}{6}$, $AN = \frac{1}{2}$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки M и N, параллельно прямой BD_1.

Решение.

Введем систему координат (рис.42) и выпишем координаты точек: $M(0,1,\frac{1}{6})$, $N(1,0,\frac{1}{2})$, $B(1,1,0)$, $D_1(0,0,1)$.

Координаты вектора $\overline{BD_1}$ будут $(-1,-1,1)$. Запишем уравнение заданной плоскости

$$\begin{cases} b + \frac{1}{6}c + d = 0, \\ a + \frac{1}{2}c + d = 0, \\ -a - b + c = 0. \end{cases}$$

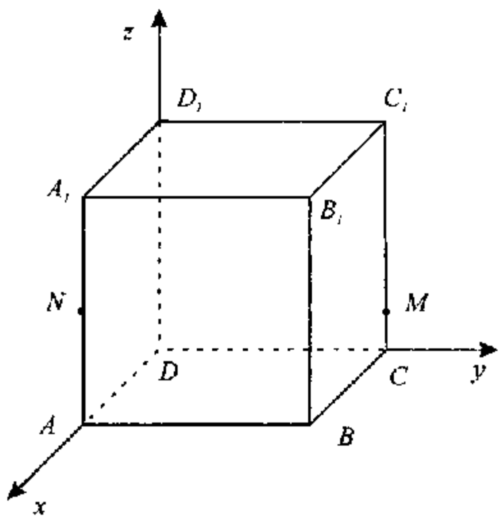


Рис. 42

Пусть $c = 6$. Сложим все три уравнения и получим, что $d = -5$. Тогда $b = 4$ и $a = 2$. И искомое уравнение плоскости имеет вид: $2x + 4y + 6z - 5 = 0$.

Построим сечение, т.е. найдем точки пересечения ребер куба с плоскостью.

Пусть $P(p,1,0)$ - точка пересечения заданной плоскости и ребра BC. Тогда имеет место равенство:

$2 \cdot p + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 - 5 = 0$. Получаем, что $p = \frac{1}{2}$ и $P(\frac{1}{2},1,0)$.

Пусть $Q(1,q,0)$ - точка пересечения заданной плоскости и ребра AB. Тогда имеет место равенство:

$2 \cdot 1 + 4 \cdot q + 6 \cdot 0 - 5 = 0$ и $q = \frac{3}{4}$, т.е. $Q(1,\frac{3}{4},0)$.

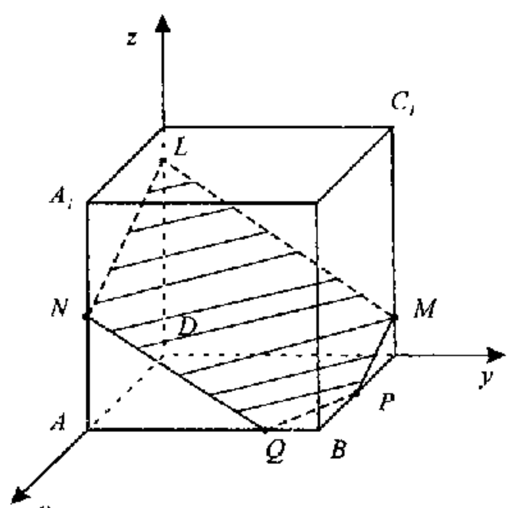


Рис. 43

Пусть $L(0,0,l)$ - точка пересечения заданной плоскости и ребра DD_1. Тогда имеет место равенство: $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot l - 5 = 0$

и $l = \frac{5}{6}$, т.е. $L(0,0,\frac{5}{6})$.

Следовательно, искомым сечением куба является

пятиугольник $MPQNL$ (рис.43) с вершинами $M(0,1,\frac{1}{6})$,

$P(\frac{1}{2},1,0)$, $Q(1,\frac{3}{4},0)$, $N(1,0,\frac{1}{2})$, $L(0,0,\frac{5}{6})$.

Ответ: Сечением куба является пятиугольник $MPQNL$ с

вершинами $M(0,1,\frac{1}{6})$, $P(\frac{1}{2},1,0)$, $Q(1,\frac{3}{4},0)$, $N(1,0,\frac{1}{2})$,

$L(0,0,\frac{5}{6})$.

Задача № 15. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 12. Высота пирамиды равна 12. Точка M лежит на ребре CS,

$CM = \frac{2}{3} CS$. Построить сечение пирамиды плоскостью,

проходящей через середину ребра AB (точку K), параллельно прямым DS и AM.

Решение.

Введем систему координат (рис.44) и выпишем координаты точек: $A(12,0,0)$, $B(12,12,0)$, $C(0,12,0)$, $D(0,0,0)$, $S(6,6,12)$, $K(12,6,0)$. Для нахождения координат точки $M(x_0, y_0, z_0)$ будем использовать параметрическое

уравнение прямой CS. Пусть $\overline{CM} = \alpha\overline{CS}$, откуда координаты точки M: $\begin{cases} x_o = 6\alpha, \\ y_o = -6\alpha + 12, \\ z_o = 12\alpha. \end{cases}$ По условию

$\overline{CM} = \frac{2}{3}\overline{CS}$, следовательно, $\alpha = \frac{2}{3}$ и $x_0 = 4, y_0 = 8, z_0 = 8$.

Тогда координаты вектора $\overline{AM}$ будут $(-8,8,8)$, а координаты вектора $\overline{DS}(6,6,12)$. Выпишем уравнение плоскости, проходящей через точку K, параллельно прямым DS и AM.

$$\begin{cases} 12a + 6b + d = 0, \\ 6a + 6b + 12c = 0, \\ -8a + 8b + 8c = 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 12a + 6b + d = 0, \\ a + b + 2c = 0, \\ -a + b + c = 0. \end{cases}$$

Пусть $b = 3$. Сложим второе и третье уравнения системы и получим: $c = -2$, $a = 1$ и $d = -30$. Искомое уравнение плоскости имеет вид: $x + 3y - 2z - 30 = 0$.

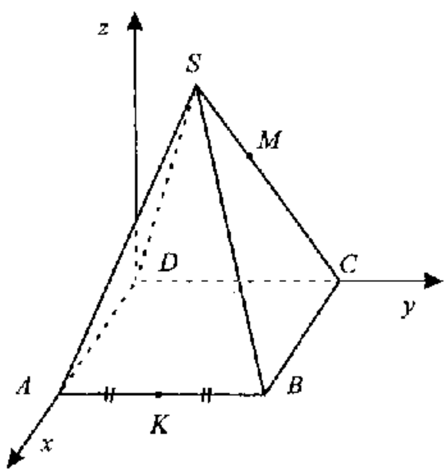


Рис. 44

Имея это уравнение будем строить сечение следующим образом. Пусть $T(0,t,0)$ - точка пересечения заданной плоскости и ребра DC. Тогда имеем:

$1\cdot 0+3\cdot t-2\cdot 0-30=0$ и $t=10$, т.е. сечение делит ребро DC пирамиды следующим образом: $CT:TD=1:5$ и $T(0{,}10{,}0)$.

Пусть P - точка пересечения заданной плоскости и ребра CS и $\overline{CP}=\alpha\overline{CS}$, тогда координаты точки P имеют вид: $x_p=6\alpha, y_p=-6\alpha+12, z_p=12\alpha$. Подставим их в уравнение плоскости и получим: $6\alpha+3\cdot(-6\alpha+12)-2\cdot 12\alpha-30=0$.

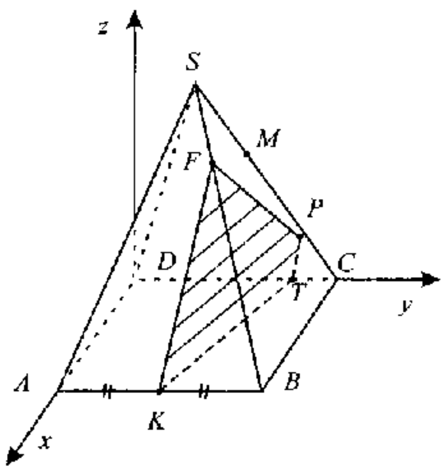


Рис. 45

Откуда $\alpha=\dfrac{1}{6}$, т.е. сечение делит ребро CS следующим образом: $CP:PS=1:5$ и $P(1{,}11{,}2)$.

Пусть F - точка пересечения заданной плоскости и ребра BS и $\overline{BF}=\alpha\overline{BS}$, тогда координаты точки F имеют вид: $x_f=-6\alpha+12, y_f=-6\alpha+12, z_f=12\alpha$. Подставим их в уравнение плоскости и получим:

$$-6\alpha+12+3\cdot(-6\alpha+12)-2\cdot 12\alpha-30=0.$$ Откуда $\alpha=\dfrac{3}{8}$, т.е

сечение делит ребро BS следующим образом:

$BF : FS = 3 : 5$, и $F(\frac{39}{4}, \frac{39}{4}, \frac{9}{2})$.

В итоге, получаем, что искомым сечением является четырехугольник $KTPF$ (рис.45) с вершинами $K(12,6,0)$, $T(0,10,0)$, $P(1,11,2)$ и $F(\frac{39}{4}, \frac{39}{4}, \frac{9}{2})$.

Ответ: Сечением пирамиды является четырехугольник $KTPF$ с вершинами $K(12,6,0)$, $T(0,10,0)$, $P(1,11,2)$ и $F(\frac{39}{4}, \frac{39}{4}, \frac{9}{2})$ или по другому, сечение делит ребра пирамиды следующим образом: $BF : FS = 3 : 5$, $CP : PS = 1 : 5$, $CT : TD = 1 : 5$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точки M и N лежат на ребрах AA_1 и D_1C_1 соответственно, $AM = D_1N = \frac{1}{2}$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точку M, параллельно прямым CB_1 и DN.

Ответ: Сечением куба является пятиугольник

$MPQNL$ с вершинами $M(1,0,\frac{1}{2})$, $P(1,\frac{1}{4},1)$, $Q(0,\frac{3}{4},1)$,

$N(0,\frac{1}{4},0)$, $L(\frac{1}{2},0,0)$.

2. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 12. Высота пирамиды равна 12. Точка M - пересечение медиан треугольника ADS, точка N - середина медианы SK в треугольнике CDS. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M, N и B
Ответ: Сечением пирамиды является

четырехугольник с вершинами $B(12,12,0)$,

$P(\frac{18}{5},\frac{18}{5},\frac{36}{5})$, $Q(2,10,4)$ и $T(9,0,0)$, или по другому,

сечение делит ребра пирамиды следующим образом:

$DP:PS=3:2$, $CQ:QS=1:2$, $AT:TD=3:1$.

§8. Периметр и площадь сечения

Задача № 16. (НГУ ФЕН 1992, В4). Квадрат ACC_1A_1 является боковой гранью прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Точка М лежит на луче A_1C_1, $A_1M = 3$, $AC = AB = 2$, угол CAB – прямой. Найти периметр сечения призмы плоскостью, проходящей через точки М и В параллельно прямой AB_1.

Решение.

Введем систему координат (рис.46) и выпишем координаты точек. Из условия, что ACC_1A_1 - квадрат, следует: $A(0,0,0)$, $A_1(0,0,2)$, $C(0,2,0)$, $C_1(0,2,2)$, $B(2,0,0)$, $B_1(2,0,2)$ и $M(0,3,2)$.

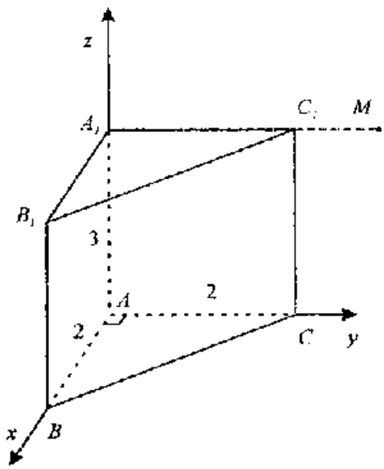


Рис. 46

Запишем координаты вектора $\overline{AB_1}(2,0,2)$. Из условия, что плоскость параллельна вектору $\overline{AB_1}$, следует, что вектор нормали $\bar{n}$ к искомой плоскости перпендикулярен вектору $\overline{AB_1}$. Запишем уравнение заданной плоскости:

$$\begin{cases} 2a + d = 0, \\ 3b + 2c - d = 0, \\ 2a + 2c = 0. \end{cases}$$

Пусть $a = 3$, тогда $c = -3$, $d = -6$ и $b = 4$. И уравнение плоскости имеет вид: $3x + 4y - 3z - 6 = 0$.

Построим сечение, т.е. найдем точки пересечения ребер призмы с плоскостью.

Пусть $P(0, p, 0)$ - точка пересечения заданной плоскости и ребра AC. Тогда имеет место равенство:

$3 \cdot 0 + 4 \cdot p - 3 \cdot 0 - 6 = 0$. Получаем, что $p = \dfrac{3}{2}$ и $P(0, \dfrac{3}{2}, 0)$.

Пусть $F(0,2, f)$ - точка пересечения заданной плоскости и ребра CC_1. Тогда имеет место равенство:

$3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot f - 6 = 0$ и $f = \dfrac{2}{3}$, т.е. $F(0,2,\dfrac{2}{3})$.

Сечением призмы является треугольник BPF. Найдем длины его сторон:

$$|\overline{BP}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2};$$

$$|\overline{PF}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} = \frac{5}{6};$$

$$|\overline{BF}| = \sqrt{4 + 4 + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{19}.$$

Следовательно, периметр сечения будет равен $\frac{10+2\sqrt{19}}{3}$

Ответ: $\frac{10+2\sqrt{19}}{3}$.

Задача №17. (НГУ ММФ 1976, В3). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD. Длина ребра куба равна 1. Через главную диагональ BD_1 куба проведена плоскость, образующая угол 30^0 с плоскостью BB_1D_1D. Найти площадь получившегося сечения.

Решение.

Введем систему координат (рис.47)и выпишем координаты точек: $A(1,0,0)$, $A_1(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $B_1(1,1,1)$, $C(0,1,0)$, $C_1(0,1,1)$, $D(0,0,0)$, $D_1(0,0,1)$. Уравнение плоскости BB_1D_1D получаем, используя координаты точек B, D, D_1. И это уравнение имеет вид:

$x - y = 0$.

Запишем уравнение плоскости, которая проходит через B, D_1 и образует угол в 30^0 с плоскостью BB_1D_1D:

$x - y = 0$.

Для этого составим систему:

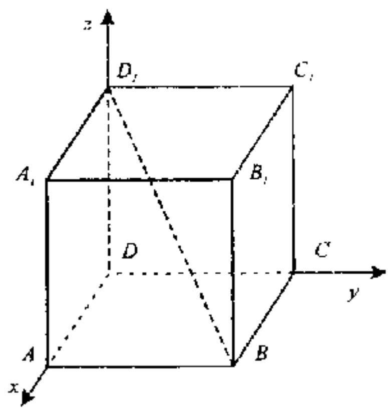


Рис. 47

$$\begin{cases} a+b+d=0, \\ c+d=0, \\ \dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Последнее уравнение получено из формулы для угла между плоскостями. Пусть $c=1$, тогда $d=-1$ и $a=1-b$.

Получили, что $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{|1-b-b|}{\sqrt{(1-b)^2+b^2+1}\cdot\sqrt{2}}$. Решив, это

уравнение, имеем $b_1=-1$ и $b_2=2$. Следовательно, $a_1=2$ и $a_2=-1$. В итоге две плоскости с уравнениями:

$2x-y+z-1=0$ и $-x+2y+z-1=0$ удовлетворяют

данным условиям.

Построим сечение куба плоскостью, имеющей уравнение $2x-y+z-1=0$.

Пусть $F(f,0,0)$ - точка пересечения заданной плоскости и ребра AD. Тогда имеем равенство: $2\cdot f-0+0-1=0$.

Получаем, что $f=\dfrac{1}{2}$ и $F(\dfrac{1}{2},0,0)$.

Пусть $T(t,1,1)$ - точка пересечения заданной плоскости и

ребра B_1C_1. Тогда имеем $2\cdot t-1+1-1=0$ и $t=\dfrac{1}{2}$, т.е.

$T(\frac{1}{2},1,1)$. Получили, что сечением является четырехугольник BTD_1F. И т.к. каждая его сторона равна $\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, то BTD_1F - ромб. Площадь ромба BTD_1F равна $\frac{1}{2}\cdot BD_1\cdot TF$. Понятно, что $BD_1=\sqrt{3}$, $TF=\sqrt{2}$. Следовательно, площадь сечения равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Если аналогично рассмотреть плоскость, имеющую уравнение: $-x+2y+z-1=0$, то получим в сечении ромб (убедитесь сами) с вершинами: B, D_1, K и M, где K и M – середины ребер B_1A_1 и CD соответственно. Площадь этого сечения так же равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, в которой AB = 4, AC = A_1A = 2, $AB \perp AC$. Точки K и L лежат на лучах A_1C_1 и B_1B соответственно, $A_1K = 4$, $B_1L = 3$. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки K и L параллельно AB.
   Ответ: 5/9.

2. Квадрат ACC_1A_1 является боковой гранью прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Точка M лежит на луче A_1C_1, $A_1M = 3$, $AC = AB = 2$, угол CAB – прямой. Найти периметр сечения призмы плоскостью, проходящей через точки M и B параллельно прямой AB_1.

Ответ: $(10 + 2\sqrt{19})/3$.

§9. Объем пирамиды

Задача №18. (НГУ ФЕН 1988, В 2.2). Прямоугольный треугольник ABC с катетами AB = 2, AC = 4 лежит в основании треугольной пирамиды SABC, боковые ребра которой равны 4. На луче CA выбраны точки M и N так, что CM = 1, CN = 6; на луче BS выбраны точки P и Q таким образом, что BP = 2, BQ =5. Найти объем пирамиды MNPQ.

Решение.

Введем систему координат (рис.48) и выпишем координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,4,0)$. Из условия, что $BS = CS = AS = 4$, вершина S будет иметь координаты $(1,2,\sqrt{11})$. Использовали тот факт, что основание высоты из вершины S совпадает с центром описанной вокруг треугольника ABC окружности – серединой гипотенузы BC. Легко заметить, что $M(0,3,0)$, $N(0,-2,0)$, $P(\frac{3}{2},1,\frac{\sqrt{11}}{2})$ (т.к. P - середина BS). Для нахождения координат

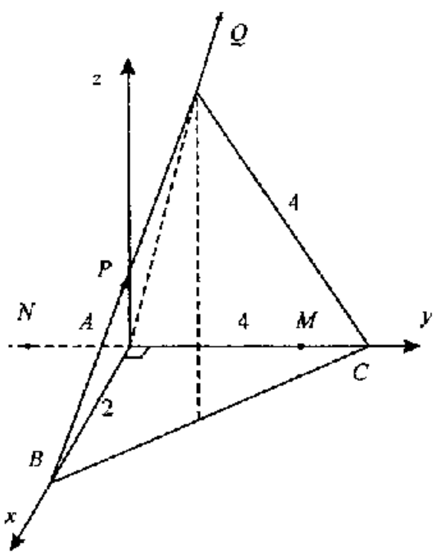


Рис. 48

точки Q используем параметрическое уравнение прямой BS:

$$\overline{BQ} = \frac{5}{4}\overline{BS} \text{ или } \begin{cases} x_q - 2 = \frac{5}{4}\cdot(-1), \\ y_q = \frac{5}{4}\cdot 2, \\ z_q = \frac{5}{4}\cdot\sqrt{11}. \end{cases}, \text{ т.е. } Q = (\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}\sqrt{11}).$$

Следовательно, имеем координаты всех четырех вершин пирамиды $MNPQ$. Найдем длины ребер данной пирамиды $MNPQ$: $MN = 5$, $MQ = \sqrt{18}$, $MP = 3$, $PQ = 3$, $NP = 14$.

Заметим, что ΔMPQ - равнобедренный и его площадь легко найти, опустив высоту из P на основание MQ. Но здесь можно так же заметить, что $MP^2 + PQ^2 = MQ^2$. Следовательно, $\angle MPQ = 90^0$ (по теореме, обратной теореме Пифагора) и площадь ΔMPQ равна $\frac{9}{2}$. Следующим шагом напишем уравнение плоскости MPQ и найдем расстояние ρ от точки N до этой плоскости. Это расстояние и будет высотой пирамиды $MNPQ$ с основанием MPQ.

Запишем уравнение плоскости MPQ:

$$\begin{cases} 3b + d = 0, \\ \dfrac{3}{4}a + \dfrac{5}{2}b + \dfrac{5}{4}\sqrt{11}c + d = 0, \\ \dfrac{3}{2}a + b + \dfrac{\sqrt{11}}{2}c + d = 0. \end{cases}$$

Пусть $b = 2$, тогда $d = -6$, $a = 3$ и $c = -\dfrac{1}{\sqrt{11}}$. И уравнение

плоскости MPQ имеет вид: $3x + 2y - \dfrac{1}{\sqrt{11}}z - 6 = 0$. Найдем

расстояние от точки N до этой плоскости:

$H = \rho = \dfrac{|-4-6|}{\sqrt{9 + 4 + \dfrac{1}{11}}} = \dfrac{5}{6}\sqrt{11}$. Тогда искомый объем равен

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5}{6}\sqrt{11} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{5}{4}\sqrt{11}$.

Ответ: $\dfrac{5}{4}\sqrt{11}$.

Задача №19. (НГУ ФЕН 1999, В 2.3). В правильной четырехугольной пирамиде SABCD ребра основания ABCD равны 4, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{17}$. Точки M, N и K – середины ребер SC, SD и SA соответственно. Найти объём пирамиды MNKAD.

Решение.

Введем систему координат (рис.49) и выпишем координаты точек: $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$, $D(0,0,0)$, $S(2,2,3)$,

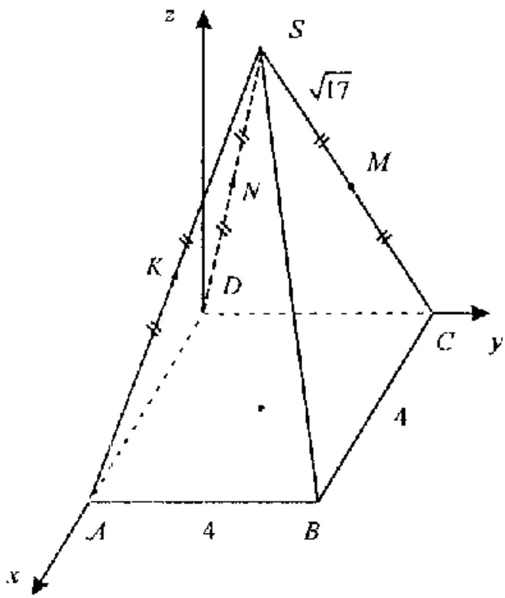


Рис. 49

$K(3,1,\frac{3}{2})$, $M(1,3,\frac{3}{2})$, $N(1,1,\frac{3}{2})$.

Найдем площадь четырехугольника NKAD, который является основанием пирамиды MNKAD. Заметим, что NK – средняя линия треугольника ASD. Следовательно, площадь четырехугольника NKAD равна $\frac{3}{4}S$, где S – площадь треугольника ASD. Понятно, что $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (\sqrt{17-4}) = 2\sqrt{13}$, а площадь $S_{NKAD} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$. В пирамиде MNKAD найдем высоту из вершины M на основание NKAD. Так как точки (N, K, A, D) принадлежат плоскости ASD, и высота H из вершины M будет равна расстоянию ρ от точки M до плоскости ASD. Запишем уравнение плоскости ASD:

$$\begin{cases} d = 0, \\ 2a + 2b + 3c + d = 0, \\ 4a + d = 0. \end{cases}$$

Пусть $b = 3$, тогда $d = 0$, $a = 0$ и $c = -2$. И уравнение плоскости ASD имеет вид: $3y - 2z = 0$. Найдем расстояние ρ от точки M до плоскости ASD: $\rho = \frac{|9-3|}{\sqrt{9+4}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$ и $H = \rho = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

Искомый обьем $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13} \cdot \frac{6}{\sqrt{13}} = 3$.

Ответ: 3.

Задачи для самостоятельного решения

1. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB = 8, BC = 6, длина боковых ребер равна 10. Точки K и L – середины ребер SB и SC, точки M и N выбраны соответственно на ребрах AD и AB так, что MD = AN = 2. Найти объем пирамиды KLMN.
   Ответ: $5\sqrt{3}/2$.
2. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD ребра основания ABCD равны 4, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{33}$. Точки M, N и K – середины ребер AB, BS и BC соответственно. Найти объём пирамиды MNKCS.
   Ответ: 5.

§10. Ортогональная проекция

Задача №20. (НГУ ФЕН 1993, В 1). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ребра $AB = 5$, $AD = 10$, $AA' = 2\sqrt{5}$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка $A'B'$ на плоскость BMD, где M - середина ребра $B'C'$.

Решение.

Введем систему координат (рис.50) и выпишем координаты точек: $A(10,0,0)$, $B(10,5,0)$, $C(0,5,0)$, $A'\left(10,0,2\sqrt{5}\right)$, $C'\left(0,5,2\sqrt{5}\right)$, $B'\left(10,5,2\sqrt{5}\right)$, $M\left(5,5,2\sqrt{5}\right)$, $D(0,0,0)$. Вектор $\overline{A'B'}(0,5,0)$.

Запишем уравнение плоскости BMD:

$$\begin{cases} 10a + 5b + d = 0, \\ 5a + 5b + 2\sqrt{5}c + d = 0, \\ d = 0. \end{cases}$$

Пусть $b = -2$, тогда

$a = 1$ и $c = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

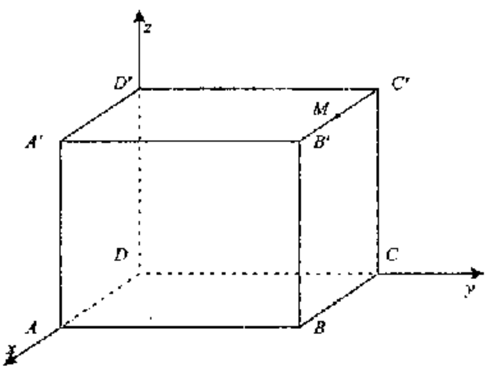


Рис. 50

В итоге уравнение плоскости BMD:

$x - 2y + \dfrac{\sqrt{5}}{2}z = 0$, или $2x - 4y + \sqrt{5}z = 0$.

Вектор нормали данной плоскости: $\overline{n}\left(2,-4,\sqrt{5}\right)$.

Сделаем следующий рисунок (рис.51). Длина вектора $A'B'$ равна 5.

$A'F$ - расстояние от A' до данной плоскости,

$B'K$ - расстояние от B' до данной плоскости.

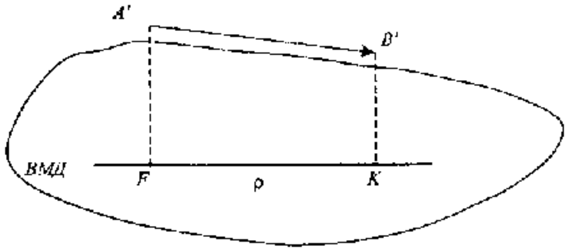


Рис. 51

FK - проекция $\overline{A'B'}$ на плоскость. Пусть ее длина равна p. Так как $A'F$ и $B'K$ перпендикулярны плоскости BMD, то $A'F \parallel B'K$, и четырехугольник $A'B'KF$ - плоский.

Пусть $B'E \parallel FK$. Тогда $B'E = p$, и угол $\varphi(\angle A'B'E)$ является углом между вектором $\overline{A'B'}$ и плоскостью BMD (рис.52).

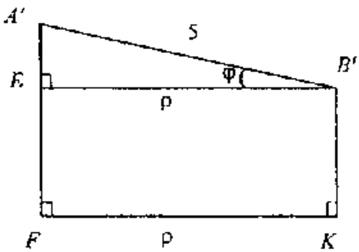


Рис. 52

Известно, что

$$\sin\varphi = \frac{|-20|}{\sqrt{4+16+5\cdot 5}} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$.

И из равенства $p = 5\cdot\cos\varphi$ вытекает, что $p = 3$.

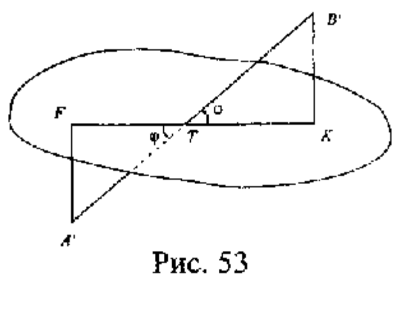


Рис. 53

Ответ: 3.

Замечание.

Данный алгоритм нахождения длины проекции справедлив и в случае, когда плоскость пересекает отрезок (рис.53). Пусть T - пересечение плоскости с отрезком. Тогда $TK = TB' \cdot \cos\varphi$,

$FT = A'T \cdot \cos\varphi$, $FK = FT + TK = \left(A'T + TB'\right) \cdot \cos\varphi = A'B' \cdot \cos\varphi$.

Задача №21. (НГУ ФЕН 2001, В 1.2). В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M – середина ребра A_1D_1. Найти площадь ортогональной проекции грани AA_1B_1B на плоскость BC_1M.

Решение.

Введем систему координат (рис.54) и выпишем координаты точек: $A(1,0,0)$, $A_1(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $B_1(1,1,1)$, $C(0,1,0)$, $C_1(0,1,1)$, $D(0,0,0)$, $D_1(0,0,1)$,

$M(\frac{1}{2},0,1)$.

Ясно, что уравнение плоскости грани AA_1B_1B имеет вид: $x - 1 = 0$.

Найдем уравнение плоскости BC_1M.

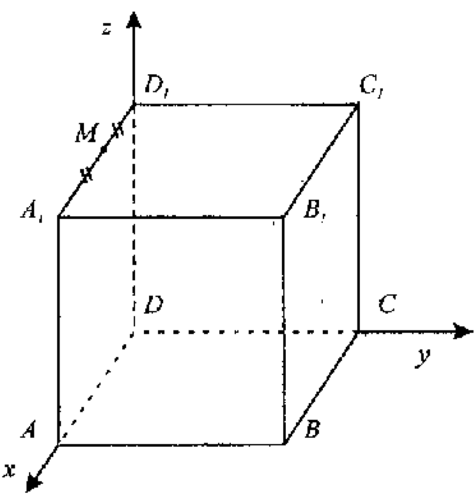


Рис. 54

$$\begin{cases} a+b+d=0, \\ b+c+d=0, \\ \frac{1}{2}a+c+d=0. \end{cases}$$ Пусть $a=2$, тогда $b=1$, $d=-3$ и $c=2$.

И уравнение плоскости BC_1M имеет вид: $2x+y+2z-3=0$.

Пусть φ - угол между плоскостями BC_1M и AA_1B_1B.

Тогда справедливо равенство: $\cos\varphi = \frac{|2\cdot 1|}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1}} = \frac{2}{3}$.

Для решения задачи будем использовать формулу

$S_1 = S_2 \cdot \cos\varphi$, где S_1 - площадь ортогональной проекции грани AA_1B_1B на плоскость BC_1M, S_2 - площадь грани AA_1B_1B.

В итоге получаем, что $S_1 = 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра $AB = 2$, $AD=4$, $AA_1 = \sqrt{14}$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка C_1D_1 на плоскость A_1MC, где M – середина ребра AD.
   Ответ: 3/2.
2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M – середина ребра B_1C_1. Найти площадь ортогональной проекции грани CC_1D_1D на плоскость A_1CM.
   Ответ: $\sqrt{2/3}$.

CD так, что $\angle CBM = 15^0$. Найти расстояние от точки H до плоскости BSM.

Ответ: 4/3.

13. Основание прямой треугольной призмы ABC $A_1B_1C_1$ является прямоугольным треугольником, $\angle B = 90^0$, $\angle A = 60^0$, AC = 2. Высота призмы равна 1. Найти площадь сечения, проведенного через отрезок AC_1 под углом 45^0 к плоскости основания.

 Ответ: $\sqrt{6}/2$, 2/3.

14. В основании параллелепипеда лежит параллелограммABCD, в котором острый угол A равен 60^0, а длины сторон AB и BC – соответственно a и 6a. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания, а их длины равны a. Через вершины A, B_1 и D_1 проведена плоскость. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости.

 Ответ: $a\sqrt{2}$.

15. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат ABCD со стороной 4. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 1. Точки M, N и G – середины ребер B_1C_1, CD и BB_1 соответственно. Плоскость GCD_1 пересекает отрезок MN в точке K. Найти длину отрезка MK.

 Ответ: 9/5.

16. В правильной треугольной призме угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен arccos(1/4), сторона основания имеет длину 1. Найти длину бокового ребра.

 Ответ: 1 или $1/\sqrt{5}$.

17. Основанием пирамиды SABCD служит ромб ABCD со стороной 2 и острым углом 30^0. Основанием высоты пирамиды являтся центр ромба ABCD. Плоскости граней SAB и SCD перпендикулярны. Найти объем пирамиды.

 Ответ: 1/3.

18. В треугольной пирамиде ABCD ребра AB, BC и BD взаимно перпендикулярны и имеют длину 2. Через точки M и N – середины ребер AC и BD соответственно проведена плоскость, которая пересекает ребро AB и образует равные двугранные углы с плоскостями граней ABC и ABD. Найти величины этих углов.

Ответ: arctg $\sqrt{5}$.

19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K лежит на луче BA_1 ($BK=2BA_1$), точка L – центр грани ABCD. В каком отношении плоскость KLC_1 делит диагональ CB_1?

Ответ: 1 : 5.

20. В основании треугольной пирамиды SABC лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами AC = 6 и BC = 4. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45^0. На ребре AC выбрана точка M, причем AM : MC = 2 : 1. На ребре SB выбрана точка K, причем SK : KB = 3 : 1. Через точки M и K параллельно ребру SC проведена плоскость β. Найти расстояние от вершины B до плоскости β.

Ответ: $\sqrt{26}/13$.

21. Дан куб с основанием ABCD. На главной диагонали BD_1 куба выбрана точка F так, что $BF = 2FD_1$. Через вершину A, точку F и середину ребра CC_1 проведена плоскость. Найти отношение объемов частей, на которые делит куб эта плоскость.

Ответ: 25/47.

22. В пирамиде ABCD двугранный угол при ребре AB равен 60^0. К ребру AB из вершин C и D проводятся перпендикуляры соответственно CM и DN. Найти длину ребра CD, если известно, что CM = 4, DN = 3 и MN = 1.

Ответ: $\sqrt{14}$.

23. В пирамиде ABCD двугранный угол при ребре AB равен 120^0. К ребру AB из вершин C и D проводятся

перпендикуляры соответственно CM и DN. Найти длину отрезка MN, если известно, что CM = 6, DN = 5 и CD = $\sqrt{95}$.

Ответ: 2.

24. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Точка M – середина ребра CC_1. Через точку M проходит прямая, пересекающая прямые AD и BD_1 в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ, если ребро куба равно 1.

Ответ: $\sqrt{21}/3$.

25. Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 2. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1.
    1) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BC_1 такую, что $BM : BC_1 = 1 : 3$. Найти его длину.
    2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

Ответ: 1)$2\sqrt{5}/3$, 2)$2\sqrt{5}/5$.

26. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1, точка M – середина ребра AC. Какую наименьшую площадь может иметь ΔA_1BP, если точка P лежит на прямой C_1M?

Ответ: $\sqrt{6}/\sqrt{31}$.

27. Прямоугольник ABCD со сторонами AB = 2, BC = 3 является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Боковые ребра равны 4. Точки P и Q – середины ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно. На прямой B_1C_1 выбрана точка M так, что расстояния от точек P и Q до прямой AM равны. Определить длину отрезка B_1M.

Ответ: 2 или 10.

28. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Точки P, K, L – середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка

Q – центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

Ответ: $\sqrt{14}/3$.

29. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат ABCD со стороной 3, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны 5. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с вершиной C параллелепипеда, а две другие лежат на прямых BB_1 и C_1D_1 соответственно. Найти длину медианы треугольника.

Ответ: $3\sqrt{30}/2$.

30. В правильной пирамиде SABC ребра SA, SB, SC попарно перпендикулярны. Точка K лежит на луче SA (AK = 2 SA), точка L лежит на луче AC (CL =AC), а точка M – середина ребра SB. В каком отношении плоскость KLM делит площадь грани ABC?

Ответ: 9 : 11.

31. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 1. Прямая, перпендикулярная плоскости BA_1C, пересекает прямые BC_1 и AB_1 соответственно в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

Ответ: $\sqrt{7}/3$.

32. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны a, и ромб CABD. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середину стороны BD параллельно диагоналям CA_1 и AB_1 боковых граней.

Ответ: $\sqrt{15}\,a^2/32$.

33. В треугольной пирамиде ABCD ребра AB = AC = BD = 5, $AD = BC = \sqrt{10}$. Угол между гранями ABD и ABC равен 60^0. Найти длину ребра CD.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

34. Прямоугольник ABCD со сторонами $AB = 1$, $BC = 8$ является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны 2. На отрезке BC_1 выбрана точка P так, что угол между векторами AB_1 и AP равен arctg 3. Найти отношение $BP : PC_1$.

Ответ: 1 : 1.

35. Длина каждого ребра тетраэдра ABCD равна 2. На ребрах DA, DC, BC расположены соответственно точки M, N и P так, что $DM = CN = 2/3$, $CP = 2/5$. Найти длину отрезка BQ, где Q- точка пересечения плоскости MNP с ребром AB.

Ответ: 1.

36. В основании пирамиды SABCD лежит трапеция ABCD с основаниями AD и BC, причем $AD = 2BC = 12\sqrt{3}$, $\angle BAD = 30^0$, все боковые ребра имеют одинаковую длину, высота пирамиды равна 1. Найти длину перпендикулярной проекции высоты пирамиды на плоскость грани SBC.

Ответ: $1/\sqrt{226}$.

37. Среди всех сечений куба, проходящих через его диагональ, указать то, которое имеет наименьшую площадь. Найти эту площадь, если ребро куба имеет длину 2.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

38. Точки O и O_1 – центры граней ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На отрезке OO_1 , взята точка S так, что $O_1S : OS = 1:3$. Через эту точку проведено сечение куба, параллельное его диагонали AC_1 и диагонали BD основания. Найти площадь сечения, если ребро куба имеет длину 4.

Ответ: $7\sqrt{6}$.

39. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M – середина ребра AD. Найти площадь ортогональной проекции грани AA_1D_1D на плоскость B_1CM.
Ответ: $1/3$.

40. Прямоугольный параллелепипед с высотой, равной 1, имеет в основании прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$. Через одну из диагоналей основания проведена плоскость, составляющая угол 30^0 со второй диагональю основания. Найти площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью.
Ответ: $3\sqrt{2}/4$.

41. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2. На ребрах AD и B_1C_1 взяты соответственно точки M и Q, а на ребре CD – точки P и N так, что $AM = C_1Q = CP = DN = 2/3$. Найти площадь сечения плоскостью, проходящей через прямую MP параллельно прямой NQ.
Ответ: $26\sqrt{3}/9$.

42. Дан куб с основанием ABCD. Длина ребра куба равна 1. Через главную диагональ BD_1 куба проведена плоскость, образующая угол 30^0 с плоскостью BB_1D_1D. Найти площадь получившегося сечения.
Ответ: $\sqrt{6}/2$.

43. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершин A_1 и B опущены перпендикуляры A_1P и BQ на диагональ AC_1. Найти длину отрезка PQ, если $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 4$.
Ответ: $7\sqrt{29}$.

44. На ребрах AB и CD правильного тетраэдра ABCD расположены соответственно точки M и P так, что $AM:AB = DP:DC=1:3$. Найти площадь сечения тетраэдра,

проведенного через точки M и P параллельно прямой AC, если ребро тетраэдра имеет длину 2.

Ответ: $\sqrt{11}/3$.

45. В основании пирамиды ABCD лежит прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза BC которого равна 1, $\angle ABC = 60^0$. Ребра AD, BD, CD имеют длину $\sqrt{13}/4$, точка M – середина ребра CD. Через прямую BM под углом 45^0 к плоскости ABC проведена плоскость, пересекающая ребро AC в некоторой точке N. Найти отношение AN : NC.

    Ответ: 1:2.
46. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1. Через точку C_1 проведена прямая, перпендикулярная плоскости BA_1D. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если длина бокового ребра равна $\sqrt{2}$.

    Ответ: $\sqrt{10}/2$.
47. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра равна 2. Точка K – центр грани $A_1B_1C_1D_1$, точка M находится в плоскости AKD и равноудалена от точек K, C и D. Найти объем пирамиды MABK.

    Ответ: 2.
48. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом 60^0. Каждое ребро составляет с плоскостью основания пирамиды угол в 30^0 и имеет длину 2. Найти объем пирамиды.

    Ответ: $1/(3\sqrt{3})$.
49. В основании треугольной пирамиды SABC лежит правильный треугольник ABC со стороной 2a, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, его длина 4a. Точки M и N – середины боковых ребер SB и SC, точка K – середина ребра AB. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых MN и CK, пересекается с

прямой SA в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.

Ответ: $2a\sqrt{14}$.

50. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды SABCD с основанием ABCD имеют длину 1. Точки M и N – середины ребер AB и SC соответственно. На прямых AS и BN выбраны точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой CM. Найти длину отрезка PQ.

Ответ: $\sqrt{5}/3$.

51. В $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 3. Точка M на ребре AB выбрана так, что AM=2. Из точки A_1 проведен перпендикуляр A_1H к плоскости B_1CM, где H – основание перпендикуляра. Найти CH.

Ответ: $\frac{6\sqrt{66}}{11}$.

Литература

1. Белоносов В.С., Фокин М.В. Задачи вступительных экзаменов по математике. Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2005.

2. Бунеева Н.А., Каргаполов А.М. Варианты и решения выпускных экзаменов по математике в СУНЦ НГУ. Новосибирск: ИДМИ, 2005.

3. Яковлев Г.Н. Пособие по математике. Москва: Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2001.

Оглавление

Учебное издание

Бунеева Наталья Александровна

Каргаполов Александр Михайлович

Задачи по стереометрии
(координатный метод)

Компьютерная верстка Бунеева Н.А.