

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

ГИА

МАТЕМАТИКА

ТЕМА

**Системы
уравнений**

ТЕМА

Уравнения

9

класс

Тестовые задания частей 1 и 2

ВПЕРВЫЕ!

А В С — А з б у к а Г И А

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ



АСТ • Астрель
Москва

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М34

Математика : Уравнения. Системы уравнений /
М34 Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев. — М.: АСТ:
Астрель, 2012. — 31, [1] с. (ABC — Азбука ГИА).
ISBN 978-5-17-076407-5 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-38300-7 (ООО «Издательство Астрель»)

Настоящее пособие предназначено для подготовки девятиклассников к успешной сдаче ГИА. Приведен необходимый теоретический материал и задания для самостоятельного решения. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами.

Пособие предназначено для учащихся общеобразовательных школ, а также учителей.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Тесты

**Сычёва Галина Владимировна, Гусева Наталья Борисовна
Гусев Владимир Алексеевич**

МАТЕМАТИКА

**Уравнения
Системы уравнений**

Редакция «Образовательные проекты»

Отв. редактор *Г.Н. Хромова*. Худ. редактор *Т.Н. Войткевич*

Тех. редактор *А.Л. Шелудченко*. Корректор *И.Н. Мокина*

Дизайн обложки *Н.А. Шармай*

Оригинал-макет подготовлен ООО «БЕТА-Фрейм»

Подписано в печать 26.09.2011. Формат 84×108 ¹/₃₂.

Усл. печ. л. 1,68. Тираж 6000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная

Сертификат соответствия № РОСС RU.AE51.H15301 от 04.05.2011

ООО «Издательство Астрель» 129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ» 141100, РФ, Московская обл.,
г. Щёлково, ул. Заречная, д. 96

Наши электронные адреса: www.ast.ru. E-mail: astpub@aha.ru

ISBN 978-5-17-076407-5 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 978-5-271-38300-7 (ООО «Издательство Астрель»)

© Сычёва Г.В., Гусева Н.Б., Гусев В.А.

© ООО «Издательство Астрель»

Содержание

Предисловие	4
УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	5
Основные понятия. Свойства уравнений.	
Равносильность уравнений.....	5
Классификация типов уравнений.	
Методы решения уравнений	8
Задания для самостоятельного решения	17
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ	20
Основные понятия. Свойства систем	20
Системы уравнений с n неизвестными.	
Совокупность уравнений	21
Методы решения систем уравнений.....	23
Задания для самостоятельного решения	27
ОТВЕТЫ	31

Предисловие

Данное пособие поможет подготовиться к сдаче ГИА по двум темам: уравнения и системы уравнений, которые входят в задания как Части 1, так и Части 2. Этим темам соответствуют задания 7 и 16 Части 1 и 19, 21 и 22 Части 2. Задания относятся к базовому, высокому и повышенному уровням сложности. Проверяются умения решать уравнения, записав только ответ, в наиболее сложных заданиях Части 2 требуется дать полное решение уравнений или систем уравнений.

В каждой теме даётся краткое изложение теоретического материала и примеры с решениями типовых задач. Для самопроверки приведены задания для самостоятельного решения различного уровня сложности, к которым в конце книги приведены ответы.

УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Основные понятия. Свойства уравнений. Равносильность уравнений

Уравнением называется *равенство*, содержащее переменную (неизвестную) величину.

Областью допустимых значений переменной (ОДЗ уравнения) называется множество значений переменной, при которых все члены уравнения имеют смысл. Область допустимых значений переменной в уравнении называют ещё *областью определения уравнения*.

Корнем уравнения называется значение переменной, входящее в ОДЗ и обращающее уравнение в верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни (или доказать, что их нет). Если среди корней уравнения есть k равных между собой корней, то говорят о корне кратности k .

Уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают. При установлении равносильности уравнений кратность корней не учитывается. Например, уравнения $x - 3 = 0$ и $(x - 3)^2 = 0$ считаются равносильными. Если уравнения корней не имеют, то они тоже считаются равносильными.

Рассмотрим свойства уравнений.

1. Если перенести слагаемое из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится уравнение, равносильное данному.

3. Если в какой-либо части уравнения (или в обеих частях) выполнить тождественное преобразование, не изменяющее область определения уравнения, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример 1. Укажите область определения уравнения.

а) $\frac{x-3}{5} - 7x = 4$. Ответ: $x \in \mathbf{R}$.

б) $\frac{x^2+9}{x-2} + 8x = 6x$. Ответ: $x \neq 2$.

в) $\frac{x-2}{x^2+9} + 8 = 6x$. Ответ: $x \in \mathbf{R}$.

Пример 2. Равносильны ли уравнения $x - 5 = 0$, $(x - 5)^2 = 0$, $(x - 5)^3 = 0$?

Решение. $x - 5 = 0$, $x = 5$; $(x - 5)^2 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$; $(x - 5)^3 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 5$. При установлении равносильности уравнений кратность корней не учитывается. Значит, данные уравнения равносильны. *Ответ:* равносильны.

Решение уравнения чаще всего состоит в том, чтобы с помощью цепочки преобразований привести его к простейшему уравнению, т.е. такому, корни которого можно найти по известной формуле. В ходе преобразований уравнения могут возникнуть две «неприятности»: потеря корней и появление посторонних для данного уравнения корней.

Причинами появления посторонних корней могут быть:

- 1) расширение ОДЗ уравнения;
- 2) умножение обеих частей уравнения на выражение с переменной;
- 3) «взятие» от обеих частей уравнения немонотонной функции.

Пример 3. Решите уравнение $6x + \frac{7}{x-2} - 12 = \frac{7}{x-2}$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x \neq 2$. После приведения подобных слагаемых получаем уравнение $6x = 12$, $x = 2$. Но $x = 2$ не может быть корнем данного уравнения, так как не входит в ОДЗ уравнения. *Ответ:* корней нет.

Причиной появления постороннего корня явилось расширение ОДЗ уравнения после взаимного уничтожения дробей. Уравнение $6x = 12$ имеет ОДЗ, включающее в себя все действительные числа ($x \in \mathbf{R}$).

Пример 4. Решите уравнение $\frac{(x-5)^2}{x-5} + 4x = 20$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x \neq 5$. Произведём сокращение дроби на $(x - 5)$: $x - 5 + 4x = 20$; $5x = 25$; $x = 5$. Значение x , равное пяти, не входит в ОДЗ уравнения и потому не может быть корнем. Сокращение дроби привело к расширению ОДЗ и появлению постороннего корня. *Ответ:* корней нет.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{x-2} = 4$.

Решение. Рассмотрим уравнение $\sqrt{x-2} = 4$. ОДЗ уравнения: $x \geq 2$. Умножение обеих частей уравнения

$\sqrt{x-2} = 4$ (1) на выражение $(x-6)$ приводит к уравнению $(x-6) \cdot \sqrt{x-2} = 4(x-6)$, которое имеет два корня $x = 18$ и $x = 6$. При этом только $x = 18$ является корнем уравнения (1). Посторонним для уравнения (1) оказался корень $x = 6$, при котором множитель $(x-6)$ обращается в нуль.
Ответ: $x = 18$.

3. Бывают случаи, когда уравнение решается путем возведения обеих его частей в квадрат. Однако из равенства квадратов двух выражений не следует, что данные выражения равны (они могут быть и противоположными).

Пример 6. Рассмотрим два уравнения (1) $\sqrt{x-1} = 3-x$ и (2) $\sqrt{x-1} = x-3$.

Если возвести обе части каждого уравнения в квадрат (это необходимо, чтобы «избавиться» от знака корня в уравнении), то получим одно и то же уравнение (3) $x-1 = 9-6x+x^2$. Это значит, что полученное уравнение (3) содержит как корни уравнения (1), так и корни уравнения (2).

Решим уравнение (3): $x^2 - 7x + 10 = 0$, $D = 49 - 40 = 9$;
 $x = \frac{7 \pm 3}{2}$, $x = 2$ или $x = 5$. Значение $x = 2$ является корнем

уравнения (1), так как $\sqrt{2-1} = 3-2$; $1 = 1$, но будет посторонним для уравнения (2), так как $\sqrt{2-1} \neq 2-3$.

Значение $x = 5$, наоборот, является корнем уравнения (2), так как $\sqrt{5-1} = 5-3$, $2 = 2$, но будет посторонним для уравнения (1), так как $\sqrt{5-1} \neq 3-5$.

Итак, возведение обеих частей уравнения в квадрат может приводить к появлению «посторонних» для данного уравнения корней. Чтобы «отсеять» лишние корни, необходимо все полученные значения x проверить на «звание корня» подстановкой в данное уравнение.

При решении уравнений возможна еще более неприятная ситуация, когда в результате преобразований уравнения происходит потеря каких-то его корней. Как известно, «что с возу упало, то пропало», причём, не владея достаточными знаниями, потери корней можно и не заметить.

Какими могут быть причины потери корней?

1. Сужение ОДЗ в ходе преобразования уравнения

Если какие-то корни данного уравнения оказываются за пределами ОДЗ преобразованного уравнения, то они не

могут быть получены в ходе решения нового уравнения и для данного уравнения они будут потеряны.

2. Если обе части уравнения разделить на выражение с переменной $t(x)$, то могут быть потеряны в качестве корней те значения x , при которых $t(x) = 0$.

При этом потери корней не произойдет, если $t(x)$ не обращается в нуль ни при каких x или $t(x) = 0$ лишь при тех значениях x , которые корнями данного уравнения не являются.

Пример 7. Решите уравнение $(x - 7)(x^2 - x - 5) = x - 7$.

Решение. Перенесем все члены в левую часть уравнения и вынесем за скобки множитель $(x - 7)$: $(x - 7)(x^2 - x - 5) - (x - 7) = 0$; $(x - 7)(x^2 - x - 6) = 0$;

$$x - 7 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - x - 6 = 0;$$

$$x = 7; \quad x = -2 \quad \text{или} \quad x = 3. \quad \text{Ответ: } -2, 3, 7.$$

Если бы мы «сократили» на множитель $(x - 7)$, то потеряли бы корень $x = 7$.

Классификация типов уравнений.

Методы решения уравнений

Напомним определения некоторых понятий.

Выражение называется *рациональным*, если оно составлено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень.

Рациональные выражения бывают целыми и дробными.

Целым называется рациональное выражение, которое не содержит операции деления на выражение с переменными.

Дробным называется рациональное выражение, которое содержит операцию деления на выражение с переменными.

Тип уравнения определяется видом выражений с переменной, входящих в это уравнение.

Целые уравнения с одной переменной

Уравнение с одной переменной называется целым, если левая и правая части его — целые выражения.

Любое целое уравнение можно преобразовать в равносильное ему уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида.

Степенью уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида, называется степень этого многочлена.

Любое целое уравнение первой степени можно привести к виду $ax + b = 0$, где $a \neq 0$, второй степени — к виду $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, третьей степени — к виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$ и т.д.

Вообще, целое уравнение n -й степени приводится к виду $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + tx + p = 0$, где x — переменная, $a, b, c, \dots, t, p$ — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Решение целых уравнений с одной переменной

1. Уравнение первой степени вида $ax + b = 0$, где $a \neq 0$, решается путём деления обеих частей уравнения на коэффициент a при x (после переноса свободного члена в правую часть), $ax = -b$; $x = -\frac{b}{a}$. Уравнение первой степени всегда имеет один корень. Уравнение вида $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — любые числа, называется *линейным*.

Если $a \neq 0$, то оно является уравнением первой степени и имеет единственный корень $x = -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, но $b \neq 0$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x + b = 0$ и корней не имеет.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ и его корнем является любое действительное значение x .

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt{2} \cdot x + 2 = 0$.

Решение. $\sqrt{2} \cdot x + 2 = 0$; $\sqrt{2} \cdot x = -2$; $x = -\frac{b}{\sqrt{2}}$; $x = -\sqrt{2}$.

Ответ: $-\sqrt{2}$.

Пример 9. Решите уравнение $\frac{9x-2}{6} - \frac{3x+1}{2} = 0$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 6: $9x - 2 - 9x - 3 = 0$, $0 \cdot x - 5 = 0$, $0 \cdot x = 5$. Уравнение корней не имеет. *Ответ:* корней нет.

Пример 10. Решите уравнение $2 \cdot (7x - 1) - 3 \cdot (x + 2) = 11x - 8$.

Решение. $14x - 2 - 3x - 6 = 11x - 8$; $14x - 3x - 11x = -8 + 2 + 6$; $0 \cdot x = 0$. Любое значение x является корнем уравнения. *Ответ:* $x \in \mathbf{R}$.

2. Уравнения второй степени (квадратные) вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, решаются по известной формуле.

1) Если $b \neq 0$, $c \neq 0$, то уравнение называется *полным* и его корни вычисляются по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ и называется *дискриминантом* уравнения. Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня: $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ или $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. Если $D = 0$, то уравнение имеет два одинаковых корня $x = -\frac{b}{2a}$; иногда говорят, что в этом случае уравнение имеет один корень. Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Формула корней полного квадратного уравнения становится более простой в случае, когда коэффициент b при x является чётным числом. Пусть $b = 2k$, где k целое число. Формула корней уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$

примет вид: $x = \frac{-k \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$, где $\frac{D}{4} = k^2 - ac$.

2) Если хотя бы один из коэффициентов уравнения b или c равен нулю, то квадратное уравнение называется *неполным* и для его решения нет необходимости применять указанные выше формулы.

Пример 11. При каких значениях a уравнение $2x^2 + (2 - a)x + 2a - 4 = 0$ не имеет действительных корней?

Решение. Данное уравнение является квадратным и не имеет корней в том и только том случае, если его дискриминант отрицателен: $D = (2 - a)^2 - 8(2a - 4) = 4 - 4a + a^2 - 16a + 32 = a^2 - 20a + 36$. Решим неравенство $a^2 - 20a + 36 < 0$, $a^2 - 20a + 100 - 64 < 0$, $(a - 10)^2 - 64 < 0$, $(a - 10)^2 < 64$, $|a - 10| < 8$, $-8 < a - 10 < 8$, $2 < a < 18$. Если $a \in (2; 18)$, то уравнение действительных корней не имеет. *Ответ:* $(2; 18)$.

Пример 12. При каких значениях a уравнение $ax^2 + (2a - 1)x + a = 0$ имеет два различных действительных корня?

Решение. Случай 1. Если $a = 0$, то уравнение примет вид $-x = 0$ и будет иметь единственный корень $x = 0$.

Случай 2. Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным и будет иметь два различных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант положителен: $D = (2a - 1)^2 -$

$$-4a^2 = 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 = 1 - 4a; \begin{cases} 1 - 4a > 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \begin{cases} a < \frac{1}{4}, \\ a \neq 0; \end{cases}$$

$a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right)$. Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Пример 13. При каких значениях m уравнение $(m + 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 - m = 0$ имеет единственный корень? Найдите этот корень.

Решение. Случай 1. Если $m + 1 = 0$ (т.е. $m = -1$), то уравнение примет вид $-4x + 2 = 0$ и будет иметь корень $x = 0,5$.

Случай 2. Если $m + 1 \neq 0$, то уравнение является квадратным и будет иметь единственный (точнее, два одинаковых) корень лишь в случае, если его дискриминант равен нулю: $\frac{D}{4} = (m - 1)^2 - (1 + m)(1 - m) = m^2 - 2m + 1 - 1 + m^2 = 2m^2 - 2m = 2m(m - 1)$. $D = 0$, если $m = 0$ или $m = 1$. Если $m = 0$, то уравнение примет вид $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$, $x_1 = x_2 = 1$. Если $m = 1$, то получим уравнение $2x^2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$. Ответ: если $m = -1$, то $x = 0,5$; если $m = 0$, то $x = 1$; если $m = 1$, то $x = 0$.

Неполные квадратные уравнения

1. Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$, то уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$ и решается разложением левой части на множители: $x(ax + b) = 0$, $x = 0$ или $x = -\frac{b}{a}$.

2. Если $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, то уравнение принимает вид $ax^2 + c = 0$, тогда $ax^2 = -c$, $x^2 = -\frac{c}{a}$. Если c и a имеют разные знаки, то $-\frac{c}{a} > 0$ и $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Если c и a одинакового знака, то $-\frac{c}{a} < 0$ и уравнение корней не имеет.

Пример 14. Решите уравнение $5x^2 + 15 = 0$.

Решение. $5x^2 = -15$; $x^2 = -3$ — корней уравнение не имеет, так как квадрат действительного числа не может быть отрицательным. Ответ: корней нет.

Пример 15. Решите уравнение $5x^2 - 15 = 0$.

Решение. $5x^2 = 15$; $x^2 = 3$, $x = \pm \sqrt{3}$ — корни уравнения. Ответ: $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.

3. Если $a \neq 0$, $b = 0$ и $c = 0$, то уравнение имеет вид $ax^2 = 0$. Так как $a \neq 0$, то должно быть $x^2 = 0$. Уравнение имеет два одинаковых корня $x = 0$.

Пример 16. Решите уравнение $7x^2 = 0$.

Решение. $7x^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $x^2 = 0$, т.е. $x = 0$. *Ответ:* 0.

Теорема Виета устанавливает зависимость между корнями данного квадратного уравнения и его коэффициентами.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение имеет корни, то их сумма равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, делённому на первый коэффициент, а их произведение равно свободному члену, делённому на первый коэффициент.

$$ax^2 + bx + c = 0; D \geq 0; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Квадратное уравнение называется *приведённым*, если коэффициент при x^2 равен единице. Такое уравнение принято записывать в виде $x^2 + px + q = 0$.

Для приведённого квадратного уравнения теорема Виета имеет более простой вид: $x^2 + px + q = 0; D \geq 0; x_1 + x_2 = -p; x_1 \cdot x_2 = q$.

Если приведённое квадратное уравнение имеет корни, то их сумма равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Пример 17. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 6x - 18 = 0$; б) $x^2 - 3x + 15 = 0$.

Решение. а) Проверяем, имеет ли уравнение действительные корни.

$x^2 - 6x - 18 = 0; \frac{D}{4} = 9 + 18 = 27, D > 0$. Уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2 . По теореме Виета $x_1 + x_2 = 6; x_1 \cdot x_2 = -18$. *Ответ:* 6, -18.

б) $x^2 - 3x + 15 = 0; D = 9 - 60 < 0$. Корней нет. *Ответ:* корней нет.

Справедлива и теорема, обратная теореме Виета.

Теорема (обратная теореме Виета). Если сумма двух чисел равна второму коэффициенту приведенного квадратного уравнения, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену, то эти числа являются корнями приведенного квадратного уравнения.

Пример 18. Корнями какого квадратного уравнения являются числа 1 и 5?

Решение. Найдём сумму и произведение данных чисел: $1 + 5 = 6$, $1 \cdot 5 = 5$; $x^2 - 6x + 5 = 0$. *Ответ:* $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Пример 19. Один из корней уравнения $x^2 + bx + 20 = 0$ равен 5. Найдите второй корень и коэффициент b .

Решение. По теореме Виета $\begin{cases} 5 \cdot x_2 = 20, \\ 5 + x_2 = -b. \end{cases}$ Тогда $x_2 = 4$; $5 + 4 = -b$; $b = -9$; $x^2 - 9x + 20 = 0$. *Ответ:* $x_2 = 4$, $b = -9$.

Пример 20. При каких значениях m уравнение $x^2 + 2mx + m^2 - 9 = 0$ имеет два отрицательных корня?

Решение. $\frac{D}{4} = m^2 - (m^2 - 9) = 9$; $D > 0$ при любом m . По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m, \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 9. \end{cases}$ По условию уравнение имеет два корня, причем $x_1 < 0$, $x_2 < 0$. Это возможно, если произведение корней положительно, а их сумма отрицательна.

$$\begin{cases} m^2 - 9 > 0, \\ -2m < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} m^2 > 9, \\ m > 0; \end{cases} \quad m > 3. \text{ Ответ: } m > 3.$$

Бывают случаи, когда теорема Виета помогает найти корни уравнения без применения основных формул. Особенно это важно, если коэффициентами уравнения служат большие числа.

Пример 21. Решите уравнение $208x^2 - 101x - 107 = 0$.

Решение. Легко заметить, что сумма коэффициентов уравнения равна нулю: $208 - 101 - 107 = 0$. Значит, $x = 1$ является корнем уравнения. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -\frac{107}{208}$.

Если $x_1 = 1$, то $x_2 = -\frac{107}{208}$. *Ответ:* $-\frac{107}{208}$; 1.

3. Уравнения степени выше второй в общем виде не решаются в школьном курсе алгебры.

В школе решают лишь те уравнения степени выше второй, к которым можно применить общие методы решения уравнений.

Общие методы решения уравнений

• Метод введения новой переменной.

Если уравнение имеет громоздкий вид или степень выше второй, то какое-то выражение, входящее в уравнение, обозначают новой буквой и получают более простое уравнение относительно новой переменной. Решив его, возвращаются к первоначальной переменной.

Пример 22. Решите уравнение

$$(4x^2 - 5x)^2 + 4(4x^2 - 5x) + 3 = 0.$$

Решение. Вводим новую переменную $t = 4x^2 - 5x$. Уравнение примет вид $t^2 + 4t + 3 = 0$; $\frac{D}{4} = 4 - 3 = 1$; $t = -2 \pm 1$; $t = -1$ или $t = -3$.

Возвращаемся к переменной x :

$$\begin{array}{ll} 4x^2 - 5x = -1 & \text{или} \quad 4x^2 - 5x = -3, \\ 4x^2 - 5x + 1 = 0, & 4x^2 - 5x + 3 = 0, \\ D = 25 - 16 = 9, & D = 25 - 48 < 0. \\ x = \frac{5 \pm 3}{8}, & \text{Корней нет.} \end{array}$$

$$x = 1 \text{ или } x = 0,25. \text{ Ответ: } 0,25; 1.$$

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется *биквадратным* и решается заменой $x^2 = t$.

Пример 23. Решите уравнение $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$. Тогда $t^2 - 5t - 36 = 0$; $D = 25 + 144 = 169$; $t = \frac{5 \pm 13}{2}$; $t = 9$ или $t = -4$ — не удовлетворяет условию $t \geq 0$; $x^2 = 9$; $x = -3$ или $x = 3$. *Ответ:* $-3, 3$.

Пример 24. Решите уравнение $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$; $t^2 + 10t + 9 = 0$; $\frac{D}{4} = 25 - 9 = 16$; $t = -5 \pm 4$; $t = -1$ или $t = -9$. Тогда $x^2 = -1$ или $x^2 = -9$. Оба уравнения действительных корней не имеют. *Ответ:* корней нет.

Замечание. Ответ можно было дать, заметив, что $t = -1$, $t = -9$ не удовлетворяют условию $t \geq 0$.

Пример 25. Решите уравнение $x^4 - 6x^2 = 0$.

Решение. Уравнение является биквадратным, но его можно решить разложением левой части на множители, не делая замену переменной.

$$x^2(x^2 - 6) = 0; \quad x^2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 6 = 0,$$

$$x = 0; \quad x = \pm \sqrt{6}. \text{ Уравнение}$$

имеет три различных корня. *Ответ:* $-\sqrt{6}; 0; \sqrt{6}$.

• Метод разложения левой части уравнения на множители, когда в правой части уравнения стоит нуль.

Уравнение вида $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = 0$ решается на основе утверждения: произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом не теряют смысла.

Пример 26. Решите уравнение $9x^3 - 9x^2 - x + 1 = 0$.

Решение. Многочлен, данный в левой части уравнения, разложим на множители методом группировки членов: $9x^2(x - 1) - (x - 1) = 0$, $(x - 1) \cdot (9x^2 - 1) = 0$. Оба множителя имеют смысл при любых x .

Тогда $x - 1 = 0$ или $9x^2 - 1 = 0$,

$x = 1$. $(3x - 1)(3x + 1) = 0$,

$3x - 1 = 0$ или $3x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ или $x = -\frac{1}{3}$. *Ответ:* $-\frac{1}{3}$; 1 ; $\frac{1}{3}$.

• Использование свойств функций.

Теорема 1. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей), а функция $y = g(x)$ — убывающей (возрастающей) или постоянной, то уравнение не может иметь более одного корня.

Замечание. Если один корень такого уравнения удастся найти подбором, то на этом решение уравнения заканчивается.

Пример 27. Решите уравнение $x^3 = 45 - 6x$.

Решение. Функция $y = x^3$ — возрастающая, а функция $y = 45 - 6x$ — убывающая. Значит, данное уравнение не может иметь более одного корня, т.е. имеет единственный корень или не имеет корней вовсе. Методом проб устанавливаем, что $x = 3$ — корень уравнения, так как $3^3 = 45 - 18$, $27 = 27$. Других корней быть не может. *Ответ:* 3.

Пример 28. Решите уравнение $x^9 + 5x = 6$.

Решение. Функция $y = x^9 + 5x$ является возрастающей (как сумма двух возрастающих функций), а правая часть постоянна. Уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 1$ — корень, так как $1^9 + 5 \cdot 1 = 6$. Других корней быть не может. *Ответ:* 1.

Теорема 2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $y = f(x)$ ограничена сверху и $f(x) \leq m$, а функция $y = g(x)$ ограничена снизу, причем $g(x) \geq m$, то уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = m, \\ g(x) = m. \end{cases}$

Если система решений не имеет, то у данного уравнения $f(x) = g(x)$ корней нет.

Чтобы решить систему двух уравнений с одной неизвестной, можно решить одно из этих уравнений (более простое) и подстановкой проверить, являются ли найденные значения x корнями второго уравнения.

Пример 29. Решите уравнение $(x - 3)^6 + 2 = 4x - x^2 - 2$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения: $4x - x^2 - 2 = -(x^2 - 4x + 4) + 2 = -(x - 2)^2 + 2$. Уравнение имеет вид $(x - 3)^6 + 2 = 2 - (x - 2)^2$, т.е. $(x - 3)^6 = -(x - 2)^2$. Так как $(x - 3)^6 \geq 0$, $-(x - 2)^2 \leq 0$, то уравнение равносильно системе $\begin{cases} (x - 3)^6 = 0, \\ -(x - 2)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ x = 2. \end{cases}$ Система решений не имеет. *Ответ:* корней нет.

• Графический метод решения уравнений.

Приближённые, а иногда и точные, значения корней удаётся найти, используя графический способ решения уравнения.

Чтобы найти графическим способом корни уравнения $f(x) = g(x)$, нужно в одной системе координат построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и отметить точки пересечения этих графиков. Абсциссы точек пересечения графиков — это те значения переменной x , при которых выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные значения. Значит, эти абсциссы и есть корни уравнения $f(x) = g(x)$.

Пример 30. Решите графически уравнение $x^3 - x - 6 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $x^3 = x + 6$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^3$ и $y = x + 6$ (рис. 1) и найдём абсциссы общих точек этих графиков. Графики функций пересекаются в единственной точке $A(2; 8)$; $x = 2$ — корень уравнения. В этом случае удалось найти точное значение корня ($2^3 = 2 + 6$). *Ответ:* 2.

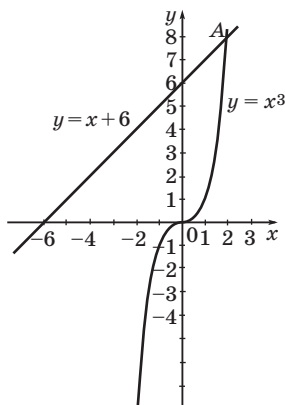


Рис. 1

Дробно-рациональные уравнения

Уравнение называется *рациональным*, если его левая и правая части являются рациональными выражениями.

Рациональное уравнение называется *дробно-рациональным*, если переменная величина содержится в знаменателе дроби.

Любое дробно-рациональное уравнение путём тождественных преобразований можно привести к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда её числитель равен нулю, а знаменатель при этом отличен от нуля. Уравнение $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ равносильно системе $\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$ Значит, надо решить целое уравнение $P(x) = 0$ и исключить те из полученных корней, которые обращают знаменатель в нуль.

Пример 31. Решите уравнение $\frac{x-1}{x} + \frac{6}{x^2-6x} = \frac{1}{x-6}$.

Решение. Переносим все члены в левую часть уравнения и приводим дроби к общему знаменателю.

$$\frac{x-1}{x} + \frac{6}{x^2-6x} - \frac{1}{x-6} = 0; \quad \frac{(x-1)(x-6)+6-x}{x(x-6)} = 0;$$

$$\frac{x^2-x-6x+6+6-x}{x(x-6)} = 0; \quad \frac{x^2-8x+12}{x(x-6)} = 0.$$

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-8x+12=0, \\ x(x-6) \neq 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x=2, \\ x=6, \\ x(x-6) \neq 0. \end{cases}$$

Если $x=2$, то $2 \cdot (2-6) \neq 0$, $x=2$ — корень уравнения. Если $x=6$, то $6 \cdot (6-6) = 0$, $x=6$ посторонний корень. *Ответ:* 2.

Задания для самостоятельного решения

Часть 1

Решите уравнения (1–31).

1. $1 - 5(x-3) = 10 - (3x+6)$.

2. $3x - 4\frac{1}{2} = 1,5x - \frac{1}{2}(2x-1)$.

3. $0,1x - 1,3 = 0,2 - 3(x+0,5)$.

4. $0,7 - \frac{2}{5}(5+10x) = 1,7 - x$.

5. $\frac{14-x}{3} - \frac{x}{2} = \frac{103}{6}$.

6. $\frac{x-5}{7} + 2 = \frac{x}{14}$.

7. $\frac{2-x}{9} - \frac{x+1}{5} = 0$.

8. $\frac{x}{4} + 1 = \frac{x}{3}$.

$$9. \frac{3x}{7} - \frac{1+x}{2} = \frac{13}{14}.$$

$$11. 75 - 12x^2 = 0.$$

$$13. 15 - 2x^2 = 13.$$

$$15. 17 - 2x^2 = 3.$$

$$17. 8x^2 = 3 + 5x.$$

$$19. 4x^2 + 49 = 28x.$$

$$21. (2 - 5x)(x + 1,5) = 0.$$

$$23. \left(\frac{1}{5} + 2x\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 0.$$

$$25. 5 - \frac{x}{x-3} = 0.$$

$$27. \frac{x}{2} - \frac{8}{x} = 3.$$

$$29. \frac{2x^2 - 50}{x+5} = 0.$$

$$31. x^4 - 3x^2 - 10 = 0.$$

Определите количество различных корней уравнения (32–42).

$$32. 5(1 - x) - 3x = 7 - (9 + 8x).$$

$$33. 1,5(2x - 4) + x = 4(x - 1,5).$$

$$34. 1,3(3x - 2) - 2x = 8 - (1 - 1,9x).$$

$$35. 4x^2 + 5x + 6 = 0.$$

$$36. x^2 = x.$$

$$37. 36x^2 = 60x - 25.$$

$$38. \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} = 0.$$

$$39. \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 3x + 2} = 0.$$

$$40. x^4 - 4x^2 + 3 = 0.$$

$$41. x^4 - x^2 - 6 = 0.$$

$$42. x^3 - x^2 - 6x = 0.$$

Найдите сумму корней уравнения (43–46).

$$43. 3x^2 - 10,5x - 1 = 0.$$

$$44. -5x^2 - 10x + 3 = 0.$$

$$45. 10x^2 - 14x - 7 = 0.$$

$$46. x^4 - 7x^2 + 10 = 0.$$

Найдите произведение корней уравнения (47–52).

$$47. 10x^2 - 7x - 2 = 0.$$

$$48. 6x^2 - 19x + 4 = 0.$$

$$49. 0,5x^4 - 3,5x^2 + 3 = 0.$$

$$50. x^3 - 5x^2 + 6x = 0.$$

$$51. \frac{1}{x-1} = \frac{x}{3}.$$

$$52. \frac{10}{x-7} = x.$$

Часть 2

Решите уравнения (1–26).

$$1. (3x - 2)(11x - 7) = (2 - 3x)^2.$$

$$2. (3-x)(x^2+3x+9) = 26 + (1-x^2)(x+2).$$

$$3. x^8 + 4x^4 - 5 = 0.$$

$$4. 5x^3(1,5-2x) + 6x(2x-1,5) = -x^2(1,5-2x).$$

$$5. \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{10}{3}. \quad 6. \frac{x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-5} = \frac{40}{x^2-2x-15}.$$

$$7. \frac{3,5}{5-x} = \frac{2,5}{8-x} + \frac{1}{2x+8}.$$

$$8. \frac{-2}{3-x} + 1 = \frac{8+x}{2x^2-18}.$$

$$9. \frac{3}{x+2} - \frac{x}{2x+4} = \frac{x}{10+3x-x^2}.$$

$$10. 9y^2 - 12y - y^4 + 4 = 0. \quad 11. x^5 + 6x^3 - 7x = 0.$$

$$12. (x^2+x+4)(x^2+x+7) - 54 = 0.$$

$$13. (3-2y)^4 - 5(3-2y)^2 + 4 = 0.$$

$$14. x + 2\sqrt{x} - 3 = 0.$$

$$15. \frac{2x+10}{x^2+4x-5} + x + 3,5 = 0.$$

$$16. \frac{4}{(3-y)^6} - 0,5 = \frac{-3,5}{(y-3)^3}.$$

$$17. \frac{4}{y^2-3y-10} - \frac{3}{2y-10} + \frac{y+10}{2y+4} = 0.$$

$$18. \frac{2x+4}{1-3x} + \frac{16x^2+6}{9x^2-1} + \frac{x}{3x+1} = 0.$$

$$19. \frac{7y-2}{y^2+2y+4} - \frac{2}{y-2} = \frac{5y+4}{8-y^3}.$$

$$20. 4y^2 - (y^2 - y - 1)^2 = 4y - 1.$$

$$21. (1-2y)^4 - 13(4y^2-4y+1) = -36.$$

$$22. (y+6)(y+2)(y+1)(y-3) = -96.$$

$$23. 10y^2 + 15y - (2y^2 + 3y - 1)^2 = 9.$$

$$24. \frac{4y^2}{2y+1} + \frac{2y+1}{y^2} - 5 = 0.$$

$$25. 7\left(\frac{1}{x} - x\right) - x^2 - \frac{1}{x^2} = 10. \quad 26. -x^5 - 5x = x - 7.$$

27. При каких значениях m уравнение $x^2 - mx + 4 = 0$ не имеет корней?

28. Найдите все натуральные значения a , при которых уравнение $2x^2 - 5x + a = 0$ имеет два различных корня.

29. При каких значениях a уравнение $4x^2 - ax + 4 = 0$ имеет единственный корень?

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Основные понятия. Свойства систем

Равенство, содержащее две (три, четыре и т.д.) переменные, называется *уравнением с двумя* (тремя, четырьмя и т.д.) *переменными*. Например, $x - 7y = 1$, $xy - 3y^2 + x = 5$, $x + 4y^3 - 2x^2y = 0$ — уравнения с двумя переменными x и y ; $x + y - 6z = 4$, $x^2 + 5yz = 0$, $x^4 - xy + z = 0$ — уравнения с тремя переменными x , y , z .

Решением уравнения с двумя переменными x и y называется пара чисел (x_0, y_0) , удовлетворяющая данному уравнению, т.е. обращающая уравнение в верное числовое равенство при подстановке вместо переменной x её значения x_0 , а вместо y — значения y_0 .

Решением уравнения с тремя переменными x , y , z называется тройка чисел (x_0, y_0, z_0) , удовлетворяющая данному уравнению. Например, пары чисел $(1; 0)$, $(-6; -1)$ являются решением уравнения $x - 7y = 1$; тройки чисел $(0; -2; -1)$, $(1; -9; -2)$ — решением уравнения $x + y - 6z = 4$.

Замечание. Значения переменных принято записывать, располагая переменные по алфавиту.

Два уравнения, содержащие одни и те же переменные, называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Например, уравнения $5x - y = 6$ и $10x - 2y = 12$ — равносильные. Уравнения относительно одних и тех же переменных, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Уравнения с несколькими переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

— если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

— если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же, отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Любое целое уравнение можно заменить равносильным ему уравнением, в котором левая часть будет многочленом стандартного вида, а правая часть — нулём. Степень этого многочлена называют *степенью уравнения*. Например, $x + 4y^3 - 2x^2y = 0$ — уравнение третьей степени относительно x и y .

Линейное уравнение с двумя переменными x и y вида $ax + by + c = 0$ является уравнением первой степени, если хотя бы один из коэффициентов a или b не равен нулю.

Если все решения уравнения с двумя переменными изобразить точками координатной плоскости, то множество всех этих точек будет называться *графиком уравнения с двумя переменными*. Обычно графиком уравнения с двумя переменными x и y служит некоторая линия. В этом случае данное уравнение называют *уравнением этой линии*. Например, графиком уравнения $x^2 + y^2 = 9$ является окружность радиуса 3 с центром в начале координат. Уравнение $x^2 + y^2 = 9$ называют *уравнением этой окружности*. Возможны случаи, когда уравнение задаёт на плоскости единственную точку, или на плоскости вовсе нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы данному уравнению. Например, графиком уравнения $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$ является единственная точка с координатами (2; 1), а графиком уравнения $x^2 + y^2 + 5 = 0$ — пустое множество. Другой редкий случай — когда графиком уравнения с двумя переменными служит вся плоскость. Если в уравнении $ax + by + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов a или b не равен нулю, то его графиком является *прямая*. Например, графиком уравнения $5y - 10 = 0$ служит прямая, параллельная оси Ox (рис. 2), уравнения $2x + 4 = 0$ — прямая, параллельная оси Oy (рис. 3), уравнения $3x + 2y - 6 = 0$ — прямая, пересекающая оси координат в точках (2; 0) и (0; 3) (рис. 4).

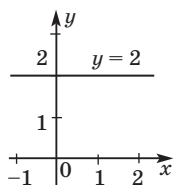


Рис. 2

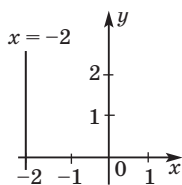


Рис. 3

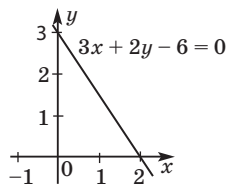


Рис. 4

Графиком уравнения $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ будет вся координатная плоскость, а графиком уравнения $0 \cdot x + 0 \cdot y + 5 = 0$ (и вообще $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$, где $c \neq 0$) является пустое множество.

Системы уравнений с n неизвестными. Совокупность уравнений

Системой уравнений называется множество уравнений с n неизвестными, для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем уравнениям системы.

Упорядоченные совокупности $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ значений неизвестных, удовлетворяющие всем уравнениям системы, называются *решениями системы*.

Если каждое решение системы А является решением системы В, то система В называется следствием системы А ($A \Rightarrow B$).

Если каждая из двух систем А и В является следствием другой, то системы называются *равносильными* ($A \Leftrightarrow B$).

Из определения следует, что множества решений равносильных систем должны совпадать. Например, системы

$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} y - 2x = 0, \\ x + y = 5 \end{cases}$ равносильны. При установлении равносильности систем кратность решений не учитывается. Например, системы $\begin{cases} (x - 2)^2(y - 1) = 0, \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$ и

$\begin{cases} (x - 2)(y - 1) = 0, \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$ считаются равносильными.

Если системы не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Перечислим основные преобразования, которые не нарушают равносильности систем. При преобразовании системы получаем систему, равносильную данной, если:

1) одно из уравнений системы заменить равносильным ему уравнением;

2) к одному из уравнений системы прибавить другое уравнение той же системы, умноженное на некоторое число λ ($\lambda \neq 0$), а другие уравнения системы оставить без изменения;

3) из одного уравнения системы одну переменную выразить через другие и подставить это выражение в другие уравнения системы.

Во всех случаях новая (равносильная) система строится так: одно уравнение преобразуется в новое указанным выше способом и к нему добавляются остальные уравнения

исходной системы. Например, системы $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0, \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$ равносильны.

Совокупностью уравнений называется множество уравнений, для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющих хотя бы одному уравнению совокупности. Если уравнение $f(x, y) = 0$ задаёт на плоско-

сти линию L_1 , а уравнение $g(x, y) = 0$ — линию L_2 , то совокупность $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ задаёт объединение этих линий (тогда как система уравнений $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ задаёт пересечение тех же линий L_1 и L_2). Знак совокупности систем иногда заменяют союзом «или».

Решение совокупности уравнений — есть объединение решений отдельных уравнений данной совокупности (в то время как решение системы уравнений есть пересечение решений отдельных уравнений системы). Аналогично вводится понятие совокупности систем уравнений.

Методы решения систем уравнений

Сформулированные свойства лежат в основе двух основных способов решения систем — способа подстановки и способа сложения. Этими способами можно решить любую систему линейных уравнений. В системах более высокой степени указанные методы, чаще всего, позволяют свести решение к рассмотрению систем более простого вида.

Чтобы решить систему двух уравнений с двумя переменными *способом подстановки*, надо:

- 1) выразить из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую;
- 2) подставить вместо этой переменной полученное выражение во второе уравнение;
- 3) решить полученное уравнение с одной переменной;
- 4) найти соответствующие значения второй переменной.

Способ подстановки применим в том случае, когда из какого-либо уравнения системы можно выразить одну переменную через другую и решить полученное уравнение с одной переменной. Это легко реализуется, если, например, система имеет хотя бы одно линейное уравнение.

Пример 1. Решите систему $\begin{cases} 5x - y = 6, \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$

Решение. Выразим из первого уравнения переменную y и решим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} y = 5x - 6, \\ 2x + 2(5x - 6) = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5x - 6, \\ 12x = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5x - 6, \\ x = 1,25; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1,25, \\ y = 0,25. \end{cases}$$

Ответ: (1,25; 0,25).

Чтобы решить систему двух уравнений с двумя переменными *способом сложения*, надо:

- 1) умножить левые и правые части уравнений на такие числа, отличные от нуля, чтобы после почленного сложения

ния уравнений получить уравнение с одной переменной (или хотя бы более простое уравнение);

2) сложить почленно левые и правые части уравнений;

3) решить полученное после сложения уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующие значения второй переменной.

Пример 2. Решите систему $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 5x - 2y = 1. \end{cases}$

Решение. Умножим обе части первого уравнения на 2, а второго — на 3. Получим $\begin{cases} 4x + 6y = 16, \\ 15x - 6y = 3. \end{cases}$ Складываем почленно уравнения и заменяем полученным уравнением второе уравнение системы: $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 19x = 19; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$ Ответ: (1; 2).

Если мы умеем построить графики уравнений, входящих в систему с двумя переменными, то систему можно решить графическим способом.

Чтобы решить систему двух уравнений с двумя переменными графическим способом, надо:

1) построить в одной системе координат графики обоих уравнений системы;

2) определить координаты общих точек этих графиков.

Решением системы будут служить координаты всех общих точек построенных графиков. Чаще всего, графический способ позволяет находить решения системы лишь приближённо. Указанный способ бывает особенно эффективным в тех случаях, когда требуется найти лишь количество решений системы.

Пример 3. Решить графически систему $\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

Решение. Построим в одной системе координат графики данных уравнений (рис. 5). Графиком уравнения $3x - 4y = 0$ служит прямая, проходящая через точки (0; 0) и (4; 3). Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 25$ является окружность радиуса 5 с центром в начале координат. А (4; 3) и В (-4; -3) — общие точки графиков уравнений. Проверкой убеждаемся, что в данном

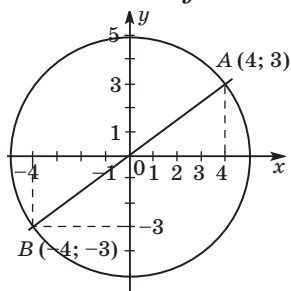


Рис. 5

случае удалось найти точные решения системы. *Ответ:* $(-4; -3), (4; 3)$.

Пример 4. Решите графически систему $\begin{cases} 3x - 2y = -6, \\ 6x - 4y = 3. \end{cases}$

Решение. Строим в одной системе координат графики данных уравнений (рис. 6). Прямые параллельны. *Ответ:* решений нет.

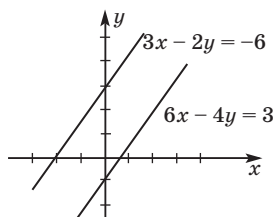


Рис. 6

Пример 5. На рисунке 7 изображены графики трёх уравнений. Укажите систему уравнений, которая не имеет решений.

1) $\begin{cases} x = 5, \\ y = x^2 - 2x + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 5, \\ x + y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -1, \\ y = x^2 - 2x + 1; \end{cases}$

4) такой системы нет.

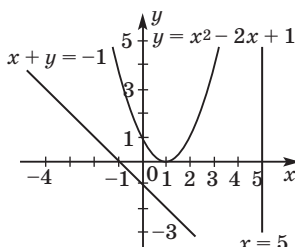


Рис. 7

Решение. Система не имеет решений, если графики уравнений, входящих в систему, не имеют общих точек. Из рисунка заключаем, что общих точек нет у графиков уравнений $x + y = -1$ и $y = x^2 - 2x + 1$. *Ответ:* 3.

Для решения систем уравнений повышенного и высокого уровня сложности полезно использовать различные методы решения уравнений, рассмотренные выше.

Пример 6. Решите систему $\begin{cases} \frac{1}{2y-3x} + \frac{2}{3y-2x} = \frac{3}{4}, \\ \frac{3}{2y-3x} - \frac{4}{3y-2x} = 1. \end{cases}$

Решение. Выполним замену переменных. Пусть

$$\frac{1}{2y-3x} = t, \quad \frac{1}{3y-2x} = z. \text{ Получим систему } \begin{cases} t + 2z = \frac{3}{4}, \\ 3t - 4z = 1; \end{cases}$$

$\begin{cases} 4t + 8z = 3, \\ 3t - 4z = 1; \end{cases}$ Умножим обе части второго уравнения на 2

и заменим первое уравнение системы суммой полученных

$$\text{уравнений; } \begin{cases} 4t + 8z = 3, \\ 6t - 8z = 2; \end{cases} + \begin{cases} 10t = 5, \\ 3t - 4z = 1; \end{cases} \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ z = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

$$\text{Возвращаемся к прежним переменным } \begin{cases} \frac{1}{2y-3x} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3y-2x} = \frac{1}{8}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - 3x = 2, \\ 3y - 2x = 8; \end{cases} \cdot 3 \quad \begin{cases} 6y - 9x = 6, \\ -6y + 4x = -16; \end{cases} + \begin{cases} -5x = -10, \\ 3y - 2x = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases} \text{ Ответ: } (2; 4).$$

Пример 7. Решите систему
$$\begin{cases} x + 2\sqrt{y} = 8, \\ y + 2\sqrt{x} = 8. \end{cases}$$

Решение. Выполним замену переменных $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = t$, $u \geq 0$, $t \geq 0$. Получим систему:
$$\begin{cases} u^2 + 2t = 8, \\ t^2 + 2u = 8. \end{cases}$$

Второе уравнение заменим разностью уравнений системы:

$$\begin{cases} u^2 + 2t = 8, \\ (u^2 - t^2) + 2(t - u) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u^2 + 2t = 8, \\ (u - t)(u + t - 2) = 0. \end{cases}$$

Система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} u^2 + 2t = 8, \\ u - t = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u^2 + 2t = 8, \\ u = t; \end{cases} \quad \begin{cases} u^2 + 2t - 8 = 0, \\ u = t; \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} t = -4, \\ u = -4; \\ t = 2, \\ u = 2; \end{cases} \right.$$

$$\text{или } \begin{cases} u^2 + 2t = 8, \\ u + t - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u^2 + 2t = 8, \\ t = 2 - u; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 + 2(2 - u) - 8 = 0, \\ t = 2 - u; \end{cases} \quad \begin{cases} u^2 - 2u - 4 = 0, \\ t = 2 - u; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 + \sqrt{5}, \\ t = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} u = 1 - \sqrt{5}, \\ t = 1 + \sqrt{5}; \end{cases} \quad \text{Условию } u \geq 0, t \geq 0 \text{ удовлетворяет}$$

$$\text{лишь пара } t = 2, u = 2. \text{ Тогда } \begin{cases} \sqrt{x} = 2, \\ \sqrt{y} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: (4; 4).

Пример 8. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2 - 6y + 3 = 0, \\ x - y = a \end{cases}$$
 не имеет решений?

Решение. Решаем систему способом подстановки

$$\begin{cases} x^2 - 6y + 3 = 0, \\ y = x - a; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6(x - a) + 3 = 0, \\ y = x - a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6a + 3 = 0, \\ y = x - a. \end{cases}$$

Условие задачи выполняется, если полученное квадратное уравнение не имеет корней, т.е. его дискриминант отрицателен: $x^2 - 6x + 6a + 3 = 0$, $\frac{D}{4} = 9 - 6a - 3 = 6 - 6a$; $6 - 6a < 0$, $6a > 6$, $a > 1$. *Ответ:* $a > 1$.

Пример 9. Найдите все значения a , при которых любое решение системы $\begin{cases} x + y = a, \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x < y$.

Решение. Умножаем обе части первого уравнения на (-1) и почленно складываем полученные уравнения, второе уравнение заменяем новым уравнением: $\begin{cases} -x - y = -a, \\ 3x + y = 6 \end{cases} \quad +$

$$\begin{cases} 2x = 6 - a, \\ x + y = a; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{6 - a}{2}, \\ y = \frac{3a - 6}{2}. \end{cases}$$

По условию $x < y$, т.е. $\frac{6 - a}{2} < \frac{3a - 6}{2}$, $6 - a < 3a - 6$; $4a > 12$; $a > 3$. *Ответ:* $(3; +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

Часть 1

1. Решением каких систем является пара чисел $(1; 2)$?

А) $\begin{cases} 4x - 2y = 0, \\ 3x - y = -1; \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 5x - 2y = 1; \end{cases}$ В) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 6x + 5y = 16. \end{cases}$

1) А и В; 2) только Б; 3) только А; 4) Б и В.

2. Решением каких систем является пара чисел $(2; -3)$?

А) $\begin{cases} 0,5x + y = -2, \\ 2y - x = -8; \end{cases}$ Б) $\begin{cases} \sqrt{5} \cdot x + y = 3, \\ x \cdot y = -6; \end{cases}$

В) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = -1, \\ xy = 6. \end{cases}$

1) Б и В; 2) только А; 3) А и Б; 4) таких систем нет.

3. Выразите переменную y через x из уравнения $\frac{y}{5} + 1 = 5x$.

1) $y = 25x + 5$; 3) $y = 25x - 5$;

2) $y = 50x - 10$; 4) $y = 5 - 25x$.

4. Выразите переменную x через y из уравнения $1,5x - y = -3$.

1) $x = \frac{2y-6}{3}$ 3) $x = \frac{-3+y}{2}$

2) $x = \frac{2y}{3} + 1$ 4) $x = \frac{2y+6}{3}$.

5. Какие из указанных уравнений являются линейными?

A) $3x + x^2 = y$; Б) $\frac{x}{5} - 2y = \sqrt{3}$; В) $y^2 - x = 0$.

1) А и В; 3) только В;

2) только Б; 4) таких уравнений нет.

6. Дано уравнение $4x - 2y = -3$. Найдите значение переменной y при $x = -0,25$.

1) 1; 2) 12; 3) 4; 4) -3.

7. Дано уравнение $2x - 3y = 6$. Найдите значение переменной x при $y = -0,2$.

1) 0,27; 2) 3,3; 3) 2,7; 4) 33.

8. График уравнения проходит через начало координат и точку $A(3; 1)$. Выберите это уравнение.

1) $y - 3x = 1$; 3) $y - 3x = 0$;

2) $3y - x = 0$; 4) $3y - x = 8$.

9. График уравнения проходит через точки $M(-1; 3)$ и $N(5; -3)$. Выберите это уравнение.

1) $x - y - 2 = 0$; 3) $2x + y - 1 = 0$;

2) $x + y - 2 = 0$; 4) такого уравнения нет.

Решите системы уравнений (10–28):

10. $\begin{cases} y - 3x = -2, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ 6y + 2x = 15. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$ 13. $\begin{cases} x = 8 - 2y, \\ 2y = 8 + x. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y = 4, \\ y = 4 - x. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x - 2y = 3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{y}{2} = 2, \\ \frac{2x}{5} + \frac{y}{2} = 2. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 2y - x = -10, \\ \frac{y}{6} + \frac{x}{12} = 1. \end{cases}$

$$\begin{array}{ll}
 18. \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{3y}{8} = 1, \\ \frac{2x}{3} - \frac{7y}{6} = 5. \end{cases} & 19. \begin{cases} \frac{x-y+4}{2} + \frac{x+y+1}{3} = 3, \\ \frac{x-y+4}{2} - \frac{x+y+1}{3} = 1. \end{cases} \\
 20. \begin{cases} 3(0,5x+2) - 2(3-y) = 0, \\ 4(2x+y) = x-y+13. \end{cases} & \\
 21. \begin{cases} 2(-x-y) - 3(2x+0,5y) = 15, \\ \frac{x-1}{2} - (y+1) = 0. \end{cases} & 22. \begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1, \\ xy = 12. \end{cases} \\
 23. \begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7. \end{cases} & 24. \begin{cases} y^2 - x^2 + xy = -19, \\ y - x = -7. \end{cases} \\
 25. \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = 1,5, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 6. \end{cases} & 26. \begin{cases} \frac{1}{4x} - \frac{1}{4y} = -0,2, \\ y - x = -4. \end{cases} \\
 27. \begin{cases} x + 0,5y = 0, \\ x^2 + y^2 = 6y. \end{cases} & 28. \begin{cases} x^3 - y^3 = 126, \\ x - y = 6. \end{cases}
 \end{array}$$

Сколько решений имеет система (29–31)?

$$\begin{array}{ll}
 29. \begin{cases} x + y = 6, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1. \end{cases} & 30. \begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ \frac{3x}{2} - 3y = 0,5. \end{cases} \\
 31. \begin{cases} x - 5y = 2, \\ 2x - 10y = 1. \end{cases} &
 \end{array}$$

32. Выберите систему, которая имеет единственное решение.

$$\begin{array}{lll}
 \text{А)} \begin{cases} 7x - y = 7, \\ x + y = 1. \end{cases} & \text{Б)} \begin{cases} 7x - y = 7, \\ 14x - 2y = 14. \end{cases} & \text{В)} \begin{cases} 7x - y = 7, \\ 14x - 2y = 4 \end{cases} \\
 1) \text{ Б и В;} & 3) \text{ только Б;} & \\
 2) \text{ только А;} & 4) \text{ такой системы нет.} &
 \end{array}$$

33. Выберите систему, которая не имеет решений.

$$\begin{array}{lll}
 \text{А)} \begin{cases} y + 5x = 2, \\ y - 5x = 1. \end{cases} & \text{Б)} \begin{cases} y + 5x = 2, \\ 2y + 10x = 5. \end{cases} & \text{В)} \begin{cases} y + 5x = 2, \\ 2y + 10x = 4. \end{cases} \\
 1) \text{ А и В;} & 3) \text{ только Б;} & \\
 2) \text{ А и Б;} & 4) \text{ такой системы нет.} &
 \end{array}$$

34. Выберите систему, которая имеет бесконечное множество решений.

$$\begin{array}{lll}
 \text{А)} \begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ 5x - 8y = 9. \end{cases} & \text{Б)} \begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 6x + 8y = 2. \end{cases} & \text{В)} \begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 6x + 8y = 3. \end{cases} \\
 1) \text{ Б и В;} & 3) \text{ только Б;} & \\
 2) \text{ А и В;} & 4) \text{ такой системы нет.} &
 \end{array}$$

Часть 2

Решите систему уравнений (1–15).

1. $\begin{cases} xy + 4 = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{1}{2x+y} + x = 6, \\ \frac{x}{2x+y} = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - y + 2 = 0, \\ x^4 - y^2 - y + 26 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 = 5 - y, \\ x^4 + y^2 = 17. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = x^2 + 5x, \\ (y - x)(x + y + 5) = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 3y = 3 + z, \\ y + z = 4, \\ x - z = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y = 2, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2(y - 1). \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 3y = 3, \\ \sqrt{2x - y + 2} = 7y - 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = 0,5, \\ \frac{18}{2x-y} + \frac{9}{x-2y} = 0,5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + y = x^2 + y^2 - 12, \\ x - 2y = 8. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^3 + y^3 = 64. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x^2y + xy^2 = 12. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37, \\ xy(x^2 + y^2) = 300. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sqrt{y^2 - 4x^2} + y - x = 2, \\ y \sqrt{y^2 - 4x^2} = 0. \end{cases}$

16. Найдите все значения a , при которых система $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

17. Найдите все значения b , при которых система $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + (4,5b^2 - 1)y = 3b - 1 \end{cases}$ не имеет решений.

18. Найдите все значения m , при которых система $\begin{cases} x + y = 1 - m, \\ xy = 0,5 + 0,5m^2 \end{cases}$ имеет решения. Найдите эти решения.

Ответы

Уравнения с одной переменной

Часть 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	6	2	0	-1	-15	-18	1/14	12	-20	0; 0,2	2,5; -2,5

№ задания	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	± 3	± 1	$0; \frac{1}{4}$	$\pm \sqrt{7}$	$1; -\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{8}; 1$	$\frac{2}{3}$	3,5	1; 2

№ задания	21	22	23	24	25	26	27	28
Ответ	-1,5; 0,4	4,5; 6	-2; -0,1	$-\frac{17}{3}$	$\frac{15}{4}$	-6; 1	-2; 8	-5; 3

№ задания	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
Ответ	5	3	$\pm \sqrt{5}$	0	беско- нечно	0	0	2	1	1	2	4	2

№ задания	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
Ответ	3	3,5	-2	1,4	0	-0,2	$\frac{2}{3}$	6	0	-3	-10

Часть 2

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	$\frac{2}{3}; \frac{5}{8}$	-0,5; 1	± 1	$-\frac{1}{2}; 0;$ $0,75; 1$	± 2	3,5	-2; 14	-3,5; 2

№ задания	9	10	11	12	13	14	15
Ответ	3; 10	$1; 2; \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$	-1; 0; 1	1; -2	$0,5; 1;$ $2; 2,5$	1	0,5; -3

№ задания	16	17	18	19	20	21
Ответ	2; 5	-8; 6	$1; \frac{2}{13}$	0; 3	-2; 0; 1; 3	-1; -0,5; 1,5; 2

№ задания	22	23	24
Ответ	$-5; 2; \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$	-2,5; -2; 0,5; 1	$1 \pm \sqrt{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

№ задания	25	26	27	28	29
Ответ	$\frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}; -2 \pm \sqrt{5}$	1	(-4; 4)	1; 2; 3	± 8

Системы уравнений

Часть 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ответ	4	2	3	1	2	1	3	2	2	(1; 1)	$\left(2; \frac{11}{6}\right)$	(1; 2)	(0; 4)

	$t; 4 -), t \in R$	Решений нет	(5; 0)	(11; 0,5)	(42,5; 20)

					$(-2; 1), (0,25; 7,75)$

		$(4; 8), (8; 4)$	$(-1; -5), (5; 1)$

ОТВЕТ	$(0; 0), (-2, 4; 4, 8)$	$(1; -5), (5; -1)$	1	бесконеч-					

Часть 2

			$(5; -9), (1; -1,8)$

Ответ	$(2; 6), (-2; 6)$	$(-1; 4), (1; 4), (-2; 1), (2; 1)$

		$\left(\frac{19}{3} \quad - \quad -\right)$

	$\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$	$-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}$	--	$m = -1, (1; 1)$

ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

**ТЕМЫ «Уравнения»,
«Системы уравнений»**

Издательства «**АСТ**» и «**Астрель**» предлагают новую серию учебных пособий для подготовки к государственной итоговой аттестации «**Азбука ГИА**».

Содержание и структура пособий полностью соответствуют официальным документам ГИА, разработанным **Федеральным институтом педагогических измерений** (ФИПИ).

Каждая книга серии посвящена одной или нескольким крупным предметным темам, которые выносятся на экзамен. Рассматриваются все задания на эти темы частей 1 и 2 — базового, повышенного и высокого уровней сложности. Приводятся тесты на проверку различных умений и навыков.

ВНИМАНИЕ!

Издательство «Астрель», подготовившее эти книги, входит в официальный перечень издательств, которым Министерство образования и науки Российской Федерации дало право выпускать учебные пособия для общеобразовательных школ, имеющих государственную аккредитацию (Приказ № 729 от 14.12.2009 г.).

ISBN 978-5-17-076407-5



9 785170 764075

www.ast.ru
www.elkniga.ru