МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011
(типовые задания С5)

Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений

Корянов А. Г., *г. Брянск*, akoryanov@mail.ru
Прокофьев А.А., *г. Москва*, aaprokof@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Среди множества задач с параметрами выделим один класс задач, связанный с количеством решений уравнения (неравенства), системы уравнений (неравенств).

Задачи такого вида обычно формулируют в следующем виде: *найти все значения параметра* (*параметров*), *при которых уравнение (неравенство, система*) *имеет конечное множество решений* (*ровно одно, ровно два и т.д.*), *бесконечное множество решений* (*интервал, отрезок, луч, прямая, часть плоскости – область*), *не имеет решений.*

В пособии рассмотрены основные подходы к решению задач с параметрами: алгебраический, функциональный, функционально-графический и геометрический.

1. Алгебраические методы

В данном разделе задачи (уравнения, неравенства, системы) классифицированы по их виду. Здесь рассмотрены такие методы: метод сведения задачи к равносильной, перебор различных значений параметра, замена переменной, выявление необходимых и достаточных условий или необходимых условий.

1.1. Задачи вида $a\cdot x\vee b$

Рассмотрим задачи вида $a\cdot x\vee b$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ и системы линейных уравнений.

уравнения

Уравнение вида $a\cdot x=b$ с переменной x имеет единственное решение при $a\neq 0$; имеет бесконечное множество решений при $a=0, b=0$; не имеет решений при $a=0, b\neq 0$.

Пример 1. (МГУ, 2002). *При каких значениях параметра b уравнение*

$$9x+b^2-(2-\sqrt{3})b-2\sqrt{3}=b^4x-b^2(b+\sqrt{3})$$

не имеет корней?

Решение. Данное уравнение является линейным относительно неизвестной *x*.

$$(b^4-9)\cdot x=b^3+(1+\sqrt{3})b^2-(2-\sqrt{3})b-2\sqrt{3}.$$

Последнее уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} b^4-9=0 \\ b^3+(1+\sqrt{3})b^2-(2-\sqrt{3})b-2\sqrt{3}\neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет два корня: $b_1=\sqrt{3}$, $b_2=-\sqrt{3}$. Подстановка показывает, что второму условию удовлетворяет только $b_1=\sqrt{3}$.

Ответ: $b=\sqrt{3}$.

неравенства

Неравенства вида $a\cdot x>b$ с переменной x имеет решением промежуток $\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$ при $a>0$; промежуток $\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$ при $a<0$; промежуток $(-\infty;+\infty)$ при $a=0, b<0$; не имеет решений при $a=0, b\geq 0$.

Пример 2. *При каких значениях параметра a неравенство*

$$ax-6\leq 2a-3x$$

имеет решением все действительные числа?

Решение. Приведем данное неравенство к виду

$$(a+3)x\leq 2(a+3)$$

и рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $a+3>0$, тогда получаем $x\leq 2$.
2. При $a+3<0$ имеем $x\geq 2$.
3. Если $a+3=0$, т.е. $a=-3$, то числовое неравенство $0\geq 0$ выполняется при всех значениях *x*.

Ответ: $a=-3$.

системы уравнений

Пусть коэффициенты уравнений системы

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

отличны от нуля. Тогда:

1) чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}; \qquad (1)$$

2) чтобы система имела бесконечно много решений, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}; \qquad (2)$$

3) чтобы система не имела решений, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}. \qquad (3)$$

Случай, когда коэффициенты равны нулю, нужно рассматривать отдельно.

Пример 3. *Исследовать систему линейных уравнений*

$$\begin{cases}(a-2)x + 27y = 4{,}5,\\ 2x + (a+1)y = 3.\end{cases}$$

Решение. Определим значения параметра a, при которых $\frac{a-2}{2} = \frac{27}{a+1}$. Это возможно, если $a^2 - a - 56 = 0$ $(a+1 \neq 0)$, т.е. при $a = 8$ или $a = -7$.

Если $a = 8$ или $a = -7$, то решений нет, так как $\frac{a-2}{2} = \frac{27}{a+1} \neq \frac{3}{2}$.

При $a \neq 8$ и $a \neq -7$, умножая первое уравнение системы на –2, а второе на $a-2$, и складывая левые и правые части уравнений, из полученного линейного уравнения найдем $y = \frac{3(a-5)}{(a-8)(a+7)}$. Аналогично действуя, найдем $x = \frac{9(a-17)}{2(a-8)(a+7)}$. Следовательно, система при $a \neq 8$ и $a \neq -7$ имеет единственное решение.

Ответ. Если $a = -7$ или $a = 8$, то решений нет; если $a \neq -7$ и $a \neq 8$, то $\left(\frac{9(a-17)}{2(a-8)(a+7)}; \frac{3(a-5)}{(a-8)(a+7)}\right)$.

В следующей задаче используем прием обратной задачи. Пусть $A = A_1 + A_2$ – множество допустимых значений параметра a, входящего в уравнение (неравенство, систему), причем A_1 – множество значений параметра, при которых задача имеет решение, A_2 – множество значений параметра, при которых задача не имеет решение. Если найдены множества A и A_2, то легко определить множество A_1.

Пример 4. *Определить, при каких значениях параметра a уравнения $x + ay = 1$ и $ax + y = 2a$ имеют хотя бы одно общее решение.*

Решение. Допустимые значения параметра a составляют множество всех действительных чисел. Решим обратную задачу. Найдем значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}x + ay = 1,\\ ax + y = 2a\end{cases}$ не имеет решений. Это возможно (см. условие (3)), если $\frac{1}{a} = \frac{a}{1} \neq \frac{1}{2a}$ (*).

Из равенства $\frac{1}{a} = \frac{a}{1}$ находим $a = -1$ или $a = 1$ (удовлетворяют условию $a \neq 0$). Для этих значений неравенство в (*) также выполняется. Следовательно, исходная задача выполняется при всех значениях a, отличных от –1 и 1.

Ответ. $a \neq \pm 1$.

1.2. Задачи вида $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \vee 0$

Рассмотрим задачи вида

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \vee 0,$$

где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ и системы уравнений (неравенств).

- Функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ задает параболу с вершиной в точке $C(x_в; y_в)$.
- Функция $y = a(x-m)^2 + n$ $(a \neq 0)$ задает параболу с вершиной в точке $C(m; n)$.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

1. Квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\ne 0) \qquad (1)$$

не имеет решений тогда и только тогда, когда $D<0$.

2. Квадратное уравнение (1) имеет:

а) два различных корня тогда и только тогда, когда $D>0$;

б) два (может быть кратных) корня тогда и только тогда, когда $D\ge 0$;

в) два положительных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1x_2>0, \\ x_1+x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-4ac>0, \\ \dfrac{c}{a}>0, \\ -\dfrac{b}{a}>0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} D>0, \\ a\cdot f(0)>0, \\ x_{\text{в}}>0; \end{cases}$$

г) два отрицательных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1x_2>0, \\ x_1+x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-4ac>0, \\ \dfrac{c}{a}>0, \\ -\dfrac{b}{a}<0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} D>0, \\ a\cdot f(0)>0, \\ x_{\text{в}}<0; \end{cases}$$

д) корни разных знаков тогда и только тогда, когда

$$x_1x_2<0 \Leftrightarrow \frac{c}{a}<0 \Leftrightarrow ac<0 \Leftrightarrow a\cdot f(0)<0;$$

е) корень, равный нулю тогда и только тогда, когда

$$x_1x_2=0 \Leftrightarrow c=0;$$

ж) два разных корня $x_1,\, x_2>M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D>0, \\ a\cdot f(M)>0, \\ x_{\text{в}}>M; \end{cases}$$

з) два разных корня $x_1,\, x_2<M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D>0, \\ a\cdot f(M)>0, \\ x_{\text{в}}<M; \end{cases}$$

и) два корня $x_1<M<x_2$ тогда и только тогда, когда $a\cdot f(M)<0$;

к) корни $x_1<m<x_2<M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a\cdot f(m)<0, \\ a\cdot f(M)>0; \end{cases}$$

л) корни $m<x_1<M<x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a\cdot f(m)>0, \\ a\cdot f(M)<0; \end{cases}$$

м) корни $x_1<m<M<x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a\cdot f(m)<0, \\ a\cdot f(M)<0; \end{cases}$$

н) один корень внутри интервала (m, M), а другой вне этого интервала тогда и только тогда, когда $f(m)\cdot f(M)<0$.

уравнения

Уравнение вида $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ с переменной x при $a=0$ приводится к уравнению степени не выше первой; при $a\ne 0$ является квадратным уравнением.

Пример 5. (МГУ, 1980). *При каких значениях параметра* a *уравнение*

$$(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$$

имеет два действительных различных корня?

Решение. 1. Если $3a-1=0$**,** т.е. $a=\dfrac{1}{3}$, то получаем уравнение $\dfrac{2}{3}x-1=0$, которое имеет один корень.

2. При $a\ne\dfrac{1}{3}$ получаем квадратное уравнение, которое имеет два действительных различных корня тогда и только

ЯГУБОВ.РФ

тогда, когда его дискриминант положителен: $\frac{D}{4} > 0 \Leftrightarrow a^2 - (3a-1)(3a-2) > 0$. Решая это неравенство при условии $a \neq \frac{1}{3}$, получаем ответ.

Ответ: $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{16}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

Пример 6. (МГУ, 2004). *При каких значениях параметра* a *уравнение*

$$x^2 + x + \frac{2a-1}{a+5} = 0$$

не имеет решений?

Решение. Квадратное уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен: $D < 0 \Leftrightarrow \frac{a - \frac{9}{7}}{a+5} > 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ.

Замечание. При $a = -5$ дробь не определена, поэтому и уравнение не определено, и в этом случае не имеет смысла говорить о решениях уравнения.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup \left(\frac{9}{7}; +\infty\right)$.

Пример 7. (МГУ, 2007). *Найти все значения параметра а, при каждом из которых среди корней уравнения*

$$ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

Решение. 1. Пусть $a = 0$, тогда получаем линейное уравнение $4x + 1 = 0$, которое имеет единственный отрицательный корень $x = -\frac{1}{4}$.

2. При $a \neq 0$ получаем квадратное уравнение, дискриминант которого равен

$$D = (a+4)^2 - 4a(a+1) = -3a^2 + 4a + 16.$$

а) Уравнение имеет ровно один корень, т.е. $D = 0$. Отсюда $a = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{3}$.

Так как корень $x = -\frac{a+4}{2a} < 0$, то остается $a = \frac{2+2\sqrt{13}}{3}$.

б) Уравнение имеет корни разных знаков. В этом случае свободный член приведенного уравнения отрицателен (дискриминант будет положительным):

$$\frac{a+1}{a} < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 0.$$

в) Один из корней равен нулю, т.е. $a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Квадратное уравнение принимает вид $-x^2 + 3x = 0$, и имеет корни $x = 0$, $x = 3$. Значение $a = -1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(-1; 0] \cup \left\{\frac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}$.

Пример 8 (МИОО, 2010). *Найти все значения параметра* a, *при каждом из которых уравнение*

$$x^2 - \left(|a+5| - |a-5|\right)x + (a-12)(a+12) = 0$$

имеет два различных отрицательных корня.

Решение. Используя теорему Виета, запишем условия существования двух различных отрицательных корней для квадратного уравнения:

$$\begin{cases} x_1 x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первые два неравенства

$$\begin{cases} (a-12)(a+12) > 0, \\ |a+5| - |a-5| < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-12)(a+12) > 0, \\ (a+5)^2 - (a-5)^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-12)(a+12) > 0, \\ 2a \cdot 10 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \ a < -12.$$

Теперь рассмотрим дискриминант с учетом того, что $a < -12$.

$$(|a+5|-|a-5|)^2-4(a-12)(a+12)>0,$$
$$10^2-4(a-12)(a+12)>0,$$
$$a^2-144<25,\ a^2<169,\ -13<a<13.$$

Учитывая условие $a<-12$, получаем $-13<a<-12$.

Ответ: (–13; –12).

неравенства

Пример 9. (МГУ, 2005). *При каких целых a неравенство*

$$2\log_{\frac{1}{2}} a-3+2x\log_{\frac{1}{2}} a-x^2<0$$

верно для любого значения x?

Решение. Квадратный трехчлен относительно x отрицателен при всех x тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Обозначим $\log_{\frac{1}{2}} a=b$, тогда $D_1=b^2+2b-3<0$, т.е. $-3<b<1$. Тогда $\log_{\frac{1}{2}} 8<\log_{\frac{1}{2}} a<\log_{\frac{1}{2}} 2$. Отсюда $2<a<8$.

Выбирая целые значения a из промежутка $(2;8)$, получаем ответ.

Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

В следующем примере используем прием, при котором параметр рассматривают в качестве отдельной переменной.

Пример 10. (МГУ, 1992). *Найти все значения x, для каждого из которых неравенство*

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$$

выполняется хотя бы при одном значении $a\in[-1;2]$.

Решение. Перепишем данное неравенство так:

$$f(a)=a^2+a(x^3+2x^2-4)-$$
$$-(2x^3+x^2-6x+5)>0.$$

Левая часть его – квадратный трехчлен относительно a. Для того чтобы квадратный трехчлен с положительным коэффициентом при a^2 принимал положительные значения хотя бы в одной точке отрезка $[-1;2]$, необходимо и достаточно, чтобы он был положителен хотя бы в одном из концов этого отрезка. Получаем совокупность неравенств для x:

$$\left[\begin{array}{l} f(-1)>0, \\ f(2)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+2)(x-1)x<0, \\ (x+3)(x-1)>0. \end{array}\right.$$

Решения неравенств совокупности объединяем для ответа.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

системы уравнений (неравенств)

Пример 11. (МИОО, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} y-x^2=a, \\ x-y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Исключая параметр из системы, получаем уравнение

$$(y-x)(1+y+x)=0.$$

Отсюда $y=x$ или $y=-x-1$.

Пусть $y=x$, тогда из системы имеем квадратное уравнение $x^2-x+a=0$, дискриминант которого равен $D_1=1-4a$.

Если $y=-x-1$, то из системы имеем квадратное уравнение $x^2+x+1+a=0$, которое имеет дискриминант $D_2=-3-4a$.

Рассмотрим разные случаи для дискриминантов.

1. $\begin{cases} D_1>0, \\ D_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a>0, \\ -3-4a<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}<a<\dfrac{1}{4}.$

2. $\begin{cases} D_1<0, \\ D_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a<0, \\ -3-4a>0. \end{cases}$ Система неравенств не имеет решений.

3. $\begin{cases} D_1=0, \\ D_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a=0, \\ -3-4a>0. \end{cases}$ Система не имеет решений.

4. $\begin{cases} D_1>0, \\ D_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a>0, \\ -3-4a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{4}.$

При $a=-\dfrac{3}{4}$ первое уравнение имеет вид

$x^2-x-\frac{3}{4}=0$. Числа $\frac{3}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ – его корни. Второе уравнение имеет вид $x^2+x+\frac{1}{4}=0$ и число $-\frac{1}{2}$ – его единственный корень**.**

5. $\begin{cases} D_1=0, \\ D_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a=0, \\ -3-4a=0. \end{cases}$ Система не имеет решений.

6. $\begin{cases} D_1>0, \\ D_2>0. \end{cases}$ В этом случае выше приведенные квадратные уравнения не имеют общих корней (докажите, приравнивая корни). Тогда исходная система имеет четыре различных решения.

Случай $x=-x-1$, т.е. $x=-\frac{1}{2}$, приводит к значениям $y=-\frac{1}{2}$ и $a=-\frac{3}{4}$. Тогда получаем одно уравнение $x^2-x-\frac{3}{4}=0$, которое имеет корни $\frac{3}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

***Ответ*:** $-\frac{3}{4}\le a<\frac{1}{4}$.

Пример 12. (МГУ, 1988). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} axy+x-y+\frac{3}{2}=0, \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Второе уравнение исходной системы можно переписать в виде

$$y(x+2)+(x+1)=0,$$

откуда следует, что эта система ни при каком значении параметра a не имеет решений с условием $x=-2$. Поэтому исходная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} (ax-1)y+x+\frac{3}{2}=0, \\ y=-\frac{x+1}{x+2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-2)x^2+(2a-9)x-8=0, \\ y=-\frac{x+1}{x+2}. \end{cases}$$

Найдем все значения параметра a, при которых первое уравнение последней системы имеет решение $x=-2$. Для таких значений a должно выполняться равенство

$$(2a-2)(-2)^2+(2a-9)(-2)-8=0,$$

откуда находим, что $a=-0{,}5$.

При $a=-0{,}5$ первое уравнение системы перепишется в виде

$$-3x^2-10x-8=0.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1=-2$ и $x_2=-\frac{4}{3}$. Второму из них соответствует значение $y_2=0{,}5$. Для $x_1=-2$ соответствующего значения y не существует. Итак, при $a=-0{,}5$ исходная система имеет единственное решение $\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{2}\right)$, и это значение a отвечает условию задачи.

При $a=1$ первое уравнение системы перепишется в виде $-7x-8=0$. Оно имеет единственное решение $x=-\frac{8}{7}$, соответствующее значение y равно $\frac{1}{6}$. Итак, при $a=1$ исходная система уравнений имеет единственное решение $\left(-\frac{8}{7};\frac{1}{6}\right)$, и это значение a отвечает условию задачи.

При $a\ne 1$ первое уравнение системы есть квадратное уравнение с дискриминантом $D=(2a-9)^2+4\cdot 8\cdot(2a-2)=$ $=4a^2+28a+17$.

Если $D<0$, то первое уравнение системы, а значит, и исходная система, не имеют решений.

Если $D>0$ и $a\ne -0{,}5$, $a\ne 1$ то первое уравнение системы имеет два решения, отличных от (-2). Следовательно, система имеет два решения. Эти значения a не удовлетворяют условию задачи.

ЯГУБОВ.РФ

Равенство $D=4a^2+28a+17=0$ выполняется для $a=\frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$. Оба эти значения отличны от $(-0{,}5)$. Следовательно, при $a=\frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$ первое уравнение системы, а вместе с ним и система, имеют по одному решению.

Ответ: $-1;-\frac{1}{2};\frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$.

Пример 13. (МГУ, 1967). *Найти все значения a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\ge 0,\\ ax\ge 4\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. 1. Если $a=0$, то второе неравенство системы не выполняется, и система не имеет решений.

2. Пусть $a>0$. В этом случае данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}(x-a)\left(x-\frac{2a+3}{a}\right)\ge 0,\\ x\ge\frac{4}{a}.\end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x\ge\frac{4}{a}$ должно выполняться неравенство:

$$f(x)=(x-a)\left(x-\frac{2a+3}{a}\right)<0.$$

Решением этого неравенства является промежуток $\left(a;\frac{2a+3}{a}\right)$ или $\left(\frac{2a+3}{a};a\right)$ при $\frac{2a+3}{a}\ne a$. Но найдутся числа x, которые больше всех чисел $\frac{4}{a}$, a, $\frac{2a+3}{a}$, и для них выполняется неравенство $f(x)>0$.

3. Пусть $a<0$. В этом случае данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}(x-a)\left(x-\frac{2a+3}{a}\right)\le 0,\\ x\le\frac{4}{a}.\end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x\le\frac{4}{a}$ должно выполняться неравенство:

$$f(x)=(x-a)\left(x-\frac{2a+3}{a}\right)>0.$$

Решением этого неравенства является объединение промежутков $(-\infty;a)\cup\cup\left(\frac{2a+3}{a};+\infty\right)$ или $\left(-\infty;\frac{2a+3}{a}\right)\cup\cup(a;+\infty)$. Неравенство $f(x)>0$ будет выполняться при всех значениях $x\le\frac{4}{a}$ при условиях

$$\begin{cases}a<0,\\ \frac{4}{a}<a,\\ \frac{4}{a}<\frac{2a+3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ a^2<4\\ 4>2a+3\end{cases}\Leftrightarrow -2<a<0.$$

Получаем окончательный ответ $-2<a\le 0$.

Ответ: $(-2;0]$.

1.3. Сведение задачи к задаче вида $a\cdot x\vee b$ или $a\cdot x^2+b\cdot x+c\vee 0$

Линейный двучлен и в особенности квадратный трехчлен занимают центральное место в задачах с параметрами. Это связано с тем, что разные задачи тем или иным способом (замена переменной, разложение на множители и т.д.) можно привести к исследованию линейного двучлена или квадратного трехчлена.

задачи, содержащие целые рациональные выражениями высшей степени

Пример 14. (МГУ, 2002). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение*

$$\left(x^2+2(a-2)x+a^2-4a\right)^2+$$
$$+(a+5)\left(x^2+2(a-2)x+a^2-4a\right)-$$
$$-a^2+8a+2=0$$

имеет: *а*) *единственное решение*; *б*) *ровно два различных решения.*

Решение. Обозначим

$$y = f(x) = x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a,$$

тогда уравнение принимает вид

$$g(y) = y^2 + (a+5)y - a^2 + 8a + 2 = 0.$$

Квадратный трехчлен $f(x) = = (x+a)(x+a-4)$ принимает в одной точке значение $f(2-a) = -4$, а остальные свои значения (большие -4) – по два раза. Поэтому уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда:

1) $\begin{cases} g(-4) = 0, \\ y_{\text{в}} \le -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4(a+5) - a^2 + 8a + 2 = 0, \\ -\dfrac{a+5}{2} \le -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ a = 2 + \sqrt{2}$,

а ровно два корня – в следующих случаях:

2) $y_1 = y_2 > -4 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} D = 0, \\ y_в > -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+5)^2 - 4(-a^2 + 8a + 2) = 0, \\ -\dfrac{a+5}{2} > -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ a = 1;$

3) $y_1 < -4 < y_2 \ \Leftrightarrow \ g(-4) < 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 2 + \sqrt{2}, \\ a < 2 - \sqrt{2}. \end{array} \right.$

Ответ: а) $2 + \sqrt{2}$;

б) $(-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup \{1\} \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Пример 15. (МГУ, 2008). *Найти все значения параметра а, при которых уравнение*

$$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ *имеет не менее двух корней.*

Решение. Приведем уравнение к виду

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + (a+1)\left(x - \frac{1}{x}\right) + (2a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ y^2 + (a+1)y + 2a + 3 = 0,$$

где функция $y = f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; -1)$ от $-\infty$ до $f(-1) = 0$. Поэтому исходное уравнении имеет не менее двух корней на промежутке $(-\infty; -1)$ тогда и только тогда, когда полученное уравнение имеет два корня, принадлежащие интервалу $(-\infty; 0)$, т.е. когда

$$\begin{cases} a + 1 > 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ (a+1)^2 - 4(2a+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > -1, \\ (a - a_1)(a - a_2) > 0, \\ a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow \ a > 3 + \sqrt{20}.$$

Ответ: $a > 3 + \sqrt{20}$.

задачи, содержащие дробно-рациональные выражения

Пример 16. *Определить количество различных решений уравнения* $\dfrac{x-5}{x^2 - b^2} = 0$ *с параметром* b.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x = 5, \\ x \ne \pm b. \end{cases}$$

Из условия $5 \ne \pm b$ получаем, что число 5 является корнем исходного уравнения, если $b \ne \pm 5$. При $b = \pm 5$ нет корней.

Ответ: при $b \ne \pm 5$ единственный корень, при $b = \pm 5$ нет корней.

Пример 17. *При каких значениях параметра а уравнение*

$$\frac{x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0$$

имеет единственное решение?

Решение. При условии $x \neq 1$ и $x \neq 5$ имеем $x_1 = a+2$ и $x_2 = 2a-1$ (обратная теорема Виета). Для выполнения условия задачи необходимо рассмотреть пять случаев.

1) $\begin{cases} a+2 \neq 1, \\ a+2 \neq 5, \\ 2a-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \ a=1.$

2) $\begin{cases} a+2 \neq 1, \\ a+2 \neq 5, \\ 2a-1=5. \end{cases}$ Нет решений.

3) $\begin{cases} 2a-1 \neq 1, \\ 2a-1 \neq 5, \\ a+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \ a=-1.$

4) $\begin{cases} 2a-1 \neq 1, \\ 2a-1 \neq 5, \\ a+2=5. \end{cases}$ Нет решений.

5) $\begin{cases} a+2 \neq 1, \\ a+2 \neq 5, \\ 2a-1=a+2. \end{cases}$ Нет решений.

Ответ: $a=1$ или $a=-1$.

Пример 18. (МГУ, 2003). *Найти все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3;\,-1]$ целиком содержится среди решений неравенства*

$$\frac{x-3b}{b-2x} < 0.$$

Решение. Неравенство перепишем так:

$$\frac{x-3b}{x-\frac{b}{2}} > 0 \text{ или } f(x) = (x-3b)\left(x-\frac{b}{2}\right) > 0.$$

Воспользуемся условиями расположения корней квадратного трехчлена: оба корня меньше числа (–3) или оба корня больше числа (–1), т.е. выполняются условия

$$\begin{cases} f(-3) > 0, \\ x_{\text{в}} < -3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(-1) > 0, \\ x_{\text{в}} > -1, \end{cases}$$

где абсцисса вершины параболы $x_{\text{в}} = \dfrac{3b+\dfrac{b}{2}}{2} = \dfrac{7b}{4}.$

Рассмотрим первую систему неравенств.

$$\begin{cases} (-3-3b)\left(-3-\dfrac{b}{2}\right) > 0, \\ \dfrac{7b}{4} < -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+b)(6+b) > 0, \\ b < -\dfrac{12}{7} \end{cases} \Leftrightarrow b < -6.$$

Для второй системы неравенств имеем.

$$\begin{cases} (-1-3b)\left(-1-\dfrac{b}{2}\right) > 0, \\ \dfrac{7b}{4} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+3b)(2+b) > 0, \\ b > -\dfrac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow b > -\frac{1}{3}.$$

Объединяем полученные решения и записываем ответ.

Ответ: $(-\infty;-6) \cup \left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

задачи, содержащие выражения с модулями

Пример 19. *Определить количество различных решений уравнения $|x+3| = a$ в зависимости от параметра a.*

Решение. По свойству модуля имеем $|x+3| \geq 0$. Поэтому при $a<0$ исходное уравнение корней не имеет. Пусть $a=0$, тогда уравнение $|x+3|=0$ имеет один корень $x=-3$. Если $a>0$, то из уравнения $|x+3|=a$ получаем два различных корня $x=a-3$ или $x=-a-3$.

Ответ: если $a<0$, то нет решений;
если $a=0$ – одно решение;
при $a>0$ – два.

Пример 20. *Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение*

$$|x+2| = ax+1\,?$$

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x+2 \geq 0$, т.е. $x \geq -2$. Тогда данное уравнение принимает вид: $x+2=ax+1$, $x(1-a)=-1$. Последнее

уравнение при $a=1$ решений не имеет, а при $a\neq 1$ имеет единственный корень $x=\dfrac{1}{a-1}$. Найдем те значения параметра a, при которых для корня выполняется условие $x\geq -2$:

$$\frac{1}{a-1}\geq -2 \Leftrightarrow \frac{2a-1}{a-1}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq 0{,}5, \\ a>1. \end{array}\right.$$

Следовательно, в первом случае исходное уравнение имеет одно решение при всех значениях $a\in(-\infty;\,0{,}5]\cup(1;\,+\infty)$ и не имеет решений при $a\in(0{,}5;\,1]$.

2. Если $x<-2$, то будем иметь уравнение $-x-2=ax+1$ или $x(1+a)=-3$. При $a=-1$ последнее уравнение не имеет корней, а при $a\neq -1$ – единственное решение $x=-\dfrac{3}{1+a}$, которое должно удовлетворять условию $x<-2$:

$$-\frac{3}{1+a}<-2 \Leftrightarrow \frac{2a-1}{a+1}<0 \Leftrightarrow -1<a<0{,}5.$$

Таким образом, во втором случае заданное уравнение при всех значениях $a\in(-1;\,0{,}5)$ имеет одно решение, а при $a\in(-\infty;\,-1]\cup[0{,}5;\,+\infty)$ решений не имеет.

Сравнивая результаты (см. рис. 1), найденные в двух случаях, получаем ответ.

Ответ: если $a\in(0{,}5;\,1]$, то нет решений; если $a\in(-\infty;\,-1]\cup\{0{,}5\}\cup(1;\,+\infty)$ – одно решение; при $a\in(-1;\,0{,}5)$ – два.

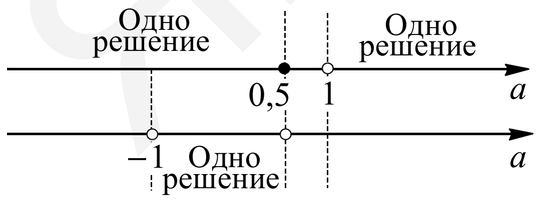


Рис. 1

Пример 21. *При каких значениях b уравнение*

$$x^2-(4b-2)\cdot|x|+3b^2-2b=0$$

имеет два различных решения?

Решение. Пусть $|x|=t$, где $t\geq 0$. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях b квадратное уравнение $t^2-(4b-2)t+3b^2-2b=0$ имеет один положительный корень?

По теореме, обратной теореме Виета найдем корни квадратного уравнения $t_1=b$, $t_2=3b-2$.

Возможны три случая.

1) $\begin{cases} t_1>0 \\ t_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ 3b-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<b<\dfrac{2}{3}.$

2) $\begin{cases} t_1<0 \\ t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<0 \\ 3b-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ Нет решений.

3) $\begin{cases} t_1=t_2 \\ t_1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3b-2 \\ b>0 \end{cases} \Leftrightarrow b=1.$

Ответ: $0<b<\dfrac{2}{3}$; $b=1$.

Замечание. Другое решение данного примера смотрите в разделе «Функционально-графические методы решения».

Пример 22. (МИОО, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых неравенство*

$$\left|\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$$

выполняется при всех x.

Решение. Приведем неравенство к виду

$$-3<\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}<3.$$

Так как квадратный трехчлен x^2+x+1 принимает положительные значения при всех значениях x, то приходим к двойному неравенству

$$-3(x^2+x+1)<x^2-ax+1<3(x^2+x+1),$$

затем к системе

$$\begin{cases} 4x^2+(3-a)x+4>0, \\ 2x^2+(3+a)x+2>0. \end{cases}$$

Для выполнения неравенств при всех значениях x необходимо и достаточно поставить условия для дискриминанта

$$\begin{cases} D_1 = (3-a)^2 - 64 < 0, \\ D_2 = (3+a)^2 - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-3| < 8, \\ |a+3| < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8 < a-3 < 8, \\ -4 < a+3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < a < 11, \\ -7 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 < a < 1.$$

Ответ: $-5 < a < 1$.

Пример 23. (МГУ, 1993). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство*

$$x^2 + 4|x-a| \ge a^2$$

справедливо для всех действительных x.

Решение. При $x \ge a$ неравенство равносильно неравенству

$$(x-a)(x+a+4) \ge 0,$$

справедливому при всех $x \ge a$ тогда и только тогда, когда $a \ge -a-4$, т.е. при $a \ge -2$.

Аналогично, при $x < a$ приходим к неравенству $(x-a)(x+a-4) \ge 0$, справедливому при всех $x < a$ при $a \le -a+4$, т.е. при $a \le 2$.

Ответ: $[-2; 2]$.

Пример 24. (МГУ, 1995). *Найти все значения параметра a, при которых неравенство*

$$x^2 + 4x + 6a \cdot |x+2| + 9a^2 \le 0$$

имеет не более одного решения.

Решение. Преобразуем данное неравенство $|x+2|^2 + 6a|x+2| + 9a^2 - 4 \le 0$, $(|x+2| + 3a)^2 \le 4$. Неравенство $-2-3a \le |x+2| \le 2-3a$ имеет не больше одного решения лишь при $2-3a \le 0$ (сделайте графическую иллюстрацию для функций $y = |x+2|$ и $y = 2-3a$), то есть при $a \ge \frac{2}{3}$.

Ответ: $a \ge \frac{2}{3}$.

Пример 25. *В зависимости от значений параметра a определить количество различных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} (y+8-x^2)(2x+|y|) = 0, \\ 2ax - y = 8 + a^2. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы

$$(y+8-x^2)(2x+|y|) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+8-x^2 = 0, \\ 2x+|y| = 0. \end{array}\right.$$

Следовательно, исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\text{(I)} \begin{cases} y = x^2 - 8, \\ y = 2ax - 8 - a^2 \end{cases} \text{ и (II)} \begin{cases} |y| = -2x, \\ y = 2ax - 8 - a^2. \end{cases}$$

Решим систему (I). Подставляя $y = x^2 - 8$ во второе уравнение этой системы, получим $x^2 - 8 = 2ax - 8 - a^2$ или $(x-a)^2 = 0$, т.е. система (I) при всех значениях параметра имеет решение $x = a$, $y = a^2 - 8$.

Решим систему (II). Она в свою очередь также равносильна совокупности двух систем

$$\text{(II}a\text{)} \begin{cases} y = 2x, \\ x \le 0, \\ y = 2ax - 8 - a^2 \end{cases} \text{ и (II}б\text{)} \begin{cases} y = -2x, \\ x \le 0, \\ y = 2ax - 8 - a^2. \end{cases}$$

Для системы (IIa) подставляя $y = 2x$ в уравнение $y = 2ax - 8 - a^2$, получим

$$x(2-2a) = -8 - a^2.$$

При $a = 1$ это уравнение имеет вид $x \cdot 0 = -9$, т.е. решений нет.

При $a \ne 1$ уравнение имеет одно решение $x = -\frac{8+a^2}{2-2a}$. Проверяя выполнение условия $x \le 0$ имеем

$$-\frac{8+a^2}{2-2a} \le 0 \Leftrightarrow 2-2a > 0 \Leftrightarrow a < 1.$$

Следовательно, система (IIa) при $a < 1$ имеет одно решение $x = -\frac{8+a^2}{2-2a}$, $y = \frac{8+a^2}{a-1}$.

Аналогично решая систему (II*б*), получим, что при $a<-1$ она имеет одно решение $x=\dfrac{8+a^2}{2+2a}$, $y=-\dfrac{8+a^2}{a+1}$.

Заметим, что решения систем (II*а*) и (II*б*) различны при $a<-1$, так как уравнение

$$-\frac{8+a^2}{2-2a}=\frac{8+a^2}{2+2a}\Leftrightarrow -2-2a=2-2a$$

не имеет корней.

Рассмотрим случаи совпадения решений систем (I) и (II).

Из уравнения

$$-\frac{8+a^2}{2-2a}=a \text{ при } a<1$$

получаем $a^2-2a-8=0$. Отсюда $a_{1,2}=1\pm 3$. С учетом условия $a<1$ остается $a=-2$.

Из уравнения

$$\frac{8+a^2}{2+2a}=a \text{ при } a<-1$$

получаем $a^2+2a-8=0$. Отсюда $a_{1,2}=-1\pm 3$. С учетом условия $a<-1$ остается $a=-4$.

В итоге получаем, что исходная система уравнений имеет:

при $a\ge 1$ одно решение $(a;a^2-8)$.

при $-1\le a<1$ или $a=-4$ два решения $(a;a^2-8)$ или $\left(\dfrac{8+a^2}{2a-2};\dfrac{8+a^2}{a-1}\right)$;

при $a=-2$ два решения $(a;a^2-8)$ или $\left(\dfrac{8+a^2}{2a+2};-\dfrac{8+a^2}{a+1}\right)$;

при $a<-4$, $-4<a<-2$ и $-2<a<-1$ три решения $(a;a^2-8)$, $\left(\dfrac{8+a^2}{2a-2};\dfrac{8+a^2}{a-1}\right)$, $\left(\dfrac{8+a^2}{2a+2};-\dfrac{8+a^2}{a+1}\right)$.

Ответ: при $a\ge 1$ одно решение; при $-1\le a<1$, $a=-2$ и $a=-4$ два решения; при $a<-4$, $-4<a<-2$ и $-2<a<-1$ три решения.

Замечание. Другое решение данного примера смотрите в разделе «Функционально-графические методы решения».

задачи, содержащие иррациональные выражения

Пример 26. *Определить количество различных решений уравнения* $(x-1)\sqrt{x-q}=0$ *с параметром q.*

Решение. Из данного уравнения получаем два корня $x=1$ или $x=q$. Второй корень удовлетворяет условию $x-q\ge 0$. Для первого корня имеем $1-q\ge 0$ или $q\le 1$. Значит, при $q<1$ исходное уравнение имеет два различных решения $x=q$ или $x=1$, при $q=1$ – один корень $x=1$, при $q>1$ – один корень $x=q$.

Ответ: если $q<1$, то два различных корня; если $q\ge 1$, то один корень.

Пример 27. *При каких значениях b уравнение* $\sqrt{x+b}=x+3$ *имеет единственное решение*?

Решение. Имеем

$$\sqrt{x+b}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+b=x^2+6x+9, \\ x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+5x+9-b=0, \\ x\ge -3. \end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2+5x+9-b=0$ имеет дискриминант $D=4b-11$.

1. $D=0$ при $b=2{,}75$. В этом случае квадратное уравнение $x^2+5x+6{,}25=0$ имеет один корень $x=-2{,}5$, который удовлетворяет условию $x\ge -3$.

2. Пусть $D>0$, т.е. $b>2{,}75$. Тогда квадратное уравнение имеет два действительных различных корня. Чтобы заданное уравнение имело один корень, необходимо рассмотреть два случая.

а) Один из корней $x_1<-3$, а другой $x_2=-3$. Подставим значение $x=-3$ в квадратное уравнение, получим $b=3$. Соответствующее уравнение $x^2+5x+6=0$ имеет корни $x_1=-2$,

$x_2 = -3$. Для первого корня не выполняется условие $x_1 < -3$.

б) В случае, когда $x_1 < -3 < x_2$, значение квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + 5x + 9 - b$ при $x = -3$ отрицательно, так как $f(x) < 0$ на промежутке (x_1, x_2). Получаем $f(-3) = 3 - b < 0$, $b > 3$.

Ответ: $b = 2{,}75$; $b > 3$.

Пример 28. *При каких значениях параметра a уравнение* $\sqrt{x+1} = x + a$ *имеет единственное решение*?

Решение. Пусть $\sqrt{x+1} = t$, где $t \ge 0$. Отсюда $x = t^2 - 1$. Уравнение $\sqrt{x+1} = t_0$ имеет один корень, если $t_0 \ge 0$. Получаем квадратное уравнение $t^2 - t + a - 1 = 0$, дискриминант которого равен $D = 5 - 4a$.

1. Если $D = 0$, т.е. $a = 1{,}25$, то квадратное уравнение $t^2 - t + 0{,}25 = 0$ или $(t - 0{,}5)^2 = 0$ имеет единственный корень $t = 0{,}5 > 0$. Следовательно, исходное уравнение имеет один корень при $a = 1{,}25$.

2. Если $D > 0$, т.е. $a < 1{,}25$, то квадратное уравнение имеет два корня.

а) Корни будут разных знаков при условии $t_1 \cdot t_2 = a - 1 < 0$, т.е. из них только один положительный корень. Решая систему неравенств $\begin{cases} a < 1{,}25 \\ a - 1 < 0, \end{cases}$ получим условие $a < 1$, при котором исходное уравнение имеет один корень.

б) Хотя бы один из корней равен нулю, в этом случае $a - 1 = 0$, $a = 1$. Квадратное уравнение имеет два неотрицательных корня $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Значит, исходное уравнение также имеет два корня.

Ответ: $a = 1{,}25$; $a < 1$.

Пример 29. *При каких a уравнение*

$$2x + 3\sqrt{x} + 2a^2 - 11a = 0$$

имеет единственное решение?

Решение. Пусть $\sqrt{x} = t$, где $t \ge 0$. Тогда задачу можно переформулировать: *при каких значениях a квадратное уравнение* $2t^2 + 3t + 2a^2 - 11a = 0$ *имеет один неотрицательный корень*?

Возможны три случая.

1. Если квадратное уравнение имеет один корень, то он будет равен $t = -\dfrac{3}{4}$. Этот корень не удовлетворяет условию задачи.

2. Корни разных знаков. Необходимое и достаточное условие:

$$t_1 t_2 < 0 \;\Leftrightarrow\; 2a^2 - 11a < 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < a < 5{,}5.$$

3) Один из корней равен нулю, другой – отрицательный. В этом случае необходимо выполнение условия $2a^2 - 11a = 0$. Отсюда $a = 0$ или $a = 5{,}5$. Для этих значений один корень равен нулю, другой равен $(-1{,}5)$.

Замечание. В данной задаче не потребовалось рассматривать дискриминант.

Ответ: $[0; 5{,}5]$.

Пример 30. (МГУ, 2000). *При каких значениях a неравенство*

$$\left(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a\right)\sqrt{1-x} \le 0$$

имеет единственное решение?

Решение. Так как данное неравенство определено при $x \le 1$, то оно имеет единственное решение ($x = 1$) тогда и только тогда, когда наименьший корень квадратного трехчлена $x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a$ не меньше 1. Квадратный трехчлен имеет дискриминант $D = (3a-2)^2$ и корни $x_1 = 2a$, $x_2 = 2 - a$. Взаимное расположение корней приводит к совокупности систем:

$$\begin{cases} 2a \le 2 - a, \\ 2a \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le \dfrac{2}{3}, \\ a \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le a \le \frac{2}{3}$$

и

$$\begin{cases} 2a \ge 2 - a, \\ 2 - a \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \dfrac{2}{3}, \\ a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le a \le 1.$$

Объединяем решения систем и получаем ответ.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

задачи, содержащие показательные выражения

Пример 31. *Определить количество различных решений уравнения* $2^{2x-1}=2t+3$ *с параметром t.*

Решение. Если $2t+3\le 0$, то есть $t\le -1{,}5$, то данное уравнение не имеет корней. При $t>-1{,}5$ получаем единственный корень $x=\dfrac{1}{2}\left(\log_2(2t+3)+1\right)$.

Ответ: при $t\le -1{,}5$ нет корней; при $t>-1{,}5$ один корень.

Пример 32. *При каких значениях параметра а уравнение*

$$4^x-(5a-3)2^x+4a^2-3a=0$$

имеет единственное решение?

Решение. Пусть $2^x=t$, где $t>0$. Тогда задачу можно переформулировать: *при каких значениях а квадратное уравнение* $t^2-(5a-3)t+4a^2-3a=0$ *имеет один положительный корень*?

По теореме, обратной теореме Виета найдем корни квадратного уравнения $t_1=a,\ t_2=4a-3$.

Возможны следующие случаи.

1) $\begin{cases}t_1>0\\ t_2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ 4a-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\ 0<a<\dfrac{3}{4}.$

2) $\begin{cases}t_1<0\\ t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ 4a-3>0\end{cases}\Leftrightarrow$ Нет решений.

3) $\begin{cases}t_1=t_2\\ t_1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4a-3\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow\ a=1.$

4) Один из корней равен нулю, другой – положительный. В этом случае

$$\begin{cases}t_1t_2=0\\ t_1+t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a^2-3a=0\\ 5a-3>0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}.$$

***Ответ*:** $0<a\le\dfrac{3}{4};\ a=1$.

Пример 33. (МАДИ, 2001). *Найти все значения параметра а, при которых неравенство*

$$a\cdot 4^x-5a\cdot 2^x+2a>6-15\cdot 2^x$$

верно при всех значениях x.

Решение. Пусть $2^x=t$, где $t>0$. Получим неравенство

$$at^2-5(a-3)t+2(a-3)>0$$

степени не выше второй.

Если $a=0$, то имеем неравенство $t>\dfrac{6}{15}$, которое выполняется не при всех положительных значениях t.

При $a\ne 0$ имеем квадратное неравенство, которое должно выполняться при всех положительных значениях *t*.

Найдем дискриминант $D=25(a-3)^2-$ $-8a(a-3)=(a-3)(17a-75)$ и абсциссу вершины $t_{\text{в}}=\dfrac{5(a-3)}{2a}$ параболы $f(t)=at^2-5(a-3)t+2(a-3)$. Рассмотрим несколько случаев расположения параболы относительно оси t.

1. Парабола, ветви которой направлены вверх, расположена выше оси *t*.

$$\begin{cases}a>0,\\ D<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ (a-3)(17a-75)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3<a<\frac{75}{17}.$$

В этом случае $f(t)>0$ при всех значениях t, в частности, при $t>0$.

2. Парабола, ветви которой направлены вверх, касается оси *t* в точках промежутка $(-\infty;0]$.

$$\begin{cases}a>0,\\ D=0,\\ t_{\text{в}}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ a\in\left\{3;\dfrac{75}{17}\right\},\\ \dfrac{5(a-3)}{2a}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\ a=3.$$

3. Парабола, ветви которой направлены вверх, пересекает ось *t* в двух различных точках t_1 и t_2, причем $t_1<t_2\le 0$.

$$\begin{cases} a>0, \\ D>0, \\ t_{\text{в}}<0, \\ f(0)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<3 \\ a>\dfrac{75}{17} \end{array}\right. \\ 0<a<3, \\ \quad a\ge 3. \end{cases}$$ Нет решений.

Случай для $a<0$ рассмотрите самостоятельно.

Ответ: $\left[3;\dfrac{75}{17}\right)$.

задачи, содержащие логарифмические выражения

Пример 34. *Определить количество различных решений уравнения* $\log_3(mx)=2$, *где* $m-$ *параметр.*

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $mx=9$. При $m=0$ получаем ложное равенство $0=9$; при $m\ne 0$ единственный корень $x=\dfrac{9}{m}$.

Ответ: при $m=0$ нет корней; при $m\ne 0$ один корень.

Пример 35. *При каких значениях а уравнение*

$$2\log_3^2 x-\left|\log_3 x\right|+a=0$$

имеет четыре различных корня?

Решение. Пусть $\left|\log_3 x\right|=t$, где $t\ge 0$. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: *при каких значениях а квадратное уравнение* $2t^2-t+a=0$ *имеет два различных положительных корня*?

Возможен один случай.

$$\begin{cases} D>0 \\ t_1t_2>0 \\ t_1+t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-8a>0 \\ \dfrac{a}{2}>0 \\ 0{,}5>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{8}\right)$.

Пример 36. (МФТИ, 2004). *Найдите все значения параметра а, при которых уравнение* $\log_5\left(25^x-\log_5 a\right)=x$ *имеет единственное решение.*

Решение. Обозначим $\log_5 a=q$, $5^x=t>0$. Тогда получаем уравнение

$$t^2-t-q=0.$$

Переформулируем задачу: *найдите все значения параметра* a, *при которых среди корней уравнения* $t^2-t-q=0$ *имеется ровно один положительный корень.*

Это возможно в двух случаях.

1. Если $D=1+4q=0$, т.е. $q=-\dfrac{1}{4}$, $a=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $t=\dfrac{1}{2}$.

2. Если $D=1+4q>0$ и квадратное уравнение имеет один положительный корень. При $q>-\dfrac{1}{4}$ это уравнение имеет два различных корня, причем при $-\dfrac{1}{4}<q<0$ оба корня положительны, так как их сумма равна 1, а произведение равно $-q>0$. Если же $q\ge 0$, то только один корень положителен. Следовательно, $\log_5 a\ge 0$, т.е. $a\ge 1$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$; $[1;+\infty)$.

Пример 37. (МГУ, 2002). *Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение*

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x)-\lg(x-a)}=0$$

имеет единственное решение.

Решение. Имеем

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x)-\lg(x-a)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^3=1, \\ x^2=16, \end{array}\right. \\ 15a-x>0, \\ x-a>0, \\ 15a-x\ne x-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 4 \end{array}\right. \\ a<x<15a, \\ \quad x\ne 8a. \end{cases}$$

Из неравенства $a<x<15a$ следует, что $x>0$ и, значит, $x\ne -4$.

Рассмотрим два случая.

1. $x=1$ – корень уравнения при выполнении условий:

$$\begin{cases} a<1<15a, \\ 1\neq 8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{15}<a<1, \\ a\neq \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

2. $x=4$ – корень уравнения при выполнении условий:

$$\begin{cases} a<4<15a, \\ 4\neq 8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{15}<a<4, \\ a\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Поэтому данное уравнение имеет единственный корень

либо при $\begin{cases} \dfrac{1}{15}<a\le \dfrac{4}{15}, \\ a\neq \dfrac{1}{8}, \end{cases}$

либо при $1\le a<4$, либо при $a=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{15};\dfrac{1}{8}\right)\cup\left(\dfrac{1}{8};\dfrac{4}{15}\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup[1;4)$.

Пример 38. *Найти все значения параметра a, при которых неравенство*

$$\log_a\left(x^2+5\right)>1$$

выполняется для всех значений x?

Решение. Рассмотрим два случая.

1. $\begin{cases} a>1, \\ x^2+5>a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ x^2>a-5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ a-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<a<5.$$

2. $\begin{cases} 0<a<1, \\ x^2+5<a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1, \\ x^2<a-5. \end{cases}$ Последнее неравенство системы не выполняется при всех значениях x.

Ответ: $(1;5)$.

Пример 39. *Найти все значения параметра a, при которых система уравнений*

$$\begin{cases} \log_3(2-x-y)+2=\log_3(17-8x-10y), \\ (x-a)^2+x=y+a+6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы

$$\log_3(2-x-y)+2=\log_3(17-8x-10y)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(18-9x-9y)=\log_3(17-8x-10y)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18-9x-9y=17-8x-10y, \\ 2-x-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1, \\ x+y<2. \end{cases}$$

Подставляя $y=x-1$ во второе уравнение исходной системы, получим

$$(x-a)^2=a+5. \qquad (*)$$

Уравнение $(*)$ имеет решение, если $a+5\ge 0$, т.е. при $a\ge -5$.

При $a+5=0$, т.е. при $a=-5$, получаем $x=-5$. Тогда $y=-6$. В этом случае $x+y=-11<2$, т.е. исходная система имеет решение и при том единственное.

При $a>-5$, получаем два решения уравнения $(*)$: $x_1=a-\sqrt{a+5}$ и $x_2=a+\sqrt{a+5}$. Им соответствуют значения $y_1=a-1-\sqrt{a+5}$ и $y_2=a-1+\sqrt{a+5}$.

Исходная система будет иметь ровно два решения, если обе найденные пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будут удовлетворять $x+y<2$.

Для пары (x_1, y_1) получаем:

$$2a-1-2\sqrt{a+5}<2\Leftrightarrow 2a-3<2\sqrt{a+5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a-3<0, \\ a+5>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2a-3\ge 0, \\ (2a-3)^2<4(a+5) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<1{,}5, \\ a>-5, \end{cases} \\ \begin{cases} a\ge 1{,}5, \\ 4a^2-16a-11<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5<a<1{,}5, \\ \begin{cases} a\ge 1{,}5, \\ \dfrac{4-\sqrt{27}}{2}<a<\dfrac{4+\sqrt{27}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5<a<\frac{4+\sqrt{27}}{2}.$$

Для пары (x_2, y_2) получаем:

$$2a-1+2\sqrt{a+5}<2 \Leftrightarrow 2\sqrt{a+5}<3-2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a\ge 0, \\ a+5>0, \\ 4a^2-16a-11>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5<a<\frac{4-\sqrt{27}}{2}.$$

Следовательно, обе пары будут являться решениями исходной системы при a таких, что $-5<a<\frac{4-\sqrt{27}}{2}$.

Ответ: $-5<a<\frac{4-\sqrt{27}}{2}$.

задачи, содержащие тригонометрические выражения

Пример 40. *Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение*

$$3\cos 2x-2\sin 2x=b$$

имеет решение.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду

$$\sqrt{3^2+(-2)^2}(\cos 2x\cos\varphi-\sin 2x\sin\varphi)=b,$$

$$\sqrt{13}\cos(2x+\varphi)=b,$$

где $\varphi=\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$.

Уравнение $\cos(2x+\varphi)=\frac{b}{\sqrt{13}}$ имеет решения тогда и только тогда, когда $\left|\frac{b}{\sqrt{13}}\right|\le 1$, то есть при $-\sqrt{13}\le b\le\sqrt{13}$.

Ответ: $-\sqrt{13}\le b\le\sqrt{13}$.

Пример 41. (МГУ, 1989). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение*

$$\left(a^2-6a+9\right)\left(2+2\sin x-\cos^2 x\right)+$$
$$+\left(12a-18-2a^2\right)\cdot(1+\sin x)+a+3=0$$

не имеет решений.

Решение. Введя обозначение $\sin x=t$, исходное уравнение перепишем в виде

$$(a-3)^2t^2=a^2-7a+6. \qquad (*)$$

Теперь задача может быть переформулирована так: *найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(*)$ не имеет корней, принадлежащих промежутку $-1\le t\le 1$.*

При $a=3$ уравнение $(*)$ принимает вид $0=-6$, и, следовательно, при $a=3$ исходное уравнение не имеет решений.

При $a\ne 3$ уравнение $(*)$ может быть переписано в виде

$$t^2=\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2},$$

откуда искомые значения параметра a есть решения совокупности неравенств

$$\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2}>1 \text{ и } \frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2}<0. \quad (**)$$

Первое из этих неравенств равносильно неравенству $\frac{a+3}{(a-3)^2}<0$. Множество его решений есть $a<-3$. Так как $a^2-7a+6=(a-1)(a-6)$ и на множестве $a\ne 3$ имеем $(a-3)^2>0$, то множество решений второго неравенства совокупности $(**)$ при условии $a\ne 3$ есть $1<a<3$ и $3<a<6$.

Объединяя найденные значения a, получаем ответ.

Ответ: $a<-3;\ 1<a<6$.

Пример 42. (МИОО, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=1$ имеет ровно восемь различных решений.*

Решение. Преобразуем уравнение

$$\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-x^2=(2\pi n)^2, \\ n\ge 0,\ n\in\mathbf{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{a^2-(2\pi n)^2}, \\ n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Каждому положительному значению подкоренного выражения соответствуют ровно два значения неизвестной, нулевому – одно, а отрицательному – ни одного. Поэтому для того чтобы решений было ровно 8, необходимо и достаточно, чтобы подкоренное выражение было положительным при $n = 0, 1, 2, 3$ и отрицательным при $n = 4, 5, 6, \ldots$

Таким образом, получим систему неравенств

$$\begin{cases} a^2 - (2\pi \cdot 3)^2 > 0, \\ a^2 - (2\pi \cdot 4)^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\, a \,| > 6\pi, \\ |\, a \,| < 8\pi. \end{cases}$$

Отсюда получаем значения $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

Замечание. Для решения задачи можно к уравнению $\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, применить графическую иллюстрацию (см. рис. 2). Функция $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ задает верхнюю полуокружность с центром в начале координат и переменным радиусом $|\, a \,|$. Функция $y = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, задает семейство горизонтальных прямых. Необходимо указать границы для радиуса полуокружности, обеспечивая нужное количество точек их пересечения.

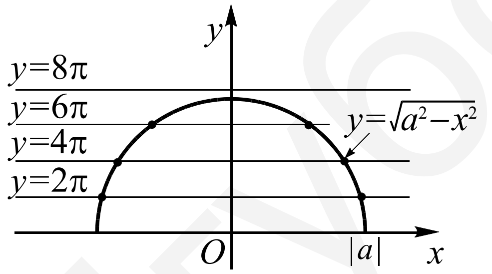


Рис. 2

Ответ: $(-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

1.4. Метод замены

Выше были рассмотрены задачи, в которых использовали метод введения новой переменной. В таких случаях требуется исследовать область изменения новой переменной, и задача с новой переменной может быть переформулирована. В данном разделе еще раз подробно остановимся на методе замены переменной (переменных).

введение одной новой переменной

Пример 43. (ЕГЭ 2010, С5). *Найти все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение (1-*й способ*). Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение

$$t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет один положительный корень? Значит, другой корень должен быть неположительным. Используя теорему Виета, имеем два случая (t_1 и t_2 – корни квадратного уравнения):

1) $t_1 t_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16a^2 + 20a - 14 < 0 \quad \Leftrightarrow$ $-\dfrac{7}{4} < a < \dfrac{1}{2}$.

2) $\begin{cases} t_1 t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 + 20a - 14 = 0, \\ 8a + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad a = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда $-\dfrac{7}{4} < a \le \dfrac{1}{2}$.

Замечание. В рассмотренных случаях нет необходимости в исследовании дискриминанта на наличие действительных корней уравнения. В первом случае свободный член $c = t_1 t_2$ отрицательный, а значит, дискриминант положительный. Во втором случае свободный член равен нулю, поэтому уравнение имеет корни.

Решение (2-*й способ*). Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0.$$

Так как дискриминант D полученного уравнения положительный $D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$, то уравнение имеет два различных корня $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$, причем при всех значениях a верно неравенство $4a - 2 < 4a + 7$.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если одно из чисел $4a-2$ и $4a+7$ будет положительным, а другое неположительным. Отсюда следует

$$\begin{cases}4a+7>0,\\ 4a-2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad -\frac{7}{4}<a\le\frac{1}{2}.$$

Приведем функционально-графическое решение уравнения.

Решение (*3-й способ*). Пусть $6^x=t$, тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2-(8a+5)\cdot t+16a^2+20a-14=0.$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения

$$D=(8a+5)^2-4(16a^2+20a-14)=81$$

и найдем его корни $t=4a-2$ или $t=4a+7$. Возвратимся к переменной x: $6^x=4a-2$ или $6^x=4a+7$. Отсюда получаем $a=\dfrac{6^x+2}{4}$ и $a=\dfrac{6^x-7}{4}$ или $a=\dfrac{6^x}{4}+\dfrac{1}{2}$ и $a=\dfrac{6^x}{4}-\dfrac{7}{4}$. Построим графики полученных функций (см. рис. 3).

Рассмотрим прямые, параллельные оси

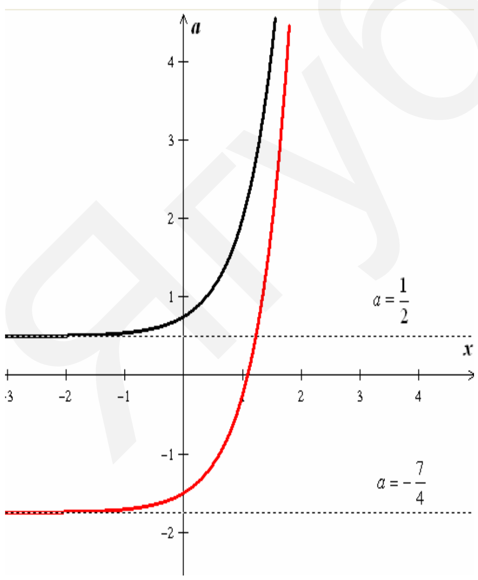


Рис. 3

x и пересекающие построенные графики. Единственная точка пересечения получается при условии $-\dfrac{7}{4}<a\le\dfrac{1}{2}$.

Ответ. $-\dfrac{7}{4}<a\le\dfrac{1}{2}$.

введение двух новых переменных

Пример 44. *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases}3xy+3ax-ay-a^2-3=0,\\ 9x^2+9y^2-6ax+18ay+7a^2-2a-17=0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Группируя в первом уравнении системы члены, получим

$$(3xy-ay)+(3ax-a^2)=3 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y+a)(3x-a)=3.$$

Группируя члены и выделяя полные квадраты во втором уравнении, имеем

$$(3x-a)^2+9(y+a)^2=3a^2+2a+17.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases}(y+a)(3x-a)=3,\\ (3x-a)^2+9(y+a)^2=3a^2+2a+17.\end{cases}$$

Введем новые переменные $u=3x-a$ и $v=y+a$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases}uv=3,\\ u^2+9v^2=3a^2+2a+17.\end{cases}$$

Умножая первое уравнение этой системы на (-6) и складывая со вторым уравнением, получим уравнение

$$(u-3v)^2=3a^2+2a-1. \qquad (1)$$

Если $3a^2+2a-1<0$, то уравнение (1), а значит и исходная система не имеют решения.

Если $3a^2+2a-1=0$, что выполняется при $a=-1$ и $a=\dfrac{1}{3}$, то уравнение (1), а значит и исходная система имеют решения. Из уравнения (1) при этих значениях параметра получаем $u=3v$. Учитывая первое уравнение системы, имеем $3v^2=3$, т.е. $v_1=1$ и $v_2=-1$. Отсюда $u_1=3$ и $u_2=-3$. Следовательно, исходная система будет иметь два различных решения (проверьте самостоятельно).

Если $3a^2+2a-1>0$, то уравнение (1) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} u-3v=\sqrt{3a^2+2a-1}, \\ u-3v=-\sqrt{3a^2+2a-1}. \end{array}\right.$$

Учитывая первое уравнение системы, имеем:

если $u=3v+\sqrt{3a^2+2a-1}$, то $3v^2+v\sqrt{3a^2+2a-1}-3=0$ $(*)$;

если $u=3v-\sqrt{3a^2+2a-1}$, то $3v^2-v\sqrt{3a^2+2a-1}-3=0$ $(**)$.

Каждое из уравнений $(*)$ и $(**)$ будет иметь два решения. Следовательно, исходная система будет иметь более двух решений.

Ответ. -1 и $\frac{1}{3}$.

тригонометрическая подстановка

Пример 45. *Исследовать количество различных решений уравнения*

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x-\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x=1$$

в зависимости от значений параметра a.

Решение. Так как основания для показательных выражений положительны, то решим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1+a^2}{2a}>0, \\ \dfrac{1-a^2}{2a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ -1<a<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<1.$$

Пусть $a=\operatorname{tg}b$, где $0<b<\frac{\pi}{4}$, тогда имеем

$$\frac{1+a^2}{2a}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 b}{2\operatorname{tg}b}=\frac{1}{\sin 2b};$$

$$\frac{1-a^2}{2a}=\frac{1-\operatorname{tg}^2 b}{2\operatorname{tg}b}=\frac{\cos 2b}{\sin 2b}.$$

Исходное уравнение примет следующий вид

$$\left(\frac{1}{\sin 2b}\right)^x-\left(\frac{\cos 2b}{\sin 2b}\right)^x=1 \text{ или}$$

$$\cos^x 2b+\sin^x 2b=1. \quad (*)$$

Исследуем полученное уравнение, учитывая ограничения $0<\cos 2b<1$, $0<\sin 2b<1$ при $0<b<\frac{\pi}{4}$.

Если $x=2$, то уравнение $(*)$ выполняется.

Пусть $x>2$, тогда в силу монотонности показательной функции получаем $(\sin 2b)^x<(\sin 2b)^2$ и $(\cos 2b)^x<(\cos 2b)^2$ Следовательно, $\sin^x 2b+\cos^x 2b<1$.

Аналогично при $x<2$ получаем неравенство $\sin^x 2b+\cos^x 2b>1$. Отсюда получаем ответ.

Ответ: если $a\in(0;1)$, то один корень; если $a\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$, то нет корней.

1.5. Выявление необходимых условий

Задачи, в которых поиск значений параметра или переменной затруднителен, выделяют необходимые условия для получения множества этих значений-претендентов, затем из них отбирают значения в ответ, используя достаточные условия.

Выбор подходящего значения параметра или переменной

В некоторых задачах условие выполняется при всех значениях переменной a или x из некоторого множества. Подставляя в условие удобное значение одной переменной, находят множество необходимых значений другой переменной.

Пример 46. *Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению*

$$\log_{x+2|a|+1}(|a|x+3)=2\log_{6-x}(5-\sqrt{7+x})$$

при любом действительном значении a.

Решение. Если данное уравнение имеет решение при любом значении параметра a, то оно имеет решение и при $a=1$. Подставим значение $a=1$ в исходное уравнение, получим

$$\log_{x+3}(x+3)=2\log_{6-x}(5-\sqrt{7+x}). \ (*)$$

Найдем решения полученного уравнения, переходя к уравнениям-следствиям.

$$(5-\sqrt{7+x})^2=6-x;$$

ягубов.рф

$$5\sqrt{7+x}=x+13;$$
$$x^2+x-6=0.$$

Отсюда корни $x=-3$ или $x=2$. При $x=-3$ уравнение (*) не определено. Значение $x=2$ является корнем этого уравнения: $\log_5 5=2\log_4 2$ (верно). Таким образом, необходимо, чтобы значение $x=2$ являлось корнем исходного уравнения для всех значений *a*.

Проверим достаточность. Подставим $x=2$ в данное уравнение, получим равенство $\log_{2|a|+3}(2|a|+3)=1$, которое выполняется при всех $a\in\mathbf{R}$, так как $2|a|+3>0$ при всех значениях *a*.

***Ответ*:** 2.

Пример 47. *При каких значениях параметра а неравенство*

$$\log_{a^2-2}\left((a^2-1)x^2+2x+2\right)>1$$

выполняется для любого значения x?

Решение. Так как данное неравенство должно выполняться при любых значениях x, то оно должно иметь место и при $x=0$. Подставляя в исходное неравенство $x=0$, приходим к неравенству $\log_{a^2-2}2>1$, которое равносильно системе

$$\begin{cases}a^2-2>1,\\2>a^2-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2>3,\\a^2<4\end{cases}\Leftrightarrow 3<a^2<4.$$

Найдем достаточные условия. Для условия $3<a^2<4$ имеем $1<a^2-2<2$. Тогда исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}(a^2-1)x^2+2x+2>0,\\(a^2-1)x^2+2x+2>a^2-2,\\3<a^2<4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a^2-1)x^2+2x+2>a^2-2,\\3<a^2<4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a^2-1)x^2+2x+4-a^2>0,\\3<a^2<4.\end{cases}$$

Чтобы неравенство последней системы выполнялось при всех значениях x, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена был отрицательным

$$D_1=1-(a^2-1)(4-a^2)<0.$$

Для удобства обозначим $a^2=t$, тогда получаем неравенство

$$1-(t-1)(4-t)<0 \text{ или } t^2-5t+5<0,$$

имеющее решения $\dfrac{5-\sqrt5}{2}<t<\dfrac{5+\sqrt5}{2}$.

Отсюда находим достаточные условия

$$\begin{cases}\dfrac{5-\sqrt5}{2}<a^2<\dfrac{5+\sqrt5}{2},\\3<a^2<4.\end{cases}\Leftrightarrow 3<a^2<\dfrac{5+\sqrt5}{2}.$$

***Ответ*:** $\sqrt3<|a|<\sqrt{\dfrac{5+\sqrt5}{2}}$.

Инвариантность

* Инварианты (от лат. invarians, родительный падеж invariantis — неизменяющийся), числа, алгебраические выражения и т. п., связанные с каким-либо математическим объектом и остающиеся неизменными при определенных преобразованиях этого объекта или системы отсчёта, в которой описывается объект.

Ниже будут рассмотрены задачи, имеющие характерную особенность: их условия не изменяются либо при замене знака одной или нескольких переменных на противоположный (*«симметрия относительно знака»*), либо при перестановке нескольких переменных (*«симметрия относительно перестановки переменных»*), либо при замене переменной на некоторое выражение с переменной.

При решении задач указанного вида используется следующий алгоритм:

во-первых, выполняется проверка на инвариантность;

во-вторых, из проверки выполнения *необходимых условий* находятся допустимые значения параметра (при «симметрии относительно знака» переменной подставляется ее нулевое значение; при «симметрии относительно перестановки» переменных все переменные обозначают одной буквой);

в-третьих, проверяется *достаточность условий*, т.е. для найденных допустимых значений параметра выполняется проверка того, что при полученных значениях параметра уравнение (система и т.д.) действительно имеет требуемое число решений.

Замечание. Последний этап заключается либо в доказательстве существования требуемого числа решений, либо в его опровержении.

Приведенный алгоритм является общим и для решения уравнений и неравенств, а также систем уравнений и неравенств с одним или несколькими параметрами.

преобразование $x \to (-x)$ ***или*** $y \to (-y)$

Выражения, инвариантные относительно преобразования $x \to (-x)$ или $y \to (-y)$, называют симметричными относительно знака переменной x, или переменной y. В этом случае графики выражений симметричны относительно оси y или оси x соответственно.

При решении уравнений (неравенств, систем уравнений или неравенств) используют следующие утверждения.

***Утверждение* 1**. *Если выражение* $f(x)$ *– инвариантно относительно преобразования* $x \to (-x)$ *и уравнение* $f(x)=0$ *имеет корень* x_0, *то число* $-x_0$ *также корень этого уравнения.*

***Утверждение* 2**. *Если выражение* $F(x;y)$ *инвариантно относительно преобразования* $x \to (-x)$ *и уравнение* $F(x;y)=0$ *имеет решение* $(x_0;y_0)$, *то и пара чисел* $(-x_0;y_0)$ *также решение этого уравнения.*

***Утверждение* 3**. *Если выражение* $F(x;y)$ *инвариантно относительно преобразования* $y \to (-y)$ *и уравнение* $F(x;y)=0$ *имеет решение* $(x_0;y_0)$, то и пара чисел $(x_0;-y_0)$ *также решение этого уравнения.*

Для четных функций $y=f(x)$ выражение $f(x)$ симметрично относительно знака переменной x. Как известно, график четной функции симметричен относительно прямой $x=0$. Если для выражения $f(x)$ выполняется равенство $f(x-a)=f(a-x)$, т.е. график функции $y=f(x)$ симметричен относительно прямой $x=a$, то удобнее сделать замену $x-a=t$, чтобы рассматривать четную функцию $f(t)$.

При исследовании на «симметрию относительно знака» в выражении $F(x,y)$ для пары (x,y) проверяются подстановкой в него пары $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$. Если при подстановке пар (x,y) и $(-x,y)$ выражение не меняется, то говорят, что наблюдается «симметрия относительно знака» переменной x; для пар (x,y) и $(x,-y)$ – «симметрия относительно знака» переменной y; для пар (x,y) и $(-x,-y)$ – «симметрия относительно знаков» обеих переменных.

Пример 48. (ЕГЭ 2010, С5). *Найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение*

$$x^2+(a+4)^2=|x+a+4|+|x-a-4|$$

имеет единственный корень.

Решение. При каждом конкретном значении параметра a функции $f(x)=x^2+(a+4)^2$ и $g(x)=|x+a+4|+$ $+|x-a-4|$, входящие в левую и правую части уравнения, являются четными, поскольку выполняются условия:

1. они определены на всей числовой прямой (области определения симметричны относительно начала координат);

2. $f(-x)=(-x)^2+(a+4)^2=$

$$=x^2+(a+4)^2=f(x),$$

$$g(-x)=|-x+a+4|+|-x-a-4|=$$
$$=|x-a-4|+|x+a+4|=g(x).$$

Следовательно, если число x_0 – корень уравнения $f(x)=g(x)$, то число $-x_0$ также будет являться корнем этого уравнения. Условие единственности будет выполняться, если $x=0$ – корень уравнения $f(x)=g(x)$ и других корней нет.

Подставив в исходное уравнение значение $x=0$, получим уравнение относительно параметра a:

$$(a+4)^2=|a+4|+|-a-4| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+4)^2-2|a+4|=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|a+4|=0,\\ |a+4|-2=0.\end{array}\right.$$

Отсюда получаем три значения параметра $a=-6$, $a=-4$ и $a=-2$.

Пусть $a=-6$. Подставив $a=-6$ в исходное уравнение, получим $x^2+4=|x-2|+|x+2|$. Правая часть этого уравнения после раскрытия на промежутках модулей имеет вид

$$|x-2|+|x+2|=\begin{cases}-2x, \text{ если } x<-2,\\ 4, \text{ если } -2\le x<2,\\ 2x, \text{ если } x\ge 2.\end{cases}$$

Уравнения $x^2+4=-2x$ и $x^2+4=2x$ не имеют корней, а уравнение $x^2+4=4$ имеет единственный корень $x=0$, удовлетворяющий условию $-2\le x<2$.

Пусть $a=-2$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, опять получим уравнение

$$x^2+4=|x+2|+|x-2|,$$

имеющее единственный корень $x=0$.

Пусть $a=-4$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, получим

$$x^2=2|x| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}|x|=0,\\ |x|=2\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0,\ x=-2,\ x=2.$$

Значение $a=-4$ не соответствует условию задачи.

Ответ: $-6,\ -2$.

Замечание. Другое решение данного примера см. в разделе «Функционально-графические методы».

Пример 49. (МГУ, 1999). *Найти все значения параметра а, при которых уравнение*

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$$

имеет нечетное число решений.

Решение. Данное уравнение инвариантно (неизменно) при замене x на $-x$ (докажите). Поэтому, если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечетным только в случае, когда среди корней находится число $x_0=0$.

Подставляя в исходное уравнение $x=0$, получаем уравнение относительно a: $|2a|=a^2+1$, $(|a|-1)^2=0$, $|a|=1$.

1. Если $a=1$, то исходное уравнение примет вид

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2\right|=2.$$

Оно распадается на два уравнения:

$$\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=0 \quad \text{или} \quad \frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=-4.$$

Первое уравнение имеет один корень $x=0$. Второе уравнение разрешим относительно 2^x ($x=-4$ не является корнем этого уравнения):

$$2^x=\frac{x-4}{x+4} \quad \text{или} \quad 2^x=1-\frac{8}{x+4}.$$

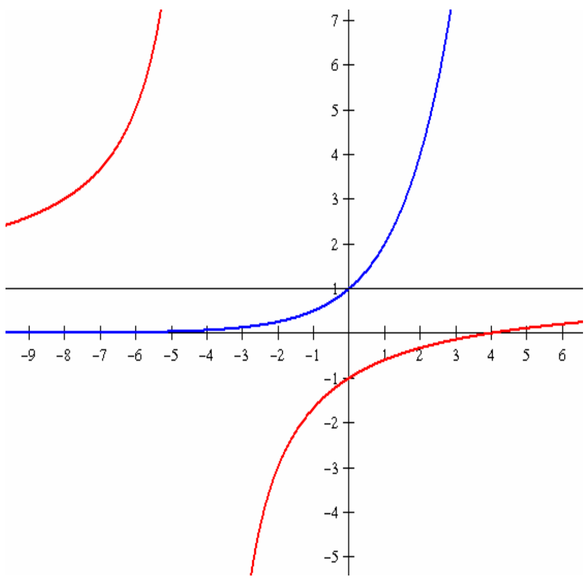


Рис. 4

Показательная функция $y=2^x$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и ее график проходит через точку $(0;1)$ (см. рис. 4). Дробно-линейная функция возрастает на промежутках $(-\infty;-4)$ и $(-4;+\infty)$. Ее

ЯГУБОВ.РФ

график – гипербола, проходящая через точку $(0;-1)$, с вертикальной асимптотой $x=-4$ и горизонтальной асимптотой $y=1$. Второе уравнение не имеет корней. В этом случае исходное уравнение имеет ровно 1 корень.

2. Случай $a=-1$ рассмотрите самостоятельно.

Ответ: $a=1$ или $a=-1$.

Пример 50. (МГУ, 1995). *Найти все значения параметра a, при которых неравенство*

$$\cos 2x + a \le 2\sqrt{x^2+16} - \frac{x^2+16}{a+\cos 2x}$$

имеет единственное решение?

Решение. Приведем данное неравенство к следующему виду

$$\frac{(a+\cos 2x-\sqrt{x^2+16})^2}{a+\cos 2x} \le 0.$$

Так как функция

$$f(x)=\frac{(a+\cos 2x-\sqrt{x^2+16})^2}{a+\cos 2x}$$

является четной, то необходимым условием единственности решения неравенства $f(x)\le 0$ является наличие решения $x=0$. При $x=0$ имеем

$$f(0)=\frac{(a-3)^2}{a+1}\le 0.$$

Последнее неравенство выполняется при $a=3$ или $a<-1$.

Проверим достаточность.

При $a=3$ знаменатель $3+\cos 2x>0$, поэтому получаем

$$(3+\cos 2x-\sqrt{x^2+16})^2\le 0$$

или

$$3+\cos 2x=\sqrt{x^2+16}.$$

Так как $3+\cos 2x\le 4$ и $\sqrt{x^2+16}\ge 4$, то

$$\begin{cases} 3+\cos 2x=4, \\ \sqrt{x^2+16}=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

При $a<-1$ имеем неравенство

$$\frac{(a+\cos 2x-\sqrt{x^2+16})^2}{a+\cos 2x}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+\cos 2x-\sqrt{x^2+16})^2\ge 0,$$

которое выполняется при всех $x\in\mathbf{R}$.

Ответ: 3.

Пример 51. (ЕГЭ-2011, демонстрационный вариант, С5). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы уравнений, то пара $(-x_0, y_0)$ – также ее решение. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось равенство $x_0=-x_0$, т.е. $x_0=0$. Подставив это значение неизвестной x в систему, получим:

$$\begin{cases} a=y+2, \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=0, \\ y=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Допустимыми значениями параметра являются лишь значения $a=0$ и $a=4$.

Пусть $a=0$. Тогда исходная система уравнений примет вид: $\begin{cases} y=|x|-2, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

Подставив y из первого уравнения системы во второе, получим

$$x^2+(|x|-2)^2=4 \text{ или } x^2=2|x|.$$

Это уравнение имеет три корня $x=0$, $x=-2$ и $x=2$. Следовательно, при $a=0$ данная в условии система уравнений имеет три пары решений $(0;-2)$, $(-2;0)$ и $(2;0)$.

Пусть $a=4$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 4(x^4+1)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y=4x^4+|x|+2, \\ y^2=4-x^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы следует $y \ge 2$, а из второго $|y| \le 2$. Следовательно, если система имеет решение, то это пары вида $(x, 2)$. Подставляя $y = 2$ в систему, получаем

$$\begin{cases} 4x^4 + |x| = 0, \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Следовательно, при $a = 4$ решение $(0; 2)$ исходной системы уравнений единственное.

Ответ. $a = 4$.

Пример 52. *Найдите все значения параметра* a, *при которых система уравнений*

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3} \cdot y + \\ \qquad + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3} \cdot x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Система имеет смысл при значениях параметра $a \ge -3$. Поскольку переменная x входит в каждое уравнение системы в четной степени, то заметим, что если пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы уравнений, то пара $(-x_0, y_0)$ – также решение. Следовательно, для того, чтобы система имела нечётное число решений необходимо, чтобы $-x_0 = x_0$, т.е. $x_0 = 0$. Подставив $x = 0$ в систему, получим:

$$\begin{cases} -(a-1)\sqrt{a+3} \cdot y + a^4 + 2a^3 - \\ \qquad - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0.$$

Решив полученное уравнение относительно a, найдем допустимые значениями параметра. Рассмотрев целые делители свободного члена многочлена $a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8$, заметим, что $a = 1$ и $a = 2$ есть его корни. Используя схему Горнера, получим

	1	2	-9	-2	8
1	1	3	-6	-8	0
2	1	5	4	0	

Отсюда следует, что

$$a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 =$$
$$= (a-1)(a-2)(a^2 + 5a + 4) =$$
$$= (a-1)^2(a-2)(a+4),$$

т.е. допустимыми являются значения $a = 1$, $a = 2$. Значение $a = -4$ не удовлетворяет условию $a \ge -3$.

Проверим, какие из полученных значений параметра являются достаточными.

Пусть $a = 1$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x^4 = 0, \\ y = 2x^2. \end{cases}$$

Полученная система будет иметь единственное решение $(0; 0)$.

Пусть $a = 2$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x^4 - \sqrt{5} \cdot y = 0, \\ y = \sqrt{5}x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 = 0, \\ y = \sqrt{5}x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x^2 - 5) = 0, \\ y = \sqrt{5}x^2. \end{cases}$$

Полученная система имеет три решения $(0; 0)$, $(\sqrt{5}; 5\sqrt{5})$ и $(-\sqrt{5}; 5\sqrt{5})$.

***Ответ*:** $a = 2$.

Пример 53. (Пробный вариант № 52 от ФЦТ, ЕГЭ 2011, декабрь). *Найти все значения параметра* a, *при каждом из которых система*

$$\begin{cases} x^2 - 8x + |y| + 12 = 0, \\ x^2 + (y-a)(y+a) = 8(x-2) \end{cases}$$

имеет ровно 8 *решений.*

Решение. 1*-й способ.* Данная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} (x-4)^2 = 4 - |y|, \\ (x-4)^2 = -y^2 + a^2. \end{cases}$$

Заметим, что данная система уравнений обладает «симметрией относительно знака» переменной y. Из равенства левых частей уравнений системы, при условии, что их правые части неотрицательны, следует

$$\begin{cases} -y^2+a^2=4-|y|, \\ -4\le y\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-|y|+\dfrac{1}{4}=a^2-\dfrac{15}{4}, \\ -4\le y\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(|y|-\dfrac{1}{2}\right)^2=a^2-\dfrac{15}{4}, \\ -4\le y\le 4. \end{cases}$$

Уравнение

$$\left(|y|-\frac{1}{2}\right)^2=a^2-\frac{15}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} |y|=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{a^2-\dfrac{15}{4}}, \\ a^2-\dfrac{15}{4}\ge 0 \end{cases}$$

будет иметь четыре различных решения относительно y при выполнении условий

$$\begin{cases} a^2-\dfrac{15}{4}>0, \\ \dfrac{1}{2}-\sqrt{a^2-\dfrac{15}{4}}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2>\dfrac{15}{4}, \\ \sqrt{a^2-\dfrac{15}{4}}<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<a<-\dfrac{\sqrt{15}}{2}, \\ \dfrac{\sqrt{15}}{2}<a<2 \end{array}\right. .$$

Отметим, что значения y, получаемые в процессе решения при найденных значениях a, будут удовлетворять условиям $\begin{cases} -4\le y\le 4, \\ y\ne 0 \end{cases}$ поскольку при этих a из неравенства $\sqrt{a^2-\dfrac{15}{4}}<\dfrac{1}{2}$ следует $|y|=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{a^2-\dfrac{15}{4}}<1$.

Для каждого полученного решения y_0 такого, что $4-|y_0|>0$, уравнение $(x-4)^2=4-|y_0|$ будет иметь два различных решения относительно x, а, следовательно, исходная система будет иметь 8 решений.

Решение. *2-й способ.* Покажем, что восемь различных решений – это максимальное количество решений данной системы. Действительно после исключения переменной x из системы

$$\begin{cases} (x-4)^2=4-|y|, \\ (x-4)^2=-y^2+a^2 \end{cases}$$

получим уравнение

$$f(t)=t^2-t+4-a^2=0, \qquad (*)$$

где $|y|=t$. Квадратное уравнение (*) имеет максимум два различных корня при условии $D=1-4(4-a^2)>0$. Если корни положительны (при условии $t_1t_2=4-a^2>0$ и $t_1+t_2=1>0$), то из уравнения $|y|=t$ получим четыре различных числа для переменной y. Каждому из четырех значений y будет соответствовать максимум два различных значения x из уравнения $(x-4)^2=4-|y|$ при условии $4-|y|>0$ или $t<4$, т.е.

$$\begin{cases} f(4)>0 \\ t_в<4 \end{cases}$$

Запишем все условия вместе

$$\begin{cases} D>0, \\ t_1t_2>0, \\ f(4)>0, \\ t_в<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4(4-a^2)>0, \\ 4-a^2>0, \\ 16-a^2>0, \\ \dfrac{1}{2}<4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2>\dfrac{15}{4}, \\ a^2<4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{15}{4}<a^2<4.$$

Отсюда получаем ответ.

Ответ. $\left(-2;-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2};2\right)$.

преобразование $(x;y)\to(y;x)$

При исследовании выражения $F(x;y)$ на «симметрию относительно перестановки переменных» для пары (x,y) проверяется пара (y,x) подстановкой в исходное выражение.

В некоторых выражениях наблюдается «симметрия» относительно и перестановки переменных и изменения у них

ягубов.рф

знака. В этих случаях для пары (x, y) проверяются подстановкой в исходное выражение пары $(-y, x)$, $(y, -x)$, $(-y, -x)$.

При решении уравнений (неравенств, систем уравнений или неравенств) используют следующее утверждение.

***Утверждение* 4**. *Если выражение $F(x;y)$ – инвариантно относительно преобразования $x \to y$ и $y \to x$ и уравнение $F(x;y)=0$ имеет решение $(x_0;y_0)$, то пара чисел $(y_0;x_0)$ также решение этого уравнения.*

Пример 54. *Найти все значения параметра a, при которых система неравенств*

$$\begin{cases} y \le ax - x^2 - 3, \\ x \le ay - y^2 - 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если при некотором значении параметра a пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы неравенств, то пара (y_0, x_0) – также решения, поскольку при подстановке второй пары уравнения системы остаются теми же, но меняются местами. Следовательно, необходимым условием единственности решения является совпадение этих пар. Если $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$, то $x_0 = y_0$.

Подставляя $x_0 = y_0$ в систему, получим, что каждое неравенство примет вид

$$x_0 \le ax_0 - x_0^2 - 3 \Leftrightarrow x_0^2 + (1-a)x_0 + 3 \le 0,$$

которое будет иметь единственное решение в случае, если дискриминант D соответствующего квадратного трехчлена равен 0, т.е. $D = (1-a)^2 - 12 = 0$. Решая уравнение $(a-1)^2 = 12$, получаем два значения параметра $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a = 1 + 2\sqrt{3}$.

Подставляя $a = 1 - 2\sqrt{3}$ в систему неравенств, получаем

$$\begin{cases} y \le (1-2\sqrt{3})x - x^2 - 3, \\ x \le (1-2\sqrt{3})y - y^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (1-2\sqrt{3})x + y + 3 \le 0, \\ y^2 - (1-2\sqrt{3})y + x + 3 \le 0. \end{cases}$$

Сложив левые части и правые части неравенств системы, получим

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 + 2\sqrt{3}y + 6 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 2\sqrt{3}x + 3) + (y^2 + 2\sqrt{3}y + 3) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{3})^2 \le 0.$$

Отсюда следует, что система имеет единственное решение $x = -\sqrt{3}$ и $y = -\sqrt{3}$.

Аналогично действуя, получим, что при $a = 1 + 2\sqrt{3}$ система имеет единственное решение $x = \sqrt{3}$ и $y = \sqrt{3}$.

Ответ. $1 \pm 2\sqrt{3}$.

Пример 55. (МФТИ, 2009). *Найти при каких значениях параметра a имеет единственное решение система уравнений*

$$\begin{cases} x^2 - y + a = 0, \\ x + y^2 + a = 0. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что если при некотором значении параметра a пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы уравнений, то пара $(-y_0, -x_0)$ – также решения. Следовательно, необходимым условием единственности решения является совпадение этих пар. Если $(x_0, y_0) = (-y_0, -x_0)$, то $x_0 = -y_0$ или $y_0 = -x_0$.

Подставляя $y_0 = -x_0$ в систему, получим, что каждое уравнение системы примет вид

$$x_0^2 + x_0 + a = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 0{,}5)^2 = 0{,}25 - a.$$

При $a < 0{,}25$ уравнение имеет два действительных корня; при $a > 0{,}25$ не имеет действительных решений, а при $a = 0{,}25$ – единственное решение $x_0 = -0{,}5$ и тогда $y_0 = 0{,}5$.

Проверим, что условие $a=0{,}25$ является достаточным для данной задачи. Подставляя $a=0{,}25$ в систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} x^2-y+0{,}25=0, \\ x+y^2+0{,}25=0. \end{cases}$$

Сложив левые части и правые части уравнений, получим

$$x^2+x+y^2-y+0{,}5=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2+x+0{,}25)+(y^2-y+0{,}25)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+0{,}5)^2+(y-0{,}5)^2=0\,.$$

Отсюда следует, что система имеет единственное решение $x=-0{,}5$ и $y=0{,}5$.

***Ответ*:** 0,25.

Пример 56. *Определить все значения параметра* a, *при которых система уравнений*

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=5-2a, \\ (x+y)^2=12. \end{cases}$$

имеет ровно два решения, и при найденных значениях параметра решить систему уравнений.

Решение. Пусть пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы уравнений. Так как многочлены x^2-xy+y^2 и $(x+y)^2$ являются симметрическими относительно переменных x и y, то пары $(-x_0,-y_0)$, (y_0,x_0) и $(-y_0,-x_0)$ – также решения. Заметим, что пары (x_0, y_0) и $(-x_0,-y_0)$ различны. Иначе получаем, что $x_0=-x_0=0$, $y_0=-y_0=0$, но пара $(0;0)$ не удовлетворяет второму уравнению системы. Аналогично, различны пары (y_0,x_0) и $(-y_0,-x_0)$.

Следовательно, для того, чтобы система имела два решения необходимо, чтобы пара (x_0, y_0) совпадала с парой (y_0,x_0) или парой $(-y_0,-x_0)$. Второй случай невозможен, иначе из второго уравнения системы получаем $(x_0-x_0)^2=12$.

Если совпали пары (x_0, y_0) и (y_0,x_0), то пары $(-x_0,-y_0)$ и $(-y_0,-x_0)$ также совпадут. Из совпадения пар (x_0, y_0) и (y_0,x_0), получаем $x_0=y_0$. Подставим в систему: $\begin{cases} x_0^2=5-2a, \\ 4x_0^2=12. \end{cases}$ Отсюда, $x_0^2=3$ и $a=1$. Проверим, является ли значение $a=1$ достаточным.

Пусть $a=1$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ (x+y)^2=12; \end{cases} \begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ x^2+2xy+y^2=12; \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=3, \\ x^2+y^2=6. \end{cases}$$

Заметим, что переменные x и y одного знака. Тогда возведя первое уравнение в квадрат, получим

$$\begin{cases} x^2y^2=9, \\ x^2+y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4-6y^2+9=0, \\ x^2=6-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y^2-3)^2=0, \\ x^2=6-y^2. \end{cases}$$

Эта система имеет две пары решений $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ и $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

***Ответ*:** два решения $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ или $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$ при $a=1$.

Пример 57. (МГУ, 1986). *Найти все значения* a, *при каждом из которых система*

$$\begin{cases} 1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|} \\ 49y^2+x^2+4a=2x-1 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \sqrt{7|y|}+\sqrt{|x-1|}=1, \\ \left(\sqrt{7|y|}\right)^4+\left(\sqrt{|x-1|}\right)^4=-4a. \end{cases} \qquad (2)$$

Обозначим

$$\sqrt{|x-1|}=u,\ \sqrt{7|y|}=v\,, \qquad (3)$$

$$\text{где } u\ge 0 \text{ и } v\ge 0. \qquad (4)$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^4+v^4=-4a. \end{cases} \qquad (5)$$

Если (u_0, v_0) – какое-либо решение системы (5), удовлетворяющее неравенствам $u_0 \neq 0, \nu_0 \neq 0$, то из формул (3) следует, что исходная система будет иметь четыре различные решения

$$\left(1+u_0^2; \frac{v_0^2}{7}\right), \left(1+u_0^2; -\frac{v_0^2}{7}\right), \\ \left(1-u_0^2; \frac{v_0^2}{7}\right), \left(1-u_0^2; -\frac{v_0^2}{7}\right). \qquad (6)$$

Так как (ν_0, u_0) – решение системы (5), удовлетворяющее неравенствам $u_0 \neq 0$, $\nu_0 \neq 0$, то из формул (3) следует, что исходная система будет также иметь четыре различные решения:

$$\left(1+v_0^2; \frac{u_0^2}{7}\right), \left(1+v_0^2; -\frac{u_0^2}{7}\right), \\ \left(1-v_0^2; \frac{u_0^2}{7}\right), \left(1-v_0^2; -\frac{u_0^2}{7}\right). \qquad (7)$$

Чтобы исходная система имела четыре различные решения, необходимо для восьми пар чисел (6) и (7) поставить одно из условий: $u_0 = 0$, или $v_0 = 0$, или $u_0 = v_0$.

Пусть $u = 0$, тогда из системы (5) имеем $\nu = 1$ и $a = -\frac{1}{4}$.

Пусть $\nu = 0$, тогда из системы (5) имеем $u = 1$ и $a = -\frac{1}{4}$.

Пусть $u = \nu$, тогда из системы (5) имеем $u = \nu = \frac{1}{2}$ и $a = -\frac{1}{32}$.

Рассмотрим систему (5) при $a = -\frac{1}{32}$

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^4+v^4=\frac{1}{8}. \end{cases} \qquad (8)$$

Обозначив $t = uv$, будем иметь

$$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=1-2t,$$
$$u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2= \\ =(1-2t)^2-2t^2=1-4t+2t^2.$$

Следовательно, t удовлетворяет квадратному уравнению $1-4t+2t^2=\frac{1}{8}$, т.е. уравнению $2t^2-4t+\frac{7}{8}=0$. Это уравнение имеет два корня $t_1=\frac{1}{4}$ и $t_2=\frac{7}{4}$. Нас интересуют неотрицательные решения u, v системы (8). Из первого уравнения (8) следует, что должны выполняться неравенства $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$, и, значит, $t \le 1$. Следовательно, $t = \frac{1}{4}$ и все неотрицательные решения системы (8) содержатся среди решений системы

$$\begin{cases} u+v=1, \\ uv=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что она имеет единственное решение $u=\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{2}$. Эта пара удовлетворяет системе (8). Для нее среди решений (6), (7) исходной системы имеется ровно четыре различных $\left(\frac{5}{4}; \pm\frac{1}{28}\right), \left(\frac{3}{4}; \pm\frac{1}{28}\right)$. Решая также систему (5) при $a=-\frac{1}{4}$, убеждаемся, что она имеет только два решения $(0;1)$ и $(1;0)$ в неотрицательных числах. Для них среди решений (6), (7) исходной системы имеется ровно четыре различных $(0;0)$, $(2;0)$, $\left(1; \pm\frac{1}{7}\right)$.

Ответ: $a=-\frac{1}{32}$; $a=-\frac{1}{4}$.

ЯГубов.РФ

преобразование $x \to g(x)$

Если выражение $f(x)$ не меняется при замене x на некоторое выражение $g(x)$, то при решении уравнений используют следующее утверждение.

Утверждение 5. *Если выражение $f(x)$ – инвариантно относительно преобразования $x \to g(x)$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет корень x_0, то число $g(x_0)$ также корень этого уравнения.*

Пример 58. (МГУ, 1998). *Найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cdot \cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Если ненулевое число x_0 является решением данного уравнения, то число $\frac{1}{x_0}$ также решение этого уравнения (покажите).

Равенство $x_0 = \frac{1}{x_0}$ является необходимым условием единственности решения данного уравнения. Из уравнения $x_0 = \frac{1}{x_0}$ получаем $x_0 = -1$ или $x_0 = 1$.

Если $x = -1$, то из данного уравнения получим $a^2 + a - \frac{3}{4} = 0$, то есть $a = -\frac{3}{2}$ или $a = \frac{1}{2}$.

При $x = 1$ из данного уравнения имеем уравнение $a^2 + a + \frac{3}{4} = 0$, не имеющее корней.

Проверим достаточность полученных значений a.

Пусть $a = \frac{1}{2}$, тогда исходное уравнение примет следующий вид

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right).$$

Последнее уравнение имеет бесконечное множество решений (рассмотрите графики).

Пусть $a = -\frac{3}{2}$, тогда имеем

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + 1 = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right).$$

Из неравенства $-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1$ (докажите) имеем неравенство $2^{\frac{2x}{1+x^2}} \ge \frac{1}{2}$, а значит, $2^{\frac{2x}{1+x^2}} + 1 \ge \frac{3}{2}$ при всех значениях x. Правая часть последнего уравнения

$$\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) \le \frac{3}{2}$$

при всех $x \ne 0$.

Отсюда получаем

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{1+x^2}} + 1 = \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$.

2. Функциональные методы решения

Наличие свойств (ограниченность, монотонность и т.д.) функций, входящих в уравнения (неравенства) позволяет применить нестандартные методы решения к стандартным по формулировке задачам.

2.1. Использование непрерывности функции

Выше были рассмотрены задачи, в которых были использованы свойства квадратичной функции для решения неравенств, либо использован метод интервалов. В данном разделе еще раз подробно остановимся на методе интервалов.

метод интервалов

Пример 59. (МГУ, 2003). *Найти все значения параметра b, при каждом из которых отрезок* $[-3;-1]$ *целиком содержится среди решений неравенства*

$$\frac{x-3b}{b-2x}<0.$$

Решение. Неравенство перепишем так:

$$\frac{x-3b}{x-\frac{b}{2}}>0 \text{ или } f(x)=(x-3b)\left(x-\frac{b}{2}\right)>0.$$

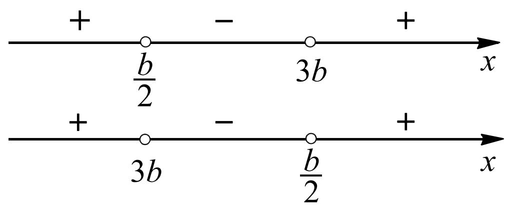


Рис. 5

На рис. 5 расставлены знаки $f(x)$ на числовой прямой в зависимости от взаимного расположения точек $x=\frac{b}{2}$ и $x=3b$.

Условие задачи выполняется, если для квадратичной функции имеет место

$$\begin{cases}\frac{b}{2}\geq 3b\\ \left[\begin{array}{l}-3>\frac{b}{2}\\ -1<3b\end{array}\right.\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\frac{b}{2}\leq 3b\\ \left[\begin{array}{l}-3>3b\\ -1<\frac{b}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

Отсюда получаем значения

$$b\in(-\infty;-6)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right] \text{ или } b\geq 0.$$

Ответ: $(-\infty;-6)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

метод рационализации

Пример 60. (ЕГЭ, 2003). *Найдите все значения параметра a, при которых область определения функции*

$$y=\lg\Big(a^{x+2}\cdot x^{3\log_x a}+a^4\cdot x^5-\\ -\left(\sqrt{x}\right)^{10+2x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^{18}\Big)$$

содержит ровно одно целое число.

Решение. 1. По определению логарифма выражение, стоящее под знаком логарифма, больше нуля. Преобразуем это выражение.

$$a^{x+2}\cdot x^{3\log_x a}+a^4\cdot x^5-\left(\sqrt{x}\right)^{10+2x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^{18}=$$
$$=a^x\cdot a^5+x^5\cdot a^4-x^5\cdot a^x-a^4\cdot a^5=$$
$$=(a^x-a^4)(a^5-x^5).$$

2. Неравенство $(a^x-a^4)(a^5-x^5)>0$ или $(a^x-a^4)(x^5-a^5)<0$ заменим равносильным

$$(a-1)(x-4)(x-a)<0,$$

используя метод рационализации.

3. Пусть $a=1$, тогда получаем ложное неравенство $0<0$. Если $0<a<1$, то неравенство имеет вид $(x-4)(x-a)>0$. Так как $4>a$, то решения последнего неравенства $(0;a)\cup(4;+\infty)$ содержат бесконечно много целых чисел.

Пусть $a>1$, тогда имеем неравенство $(x-4)(x-a)<0$, решением которого является промежуток $(a;4)$ или $(4;a)$. Значение $a=4$ не удовлетворяет условию задачи. Чтобы интервал $(a;4)$ содержал ровно одно целое число 3, поставим условие $2\leq a<3$. Для интервала $(4;a)$ поставим условие $5<a\leq 6$, чтобы он содержал ровно одно целое число 5.

Ответ: $[2;3)\cup(5;6]$.

2.2. Использование ограниченности функции

Для использования ограниченности функции необходимо уметь находить множество значений функции и знать оценки области значений стандартных функций (например, $-1\leq\sin x\leq 1$, $\sqrt{x}\geq 0$ и т.д.).

метод оценки

Иногда уравнение (неравенство) $f(x)\vee g(x)$ устроено так, что на всей ОДЗ неизвестной имеют место неравенства $f(x)\geq A$ и $g(x)\leq A$ при некотором A. В этом случае:

а) решение неравенства $f(x)\leq g(x)$ или уравнения $f(x)=g(x)$ сводится к нахождению тех значений x, для которых одновременно $f(x)=A$ и $g(x)=A$;

б) решение неравенства $f(x)\ge g(x)$ сводится к нахождению тех решений неравенства $f(x)\ge A$, для которых определена функция $g(x)$.

Пример 61. *Определить количество решений уравнения*

$$2\sin \pi ax = x+\frac{1}{x}$$

в зависимости от параметра а.

Решение. Оценим левую часть уравнения $-2\le 2\sin\pi ax\le 2$. Так как $x+\frac{1}{x}\ge 2$ при $x>0$ и $x+\frac{1}{x}\le -2$ при $x<0$, то исходное уравнение равносильно совокупности двух систем.

$$\text{(I)}\ \begin{cases} 2\sin\pi ax = 2, \\ x+\dfrac{1}{x}=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}+2n, \\ x=1, \end{cases} n\in \mathbf{Z},$$

$$\text{(II)}\ \begin{cases} 2\sin\pi ax = -2, \\ x+\dfrac{1}{x}=-2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}+2n, \\ x=-1, \end{cases} n\in \mathbf{Z}.$$

Ответ: при $a=\pm\frac{1}{2}+2n,\ n\in\mathbf{Z}$, один корень, при $a\ne\pm\frac{1}{2}+2n,\ n\in\mathbf{Z}$, нет решений.

Пример 62. (МГУ, 1988). *Найти наибольшее значение параметра b, при котором неравенство*

$$\sqrt{b^5}\left(8x-x^2-16\right)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\ge$$
$$\ge -\frac{2}{3}b|\cos\pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. При $b=0$ неравенство выполняется. Пусть $b>0$. Преобразуем данное неравенство

$$b\sqrt{b}\left(b(x-4)^2+\frac{1}{b(x-4)^2}\right)\le\frac{2}{3}b|\cos\pi x|$$

или

$$\sqrt{b}\left(b(x-4)^2+\frac{1}{b(x-4)^2}\right)\le\frac{2}{3}|\cos\pi x|.$$

Так как сумма двух взаимно обратных положительных величин не меньше 2, то левая часть не меньше $2\sqrt{b}$. Правая часть не больше $\frac{2}{3}$. Следовательно, чтобы данное неравенство имело хотя бы одно решение, необходимо выполнение условия $2\sqrt{b}\le\frac{2}{3}$, $b\le\frac{1}{9}$. Наибольшее значение $b=\frac{1}{9}$. Если $b=\frac{1}{9}$, то левая часть последнего неравенства не меньше $\frac{2}{3}$, а правая часть не больше $\frac{2}{3}$. Значит, левая и правая части равны $\frac{2}{3}$. Левая часть достигает наименьшего значения при условии $b(x-4)^2=\frac{1}{b(x-4)^2}$ или $(x-4)^4=81$, $x=1$ или $x=7$. При этих значениях x правая часть равна $\frac{2}{3}$. ***Ответ:*** $\frac{1}{9}$.

неотрицательность функции

Пусть левая часть уравнения (неравенства) $f(x)\vee 0$ есть сумма нескольких функций $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее определения. Тогда неравенство $f(x)\le 0$ или уравнение $f(x)=0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0. \end{cases}$$

а неравенство $f(x)\ge 0$ сводится к нахождению области определения функции $f(x)$.

Пример 63. (МГУ, 1995). *Найдите все значения параметра а, при которых уравнение*

$$(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)+37=$$
$$=\cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Данное уравнение приведем к виду

$$(x^2-6\,|\,x\,|-a+6)^2+\left(1-\cos\frac{18\pi}{a}\right)=0.$$

Так как в левой части последнего уравнения стоит сумма неотрицательных выражений, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-6\,|\,x\,|-a+6=0, \\ 1-\cos\dfrac{18\pi}{a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|\,x\,|-3)^2=a+3, \\ \dfrac{18\pi}{a}=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -3, \\ |\,x\,|=3\pm\sqrt{a+3}, \\ a=\dfrac{9}{n},\ n\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Уравнение $|\,x\,|=3\pm\sqrt{a+3}$ системы имеет ровно два корня в двух случаях.

1. Пусть $a=-3$, тогда уравнение $-3=\dfrac{9}{n}$ выполняется при $n=-3$.

2. Если $3-\sqrt{a+3}<0$, то имеем $a>6$.

Из неравенства $\dfrac{9}{n}>6$ получаем одно целое значение $n=1$, при этом $a=9$.

Ответ: –3; 9.

наибольшее и наименьшее значения функции

В некоторых задачах нахождение наибольшего или наименьшего значений функции является необходимым элементом решения.

Пример 64. (МГУ, 2005). *Найти все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$9|x-1|+\big|3x-|x+a|\big|-4x=0.$$

Непрерывная функция

$$f(x)=9|x-1|+\big|3x-|x+a|\big|-4x:$$

1) неограниченно возрастает при $x\ge 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x)=9x-9-4x\pm 3x\pm x\pm a=kx+m,$$

где $k\ge 9-4-4=1>0$.

2) убывает при $x\le 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x)=-9x+9-4x\pm 3x\pm x\pm a=kx+m,$$

где $k\le -9-4+4=-9<0$.

Следовательно, $x=1$ – точка минимума функции *f*, а область ее значений есть множество $[f(1);+\infty)$. Поэтому уравнение будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(1)\le 0$.

Решим это неравенство:

$$\big|3-|1+a|\big|\le 4;$$

$$-4\le |a+1|-3\le 4;\ \ |a+1|\le 7;$$

$$-7\le a+1\le 7;\ \ -8\le a\le 6.$$

Ответ: $-8\le a\le 6$.

Пример 65. (МИОО, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых неравенство*

$$|x+1|+2|x+a|>3-2x$$

выполняется для любого x.

Решение. Неравенство преобразуется к виду $f(x)>3$, где

$$f(x)=|x+1|+2|x+a|+2x.$$

Точки -1 и $-a$ разбивают числовую прямую на интервалы, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с линейной (при любом раскрытии знаков модуля). На левом интервале ($x<-1,\ x<-a$) функция принимает вид $f(x)=-x-2a-1$ и является убывающей. На правом интервале ($x>-1,\ x>-a$) функция принимает вид $f(x)=5x+2a+1$ и является возрастающей. Это означает, что функция ограничена снизу. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей прямых. Точки -1 и $-a$ являются точками излома, поэтому в этих точках функция может принимать наименьшее значение.

Все значения функции $f(x)$ больше 3 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(-1) > 3, \\ f(-a) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|-1+a|-2 > 3, \\ |-a+1|-2a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a-1| > \dfrac{5}{2}, \\ |a-1| > 2a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a-1 > 2{,}5, \\ a-1 < -2{,}5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a-1 > 2a+3, \\ a-1 < -2a-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 3{,}5, \\ a < -1{,}5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a < -4, \\ a < -\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a < -1{,}5.$$

Ответ: $(-\infty; -1{,}5)$.

Пример 66. (МГУ, 1988). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство*

$$\left|3\sin^2 x + 2a\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3.$$

Решение. Упростим подмодульное выражение

$$f(x) = 3\sin^2 x + 2a\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a =$$
$$= 3 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + a\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} + a =$$
$$= a\sin 2x - \cos 2x + 2 + a =$$
$$= \sqrt{a^2+1}\sin(2x - \varphi) + 2 + a,$$

где $\varphi = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы наименьшее (m) и набольшее (M) значения функции $f(x)$ удовлетворяли системе

$$\begin{cases} m \ge -3 \\ M \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{a^2+1} + 2 + a \ge -3 \\ \sqrt{a^2+1} + 2 + a \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+1} \le a+5 \\ \sqrt{a^2+1} \le 1-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a^2+1 \le (a+5)^2 \\ a+5 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+1 \le (1-a)^2 \\ 1-a \ge 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -2{,}4 \\ a \le 0. \end{cases}$$

Ответ: $[-2{,}4; 0]$.

Пример 67. (МИОО, 2011). *При каких значениях параметра с уравнение*

$$2\cos^2(2^{2x-x^2}) = c + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$$

имеет решения?

Решение. Используя формулу понижения степени, приведем уравнение к виду

$$1 + \cos(2 \cdot 2^{2x-x^2}) = c + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$$

или

$$\cos(2^{2x-x^2+1}) - \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1}) = c - 1.$$

Пусть $t = 2^{2x-x^2+1}$, где $t \in (0; 4]$, так как $2^{2x-x^2+1} = 2^{2-(x-1)^2}$, а множество значений функции $f(x) = 2-(x-1)^2$ есть промежуток $(-\infty; 2]$. Тогда уравнение примет вид

$$\cos t - \sqrt{3}\sin t = c - 1$$

или

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{c-1}{2}.$$

Полученное уравнение будет иметь решение, если число $\dfrac{c-1}{2}$ будет принадлежать множеству значений функции $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ на промежутке $(0; 4]$.

Сделаем замену $u = t + \dfrac{\pi}{3}$. Тогда при $0 < t \le 4$ получим $\dfrac{\pi}{3} < u \le 4 + \dfrac{\pi}{3}$. На промежутке $\left(\dfrac{\pi}{3}; \pi\right]$ функция $\cos u$ убывает и принимает все значения из промежутка $\left(\dfrac{1}{2}; -1\right]$, а на промежутке $\left[\pi; 4 + \dfrac{\pi}{3}\right]$ функция $\cos u$ возрастает и принимает все значения из промежутка $\left[-1; \cos\left(4+\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

Так как $4+\frac{\pi}{3} < \left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$, то $\cos\left(4+\frac{\pi}{3}\right) < \cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Следовательно, множество значений функции $\cos u$ на промежутке $\left[\pi; 4+\frac{\pi}{3}\right]$, а значит и функции $\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$ на промежутке $(0; 4]$, есть $\left[-1; \frac{1}{2}\right)$.

Искомые значения c найдем, решив неравенство $-1 \le \frac{c-1}{2} < \frac{1}{2}$. Отсюда $-1 \le c < 2$.

Ответ: $[-1;2)$.

2.3. Использование монотонности функции

При использовании монотонности функций различают случаи, когда функции, стоящие в обеих частях уравнения (неравенства), имеют одинаковую монотонность или разную монотонность.

***монотонность функции на множестве* R**

Если функция $f(t)$ строго монотонна на $\mathbf{R}$, то уравнение $f(h(x)) = f(g(x))$ равносильно уравнению $h(x) = g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго возрастает на $\mathbf{R}$, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго убывает на $\mathbf{R}$, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Пример 68. (МГУ, 2004). *Найти все значения параметра* $p \in [-4;4]$, *при которых неравенство*

$$(p-2)\big((x+1)(p-3)+2x\big) > 0$$

выполняется при любых $x \ge 0$.

Решение. Если $p > 2$, то получается линейное неравенство

$$(p-1)x + p - 3 > 0.$$

По условию оно должно выполняться при любых $x \ge 0$, в частности при $x = 0$. Отсюда $p > 3$. С другой стороны при $p > 3$ неравенство действительно справедливо для всех $x \ge 0$. Таким образом, $3 < p \le 4$.

При $p = 2$ исходное неравенство не выполняется при всех значениях x. При $p < 2$ неравенство принимает вид $(p-1)x + p - 3 < 0$. Если $p > 1$, то линейная функция $f(x) = (p-1)x + p - 3$ возрастает, поэтому для всех $x \ge 0$ неравенство $f(x) < 0$ выполняться не может. Если $p = 1$, то $f(x) = -2 < 0$ для всех x, в том числе и для $x \ge 0$.

Наконец, для $p < 1$ линейная функция $f(x) = (p-1)x + p - 3$ убывает и при $x = 0$ принимает значение $f(0) = p - 3 < 0$. Значит, при $x \ge 0$ неравенство тем более выполняется.

Ответ: $[-4;1] \cup (3;4]$.

Пример 69. (2010, тренировочная работа МИОО, С5). *Найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение*

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных *решений.*

Решение. Обозначим $y = x^2 - 5x + 4a$. Тогда $x^2 = y + 5x - 4a$. В новых обозначениях уравнение примет вид

$$64^{x+a} = y + 5x - 4a - 8x + a + 4^y,$$

откуда

$$3x + 3a + 4^{3x+3a} = y + 4^y.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t + 4^t$. В этом случае последнее уравнение примет вид

$$f(3x+3a) = f(y).$$

Функция $f(t) = t + 4^t$ определена при всех t и является возрастающей на всей числовой прямой (как сумма двух возрастающих функций). Тогда уравнение

$f(3x+3a)=f(y)$ равносильно уравнению $3x+3a=y$.

Выполнив обратную замену, получим

$$3x+3a=x^2-5x+4a$$

или

$$x^2-8x+a=0.$$

Последнее уравнение, а значит и исходное уравнение, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $8^2-4a<0$, т.е. при $a>16$.

Ответ. $a>16$.

монотонность функции на промежутке

Если функция $f(t)$ строго монотонна на своей области существования – промежутке *M*, то уравнение $f\big(h(x)\big)=f\big(g(x)\big)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x)=g(x), \\ E(h)\subset M, \\ E(g)\subset M. \end{cases}$$

Если функция $f(t)$ определена и является возрастающей на своей области определения – промежутке *M*, то неравенство $f\big(h(x)\big)>f\big(g(x)\big)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x)>g(x), \\ E(h)\subset M, \\ E(g)\subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Если функция $f(t)$ строго убывает на своей области определения – промежутке *M*, то неравенство $f\big(h(x)\big)>f\big(g(x)\big)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x)<g(x), \\ E(h)\subset M, \\ E(g)\subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Пример 70. *В зависимости от значений параметра a решить неравенство*

$$\sqrt{x+8a}-\sqrt{9a}\le a-x.$$

Решение. Данное неравенство можно представить в виде

$$\sqrt{x+8a}+x\le\sqrt{a+8a}+a \text{ или } f(x)\le f(a),$$

где функция $f(t)=\sqrt{t+8a}+t$ возрастает на промежутке $[-8a;+\infty)$.

Отсюда имеем систему, равносильную данному неравенству

$$\begin{cases} x\le a, \\ x\ge -8a. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько случаев для значений параметра *a*.

1. Пусть $a<0$, тогда в условии не определен корень $\sqrt{8a}$ и не определено неравенство.

2. Если $a=0$, то решением системы является $x=0$.

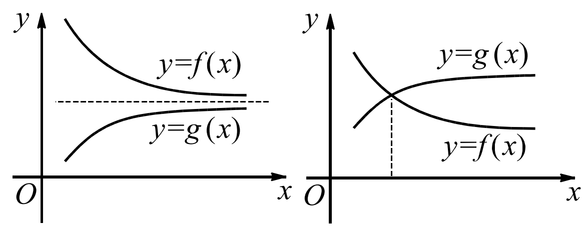
3. При $a>0$ из системы неравенств получаем решение $[-8a;a]$.

***Ответ*:** если $a=0$, то $x=0$;
если $a>0$, то $-8a\le x\le a$.

функции разной монотонности

Уравнение $f(x)=g(x)$, где $f(x)$ – возрастающая, а $g(x)$ – убывающая функции, либо не имеет решений (см. рис. 6*а*), либо имеет единственное решение (см. рис. 6*б*).

Пусть на промежутке $(a;b)$ заданы



а *б*

Рис 6

возрастающая функция $f(x)$ и убывающая функция $g(x)$, причем x_0 – корень уравнения $f(x)=g(x)$, принадлежащий промежутку $(a;b)$. Тогда решение неравенства $f(x)>g(x)$ – все числа из про-

ЯГУБОВ.РФ

межутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < g(x)$ – промежуток $(a; x_0)$ (см. рис. 7).

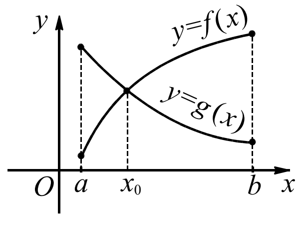


Рис. 7

Пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $f(x)$ и x_0 – корень уравнения $f(x) = c$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > c$ – все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < c$ – промежуток $(a; x_0)$ (см. рис. 8).

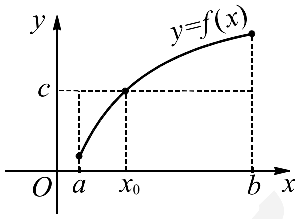


Рис. 8

Пример 71. (МИОО, тренировочная работа, 2011). *Найти все значения параметра a, при которых система*

$$\begin{cases} \log_a y = (x^2 - 2x)^2, \\ x^2 + y = 2x \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Выразим из второго уравнения $y = 2x - x^2$ и подставим в первое уравнение

$$\log_a y = y^2.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $0 < a < 1$. Так как функция $z = \log_a y$ убывает, а функция $z = y^2$ возрастает на промежутке $(0;1)$, то уравнение $\log_a y = y^2$ имеет на этом промежутке не более одного корня. Определим знаки значений функции $f(y) = \log_a y - y^2$ на промежутке $[a^2;1]$

$$f(a^2) = \log_a a^2 - (a^2)^2 = 2 - a^4 > 0$$

и

$$f(1) = \log_a 1 - 1^2 = -1 < 0.$$

Поэтому уравнение $\log_a y = y^2$ имеет на промежутке $(0;1)$ ровно один корень y_0.

Тогда второе уравнение

$$x^2 - 2x + y_0 = 0$$

имеет дискриминант $D_1 = 1 - y_0 > 0$ и имеет два различных корня. Следовательно, данная система уравнений имеет два различных решения.

2. Пусть $a > 1$. Если уравнение $\log_a y = y^2$ имеет корни, то они больше 1. Тогда уравнение

$$x^2 - 2x + y_0 = 0$$

имеет дискриминант $D_1 = 1 - y_0 < 0$ и не имеет действительных корней.

Ответ: $(0;1)$.

задачи вида $f(f(x)) \vee x$

> Если функция $f(x)$ строго возрастает на некотором промежутке, то уравнения $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$ равносильны на этом промежутке.

Пример 72. *Найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$\sqrt{\sqrt{x} + a} = x - a$$

имеет два различных корня.

Решение. Данное уравнение приведем к виду

$$\sqrt{\sqrt{x} + a} + a = x \text{ или } f(f(x)) = x,$$

где $f(x) = \sqrt{x} + a$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Значит, исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x} + a = x$.

Исследование последнего уравнения (аналитическим или графическим способом) предоставим читателю.

Ответ: $\left(-\frac{1}{4}; 0\right]$.

ЯГУБОВ.РФ

2.4. Использование производной функции

Пример 73. (ЕГЭ, 2003). *Найти все значения p, при которых уравнение*

$$3\cos 2x + \frac{2p}{\sin x} = -17$$

имеет корни.

Решение. При условии $\sin x \neq 0$ данное уравнение приведем к следующему виду

$$3(1-2\sin^2 x)\sin x + 2p = -17\sin x$$

или

$$p = 3\sin^3 x - 10\sin x.$$

Пусть $\sin x = t$, где $t \in [-1;0) \cup (0;1]$. Функция $p(t) = 3t^3 - 10t$ является нечетной и имеет производную

$$p'(t) = 9t^2 - 10,$$

причем $p'(t) < 0$ на рассматриваемом множестве. Так как функция $p(t)$ убывает и непрерывна на промежутке $(0;1)$, то она принимает все значения из промежутка $[p(1); p(0)) = [-7; 0)$.

В силу нечетности функции $p(t)$ множество ее значений $[-7;0) \cup (0;7]$. Следовательно, при всех значениях p из этого множества данное уравнение будет иметь решения.

Ответ: $[-7;0) \cup (0;7]$.

Пример 74. *В зависимости от значений параметра a определить количество различных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} \log_a(2y-1) = 5x - x^2 - 2, \\ x^2 - 5x + 2y = 0. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы получаем, что входящие в уравнение выражения имеют смысл при $a > 0$, $a \neq 1$ и $y > 0{,}5$. Рассматривая второе уравнение как квадратное относительно x, получим, что оно имеет решение, если его дискриминант $D = 25 - 8y$ будет неотрицательным. Отсюда $y \leq \frac{25}{8}$.

Данная система равносильна смешанной системе

$$\begin{cases} \log_a(2y-1) = 2y - 2, \\ 0{,}5 < y \leq \dfrac{25}{8}. \end{cases}$$

Обозначим $t = 2y - 1$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} \log_a t = t - 1, \\ 0 < t \leq \dfrac{21}{4}. \end{cases}$$

Заметим, что $t = 1$ является корнем уравнения системы при всех допустимых значениях a.

При $0 < a < 1$ в левой части уравнения системы стоит убывающая функция, в правой – возрастающая. Следовательно, при $t = 1$ $0 < a < 1$ полученная система имеет единственное решение, а тогда исходная система уравнений имеет два решения, так как при $t = 1$ получаем $y = 1$. Из уравнения $x^2 - 5x + 2 = 0$ ему соответствуют два корня $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Пусть $a > 1$. Рассмотрим функцию $f(t) = \log_a t - t + 1$ на промежутке $\left(0; \frac{21}{4}\right]$ и определим количество корней уравнения $f(t) = 0$ на этом промежутке в зависимости от значений параметра a.

Функция $f(t)$ дифференцируема при $t > 0$ и

$$f'(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln a} - 1.$$

Из уравнения $f'(t) = 0$ получаем $t = \frac{1}{\ln a}$, $f'(t) > 0$ при $0 < t < \frac{1}{\ln a}$ и $f'(t) < 0$ при $t > \frac{1}{\ln a}$. Следовательно, точка $t_0 = \frac{1}{\ln a}$ – точка максимума функции $f(t)$.

Заметим, что $t_0 = 1$ при $a = e$, $t_0 < 1$ при $a > e$, и $t_0 > 1$ при $1 < a < e$.

Если $a = e$, то $f(t_0) = f(1) = 0$ и функция $f(t)$ имеет единственный корень $t = 1$.

Если $a > e$, то $t_0 < 1$, а так как $f(1) = 0$, то $f(t_0) > 0$ (см. рис. 9). Поскольку $f(t) \to -\infty$ при $t \to 0$, то на промежутке $(0, t_0)$ функция $f(t)$ имеет еще один корень. Следовательно, исходная система будет иметь еще два решения.

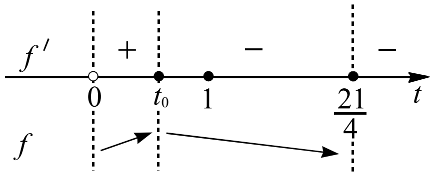


Рис. 9

Если $1 < a < e$, то $t_0 > 1$, а так как $f(1) = 0$, то $f(t_0) > 0$ (см. рис. 10).

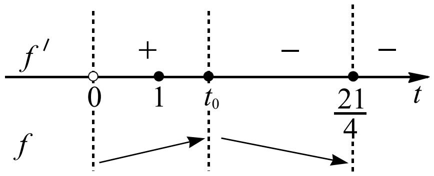


Рис. 10

Найдем значение a, при котором $f\left(\frac{21}{4}\right) = 0$ из уравнения $\log_a \frac{21}{4} = \frac{21}{4} - 1$ или $\log_a \frac{21}{4} = \frac{17}{4}$. Отсюда $a = \sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4} < e$. Соответственно $f\left(\frac{21}{4}\right) < 0$ при $\sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4} < a < e$. Это значит, что на промежутке $\left(1, \frac{21}{4}\right)$ функция $f(t)$ имеет еще один корень. Следовательно, исходная система будет иметь еще два решения.

При $a = \sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}$ функция $f(t)$ имеет еще один корень $t = \frac{21}{4}$. Но в этом случае $y = \frac{25}{8}$ и уравнение $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$ имеет единственное решение $x = \frac{5}{2}$. Значит, исходная система имеет три решения.

Соответственно $f\left(\frac{21}{4}\right) > 0$ при $1 < a < \sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}$. Это значит, что на промежутке $\left(1, \frac{21}{4}\right)$ функция $f(t)$ не имеет корней.

Ответ: если $a \le 0$ или $a = 1$, то решений нет;
если $0 < a < 1$ или $1 < a < \sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}$, то два решения;
если $a = \sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}$ – три решения;
если $\sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4} < a < e$ – четыре решения;
если $a = e$ – два решения;
если $a > e$ – четыре решения.

3. Функционально-графические методы

Встречающиеся задачи на исследование уравнения или неравенства с параметром a можно записать в виде

$$f(x, a) \vee g(x, a), \qquad (1)$$

где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=$, $>$, $<$, $\ge$, $\le$.

Так как основу уравнений и неравенств составляют выражения $f(x, a)$ и $g(x, a)$, то в зависимости от того, какая роль отводится параметру в задаче (параметр – фиксированное число, или параметр – переменная), запись $f(x, a)$ рассматривается либо как семейство функций с переменной x, либо как выражение с двумя переменными x и a. В соответствии с этим используется два основных графических приема решения подобных задач: первый – построение графического образа задачи на координатной плоскости Oxy, второй – на координатных плоскостях Oxa или Oax.

ЯГУБОВ.РФ

3.1. Координатная плоскость *Oxy*

задачи вида $f(x) \vee a$

При решении задач данного вида на координатной плоскости *Oxy* изображают график функции $y = f(x)$. Тогда при заданном значении параметра a множество решений уравнения $f(x) = a$ является проекцией на ось абсцисс точек пересечения горизонтальной прямой $y = a$ с графиком функции $f(x)$, а множество решений неравенства $f(x) \vee a$ является проекцией на ось абсцисс всех точек прямой $y = a$, ординаты которых удовлетворяют неравенству $f(x) \vee a$.

Пример 75. *Определите количество различных корней уравнения*

$$\left|x^2 - 4x + 3\right| = 3a - 2a^2$$

в зависимости от параметра а.

Решение. Рассмотрим взаимное расположение графика функции $f(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ и прямой $g(x) = 3a - 2a^2 = A$ на координатной плоскости *Oxy*. Из рисунка 11 видно, что при $A < 0$ графики не имеют общих точек; если $0 < A < 1$, то графики имеют четыре точки пересечения; две общие точки получаем при условии $A = 0$ или $A > 1$.

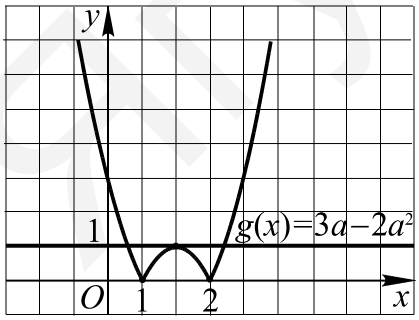


Рис. 11

На рисунке 11 представлен случай, когда графики имеют ровно три общих точки. Данное уравнение имеет три различных корня, если выполняется условие $A = 3a - 2a^2 = 1$. Отсюда $a = 0{,}5$ или $a = 1$. Аналогично находим значения a для других случаев.

Число различных корней	0	2
Условия	$3a - 2a^2 < 0$	$\left[\begin{array}{l} 3a - 2a^2 = 0, \\ 3a - 2a^2 > 1. \end{array}\right.$
Ответ	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (1{,}5; +\infty)$	$(0{,}5; 1) \cup \{0; 1{,}5\}$

Число различных корней	3	4
Условия	$3a - 2a^2 = 1$	$\begin{cases} 3a - 2a^2 > 0, \\ 3a - 2a^2 < 1. \end{cases}$
Ответ	$\{0{,}5; 1\}$	$(0; 0{,}5) \cup (1; 1{,}5)$

задачи вида $f(x) \vee g(x) + a$
и параллельный перенос графика вдоль оси Oy

При решении задач данного вида используется семейство функций $g_a(x) = g(x) + a$, графики которых отличаются от графика функции $y = g(x)$ смещением вдоль оси *Oy* на a единиц вверх при $a > 0$, вниз – при $a < 0$.

Пример 76. *Найти все значения а, при каждом из которых функция*

$$f(x) = 2\left|2\,|\,x\,| - a^2\right| - x + a$$

имеет ровно три нуля.

Решение. Переформулируем задачу: *найти все значения а, при каждом из которых уравнение* $2\left|2\,|\,x\,| - a^2\right| = x - a$ *имеет ровно три различных решений.*

При $a = 0$ уравнение $4\,|\,x\,| = x$ имеет один корень $x = 0$.

При $a \neq 0$ построим графики функций $y = 2\left|2\,|\,x\,| - a^2\right|$ и $y = x - a$. Первая функция является кусочно-линейной и ее график (см. рис. 12) получается из графика функции $y = 4\,|\,x\,|$ с помощью элементарных преобразований (параллельного переноса последнего вдоль оси ординат на $2a^2$ единиц вниз и симметричного отражения наверх относительно оси абсцисс части графика функции $y = 4\,|\,x\,| - 2a^2$

расположенной ниже этой оси). Построенный график (см. рис. 12) пересекает ось Ox в точках $A\left(-\frac{a^2}{2}; 0\right)$ и $B\left(\frac{a^2}{2}; 0\right)$, а ось Oy в точке $C(0; 2a^2)$.

Функция $y = x - a$ задает прямую, параллельную прямой $y = x$, пересекающую оси координат в точках $(a; 0)$ и $(0; -a)$.

Графики функций $y = x - a$ и $y = 2\left|2|x| - a^2\right|$ пересекутся в трех точках тогда и только тогда, когда прямая $y = x - a$ пройдет через точку A или точку C (см. рис. 12). Во всех остальных случаях количество точек пересечения графиков функций будет или больше, или меньше трех. Определим значения параметра a в первом и во втором случае.

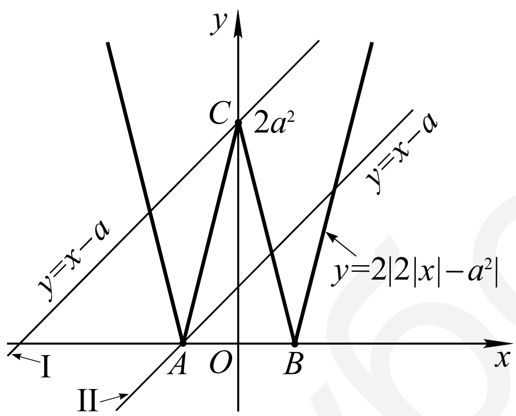


Рис. 12

Если прямая $y = x - a$ проходит через точку A, то из уравнения $0 = -\frac{a^2}{2} - a$ при условии $a \neq 0$ получаем $a = -2$.

Если прямая $y = x - a$ проходит через точку C, то из уравнения $2a^2 = -a$ при условии $a \neq 0$ получаем $a = -0{,}5$.

Ответ. $-2, -0{,}5$.

задачи вида $f(x) \vee g(x+a)$ и параллельный перенос графика вдоль оси Ox

При решении задач данного вида используется семейство функций $g_a(x) = g(x+a)$, графики которых отличаются от графика функции $y = g(x)$ смещением вдоль оси Ox на a единиц влево при $a > 0$, вправо – при $a < 0$.

Пример 77. *Определить значения параметра a, при которых уравнение*

$$|(x+a)^2 - 9| + 2|x| - x^2 - 2ax - a^2 + 5 = 0$$

будет иметь наибольшее число корней.

Решение. Приведем уравнения к следующему виду

$$|(x+a)^2 - 9| - ((x+a)^2 - 9) = 4 - 2|x|. \quad (*)$$

Рассмотрим два случая.

1. Если $(x+a)^2 - 9 \geq 0$, то уравнение будет иметь вид $4 - 2|x| = 0$. Отсюда $x = 2$ и $x = -2$. Для того, чтобы найденные значения x являлись решениями уравнения (*), должны выполняться условия:

если $x = 2$, то

$$(2+a)^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+5) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty);$$

если $x = -2$, то

$$(-2+a)^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-5) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty).$$

2. Если $(x+a)^2 - 9 < 0$, то уравнение будет иметь вид $(x+a)^2 = 7 + |x|$.

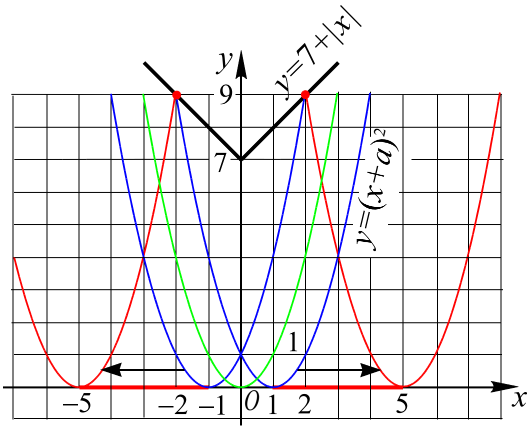


Рис. 13

На рис. 13 представлены график функций $y = 7 + |x|$, стоящей в правой части последнего уравнения, и графики функций $y = (x+a)^2$, стоящей в левой его части a. Так как должно выполняться условие $(x+a)^2 < 9$, то для существования корней должно быть и $7+|x|<9$, т.е. $-2\le x\le 2$. Это возможно только при $a\in[-5;-1]\cup[1;5]$ (см. рис. 13).

Причем решение при этих значениях a будет одно. При $a=-1$ и $a=5$ получим $x=-2$; при $a=-5$ и $a=1$ получим $x=2$; при $a\in(-5;-1)\cup(1;5)$ решением будет некоторое $x\in(-2;2)$.

Сравнивая полученные решения в первом и втором случаях, имеем:

при $a\in(-1;1)$ уравнение не имеет решений;

при $a=-1$ и $a=1$ уравнение одно решение;

при остальных значениях a – два решения.

Ответ: При $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ уравнение имеет два корня.

Пример 78. *При каких значениях параметра а неравенство*

$$x^2+3|x-a|+a+x-3\le 0$$

имеет хотя бы одно неположительное решение?

Решение. Приведем неравенство к виду

$$x^2+2x+1\le(x-a)-3|x-a|+4.$$

График функции $y=x^2+2x+1=$ $=(x+1)^2$ – парабола, полученная из $y=x^2$, параллельным переносом влево вдоль оси Ox на 1 (см. рис. 14).

График функции

$$y_a(x)=(x-a)-3|x-a|+4,$$

стоящей в правой части неравенства, при каждом значении параметра a получается из графика функции

$$y=x-3|x|+4=\begin{cases}-2x+4, \text{если } x\ge 0,\\ 4x+4, \text{если } x\le 0\end{cases}$$

параллельным переносом на a единиц вдоль оси Ox (см. рис. 14).

Решением исходного неравенства является множество всех таких x, для которых точки на графике функции $y_a(x)$ расположены не ниже точек графика функции $y=(x+1)^2$.

Имеется два критических положения графика функции $y_a(x)$, удовлетворяющих условию задачи.

(I) График функции $y_a(x)$ проходит через точку $A(0;1)$ как указано на рис. 14. Из уравнения $4(x-a)+4=1$ при $x=0$ получаем $a=0{,}75$.

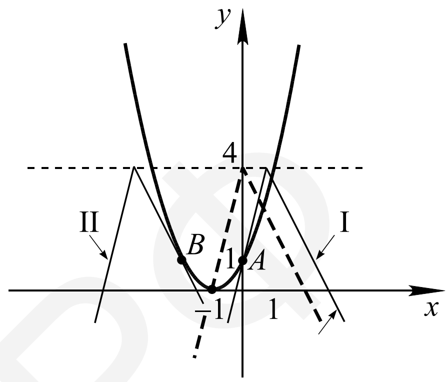


Рис. 14

(II) График функции $y_a(x)$ проходит через точку B как указано на рис. 14. В этом случае прямая $y=-2(x-a)+4$ является касательной к графику функции $y=(x+1)^2$. В этом случае совпадают значения производных от функций в точке касания и значения ординат точек касания графиков. Из условия

$$\left(x^2+2x+1\right)'=\left(-2(x-a)+4\right)'$$

получаем уравнение $2x+2=-2$, т.е. $x=-2$– абсцисса точки касания графиков. Тогда из условия совпадения ординат получаем $(-2+1)^2=-2(-2-a)+4$ или $a=-3{,}5$.

Следовательно, при $-3{,}5\le a\le 0{,}75$ исходное неравенство имеет хотя бы одно неположительное решение.

Ответ. $-3{,}5\le a\le 0{,}75$.

Пример 79. *При каких значениях параметра а система уравнений*

$$\begin{cases}(y+8-x^2)(2x+|y|)=0,\\ 2ax-y=8+a^2\end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы

$$(y+8-x^2)(2x+|y|)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x^2 - 8, \\ |y| = -2x. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Следовательно, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = x^2 - 8, \\ |y| = -2x, \end{array}\right. \\ y = 2ax - 8 - a^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Заметим также, что

$$|y| = -2x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2x, \\ y = -2x, \end{array}\right. \\ x \le 0. \end{cases}$$

Геометрическое место точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют совокупности (1) выделено на рис. 15 красным цветом и состоит из параболы $y = x^2 - 8$ и двух лучей, лежащих на прямых $y = 2x$ и $y = -2x$.

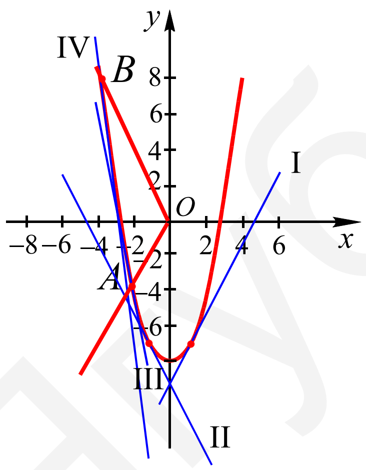


Рис. 15

Графиками функции $y = 2ax - 8 - a^2$ при разных значениях a являются прямые.

Определим, при каких значениях параметра a прямая, заданная уравнением $y = 2ax - 8 - a^2$ является касательной к параболе $y = x^2 - 8$. Для этого используем условие касания графиков функции $f(x)$ и $g(x)$, состоящем в том, что в точке касания совпадают значения производных функций и ординаты графиков

$$\begin{cases} f'(x) = g'(x), \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

В нашем случае имеем

$$\begin{cases} 2x = 2a, \\ x^2 - 8 = 2ax - 8 - a^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x = a$. Второе уравнение при этом превращается в тождество. Следовательно, при каждом a эти прямая и парабола касаются в точке с координатами $(a, a^2 - 8)$. Соответственно при любом значении a исходная система имеет решение $(a, a^2 - 8)$.

При разных значениях a имеется четыре критических положения прямой $y = 2ax - 8 - a^2$ (см. рис. 15):

I. Прямая параллельна прямой $y = 2x$. Так как угловой коэффициент этой прямой равен 2, то из уравнения $2a = 2$ получаем $a = 1$.

II. Прямая параллельна прямой $y = -2x$. Так как угловой коэффициент этой прямой равен -2, то из уравнения $2a = -2$ получаем $a = -1$.

III. Прямая проходит через точку A (точку пересечения прямой $y = 2x$ и параболы при $x \le 0$). Из уравнения $x^2 - 8 = 2x$ получаем $x = -2$ и $x = 4$ (не подходит). В этом случае $a = -2$.

IV. Прямая проходит через точку B (точку пересечения прямой $y = -2x$ и параболы при $x \le 0$). Из уравнения $x^2 - 8 = -2x$ получаем $x = -4$ и $x = 2$ (не подходит). В этом случае $a = -4$.

Точки $-4, -2, -1$ и 1 разбивают числовую прямую Oa на промежутки.

Замечаем (см. рис. 15), что условию задачи удовлетворяют все a такие, что $a \in [-1; 1) \cup \{-4\} \cup \{-2\}$. При этих значениях параметра система (2) имеет два решения.

Ответ: $a = -4,\ a = -2,\ -1 \le a < 1$.

задачи вида $f(x)\vee a(x-x_0)+y_0$ и поворот графика относительно точки

Рассмотрим применение семейства функций вида $f_a(x)=a(x-x_0)+y_0$, которому соответствует семейство прямых, проходящих через точку (x_0, y_0). Параметр a выполняет роль углового коэффициента указанных прямых, поэтому при увеличении значений параметра получаем прямые, отличающиеся друг из друга поворотом на некоторый угол против часовой стрелки относительно точки (x_0, y_0) (*центр поворота*). Множество прямых, проходящих через точку (x_0, y_0), называют еще *пучком прямых*, где (x_0, y_0) является центром пучка.

Пример 80. (ЕГЭ, 2007). *Найти все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(4; 8]$ значение выражения $\log_2^2 x-8$* ***не равно*** *значению выражения $(2a-1)\log_2 x$.*

Решение. 1. Пусть $\log_2 x=t$, тогда при $x=4$ имеем $t=2$; если $x=8$, то $t=3$. Так как функция $t=\log_2 x$ непрерывная и возрастающая, то при всех значениях переменной x из промежутка $(4; 8]$ переменная t принимает все значения из промежутка $(2; 3]$.

2. Переформулируем задачу: *найти все значения a, для которых при каждом t из промежутка $(2; 3]$ значение выражения t^2-8 не равно значению выражения $(2a-1)t$.*

3. Графиком функции $y=t^2-8$ является парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 16). Функция $y=(2a-1)t$ задает семейство прямых, проходящих через начало координат. При увеличении углового коэффициента прямые поворачиваются против часовой стрелки.

4. Парабола $y=t^2-8$ пересекает прямую $t=2$ в точке (2;–4): $y=2^2-8=-4$. Угловой коэффициент прямой $y=(2a-1)t$, проходящей через точку (2; −4), равен: $2a-1=-2$. Парабола пересекает прямую $t=3$ в точке (3; 1): $y=3^2-8=1$. Угловой коэффициент прямой $y=(2a-1)t$, проходящей через точку (3; 1), равен: $2a-1=\dfrac{1}{3}$.

5. Условие «*значение выражения t^2-8 не равно значению выражения $(2a-1)t$ при $t\in(2; 3]$*» графически означает, что прямая $y=(2a-1)t$ не пересекает параболу на промежутке $(2; 3]$. Это выполняется при условиях

$$\left[\begin{array}{l}2a-1\le -2,\\ 2a-1>\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Решая совокупность неравенств, получаем ответ.

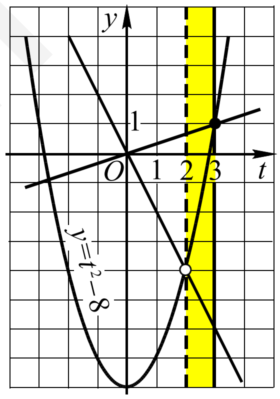


Рис. 16

***Ответ*:** $a\le -\dfrac{1}{2},\ a>\dfrac{2}{3}$.

задачи вида $f(x) \vee ag(x)$ ***и сжатие (растяжение) графика вдоль оси Oy***

При решении задач данного вида используется семейство функций $g_a(x) = ag(x)$, графики которых отличаются от графика функции $y = g(x)$ сжатием (растяжением) вдоль оси *Oy*: растяжением, если $a > 1$; сжатием при $0 < a < 1$; преобразованием симметрии относительно оси x, если $a = -1$; сочетанием указанных преобразований для остальных значений $a \neq 0$.

Пример 81. *При каких значениях параметра a уравнение* $ax^2 + |x-1| = 0$ *имеет три решения*?

Решение. Перепишем данное уравнение в следующем виде: $ax^2 = -|x-1|$. График функции $y = -|x-1|$ – «уголок» с вершиной в точке (1;0), ветви которого направлены вниз (см. рис. 17). Функция $y_a = ax^2$ задает семейство парабол с вершиной (0;0) при $a \neq 0$ и прямую $y = 0$ при $a = 0$. Изменение параметра *a* влияет на направление ветвей параболы.

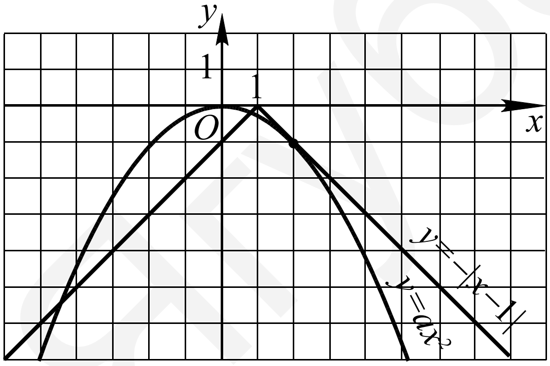


Рис. 17

Если $a = 0$, то прямая $y = 0$ и график функции $y = -|x-1|$ имеют одну общую точку, а следовательно данное уравнение – один корень. Значение $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, и графики не имеют общих точек.

Пусть $a < 0$, тогда ветви параболы будут направлены вниз. Легко доказать, что в этом случае парабола и прямая $y = x - 1$ имеют две общие точки, проверив, что для уравнения $ax^2 - x + 1 = 0$ дискриминант $D = 1 - 4a > 0$. Еще одна общая точка будет, когда прямая $y = -x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2$. Обозначим через x_0 абсциссу точки касания прямой $y = -x + 1$ с параболой $y = ax^2$ и запишем условия касания:

$$\begin{cases} y'(x_0) = -1, \\ ax_0^2 = -x_0 + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax_0 = -1, \\ ax_0^2 = -x_0 + 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2, \\ a = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Ответ. $a = -\dfrac{1}{4}$.

задачи общего вида $f(a, x) \vee 0$

Рассмотрим два примера семейства функций, графическая интерпретация которых связана соответственно с прямой или параболой и не требует простых преобразований графика функции.

Пример 82. *Найти все значения параметра* a, *для которых при каждом значении* x, *не принадлежащем промежутку* $[-1; 3)$, *значение выражения* $a^2 + 2x$ ***не равно*** *значению выражения* $(x-1)a + 6$.

Решение. Из условия задачи следует

$$a^2 + 2x \neq (x-1)a + 6$$

или

$$(2-a)x + a^2 + a - 6 \neq 0.$$

Рассмотрим линейную функцию $f(x) = (2-a)x + a^2 + a - 6$. Заметим, что $f(x) = (2-a)(x-a-3)$. При $a = 2$ функция $f(x) = 0$ является постоянной, и этот случай не удовлетворяет условию задачи. Пусть $a \neq 2$, тогда условие задачи выполняется, если линейная функция $f(x)$ имеет нуль на промежутке $[-1; 3)$ (см. рис. 18).

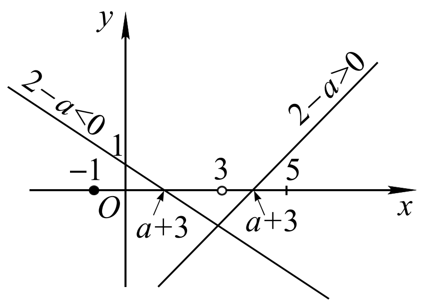


Рис. 18

Отсюда получаем аналитические условия

$$\begin{cases} a+3<3, \\ a+3\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \ -4\le a<0.$$

Ответ. $[-4;\,0)$.

Пример 83. *Найти все значения параметра а, для которых при каждом значении x из промежутка* $(-1;1]$, *значение выражения* $a^2\cdot\sqrt[3]{x^2}-5\cdot\sqrt[3]{x}$ ***не равно*** *значению выражения* $2(2-a\cdot\sqrt[3]{x})$.

Решение. 1. Пусть $\sqrt[3]{x}=t$, тогда при $x=-1$ имеем $t=-1$; если $x=1$, то $t=1$.

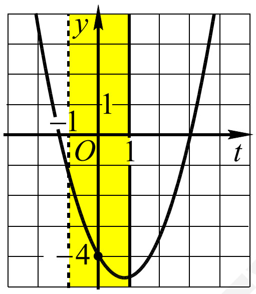


Рис. 19

Так как функция $t=\sqrt[3]{x}$ непрерывная и возрастающая, то при всех значениях переменной x из промежутка $(-1;1]$ переменная t принимает все значения из промежутка $(-1;1]$. Переформулируем задачу: *найти все значения а, для которых функция* $f(t)=a^2t^2+(2a-5)t-4$ *не имеет нулей на промежутке* $(-1;1]$.

2. Пусть $a=0$, тогда имеем $f(t)=0$, $-5t-4=0$ или $t=-\dfrac{4}{5}$, что не удовлетворяет условию задачи. Если $a\ne 0$, то графиком функции $y=f(t)$ является парабола (см. рис. 19), ветви которой направлены вверх. Так как $f(0)=-4$, то условие задачи выполняется, если $f(t)<0$ на промежутке $(-1;1]$.

3. Решим систему неравенств.

$$\begin{cases} f(-1)\le 0, \\ f(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-(2a-5)-4\le 0, \\ a^2+(2a-5)-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2\le 0, \\ a^2+2a-9<0 \end{cases} \Leftrightarrow \ a=1.$$

Ответ. $a=1$.

задачи общего вида $f(a;x)\vee g(a;x)$

Наибольшую трудность представляют задачи, в которых исследуется взаимное расположение графиков двух семейств функций.

Пример 84. *Для каждого значения параметра а определить число различных решений уравнения* $\left|x^2-2ax+3a\right|=a-2$.

Решение. Отметим, что равенство имеет смысл, если $a\ge 2$. Квадратный трехчлен $x^2-2ax+3a$ при $x=a$ имеет наименьшее значение $3a-a^2$. Дискриминант квадратного трехчлена $D=4a^2-12a$. Рассмотрим три случая: $D=0$ (I), $D<0$ (II), $D>0$ (III).

I. Пусть $D=0$, т.е. $4a^2-12a=0$, $a=0$ (не выполняется условие $a\ge 2$) или $a=3$. При $a=3$ из семейства функций $y_a=a-2$ получаем прямую $y=1$, имеющую две общие точки с параболой (см. рис. 20), т.е. при $a=3$ исходное уравнение имеет два решения.

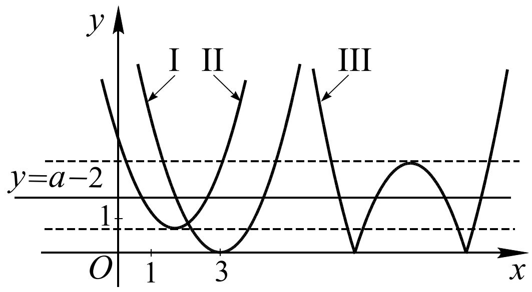


Рис. 20

II. Рассмотрим случай, когда $D<0$, т.е. $4a^2-12a<0$, $0<a<3$. Прямая из семейства функций $y_a=a-2$ не будет пересекать параболу (рис. 11), если будет выполняться условие $a-2<3a-a^2$ с учетом $a\ge 2$ и $0<a<3$. Отсюда имеем $2\le a<1+\sqrt{3}$.

Пусть $a-2=3a-a^2$, тогда при $a=1+\sqrt{3}$ парабола и прямая имеют одну общую точку. Аналогично получаем условие $1+\sqrt{3}<a<3$ для двух общих точек.

III. Если $D>0$, т.е. $4a^2-12a>0$, то $a>3$ с учетом $a\ge 2$. График функции $y=\left|x^2-2ax+3a\right|$ и прямая из семейства $y_a=a-2$ могут иметь две общие точки (см. рис. 20), если

$$\begin{cases} a-2=0, \\ a>3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a-2>a^2-3a, \\ a>3. \end{cases}$$

В первом случае решений нет, во втором получаем $3<a<2+\sqrt{2}.$

Три общие точки – при условии

$$\begin{cases} a-2=a^2-3a, \\ a>3 \end{cases} \Leftrightarrow \ a=2+\sqrt{2}.$$

И, наконец, четыре общие точки – при условии

$$\begin{cases} 0<a-2<a^2-3a, \\ a>3; \end{cases} \Leftrightarrow \ a>2+\sqrt{2}.$$

Ответ. При $a<1+\sqrt{3}$ корней нет;
при $a=1+\sqrt{3}$ один корень;
при $1+\sqrt{3}<a<2+\sqrt{2}$ два различных корня;
при $a=2+\sqrt{2}$ – три;
при $a>2+\sqrt{2}$ – четыре.

3.2. Координатные плоскости *Oxa* и *Oax*

Данный метод представляет собой некоторое обобщение графического метода решения уравнений и неравенств, основанного на использовании координатной плоскости Oxa или Oax. В последнем случае ось Ox называют *координатной*, ось Oa – *параметрической*, а плоскости Oxa и Oax – *координатно-параметрическими* (или *КП – плоскостями*).

При использовании это метода исходное уравнение (или неравенство) преобразуют к виду $a\vee\varphi(x)$ или $x\vee\psi(a)$. В первом случае на плоскости Oxa строят график функции $\varphi(x)$, а затем, пересекая полученный график прямыми, параллельными оси Ox, получают необходимую информацию. Во втором – производят построения графика функции $\psi(a)$ на плоскости Oax. Другой вариант этого приема связан с нахождением графического решения уравнения (неравенства) вида $f(x,a)\vee 0$, а затем его аналитической интерпретацией. Построение графика уравнения $f(x,a)=0$ с двумя переменными x и a на плоскости Oax является основой для ответа на поставленный вопрос о решениях уравнения с параметром. Графическим решением неравенства $f(x,a)\vee 0$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков $>$, $<$, $\ge$, $\le$, являются множества точек (области) плоскости, координаты которых удовлетворяют данному неравенству.

При решении конкретной задачи координатно-параметрическим методом в ходе решения плоскость Oxa разбивается на «частичные области», внутри каждой из которых геометрически интерпретируется и решается поставленная задача.

Замечание. В частности, понятие «частичных областей» используется при решении уравнений и неравенств, содержащих неизвестные под знаком абсолютной величины (этот метод называют методом *«частичных областей»*). В свою очередь при решении логарифмических и показательных (и некоторых других) уравнений и неравенств также приходится разбивать плоскость Oxa на области.

задачи вида $a\vee\varphi(x)$ _или_ $x\vee\psi(a)$

При решении уравнения или неравенства $f(x,a)\vee g(x,a)$ иногда удается выразить одну из переменных в явном виде, что позволяет перейти от задачи с параметром к задаче без параметра, а именно к исследованию функциональной зависимости одной переменной от другой.

Для решения неравенств полезным будет напомнить одно простое утверждение: пусть имеется график функции $y=f(x)$, тогда множество точек плоскости, расположенных выше графика, будет геометрическим изображением решения неравенства $y > f(x)$, а для точек, лежащих ниже графика – неравенства $y < f(x)$.

Пример 85. (**Экзаменационная работа**, **1994 г**.). *При каких значениях a уравнение*

$$x^2-(4a-2)\cdot|x|+3a^2-2a=0$$

имеет два различных решения?

Решение. Пусть $|x|=t$, тогда получим квадратное уравнение

$$t^2-(4a-2)t+3a^2-2a=0,$$

имеющее корни $t=a$ или $t=3a-2$. Отсюда получаем $|x|=a$ и $|x|=3a-2$. Построим графики двух функций $a(x)=|x|$ и $a(x)=\dfrac{|x|+2}{3}$, которые имеют две общие точки $(-1;1)$ и $(1;1)$ (см. рис. 21). Первый график (уголок) имеет «вершину» $(0;0)$, а второй – $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

Рассматривая семейство горизонтальных прямых, получаем всевозможные ответы для более общей задачи: для каждого значения a определите число различных решений уравнения

$$x^2-(4a-2)|x|+3a^2-2a=0.$$

Значения параметра a	$(-\infty;0)$	0	$\left(0;\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
Число различных корней	0	1	2	3	4	2	4

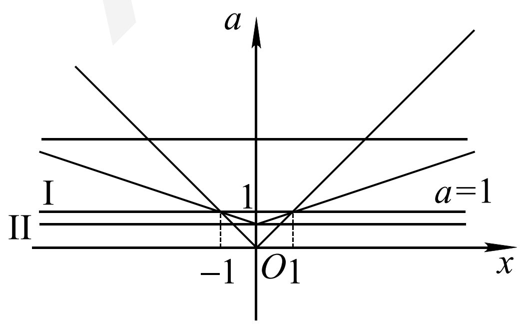


Рис. 21

Запишем ответ для исходной задачи.

Ответ: $0 < a < \dfrac{2}{3}$; $a=1$.

Замечание. Здесь полезным оказался тот факт, что корни квадратного уравнения легко выразить через параметр (т.е. дискриминант является квадратом некоторого выражения). В этом случае способ решения, использующий явные выражения для корней, является одним из наиболее рациональных. Построение графика уравнения сводится к построению нескольких простейших графиков функций.

Пример 86. (**МИЭТ**, **2002**). *При каких значениях параметра a имеет ровно два различных корня уравнение*

$$\sqrt{x+2a^2}\cdot(x^2+(2-a)x-2a)=0\,?$$

Решение. Корни данного уравнения должны удовлетворять условию $x \ge -2a^2$ (условие существования квадратного корня из выражения $x+2a^2$). Заметим, что $x^2+(2-a)x-2a=(x-a)(x+2)$. Тогда

$$\sqrt{x+2a^2}\cdot(x^2+(2-a)x-2a)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2a^2, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2a^2, \\ x=a, \\ x=-2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Следовательно, корнями уравнения могут быть числа $x_1=-2a^2$, $x_2=a$ и $x_3=-2$. По условию задачи требуется найти значения параметра a, при которых уравнение имеет ровно два различных корня. Для отбора искомых значений параметра на плоскости Oax построим графики функций $x=-2a^2$, $x=a$ и $x=-2$ (см. рис. 22). Каждая прямая $a=const$, параллельная оси Ox, пересекает каждый из построенных графиков, и ордината точки пересечения дает значение корня исходного уравнения при условии, что $x \ge -2a^2$. Точки (a, x), координаты которых удовлетворяют последнему неравенству, расположены на плоскости Oax в выделенной фоном области.

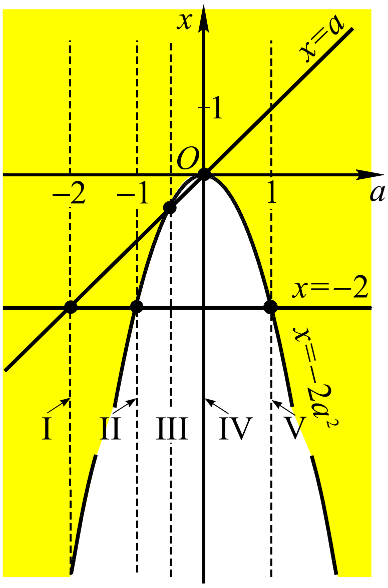


Рис. 22

Имеется пять критических положений этих прямых:

I) $a = -2$, II) $a = -1$, III) $a = -0{,}5$,
IV) $a = 0$, V) $a = 1$.

В этих случаях они проходят через точки пересечения графиков. Точки $-2, -1, -0{,}5, 0$ и 1 разбивают числовую прямую Oa на шесть промежутков. Рассмотрим каждый из них:

(1) $a \in (-\infty; -2)$ и (2) $a \in (-2; -1)$. На этих промежутках уравнение имеет три корня.

(3) $a \in (-1; -0{,}5)$. Уравнение имеет два корня (график функции $x = -2$ расположен ниже графика функции $x = -2a^2$).

(4) $a \in (-0{,}5; 0)$. Уравнение имеет один корень, так как графики функций $x = a$ и $x = -2$ – ниже графика функции $x = -2a^2$.

(5) $a \in (0; 1)$. Уравнение имеет два корня (график функции $x = -2$ – ниже графика функции $x = -2a^2$).

(6) $a \in (1; +\infty)$. Уравнение имеет три корня.

Соответственно при каждом из значений $a = -2$, $a = -1$ или $a = 1$ уравнение имеет два корня (рис. 15).

Ответ. $\{-2\} \cup [-1; -0{,}5) \cup (0; 1]$.

задачи вида $f(a, x) \vee 0$

Рассмотрим уравнения и неравенства, в которых переменные x или a заданы в неявном виде, и выразить какую-либо переменную в явном виде сложно.

В предлагаемых задачах уравнение с двумя переменными $f(a, x) = 0$, как правило, задает на координатной плоскости некоторые линии. Это составляет основу при решении неравенств.

Для решения неравенств вида $f(a, x) \vee 0$ удобно использовать *метод областей*, суть которого представлена ниже при решении примеров.

Для решения уравнений или неравенств, содержащих знак модуля, обычно используют метод «частичных областей». Основная идея этого метода состоит в том, что решение задачи в исходной области (в частности, на плоскости Oxa) сводится к решению совокупности смешанных систем (уравнений и неравенств), не содержащих знаков абсолютной величины, в каждой частичной области, на которые разбивается исходная область.

Пример 87. *Определить количество корней уравнения* $3|x + a| + 2|x - a| = 2$ *в зависимости от значений параметра a.*

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности четырех систем:

$$1)\ \begin{cases} x + a \ge 0, \\ x - a \ge 0, \\ 5x + a = 2; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x + a \ge 0, \\ x - a \le 0, \\ x + 5a = 2; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x + a \le 0, \\ x - a \ge 0, \\ -x - 5a = 2; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x + a \le 0, \\ x - a \le 0, \\ -5x - a = 2. \end{cases}$$

Решения первой системы образуют отрезок BC (см. рис. 23), решения второй системы составляют отрезок AB, решения третьей системы дают отрезок DC и решения четвертой системы – отрезок AD.

Таким образом, координаты всех точек плоскости, принадлежащих сторонам параллелограмма $ABCD$, составляют множество решений данного уравнения. Определим координаты точек A, B, C, D. Для этого решим системы, составленные из уравнений прямых линий

$$a=-5x+2\ (BC),\ a=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\ (AB),$$

$$a=-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}\ (DC),\ a=-5x-2\ (AD),$$

пересекающихся в вершинах параллелограмма. Получим:

$$A\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ B\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\ C\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\ D\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

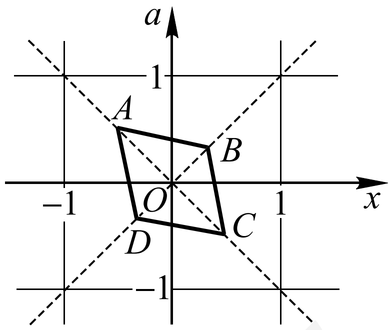


Рис. 23

Рассматривая прямые $a=\text{const}$ в пересечении с параллелограммом, получаем ответ.

Ответ. При $a<-0{,}5$ или $a>0{,}5$ нет корней; при $a=-0{,}5$ или $a=0{,}5$ один корень; при $-0{,}5<a<0{,}5$ два корня.

Пример 88. (ЕГЭ, 2004). *Найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства*

$$1-\frac{a}{x}<\frac{8}{x}\left(1-\frac{a+2}{x}+\frac{2a}{x^2}\right)$$

содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

Решение. 1. Преобразуем данное неравенство

$$\frac{x-a}{x}<\frac{8\left(x^2-(a+2)x+2a\right)}{x^3};$$

$$\frac{x^2(x-a)-8(x-a)(x-2)}{x^3}<0;$$

$$x^3(x-a)(x-4)^2<0.$$

Для графического решения последнего неравенства используем метод областей.

2. Обозначим

$$f(a,x)=x^3(x-a)(x-4)^2.$$

Найдем нули: $x^3(x-a)(x-4)^2=0$; $x=a$, $x=4$, $x=0$. Построим прямые в системе координат Oax (см. рис. 24). Далее определяем знак значения выражения $f(a,x)$ в одной из областей $f(0;1)>0$, затем расставляем знаки в других областях, используя правило знакочередования.

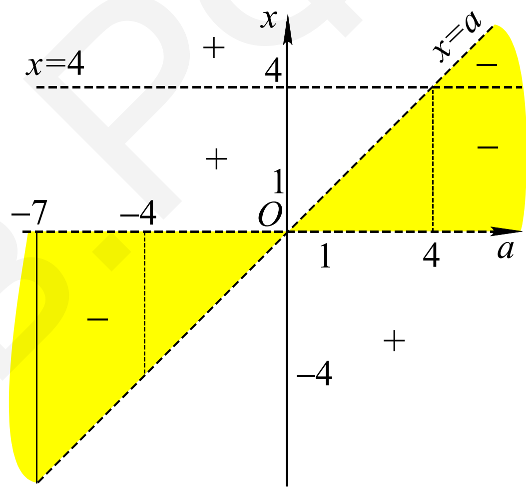


Рис. 24

3. Рассмотрим области, выделенные фоном и представляющие графически множество решений последнего неравенства. В случае $-4\le a\le 4$ множество решений не содержит отрезок длины 4.

При $a>4$ множество решений есть объединение двух промежутков: $(0;4)\cup(4;a)$.

Если $4<a<8$, то множество решений не содержит отрезок длины 4.

При $a>8$ множество решений содержит отрезок длины 4, но не входит в отрезок длины 7.

Пусть $a\in(-\infty;-7)$, тогда решения $(a;0)$ не содержатся в отрезке длины 7. При $a\in[-7;-4)$ решения $(a;0)$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $[-7;-4)$.

ЯГУБОВ.РФ

Пример 89. (МИОО, тренировочная работа, декабрь 2010). *Найти все значения параметра* a, *при каждом из которых система*

$$\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \ge 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Группируя члены в левой части первого уравнения системы, ее можно разложить на множители

$$y^2 + xy - 7x - 14y + 49 =$$
$$= (y^2 - 14y + 49) + (xy - 7x) =$$
$$= (y - 7)^2 + x(y - 7) = (y - 7)(y + x - 7).$$

Тогда первое уравнение системы равносильно совокупности двух линейных уравнений

$$y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 7, \\ y = -x + 7. \end{array}\right.$$

Второе уравнение системы $y = ax + 1$ задает семейство прямых, проходящих через точку с координатами $(0; 1)$.

Исходная система будет иметь единственное решение при тех значениях параметра a, при которых соответствующая прямая из этого семейства имеет только одну точку пересечения с прямой $y = 7$ или прямой $y = -x + 7$ в полуплоскости, расположенной правее прямой $x = 3$ (см. рис. 25).

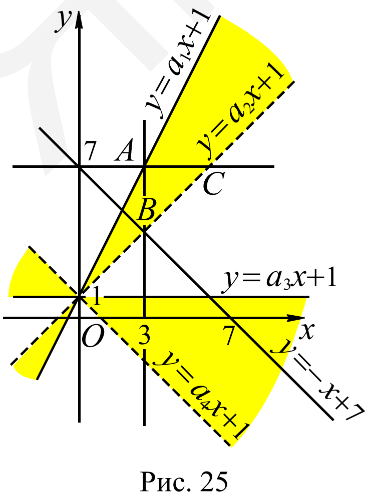


Рис. 25

Имеется четыре критических положения для прямых $y = ax + 1$:

I. Прямая $y = a_1x + 1$ проходит через точку $A(3; 7)$. Из уравнения $7 = 3a_1 + 1$ получаем $a_1 = 2$.

II. Прямая $y = a_2x + 1$ проходит через точку пересечения прямых $x = 3$ и $y = -x + 7$ с координатами $B(3; 4)$. Из уравнения $4 = 3a_2 + 1$ получаем $a_2 = 1$.

III. Прямая $y = a_3x + 1$ параллельна прямой $y = 7$, т.е. $a_3 = 0$.

IV. Прямая $y = a_4x + 1$ параллельна прямой $y = -x + 7$, т.е. $a_4 = -1$.

Соответственно, данная в условии система будет иметь единственное решение, если прямая $y = ax + 1$ будет проходить в области на плоскости Oxy выделенной фоном, что соответствует значениям параметра $-1 < a \le 0$ или $1 < a \le 2$.

Ответ. $(-1; 0] \cup (1; 2]$.

Пример 90. (ЕГЭ 2010, С5). *Найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение*

$$x^2 + (a + 4)^2 = |x + a + 4| + |x - a - 4|$$

имеет единственный корень.

Решение. Введем обозначение $a + 4 = b$, тогда уравнение примет вид

$$x^2 + b^2 = |x + b| + |x - b|. \; (*)$$

Раскроем знаки модулей и построим графики полученных уравнений в плоскости bOx.

$$1) \begin{cases} x \ge -b, \\ x \ge b, \\ x^2 + b^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -b, \\ x \ge b, \\ (x-1)^2 + b^2 = 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \le -b, \\ x \ge b, \\ x^2 + b^2 = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -b, \\ x \ge b, \\ x^2 + (b+1)^2 = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x \ge -b, \\ x \le b, \\ x^2 + b^2 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -b, \\ x \ge b, \\ x^2 + (b-1)^2 = 1. \end{cases}$$

4) $\begin{cases} x \le -b, \\ x \le b, \\ x^2 + b^2 = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -b, \\ x \le b, \\ (x+1)^2 + b^2 = 1. \end{cases}$

График уравнения (∗) состоит из четырех полуокружностей (см. рис. 26). Проводя прямые, параллельные оси x, получим одну общую точку с построенным графиком при $b = -2$ или $b = 2$. Функция $a(b) = b - 4$ с переменной b является возрастающей, поэтому каждому значению b соответствует единственное значение a. Таким образом исходное уравнение имеет единственное решение при $a = -6$ или $a = -2$.

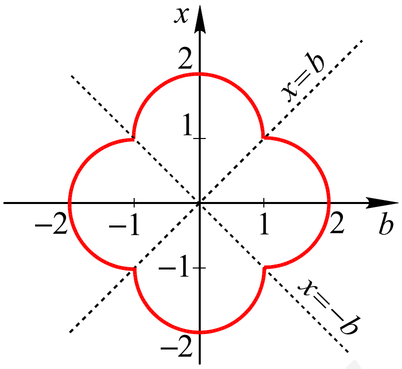


Рис. 26

Ответ: $-6, -2$.

4. Геометрические методы решения

В случае применения графических методов решения систем уравнений и неравенств используется геометрическая интерпретация уравнений или неравенств, связанная с геометрическим смыслом модуля, формулы расстояния между двумя точками на плоскости, неравенством треугольника, или метод наглядной графической интерпретации с использованием графического образа задачи на координатной плоскости Oxy.

отрезки

Пример 91. (№16, § 15 сборника С5 2011). *Для каждого значения a решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 14x - 10a + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + a^2 - 16x - 12a + 100} + \\ \quad + \sqrt{x^2 + a^2 + 4x - 20a + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x-8)^2 + (a-6)^2} + \\ + \sqrt{(x+2)^2 + (a-10)^2} = 2\sqrt{29}.$$

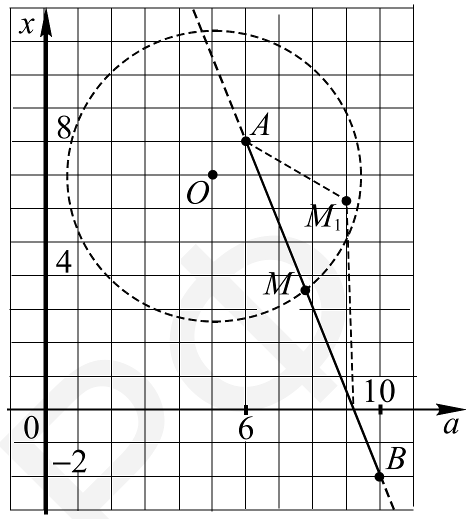


Рис. 27

Заметим, что левая часть этого уравнения – сумма расстояний от точки $M(a, x)$ до точек $A(6, 8)$ и $B(10, -2)$ (см. рис. 27), причем расстояние между точками A и B равно $2\sqrt{29}$. Для любой точки M_1, не принадлежащей прямой AB сумма расстояний $AM_1 + M_1B > 2\sqrt{29}$ (неравенство треугольника). Для точки M, принадлежащей прямой AB сумма расстояний $AM + MB = 2\sqrt{29}$, только в случае, если M – точка отрезка AB.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид $x = -\frac{5}{2}a + 23$.

Точки отрезка AB имеют координаты $\left(a, -\frac{5}{2}a + 23\right)$, где $6 \le a \le 10$.

Подставляя $x = -\frac{5}{2}a + 23$ в первое уравнение системы, получим

$$\left(-\frac{5}{2}a + 23\right)^2 + a^2 - 14 \cdot \left(-\frac{5}{2}a + 23\right) - \\ -10a + 58 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{29}{4}a^2 - 90a + 265 = 0.$$

Откуда

$$a=\frac{90\pm\sqrt{90^2-29\cdot 265}}{\frac{29}{2}}=\frac{180\pm 2\sqrt{415}}{29}.$$

Заметим, что значение $a_1=\frac{180-2\sqrt{415}}{29}<$

$<\frac{180-2\sqrt{400}}{29}=\frac{140}{20}<5$ не удовлетворяет условию $6\le a\le 10$.

Для значения $a_2=\frac{180+2\sqrt{415}}{29}$ получаем $\frac{180+2\sqrt{400}}{29}<a_2<\frac{180+2\sqrt{441}}{29}$, т.е. $7<\frac{220}{29}<a_2<\frac{222}{29}<8$. Тогда

$$x=-\frac{5}{2}\left(\frac{180+2\sqrt{415}}{29}\right)+23=\frac{217-5\sqrt{415}}{29}.$$

Ответ. Если $a=\frac{180+2\sqrt{415}}{29}$, то $x=\frac{217-5\sqrt{415}}{29}$; при остальных a решений нет.

Замечание. Заметим, что первое уравнение системы можно преобразовать к виду

$$x^2+a^2-14x-10a+58=0 \iff$$
$$\iff (x-7)^2+(a-5)^2=4^2.$$

Получили уравнение окружности радиуса 4 с центром в точке $O(5;\,7)$ (см. рис. 27). Эта окружность имеет единственную общую точку с отрезком AB.

окружность и отрезок

Пример 92. *Найти все значения а, при которых система уравнений*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+64+16x}+\sqrt{x^2+y^2+36-12y}=10,\\ x^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет два решения.

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=10.$$

Пусть $M(x;\,y)$ – точка координатной плоскости (см. рис. 28), тогда левая часть этого уравнения есть сумма расстояний от точки M до точек $M_1(-8;\,0)$ и $M_2(0;\,6)$.

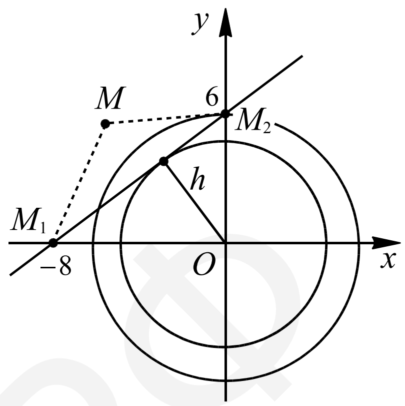


Рис. 28

Так как расстояние между точками M_1 и M_2 равно 10, то координаты точки M удовлетворяют первому уравнению системы в том и только в том случае, когда M лежит на отрезке M_1M_2. В самом деле, если M не принадлежит прямой M_1M_2, то указанная сумма расстояний больше 10 (неравенство треугольника). В случае, когда точка M лежит на прямой M_1M_2 вне отрезка M_1M_2, эта сумма также больше 10.

Второе уравнение системы $x^2+y^2=a^2$ задает семейство окружностей радиуса $|a|$ с центром в точке *O*. Условию задачи будет удовлетворять окружность, имеющая две общие точки с отрезком M_1M_2. Это возможно, если радиус окружности $|a|$ будет больше радиуса, при котором окружность касается отрезка M_1M_2 (в этом случае $|a|=h$, где h – высота в треугольнике OM_1M_2, опущенная из точки O на M_1M_2 (см. рис. 28), т.е. $h=\frac{6\cdot 8}{10}=\frac{24}{5}$ и меньше или равен OM_2, т.е. $|a|\le 6$.

Отсюда $\frac{24}{5}<|a|\le 6$.

Ответ. $-6\le a<-\frac{24}{5}$, $\frac{24}{5}<a\le 6$.

окружность и прямая

Пример 93. *Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений* $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a \end{cases}$ *имеет единственное решение.*

Решение. Изобразим в одной координатной плоскости графики, заданные уравнениями системы (см. рис. 29).

На рисунке видно, что система будет иметь единственное решение, если прямая $y=a-x$ касается окружности $x^2+y^2=1$ и ее решениями будут координаты точек E и D.

Найдем значение a, при котором прямая касается окружности, для чего рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ODA (это действительно так, ибо прямая $y=-x$, а значит и прямая $y=a-x$, составляют с положительным направлением оси Ox угол в $45°$). Так как $OD=AD=1$, по теореме Пифагора получаем $a=OA=\sqrt{2}$.

Тогда второе значение a, при котором прямая $y=a-x$ касается окружности $x^2+y^2=1$, будет равно $(-\sqrt{2})$.

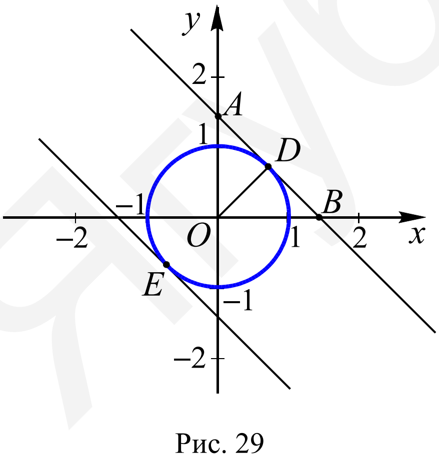


Рис. 29

Ответ: $a=\pm\sqrt{2}$.

Пример 94. (МИОО, диагностическая работа, 2011). *Найти все значения параметра* a, *при каждом из которых система*

$$\begin{cases} |x+2y+1|\le 11, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. (1-*й способ*). Неравенство системы задает полосу с границами-прямыми $x+2y=10$ и $x+2y=-12$. Уравнение системы при $a<-2$ не определено. Если $a=-2$, то уравнение $(x+2)^2+(y+4)^2=0$ задает точку $C(-2;-4)$, принадлежащую полосе, так как выполняется неравенство $|-2-8+1|\le 11$ (см. рис. 30).

При $a>-2$ уравнение системы задает

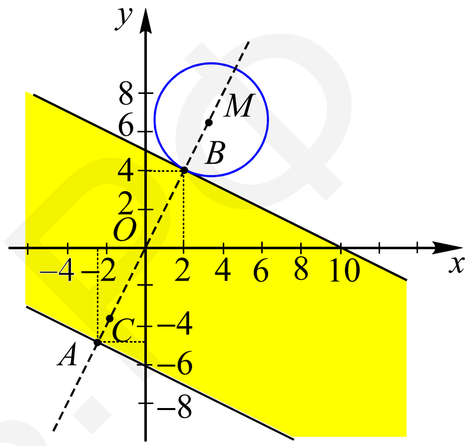


Рис. 30

окружность с центром $M(a, 2a)$ и радиусом $r=\sqrt{2+a}$. Окружность будет иметь единственную точку с полосой, если она будет касаться полосы, и центр ее при этом будет лежать вне полосы.

Центры семейства окружностей, заданных уравнением системы при $a>-2$, лежат на прямой $y=2x$, которая пересекает прямую $x+2y=10$ в точке $B(2;4)$ и прямую $x+2y=-12$ в точке $A(-2{,}4;-4{,}8)$. Окружность будет касаться полосы в точках A или B, при этом в первом случае абсцисса центра окружности $a<-2{,}4$, а во втором – $a>2$. Точка A не подходит, так как значение $a<-2{,}4$. Так как точка B принадлежит окружности, то имеем

$$(2-a)^2+(4-2a)^2=a+2.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение $5a^2-21a+8=0$, корни которого $a=1{,}2$ (не удовлетворяют условию $a>2$) или $a=3$.

Ответ: $-2;3$.

ЯГубов.РФ

Замечание. Другой способ решения задачи связан с применением формулы расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной на координатной плоскости Oxy уравнением $ax+by+d=0$:

$$\rho(M, l)=\frac{|ax_0+by_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (*)$$

Расстояние от центра $M(a, 2a)$ окружности до прямой $x+2y-10=0$ равно радиусу $r=\sqrt{2+a}$. Отсюда получаем одно уравнение

$$\frac{|a+2a-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{2+a}$$

с корнями $a=1{,}2$ или $a=3$.

Расстояние от центра $M(a, 2a)$ окружности до второй прямой $x+2y+12=0$ равно радиусу $r=\sqrt{2+a}$. Отсюда получаем второе уравнение

$$\frac{|a+2a+12|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{2+a},$$

не имеющее корней.

Формулу $(*)$ легко получить из формулы расстояния от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением $ax+by+cz+d=0$ ([1], стр. 116):

$$\rho(M, l)=\frac{|ax_0+by_0+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (**)$$

Действительно, уравнение

$$ax+by+d=0$$

задает плоскость α, перпендикулярную плоскости Oxy. Пересекая плоскость α плоскостями $z=c$, получаем прямые. В случае $z=0$ получаем прямую, заданную на плоскости Oxy уравнением $ax+by+d=0$. Поэтому расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $ax+by+d=0$ в плоскости Oxy равно расстоянию от точки $M(x_0, y_0, 0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax+by+d=0$. Отсюда из формулы $(**)$ получаем формулу $(*)$.

окружности (круги)

Пример 95. *При каких значениях параметра a система неравенств*

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y\le a^2-5, \\ x^2+y^2-8x-14y\ge 4a^2+12a-56 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Данную систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2\le a^2, \\ (x-4)^2+(y-7)^2\ge(2a+3)^2. \end{cases}$$

При $a=0$ система примет вид

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2\le 0, \\ (x-4)^2+(y-7)^2\ge 3^2 \end{cases}$$

и будет иметь единственное решение $(-2;-1)$.

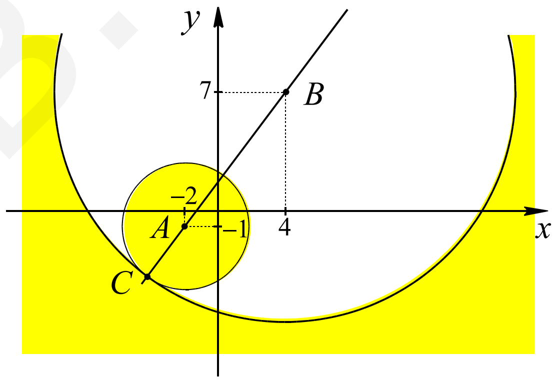


Рис. 31

При $a\ne 0$ первое неравенство системы задает круг радиуса $|a|$ с центром в точке $A(-2;-1)$, второе неравенство – внешность круга радиуса $|2a+3|$ с центром в точке $B(4;7)$, включая и границу этого круга. При $a=-1{,}5$ второму неравенству системы удовлетворяют координаты всех точек плоскости.

Расстояние между центрами этих кругов равно

$$AB=\sqrt{(4+2)^2+(7+1)^2}=10.$$

Единственное решение система будет иметь в случае, если круг с центром в точке A содержится внутри круга с центром в точке B и касается его границы. В этом случае круги касаются, и координаты точки касания C – единственное решение системы (см. рис. 31). Данная ситуация возможна, если

$$|a|+10=|2a+3|.$$

Решая последнее уравнение, получим $a=-13$ и $a=7$.

Ответ. $-13; 0; 7$.

Пример 96. (МФТИ, 2008). *Найти все значения параметра a, при которых система*

$$\begin{cases} x^2+y^2+49\le 10(|x|+|y|), \\ x^2+y^2-4x=a^2-4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Данная система будет равносильна следующим системам

$$\begin{cases} (x^2-10|x|+25)+(y^2-10|y|+25)\le 1, \\ (x^2-4x+4)+y^2=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|x|-5)^2+(|y|-5)^2\le 1, & (1) \\ (x-2)^2+y^2=a^2. & (2) \end{cases}$$

При $x\ge 0$, $y\ge 0$ неравенство (1) системы задает круг радиуса 1 с центром в точке $O_1\,(5;5)$. Поскольку для любой пары чисел (x, y), удовлетворяющей неравенству (1) пары чисел $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ также удовлетворяют неравенству (1), то геометрическое место точек F_1 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют (1) – точки четырех кругов радиуса 1, выделенных на рис. 32 фоном.

Геометрическое место точек F_2 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют уравнению (2) – точки окружности радиуса $|a|$ с центром в точке $M(2; 0)$. Тогда (см. рис. 32):

$$MO_1=MO_4=\sqrt{(5-2)^2+(5-0)^2}=\sqrt{34},$$

$$MO_2=MO_3=\sqrt{(-5-2)^2+(5-0)^2}=\sqrt{74}.$$

Для касающихся окружностей справедливо утверждение: «их центры и точки касания лежат на одной прямой». Следовательно, (см. рис. 32):

$$MA=MO_1-AO_1=\sqrt{34}-1,$$
$$MB=MO_1+OB_1=\sqrt{34}+1,$$
$$MC=\sqrt{74}-1 \text{ и } MD=\sqrt{74}+1.$$

Так как $\sqrt{34}<6$, $\sqrt{74}>8$, то $\sqrt{34}+1<6+1=8-1<\sqrt{74}-1$.

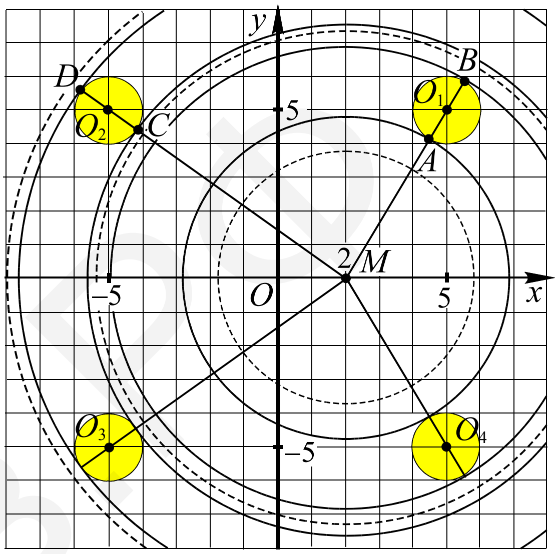


Рис. 32

Система будет иметь решение, если множества F_1 и F_2 имеют хотя бы одну общую точку. Это возможно, если радиус окружности, равный $|a|$, множества F_2 удовлетворяет неравенствам:

$$\sqrt{34}-1\le|a|\le\sqrt{34}+1$$

или

$$\sqrt{74}-1\le|a|\le\sqrt{74}+1.$$

Ответ: при $|a|\in[\sqrt{34}-1; \sqrt{34}+1]\cup$
$\cup[\sqrt{74}-1; \sqrt{74}+1]$,
при остальных a решений нет.

симметрические выражения

Приведем свойства графика уравнения $\varphi(x;y)=0$, где выражение $\varphi(x;y)$ обладает симметрией относительно знака, либо симметрией относительно перестановки переменных.

Пусть G – график уравнения $\varphi(x;\,y)=0$.

1. Если $\varphi(-x;\,y)=\varphi(x;\,y)$, то график G имеет ось симметрии Oy.
2. Если $\varphi(x;\,-y)=\varphi(x;\,y)$, то график G имеет ось симметрии Ox.
3. Если $\varphi(-x;\,-y)=\varphi(x;\,y)$, то график G имеет центр симметрии O.
4. Если $\varphi(y;\,x)=\varphi(x;\,y)$, то график G имеет ось симметрии прямую $y=x$.

Пример 97. *При каких действительных значениях параметра а система*

$$\begin{cases} 3\,|\,x\,|+2\,|\,y\,|=12, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Решение. Уравнение $3\,|\,x\,|+2\,|\,y\,|=12$ задает ромб, точка пересечения диагоналей которого – начало координат (0;0), $OA=4$, $OB=6$ (см. рис. 33).

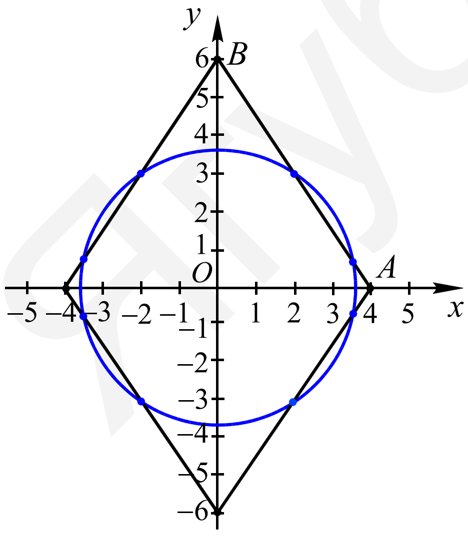


Рис. 33

Выражения $3\,|\,x\,|+2\,|\,y\,|$ и x^2+y^2 не меняют свой вид при замене x на $-x$ и y на $-y$. Поэтому ромб и окружность имеют общие оси симметрии Oy и Ox. Так как окружность с прямой (отрезком) может иметь самое большее две общие точки, то данная система имеет наибольшее число решений, когда окружность $x^2+y^2=a$ пересекает каждую сторону ромба в двух внутренних точках (общее количество – восемь точек). Это возможно тогда, когда радиус этой окружности ($r=\sqrt{a}$) больше половины его меньшей диагонали.

Рассмотрим треугольник AOB: высота, проведенная к гипотенузе AB, равна $h=\dfrac{OB\cdot OA}{AB}$, где $OA=4$, $OB=6$, $AB=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$, $h=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$. Значит, $\dfrac{12\sqrt{13}}{13}<\sqrt{a}<4$ или $\dfrac{144}{13}<a<16$.

Ответ: $a\in\left(\dfrac{144}{13};16\right)$.

Пример 98. *Сколько решений имеет система уравнений*

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ |\,x\,|+|\,y\,|=a \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра а?

Решение. Отметим, что при $a<0$ второе уравнение не имеет решений. Если $a=0$, то второе уравнение имеет решение (0; 0), но оно не является решением первого уравнения. Пусть $a>0$. Графиком первого уравнения системы является окружность с центром (0; 0) и радиуса 1. Второе уравнение задает семейство гомотетичных квадратов с центром гомотетии (0; 0) (см. рис. 34).

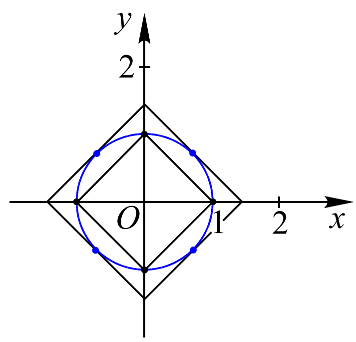


Рис. 34

Выражения $|\,x\,|+|\,y\,|$ и x^2+y^2 не меняются при замене x на $-x$ и y на $-y$.

Значит, квадрат и окружность имеют общие оси симметрии *Oy* и *Ox*, и окружность с прямой (отрезком) может иметь две общие точки (пересечение), одну общую точку (касание), не иметь общих точек, то данная система может иметь четное количество различных решений, или не иметь решений.

Если квадрат находится внутри окружности, то система не имеет решений. Когда квадрат окажется вписанным в окружность (при $a = 1$), система будет иметь четыре решения. При $a = \sqrt{2}$ квадрат будет описанным около окружности и решений системы станет опять четыре. Если брать промежуточные значения $a \in (1; \sqrt{2})$, то каждая сторона квадрата имеет две общие точки с окружностью, а значит, система будет иметь восемь решений. При $a > \sqrt{2}$ система решений не имеет.

Ответ: При $a < 1$ или $a > \sqrt{2}$ решений нет;
при $a = 1$ или $a = \sqrt{2}$ – четыре решения;
при $1 < a < \sqrt{2}$ – восемь решений.

Пример 99. *Найти значения параметра а, при которых система уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Первое уравнение системы задает окружность радиуса 1 с центром (0; 0). Второе уравнение $y = |x| + a$ задает семейство «уголков» с вершиной на оси *Oy* (см. рис. 35). Так как выражения $x^2 + y^2$ и $y - |x|$ не меняются при замене x на $-x$, то графики уравнений системы имеют общую ось симметрии $x = 0$.

Рассмотрим случай касания окружности и угла.

Так как $\angle AOB = 45°$, $OA = AB = 1$, $OB = \sqrt{2}$, то $a = -\sqrt{2}$.

Из рисунка видно, что условию задачи удовлетворяют следующие значения $a \in \{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

Ответ: $\{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

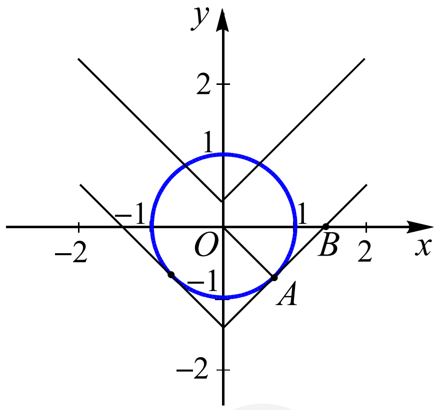


Рис. 35

Пример 100. (Пробный вариант № 51 от ФЦТ, ЕГЭ 2011). *Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + 12x + |y| + 27 = 0, \\ x^2 + (y - a)(y + a) = -12(x + 3). \end{cases}$$

а) *имеет ровно два решения*;
б) *имеет ровно четыре решения*;
в) *имеет ровно шесть решений*;
г) *имеет ровно восемь решений*;
д) *не имеет решений.*

Решение. Приведем данную систему уравнений к следующему виду

$$\begin{cases} |y| = 9 - (x + 6)^2, \\ (x + 6)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение системы задает график, состоящий из частей парабол (вершины $(-6; -9)$ и $(-6; 9)$), симметричных относительно оси *Ox* и обладающей осью симметрии $x = -6$. Второе уравнение системы задает семейство окружностей (при $a \neq 0$) с центром $(-6; 0)$ и радиусом $r = |a|$, и также имеющих оси симметрии $x = -6$ и $y = 0$. Поэтому график первого уравнения может иметь четное количество общих точек с окружностью, либо не иметь общих точек.

График первого уравнения системы пересекает ось x в двух точках, которые найдем из уравнения $9 - (x + 6)^2 = 0$: $x = -9$ или $x = -3$.

На рисунке 36 изображены особые случаи расположения окружности.

1. Окружность проходит через точки

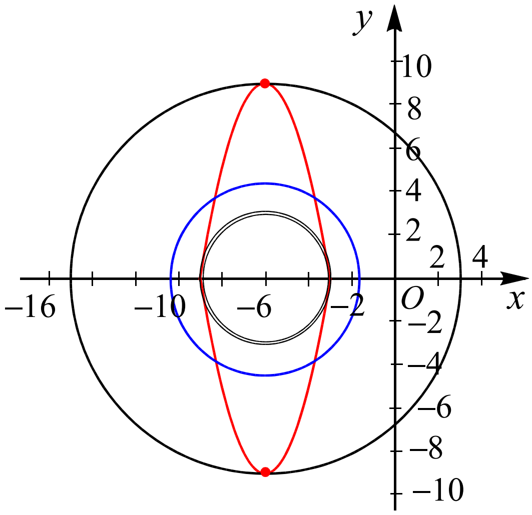


Рис. 36

$(-6;-9)$ и $(-6;9)$ и имеет радиус $r=|a|=9$.

2. Окружность проходит через точки $(-9;0)$ и $(-3;0)$ и имеет радиус $r=|a|=3$.

3. Окружность касается парабол. Для нахождения радиуса окружности в этом случае достаточно рассмотреть четвертую часть конфигурации, расположенную в области $-6\le x\le -3,\ 0\le y\le 9$.

Система будет иметь вид

$$\begin{cases} y=9-(x+6)^2, \\ (x+6)^2+y^2=a^2, \end{cases}$$

из которой исключаем переменную x:

$$y^2-y+9-a^2=0.$$

Чтобы окружность имела с параболой единственную общую точку в рассматриваемой области, поставим условие для дискриминанта

$$D=1-4(9-a^2)=0.$$

Отсюда $r=|a|=\dfrac{\sqrt{35}}{2}$.

Таким образом, окружность (в частности точка) не имеет общих точек с графиком (состоящий из частей парабол), если $0\le r=|a|<\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ или $r=|a|>9$; имеет:

две различные общие точки при $r=|a|=9$;

ровно шесть общих точек при $r=|a|=3$;

ровно восемь общих точек при $\dfrac{\sqrt{35}}{2}<r=|a|<3$;

ровно четыре общие точки при $r=|a|=\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ или $3<r=|a|<9$.

***Ответ*:** при $a\in(-\infty;-9)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{35}}{2};\dfrac{\sqrt{35}}{2}\right)\cup$ $\cup(9;+\infty)$ решений нет;
при $a=\pm9$ два решения;
при $a\in(-9;-3)\cup\left\{-\dfrac{\sqrt{35}}{2};\dfrac{\sqrt{35}}{2}\right\}\cup(3;9)$ – четыре;
при $a=\pm3$ – шесть;
при $a\in\left(-3;-\dfrac{\sqrt{35}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{35}}{2};3\right)$ – восемь.

Упражнения

1. (МГУ, 2002). При каких значениях параметра b уравнение

$$9x+b^2-(2-\sqrt{3})b-2\sqrt{3}=b^4x-b^2(b+\sqrt{3})$$

имеет бесконечно много корней?

2. (МГУ, 1982). Для каких значений a решение уравнения

$$10x-15a=13-5ax+2a$$

больше 2?

3. (МИЭТ, 2003). Найдите наименьшее целое число a, при котором уравнение

$$3x^2-9x+a^2=0$$

имеет хотя бы одно решение.

4. (МГУ, 2003). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+(a+1)x+1=0$$

имеет единственное решение.

5. При каких значениях a уравнение

$$ax^2-x+3=0$$

имеет единственное решение?

6. При каких значениях a уравнение

$$(a-2)x^2+(4-2a)x+3=0$$

имеет единственное решение?

7. При каких значениях a уравнение

$$ax^2-4x+a+3=0$$

имеет более одного корня?

8. При каких значениях a уравнение

$$a(a+3)x^2+(2a+6)x-3a-9=0$$

имеет более одного корня?

9. (МИЭТ, 2002). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение:

а) $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+a=0$ имеет ровно один корень;

б) $x^3-3x^2-24x+a=0$ имеет ровно два различных корня.

10. (МГУ, 1990). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)x^2+(|a+2|-|a+10|)\cdot x+a=5$$

имеет два различных положительных корня.

11. (МГУ, 1992). При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$$x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

12. (МФТИ, 2003). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$ax^2+(4a-7)x+4a-5=0$$

имеет в точности один корень на отрезке $[-4;0]$.

13. (МИОО, 2010). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения

$$3ax^2+\left(3a^3-12a^2-1\right)\cdot x-a(a-4)=0$$

удовлетворяют неравенству $|x|\le 1$.

14. Для каждого значения параметра a укажите количество корней уравнения

а) $x|x-2|-a=0$; б) $|x^2-5x+4|+a=0$.

15. (МГУ, 2000). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнения

$$(2a-1)x^2+6ax+1=0 \text{ и } ax^2-x+1=0$$

имеют общий корень.

16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение:

а) $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$ имеет два различных корня одного знака;

б) $(a^2+3a-4)x^2-(3a+1)x+1=0$ имеет два различных корня, расположенных по разные стороны от числа 1.

17. (МИЭТ, 2003). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$5x^4+7ax+2a^2=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

18. (ЕГЭ, 2007). Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-3;-1)$ значение выражения x^4-7x^2-3 **<u>не равно</u>** значению выражения ax^2.

19. (МГУ, 1996). При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 - x + 2)$$

имеет ровно 3 различных решения?

20. (МГУ, 1997). При каких значениях a уравнения

$$(2x-1)a^2 - (x^2 - x + 1)a - (x^3 - 4x^2 + 3) = 0$$

и

$$(5-3x)a^2 + (5x^2 - 5x - 2)a - \\ -(2x^3 - 8x^2 + 6) = 0$$

не имеют общего решения?

21. При каких значениях a уравнение

$$\frac{x^2 - ax + 1}{x+3} = 0$$

имеет единственное решение?

22. (Экзаменационная работа за курс средней школы, 2000 г.). При каких значениях m имеет единственный корень уравнение:

а) $1999^{2x} - 4 \cdot 1999^x - 3m + m^2 = 0$;

б) $2000^{2x} - 6 \cdot 2000^x + m^2 - 8m = 0$?

23. (Экзаменационная работа за курс средней школы, 1994 г.). При каких значениях a уравнение

$$x^2 - (3a-1) \cdot |x| + 2a^2 - a = 0$$

имеет четыре различных решения?

24. (МГУ, 1994). При каких значениях a уравнение

$$2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных решения?

25. (МГУ, 2003). При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x - 9a| - 2a^2 + 35 + x = 0$$

не имеет решений? При каких значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30; 63]$?

26. (МГУ, 2005). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение:

а) $4x - \left|3x - |x + a|\right| = 9|x - 3|$ имеет два различных корня;

б) $3x + \left|2x + |a - x|\right| = 7|x + 2|$ имеет хотя бы один корень.

27. (МГУ, 2005). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$5x - \left|3x - |x + a|\right| = 10|x - 2|$$

имеет хотя бы один корень.

28. (МГУ, 1992). Найдите все значения параметра c, при которых уравнение

$$|x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2| = x^2 - 4x + c$$

имеет ровно три различных решения.

29. (МГУ, 1992). Найдите все значения параметра k, при которых уравнение

$$2x - |x - k^2| = 11k - 3|x + 4k|$$

а) не имеет решений;

б) имеет конечное непустое множество решений.

30. (МГУ, 1984). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$2|x - a| + a - 4 + x = 0$$

принадлежат отрезку $[0; 4]$.

31. (МГУ, 2000). Найдите все значения параметра a, при которых при любых значениях параметра b уравнение

$$|x - 2| + b|2x + 1| = a$$

имеет хотя бы одно решение.

32. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$$

имеет единственный корень.

33. (МИЭТ, 2001). При каких a уравнение

$$4|x - a| + a - 2 + 2x = 0$$

имеет решения и все решения удовлетворяют неравенству $-2 \le x \le 1$?

34. (Экзаменационная работа за курс средней школы, 1994 г.). При каких значениях параметра a уравнение

$$x + 2 = a|x - 1|$$

имеет единственное решение? Найдите это решение.

35. При каких значениях параметра a уравнение $x-a=\left||2x|-1\right|$ имеет ровно три корня?

36. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2\left|2|x|-a^2\right|=x-a$$

имеет ровно три различных решений.

37. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x)=2\left|2|x|-a^2\right|-x+a$$

имеет две различных точки перемены знака.

38. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left||5x|-10\right|=a+3x$$

имеет ровно три различные решения. Для каждого полученного значения a найдите все эти решения.

39. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-|x^2+2x-3|-a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

40. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|-a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

41. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение

а) $|x+2|=ax+1$; б) $|x-4|=ax+2$?

42. Найдите значения параметра a, при которых уравнение

$$|x^2-5x+6|=ax$$

имеет ровно три различных решения.

43. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|x^2-4x+3|=a(x-1)$$

имеет два различных корня. Укажите эти корни.

44. (МГУ, 2004). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-5|x|\right|=a(x+4)$$

имеет ровно три различных корня.

45. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ay=x+2, \\ |y|=|x-1| \end{cases}$$

имеет единственное решение?

46. Выясните, при каких значениях a уравнение $|x+2|+a|x-1|=3$:

а) имеет единственный корень, и найдите его;

б) имеет ровно два корня, и найдите их;

в) имеет бесконечное множество корней.

47. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых имеет ровно один корень уравнение

а) $|2x-a|+1=|x+3|$;

б) $1=|x-3|-|2x+a|$.

48. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2+|x-1|=0$$

имеет три решения?

49. Сколько решений в зависимости от значений параметра a имеет уравнение

$$|x^2+2x-3|=a?$$

50. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a+4x-x^2-1)\cdot(a+1-|x-2|)=0$$

имеет ровно три различных корня.

51. (МИЭТ, 2001). При каких значениях параметра a уравнение

$$(|x-2|-a-4)\cdot(a+6+x^2-4x)=0$$

имеет ровно три различных корня?

52. (МИЭТ, 2001). При каких значениях параметра a уравнение

$$(|2x-2a+3|+|2x-4a+3|-4)\times$$
$$\times(4ax^2+32ax-2x+39a-13)=0$$

имеет ровно три различных корня?

53. (МГУ, олимпиада «Ломоносов», 2005). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение:

$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

54. (МГУ, 2003). При каких значениях a уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2+4a\cos(2\pi x)-9a^3=0$$

имеет единственное решение?

55. Определить в зависимости от значений параметра a количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} y-4=a(x-2), \\ \dfrac{2y}{|x|+x}=\sqrt{y}. \end{cases}$$

56. (МФТИ, 2008). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|ax^2-6|=|2ax|+|3a|$$

имеет хотя бы одно действительное решение.

57. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$$

имеет ровно три корня.

58. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y^2-x^2\ge 4(y-1), \\ y^2+x^2+5a^2+1\le a^2+4a(x+1)-2(x+ay) \end{cases}$$

имеет решение.

59. При каких значениях параметра a число корней уравнения $\big|x^2-8|x|+7\big|=a$ равно a?

60. При каких значениях параметра a уравнение $|x+a|=\dfrac{x}{2}+1$ имеет не более одного корня?

61. При каких значениях параметра a уравнение

$$|3x+6|+|3x-8|=12-ax$$

имеет не более одного корня?

62. (МГУ, 2005). При каких значениях параметра a уравнение

$$|x|+\left|\frac{x+1}{3x-1}\right|=a$$

имеет ровно три различных решения?

63. (МИЭТ, 2003). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2\big||x|-2\big|=ax-2a+1$$

имеет ровно три различных решения.

64. Найдите все значения параметра a, при которых количество корней уравнения

$$(2{,}5-a)x^3-2x^2+x=0$$

равно количеству общих точек линий

$$x^2+y^2=a \text{ и } y=3-|x-1|.$$

65. Определите значения параметра a, при которых уравнение имеет ровно 7 действительных корней, и найдите эти корни, если:

а) $(|x|-4)^2+a\,\big||x|-4\big|+4=0$;

б) $(x^2-5)^2-7|x^2-5|+a=0$.

66. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет единственное решение?

67. (МГУ, 2007). При каких значениях c данное уравнение имеет единственное решение?

а) $-\sqrt{16-x^2}=c+x$; б) $\sqrt{x+c}=x+3$.

68. (МГУ, 1994). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$$

имеет ровно одно решение.

69. При каких значениях параметра a уравнение

$$6\sqrt{x-2}=ax+7$$

имеет единственное решение?

70. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x-9}=ax+7a-3$$

имеет единственное решение.

71. (МГУ, 2007). Для каждого значения a из промежутка $(-3;0)$ найдите число различных решений уравнения

$$(2x^2-5ax+2a^2)\cdot\sqrt{x-\frac{2}{a}}=0.$$

72. (МИЭТ, 2002). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x^2-2(2a+1)x+8a\right)\cdot\sqrt{x-9a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

73. При каких значениях параметра a имеет ровно два различных корня уравнение

$$\sqrt{x+2a^2}\cdot(x^2+(2-a)x-2a)=0\,?$$

74. (МИОО, 2010). При всех a решите уравнение

$$x-\sqrt{a-x^2}=1.$$

75. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данное уравнение имеет решение:

а) $\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}}=2x-x^2$;

б) $\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\frac{x^2}{4}}}+x+\frac{x^2}{4}=0$.

76. Найдите все пары a и b, для каждой из которых уравнение

$$b+\sqrt{4-(x-3+a)^2}=2+|3-x-a|$$

имеет ровно два корня.

77. (МИЭТ, 2006). При каких значениях параметра a уравнение

$$4^x+(a^2-7)\cdot 2^x+a^2+5a-2=0$$

имеет два различных корня, сумма которых равна 2?

78. (МГУ, 2005). При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)\cdot 4^x+\left(2a-3\right)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

79. (МГУ, 1993). Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$9^x+\left(b^2+6\right)\cdot 3^x-b^2+16=0$$

не имеет решения.

80. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$36^x-(8a+5)\cdot 6^x+16a^2+20a-14=0$$

имеет единственное решение.

81. (НГУ, 1994). При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{2x+2}-6^{x+1}+a\cdot 4^x=0$$

имеет единственное решение?

82. (МГУ, 2007). При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x-3\cdot 2^{3x+1}+2\cdot 4^{x+1}-(4-4a)\cdot 2^{x-1}-$$
$$-a^2+2a-1=0$$

имеет три различных корня?

83. (МГУ, 1985). При каждом значении параметра a решить уравнение

$$4^x-2a(a+1)\cdot 2^{x-1}+a^3=0.$$

84. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a}-4^{x^2-5x+4a}=x^2-8x+a$$

не имеет действительных решений.

85. (МГУ, 1999). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$$

имеет нечетное число решений.

86. (МГУ, 2000). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-5,5}(x^2+1)=\log_{a-5,5}((a-4)x)$$

имеет два различных решения.

87. При каких значениях a уравнение

$$2\log_3^2 x-\left|\log_3 x\right|+a=0$$

имеет четыре различных корня?

88. (МФТИ, 2004). При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2(4^x+\log_2 a)=x$$

имеет единственное решение.

89. При каких значениях параметра a данное уравнение имеет хотя бы одно решение: а) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=a$;

б) $|2\sin x - 3\cos x| = a$; в) $a\cos x - \sin x = 3$?

90. При каких значениях параметра a данное уравнение имеет хотя бы одно решение:

а) $\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = a$;

б) $|5\sin^2 x + \cos x - 7| = a$?

91. (МИЭТ, 2003). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$8a\sin\frac{x}{3} - (a^2 - 16)\cos\frac{x}{3} = 12a - 16$$

имеет хотя бы одно решение.

92. (ЕГЭ, 2003). Найдите все значения p, при которых уравнение

$$7 - 2\cos x = p\left(1 + \mathrm{tg}^2 x\right)$$

имеет хотя бы один корень.

93. (МГУ, 1989). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a^2 - 6a + 9\right)\left(2 + 2\sin x - \cos^2 x\right) + \\ + \left(12a - 18 - 2a^2\right)\cdot(1 + \sin x) + a + 3 = 0$$

не имеет решений.

94. (МГУ, 2001). Для каждого значения a найдите все решения уравнения

$$\cos 2x + 2\sin^2(x + a) + 2 - \sin a = 0,$$

принадлежащие промежутку $\pi \le x \le 2\pi$.

95. (МГУ, 1999). При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $0 \le x < 2\pi$?

96. (МГУ, 2003). При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\sin x - \log_4 a\right)(\sin x - 2 + 2a) = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$?

97. (МГУ, 2002). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a - 1)\cos^2 x - (a^2 + a - 2)\cos x + \\ + 2a^2 - 4a + 2 = 0$$

имеет более одного решения на отрезке $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$.

98. (МГУ, 1996). Для каждого значения a найдите число решений уравнения

$$a\,\mathrm{tg}\,x + \cos 2x = 1,$$

принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$.

99. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение:

а) $\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$ имеет ровно десять различных решений;

б) $\sin\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 0$ имеет ровно восемь различных решений;

в) $\sin\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 0$ имеет ровно шесть различных решений.

100. (МГУ, 2004) При каких значениях параметра a уравнение

$$(1 + \sin(3ax))\sqrt{5\pi x - x^2} = 0$$

имеет ровно 5 различных корней?

101. (МГУ, 1993). При каких значениях a, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, уравнение $\sqrt{2\sin(x - a) + \sqrt{3}} = \cos 6x - 1$ имеет решения?

102. (МИЭТ, 2001). Найдите все значения параметра a, при которых имеет хотя бы одно решение уравнение:

а) $\arccos(\cos x) - 3(x + 4)^2 + a = 0$;

б) $(x - 2)^2 - 0{,}2\arcsin(\sin x) + a = 0$.

103. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(x - 3a) + \sin\left(\frac{x^2 - 6x + 7a}{2}\right) = \\ = 4x - x^2 - a$$

не имеет действительных решений.

104. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\frac{10x - 2x^2 - a}{3}\right) - \cos(2x + a) = \\ = x^2 - 8x - a$$

имеет единственное решение.

105. (ЕГЭ, 2003). Найдите все значения p, при которых уравнение

$$4\sin^3 x = p + 7\cos 2x$$

не имеет корней.

106. Найдите сумму корней уравнения

$$4x^4 - 2x^2 = 6 - 2\cos 3x$$

на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

107. (ЕГЭ, 2008). Решите уравнение:

а) $x^6 - |4x+3|^3 = 25\cos(x^2) - 25\cos(4x+3)$;

б) $x^8 + 90\cos(15-8x) = 90\cos x^2 + (15-8x)^4$.

108. При каких значениях параметра a уравнение $a(4\cos x - 7|x|) = 3 + 6^x + 6^{-x}$ имеет нечетное число корней? Определите при найденных значениях параметра число корней уравнения и найдите все его корни.

109. (МГУ, 1998). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cos\frac{x^2-1}{x} + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет единственное решение.

110. (НГУ, 1991). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{1-a}\left(2 - \cos x + \sin\frac{x}{2}\right) = 2$$

имеет решение.

111. (МГУ, 2008). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{4}\right)\log_{\sqrt{17}+4}\left(x+4+\sqrt{x^2+8x+17}\right) = a^2 - a\sin\left(\pi\cdot\frac{x^2+8x-64}{32}\right) - 2$$

имеет единственное решение, и определите это решение.

112. (МГУ, 2008). Найдите все значения параметра a из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+\sqrt{3}\cdot y| + |y-\sqrt{3}\cdot x| = 2\sin a, \\ (\sqrt{3}\cdot x + y)^2 + (\sqrt{3}\cdot y - x)^2 = 4\cos a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

113. (МГУ, 1995). Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

имеет единственное решение.

114. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\arcsin x + \arcsin(ax) = \frac{2\pi}{3}$$

имеет решение.

115. (МФТИ, 1994). Найдите все значения параметра a, $-\pi < a < \pi$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (1-4x^2-4y^2)(4x^2+15-12y) = 0, \\ y\cos a + x\sin a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

116. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, для каждого из которых неравенство

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

а) выполняется для всех x;
б) выполняется для всех $x > 0$;
в) выполняется для всех $x < 0$;
г) выполняется для всех $-1 < x < 0$.

117. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых из неравенств $0 \le x \le 1$ следует неравенство

$$(a^2+a-2)x^2 - (a+5)x - 2 \le 0.$$

118. (МГУ, 1994). Найдите такие значения x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

119. (МИЭТ, 2003). При каких значениях параметра a каждое число из промежутка $[5; 7]$ является решением неравенства

$$ax^2 + 2(1-5a)x + 25a - 16 \le 0\,?$$

120. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств

$$x^2-2x\le a-1 \text{ и } x^2-4x\le 1-4a$$

образуют на числовой оси отрезок длины единица.

121. (МГУ, 1987). Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество всех решений неравенства

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2\le 1$.

122. (МГУ, 1974). Найдите все значения a, при которых неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполняется для всех таких x, что $1\le x\le 2$.

123. (МИЭТ, 2004). При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{(a-x)(x+3)}{2x^2-3x+7}>0$$

не имеет решений?

124. (МФТИ, 1996). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\frac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7}\le a$$

является верным при всех значениях x.

125. (ЕГЭ, 2004). Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$1-\frac{a}{x}<\frac{8}{x}\left(1-\frac{a+2}{x}+\frac{2a}{x^2}\right)$$

содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

126. (МГУ, 1994). Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases}-x^2+12x-a\ge 0,\\ x\le 2\end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x?

127. (МИЭТ, 2000). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$ax^4+x^3\ne 16$$

выполняется при всех x.

128. (МИЭТ, 2003). При каких значениях параметра a неравенство

$$x^2+3|x-a|+a+x-3\le 0$$

имеет хотя бы одно неположительное решение?

129. (МГУ, 2000). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left|x^2-2x+a\right|>5$$

не имеет решений на отрезке $[-1;2]$.

130. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$2x+2|x-a|+|x-1|>3$$

выполняется для любого x.

131. (МГУ, 2005). Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии $|2x+4-2a|+|x-2+a|\le 3$.

132. (МИОО, 2010). Найдите все пары чисел p и q, для каждой из которых неравенство

$$|x^2+px+q|>2$$

не имеет решений на отрезке $[1;5]$.

133. (МИЭТ, 1998). При каких значениях параметра a существует единственное значение x, являющееся решением неравенства $\sqrt{2ax-x^2}\ge a-x$?

134. (МГУ, 1996) Определите, при каких значениях a решения неравенства

$$\sqrt{x+a}\ge x$$

образуют на числовой прямой отрезок длиной $2|a|$.

135. (МГУ, 1992). Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;5]$ удовлетворяют неравенству

$$3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0.$$

136. При каких значениях a неравенство $\sqrt{1-x^2}>a-x$ имеет решение?

137. (МИЭТ, 1998). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $a\cdot 3^x+a>1$ выполняется при всех x.

138. (МГУ, 1995). Найдите все значения параметра *a*, при которых неравенство

$$16^x<30\cdot 4^x-a$$

не имеет ни одного целочисленного решения.

139. (МГУ, 1988). Найдите наибольшее значение параметра *a*, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}\cdot(x^2-2x+1)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\le \sqrt[4]{a^3}\cdot\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

140. (МГУ, 1988). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство

$$|\sin^2 x-2(a-1)\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x+2-a|\le 6.$$

141. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых решения данного неравенства образуют отрезок длины 1:

а) $|2x-a|+1\le|x+3|$;
б) $|3x-a|+2\le|x-4|$.

142. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений данного неравенства является отрезок:

а) $\sqrt{3-x}+|x-a|\le 2$; б) $\sqrt{5-x}+|x+a|\le 3$.

143. (МИЭТ, 2001). Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства

$$|3-4x|\cdot\sqrt{x-x^2}\ge(2ax+0{,}5-a)\cdot|3-4x|$$

является отрезок длиной 0,5.

144. (МИЭТ, 2001). При каких значениях параметра a уравнение

$$4^x+2^{x+2}+7=a-4^{-x}-2\cdot 2^{1-x}$$

имеет решение?

145. (МГУ, 2002). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$4^x+4^{-x}+8|2^x+2^{-x}-a|+11a<26+2a(2^x+2^{-x})$$

имеет хотя бы одно решение.

146. (МИЭТ, 2001). При каких значениях параметра a неравенство

$$0{,}0001^{3\log_a x-8}>0{,}1^{\log_a^2 x}$$

выполняется не для всех x из интервала $(16;256)$?

147. (МИОО, 2011). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_2(4y+4a-3)=1+\log_2(a-x),\\ y=\sqrt{x}\end{cases}$$

имеет решение.

148. (ЕГЭ, 2003). Найдите все значения *a*, при которых область определения функции

$$y=\left(a^{x+0,5}+\sqrt{x}\cdot a^4-x^{0,5+x\log_x a}-a^{4,5}\right)^{0,5}$$

содержит ровно одно целое число.

149. (ЕГЭ, 2003). Из области определения функции

$$y=\log_7\left(a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}\right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения *a*, при которых такая сумма будет больше 7, но меньше 11.

150. (МИЭТ, 2004). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2\log_{a-1}x+3\log_{(a-1)x^2}(a-1)+5=0$$

имеет ровно два различных корня, расстояние между которыми меньше 0,24.

151. (МГУ, 2005). Найдите все значения *a*, при которых неравенство

$$\log_a\left(x^2+4\right)>1$$

выполняется для всех значений x.

ЯГУБОВ.РФ

152. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств

$$y+2x \geq a \text{ и } y-x \geq 2a$$

являются решениями неравенства

$$2y-x > a+3.$$

153. Определите, при каких значениях a имеет бесчисленное множество решений система уравнений $\begin{cases} 3x+ay=3, \\ ax+3y=3. \end{cases}$

154. Определите, при каких значениях параметра a не имеет решений система уравнений:

$$\begin{cases} ax+3y=a^2+1, \\ (3a+14)x+(a+8)y=5a^2+5. \end{cases}$$

155. Исследуйте систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a^2x+(2-a)y=-4+a^3, \\ ax+(2a-1)y=2-2a^3. \end{cases}$$

156. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x+py=1, \\ px+y=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

157. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c, такое, что система уравнений

$$\begin{cases} bx+y=ac^2, \\ 2x+(b+1)y=ac+1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

158. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система уравнений:

$$\begin{cases} (|x|+1)a=y+\cos x, \\ \sin^2 x+y^2=1. \end{cases}$$

159. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$$

имеет два решения.

160. (МГУ, 2006). Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2xy-ax-2ay+a^2-2=0, \\ x^2+4y^2-8ax-4ay-7a^2-20a=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

161. (МИОО, 2011). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |a|^{x-y}=\log_2 x-6, \\ x-\log_2 x=y-6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

162. (МИЭТ, 1998). Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x+2y=a, \\ 2x+y=3 \end{cases}$ имеет решение, удовлетворяющее условиям $x>0,\ y>0$.

163. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+y^2-1)(y-\sqrt{6}\,|x|)=0, \\ 2ay+x=1+a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

164. (МГУ, олимпиада «Ломоносов», 2008). При каких значениях a существует единственное решение системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (x+4)^2+(y+3)^2=a? \end{cases}$

165. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3xy+3ax-ay-a^2-3=0, \\ 9x^2+9y^2-6ax+18ay+7a^2-2a-17=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

166. Найдите значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y-|x|=a \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

167. (НГУ, 1992). Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-2a+2|=y, \\ |y-a+2|=x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

ЯГубов.РФ

168. (МФТИ, 2002). Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_2(5x+7y+2)=\log_2(x+2y+1)+2,\\ (y+2a)^2+y=x+a+0{,}5\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

169. (МИОО, тренировочная работа, декабрь 2010). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}y^2+xy-4x-9y+20=0,\\ y=ax+1,\\ x>2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

170. Найдите все значения параметра a, при которых данная система уравнений имеет ровно два действительных решения:

а) $\begin{cases}|x|+2|y|+|2y-3x|=12,\\ x^2+y^2=a;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2|x|+|y|+|3x-4y|=10,\\ x^2+y^2=a.\end{cases}$

171. (МФТИ, 2010). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}|x-1|+|x+1|-2y=0,\\ x^2+y^2-2ay+2a=1\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

172. (МИОО, 2011). Найдите все значения a, при которых система уравнений:

а) $\begin{cases}4|y-3|=12-3|x|,\\ y^2-a^2=3(2y-3)-x^2\end{cases}$ имеет ровно четыре решения;

б) $\begin{cases}5|x+2|=60-12|y|,\\ 4(x+1)+y^2=a^2-x^2\end{cases}$ имеет ровно восемь решений.

173. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}x+\sqrt{y}=1,\\ a+3-\sqrt{y}=\dfrac{1}{2}(a-x)^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

174. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_5(y+3)-2\log_{25}x=0,\\ (x+a)^2-2(y+6)-9a=0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

175. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-1-4a)^2+(y-1-3a)^2=9a^2,\\ (x-5)^2+(y-3)^2=4\end{cases}$$

имеет единственное решение.

176. (МГУ, 2001). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}a(x+2)+y=3a,\\ a+2x^3=y^3+(a+2)x^3\end{cases}$$

имеет не более двух решений.

177. (МГУ, 1966). Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}2^{|x|}+|x|=y+x^2+a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет только одно решение.

178. (МГУ, 1966). Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases}xyz+z=a\\ xyz^2+z=b\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$$

имеет только одно решение.

179. (МГУ, 2007). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+(5+2\sqrt{6})^x-5a=y-|y|-8,\\ x^2-(a-4)y=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

180. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases}(x-y)^2+4|x|+4(y-x)=-b^2-2a-5,\\ |y-x+2|-|-y-2|-1=a^2-2b\end{cases}$$

имеет минимальное число решений.

181. (МИОО, 2010). Найдите все значения p, при каждом из которых найдется q такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q\,|\,x\,| + p \end{cases}$$

имеет единственное решение.

182. (МИОО, 2010). Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q\,|\,x\,| + p \end{cases}$$

имеет решения.

183. При каком значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + 3\,|\,y\,| + 5 = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет три различных решения?

184. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y + a = ax^2, \\ |\,x\,| + |\,y\,| = 2 \end{cases}$$

а) имеет пять решений;
б) имеет наибольшее число решений?

185. (МГУ, 2006). Определите, при каких значениях параметра b при любых значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0, \\ y + ax + ab = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения $(x; y)$.

186. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |\,y\,| = x^2 - 4, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

187. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет решение?

188. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 64 - 16x} + \\ \qquad + \sqrt{x^2 + y^2 + 36 + 12y} = 10, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

189. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \le a^2$.

190. (МИОО). Найдите все пары a и b, для каждой из которых имеет не менее пяти решений $(x; y)$ система уравнений

$$\begin{cases} bx(2x-y) + (y-1)(2x-y) = bx + y - 1, \\ 4x^2 + y^2 + axy = 1. \end{cases}$$

191. (МИОО). Найдите значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение $(x; y)$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x. \end{cases}$$

192. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |\,7x + 7y - 24\,| \le |\,x - y\,|, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = \dfrac{6-a}{25} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

193. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |\,7x + 7y - 24\,| \ge x - y, \\ (x-a)^2 + \left(y + a - \dfrac{24}{7}\right)^2 = \dfrac{84-a}{1225} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

194. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система неравенств:

а) $\begin{cases} y \ge (x-a)^2, \\ x \ge (y-a)^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \ge (x+y)^2 - x - 2y + a, \\ x \ge (y-x)^2 - 3y + 2x + a. \end{cases}$

195. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \ge \dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \le -2 \end{cases}$$

имеет решение.

196. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 - 4x + 2y \le -5, \\ x^2 + y^2 - 4a^2 + 8x - 14y \le 12a - 56 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

197. (МГУ, 2009). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество точек координатной плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2 - 16x + 10y + 65}{x^2 + y^2 - 14x + 12y + 79} \le 0, \\ (x-a)(y+a) = 0 \end{cases}$$

является отрезком.

198. Определить значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x - a \ge -1, \\ x^2 - 3x \le a - 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

199. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2ay - a^2 + 1, \\ y + a \le |x| \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

200. (МФТИ, 2008). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 31 \le 8\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

201. (МГУ, 1997). При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x-y) + xy \le 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

202. (МГУ, 1984). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \ge x^2 + 2a, \\ x \ge y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

203. (МГУ, 2001). Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \le 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

204. Найдите все значения параметра a, при которых данная система неравенств имеет единственное решение:

а) **(МФТИ, 2004)** $\begin{cases} x^2 - x + a \le 0, \\ x^2 + 2x - 6a \le 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 2x - a \le 0, \\ x^2 - 4x + a \le 0. \end{cases}$.

205. (МГУ, 1994). Найдите все значения параметра b, при каждом из которых имеет единственное решение система неравенств

$$\begin{cases} by^2 + 4by - 2x + 7b + 4 \le 0, \\ bx^2 - 2y - 2bx + 4b - 2 \le 0 \end{cases}$$

206. (МГУ, 2001). При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \le k^2 + 10k + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2kx + 4ky \le 5 - k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

207. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)(ax - 2a - 3) \ge 0, \\ ax > 4 \end{cases}$$

не имеет решений.

Ягубов.РФ

208. (МГУ, 2001). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\ge 0, \\ x^3-(a+3)x^2+3ax\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

209. (МГУ, 1967). Найдите все значения a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}\ge 0, \\ x-8>ax; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+ax+a}{x-2a-2}\ge 0, \\ x+ax>8. \end{cases}$

210. (МГУ, 1967). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2+(a-3)x+\dfrac{2}{a}-2a\ge 0, \\ ax\ge a^2-2 \end{cases}$$

не имеет решений.

211. (МГУ, 1967). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{a^2x+2a}{ax-2+a^2}\ge 0, \\ ax+a>\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

не имеет решений.

212. (МГУ, 1994). При каких значениях параметров a и b система неравенств

$$\begin{cases} a+\sin bx\le 1, \\ x^2+ax+1\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

213. (МИОО, 2011). Найдите все положительные значения a, при каждом из которых имеет единственное решение данная система:

а) $\begin{cases} 8x-15y=36, \\ x^2+y^2=a^2, \\ -4\le y\le 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+3y=13, \\ x^2+y^2=a^2, \\ 1\le x\le 4. \end{cases}$

214. (МИОО, диагностическая работа, 2011). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x-y+2|\le 12, \\ (x-3a)^2+(y+a)^2=3a+4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

215. (Пробный вариант № 52 от ФЦТ, ЕГЭ 2011). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-8x+|y|+12=0, \\ x^2+(y-a)(y+a)=8(x-2) \end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

Ответы

1. $-\sqrt{3}$. **2.** $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$. **3.** -2. **4.** 0; 1. **5.** $0;\dfrac{1}{12}$. **6.** 5. **7.** $(-4;0)\cup(0;1)$. **8.** $\{-3\}\cup\left(-\dfrac{1}{3};0\right)\cup(0;+\infty)$. **9. а)** $a<-3{,}5$, $a>10$; **б)** $a=-28$ и $a=80$. **10.** $5<a<7$. **11.** $a=-3$, $S=18$. **12.** $\left(-\dfrac{23}{4};\dfrac{5}{4}\right]$. **13.** $\{0\}\cup[2+\sqrt{3};\,2+\sqrt{5}]$. **14. а)** При $a<0$ и $a>1$ одно решение; при $a=0$ и $a=1$ – два; при $0<a<1$ – три; **б)** при $a<-2{,}25$ и $a=0$ два решения; при $a=-2{,}25$ – три; при $-2{,}25<a<0$ – четыре. **15.** $-\dfrac{3}{4};0;\dfrac{2}{9}$. **16. а)** $(1;1{,}5)\cup(2;6)$; **б)** $(-4;-2)\cup(1;2)$. **17.** $0,\pm 1,\pm 2{,}5$. *Указание.* Рассмотреть уравнение как квадратное относительно a. **18.** $a\le -9$, $a>5/3$. **19.** $a=\pm\sqrt{2}$; $a=\pm\dfrac{1+\sqrt{15}}{4}$. *Указание.* Разложить на множители. Например, обозначив $t=x^2-x+2$ и получив уравнение $(t-a^2)^2-4a^2x^2=0$. **20.** $a\ne -0{,}75$; $a\ne 0$; $a\ne 1$. **21.** $\pm 2;-\dfrac{10}{3}$. **22. а)** $[0;3]\cup\{-1;4\}$; **б)** $[0;8]\cup\{-1;9\}$. **23.** $(0{,}5;1)\cup(1;+\infty)$. **24.** $\left(0;\dfrac{1}{8}\right)$. **25.** $\left(-\dfrac{5}{2};7\right)$; $\left[\dfrac{9-\sqrt{211}}{2};-\dfrac{5}{2}\right]\cup\{7\}$. *Указание.* Привести уравнение к виду $2|x-9a|-2a^2=-x-35$. График левой части – «уголок», вершина которого $(9a;-2a^2)$ перемещается по параболе $y=-\dfrac{2}{81}x^2$. **26. а)** $(-24;18)$; **б)** $a\le -12$

ЯГубов.РФ

или $a \ge 8$. **27.** $-18 \le a \le 14$. **28.** $4; \dfrac{19}{4}$. **29.** **а)** $(-23; 0)$; **б)** $a < -23$, $a > 0$. **30.** $\dfrac{4}{3} \le a \le 2$. **31.** 2,5. *Указание.* Использовать свойства модуля. **32.** 0; 1. *Указание.* Рассмотреть условие касания графиков в точке $(0; 1)$. **33.** $-\dfrac{2}{5} \le a \le \dfrac{2}{3}$. **34.** При $-1 < a \le 1$ единственное решение $x = \dfrac{a-2}{a+1}$. **35.** $-0{,}5$; -1. **36.** -2; $-0{,}5$. *Указание.* Использовать функционально-графический метод. **37.** $(-\infty; -2] \cup \cup [-0{,}5; 0) \cup (2; +\infty)$. **38.** При $a = 6$ $x_1 = -2$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 8$ и при $a = 10$, $x_1 = -2{,}5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 10$. **39.** $(-3{,}5; 1)$. **40.** $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **41. а)** При $a \in (0{,}5; 1]$ решений нет; при $a \in (-\infty; -1] \cup \{0{,}5\} \cup \cup (1; +\infty)$ – одно; при $a \in (-1; 0{,}5)$ – два; **б)** при $a \in [-1; -0{,}5)$ решений нет; при $a \in (-\infty; -1) \cup \{-0{,}5\} \cup [1; +\infty)$ – одно; при $a \in (-0{,}5; 1)$ – два. **42.** $5 - 2\sqrt{6}$. **43.** $a \in (-\infty; -2) \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$, $x = 1$, $x = a + 3$. **44.** 0; 1. **45.** ± 1. **46. а)** $|a| > 1$, $x = 1$; **б)** $|a| < 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{a-5}{a+1}$; **в)** $a = 1$ и $a = -1$. **47. а)** $-4; -8$; **б)** $-4; -8$. **48.** $a = -0{,}25$. **49.** Если $a < 0$, то решений нет, если $a = 0$ или $a > 4$, то – два; если $a = 4$, то – три; если $0 < a < 4$, то – четыре. **50.** -1. **51.** $-4, -2$. **52.** 0, $-0{,}1$, ± 1, $\pm\dfrac{1}{3}$. **53.** $-7 < a < 5$. **54.** $a_1 = 0$, $a_2 = -\dfrac{2}{3}$. *Указание.* Ввести новую переменную $t = x - 1$ и использовать симметрию относительно знака t. **55.** При $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$ и $a = 4$ два решения; при $a = 0$ и $a \in [2; 4]$ – одно; при $a \in (2; 4) \cup (4; +\infty)$ – три. *Указание.* Использовать метод графической интерпретации. **56.** $a \le -1{,}5$, $a > 0$. **57.** $a = 5$. **58.** $\left[-\dfrac{1}{3}; 3\right]$. **59.** 7. **60.** $a \ge 2$. *Указание.* Использовать функционально-графический метод. **61.** $a = 1$, $a = -0{,}75$, $a \le -6$, $a \ge 6$. *Указание.* Использовать функционально-графический метод. **62.** 2. *Указание.* Использовать функционально-графический метод или инвариантность, заметив, что $\dfrac{\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)+1}{3\cdot\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)-1} = x$. **63.** $\dfrac{1}{4}; -\dfrac{3}{2}$. *Указание.* Использовать функционально-графический метод. **64.** $2{,}5; 8; 10$. **65. а)** При $a = -5$ корни $\pm 8; \pm 5; \pm 3; 0$; **б)** при $a = 10$ корни $\pm\sqrt{10}$, $\pm\sqrt{7}$, $\pm\sqrt{3}$, 0. **66.** $a = 1{,}25$ или $a < 1$. **67. а)** $\{-4\sqrt{2}\} \cup (-4; 4]$; **б)** $c = 2{,}75$; $c > 3$. **68.** $[2;3) \cup (3;4]$. **69.** $a \in [-3{,}5; 0]$; $a = 1$. **70.** $0 < a < \dfrac{3}{16}$, $a = \dfrac{1}{4}$. **71.** Если $-3 < a \le -2$, то одно решение; если $-2 < a \le -1$, то два; если $-1 < a < 0$, то три. **72.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{3} < a \le 0$, $\dfrac{4}{9} \le a < \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **73.** $\{-2\} \cup [-1; -0{,}5) \cup (0; 1]$. **74.** Если $a < 1$, то решений нет; если $a \ge 1$, то $x = \dfrac{\sqrt{2a-1}+1}{2}$. **75. а)** $\left[-\dfrac{1}{12}; 0\right]$. *Указание.* Ввести новую переменную $t = 2x - x^2$. Далее рассмотреть уравнение $f(f(t)) = t$. **б)** $\left[-\dfrac{1}{20}; 0\right]$. **76.** $a \in \mathbf{R}$, $0 < b \le 4$. **77.** 1. **78.** $(-\infty; 1] \cup \left\{\dfrac{5}{4}\right\} \cup \cup \left[\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$. *Указание.* Свести задачу к исследованию расположения относительно нуля корней квадратного уравнения $(a-1)t^2 - (2a-3)t - (3a-4) = 0$. **79.** $[-4; 4]$. **80.** $-\dfrac{7}{4} < a \le \dfrac{1}{2}$. **81.** $(-\infty; 0] \cup \{1\}$. **82.** $(0;1) \cup (1;4) \cup (4;5)$. *Указание.* Разложить на множители. **83.** При $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ единственное решение $2\log_2|a|$; при $a = 1$ единственное решение 0; при $a > 0$, $a \ne 1$ два решения $\log_2 a$, $2\log_2 a$. **84.** $a > 16$. **85.** 1; -1. *Указание.* Использовать симметрию относительно знака x. **86.**

$(6;\,6{,}5)\cup(6{,}5;\,+\infty)$. **87.** $(0;\,0{,}125)$. **88.** $a=\sqrt[4]{2}$, $0<a\le 1$. **89. а)** $-2\le a\le 2$; **б)** $0\le a\le\sqrt{13}$; **в)** $|a|\ge 2\sqrt{2}$. **90. а)** $-\frac{3\sqrt{2}+1}{2}\le a\le\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$; **б)** $0{,}195\le a\le 8$. **91.** $a\in(-\infty;\,-12]\cup[0;\,4]\cup\ \cup[8;\,+\infty)$. **92.** $(0;\,9]$. **93.** $a<-3;\ 1<a<6$. **94.** $\frac{3\pi}{2}$ при $a=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; при других a решений нет. *Указание.* Применить метод оценки, сначала преобразовав уравнение. **95.** $a=-2;\ a=1$. **96.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\{1\}\cup\left(\frac{3}{2};4\right]$. **97.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{10}\right]\cup\{1\}$. *Указание.* Привести уравнение к виду $(a-1)f(\cos x)=0$, а далее исследовать квадратный трехчлен. **98.** При $a<-1,\ a=0,\ a>1$ три решения; при $a=\pm1$ – пять; при $-1<a<1,\ a\ne 0$ – семь. **99. а)** $(-10\pi;\,-8\pi)\cup(8\pi;\,10\pi)$; **б)** $(-4\pi;\,-3\pi)\cup(3\pi;\,4\pi)$**;** **в)** $(-3\pi;\,-2\pi)\cup$ $\cup(2\pi;\,3\pi)$. **100.** $\left[-\frac{13}{30};-\frac{3}{10}\right)\cup\left(\frac{11}{30};\frac{1}{2}\right]$. **101.** $-\frac{\pi}{3};\ 0;\ \frac{\pi}{3}$. **102. а)** $a\ge\frac{47}{12}-2\pi$; **б)** $a\le 0{,}2\pi-0{,}39$. **103.** $a>4$. *Указание.* Привести уравнение к виду

$$2x+\sin(x-3a)=2\left(-\frac{x^2-6x+a}{2}\right)+$$

$$+\sin\left(\left(-\frac{x^2-6x+a}{2}\right)-3a\right).$$ Далее рассмотреть функцию $y(t)=2t+\sin(t-3a)$. **104.** $a=-16$. **105.** $(-\infty;\,-7)\cup(11;\,+\infty)$. **106.** 0. *Указание.* Показать, что уравнение не имеет корней на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$. **107. а)** -3; -1; $2\pm\sqrt{7}$; **б)** 3; 5; $-4\pm\sqrt{31}$. **108.** При $a=1{,}25$ единственный корень 0. **109.** $-1{,}5$. *Указание.* Уравнение не изменится при замене x на $\frac{1}{x}$.

110. $[-1;\,0)\cup\left(0;\,1-\frac{\sqrt{14}}{4}\right]$. **111.** При $a=1$ $x=-4$. *Указание.* Выполнить замену $t=x+4$. Использовать симметрию относительно знака t. **112.** $a_1=\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a_2=\arccos(\sqrt{2}-1)$. *Указание.* Ввести новые переменные $u=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$, $v=\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Далее использовать симметрию относительно знаков и перестановки переменных u и v. **113.** 2. *Указание.* Использовать симметрию относительно знака x. **114.** $[0{,}5;\,2]$. **115.** $\left(-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};-\arccos\frac{3}{4}\right)\cup$ $\cup\left(\arccos\frac{3}{4};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$**.** *Указание.* Использовать метод графической интерпретации. Ответ получается из условия $-\frac{1}{2}<\cos a<\frac{3}{4},\ \cos a\ne 0$**.** **116. а)** $a>1$; **б)** $a>1$; **в)** $a\ge 0$; **г)** $a\ge-\frac{1}{3}$. **117.** $[-3;3]$. **118.** $[3-\sqrt{6};2]\cup[5;3+\sqrt{6}]$. **119.** $a\le 0{,}5$. **120.** $0{,}25$; 1. **121.** $p\le 0$, $p\ge 3$. **122.** $\frac{1}{2}<a<1$. **123.** -3. **124.** $a\ge\frac{14}{3}$. **125.** $[-7;\,-4)$. **126.** $a\le 20$. **127.** $a<-\frac{3}{16}$. **128.** $-\frac{7}{2}\le a\le\frac{3}{4}$. **129.** $[-4;2]$. **130.** $(1{,}5;+\infty)$. **131.** $[-1;\,5]$. **132.** $p=-6,\ \ q=7$. **133.** 0. **134.** $2;\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. **135.** $a<\frac{5}{3}$. *Указание.* Учесть монотонность функции $y=2\sqrt{3x+1}$ и взаимное расположение на отрезке $[1;5]$ ее графика и графика прямой $y=(6-3a)-a+5$. **136.** $a<\sqrt{2}$. **137.** $a\ge 1$. **138.** $a\ge 224$. **139.** $\frac{1}{16}$. *Указание.* Использовать то, что $t+\frac{1}{t}\ge 2$ при $t>0$.

140. $[1;\,5{,}8]$. *Указание.* Использовать ограниченность тригонометрического двучлена $-\sqrt{A^2+B^2}\le A\cos 2x+B\cos 2x\le$ $\le\sqrt{A^2+B^2}$. **141. а)** $a_1=-2{,}5,\quad a_2=-9{,}5$; **б)** $a_1=2,\quad a_2=22.$ **142. а)** $(-1;\,1)\cup[1{,}25;\,5)$; **б)** $(-8;\,-2{,}25]\cup(-2;\,4)$. **143.** $a\le-0{,}5$. **144.** $a\ge17$. *Указание.* Замена $t=2^x+2^{-x}$, где $t\ge2$. **145.** $a\in(-8;\,-4)\cup(7;\,+\infty)$. *Указание.* Замена $t=2^x+2^{-x}$, где $t\ge2$. Далее рассмотреть функцию $f(t)=(t-a)^2+8\,|\,t-a\,|+16=$ $=(|\,t-a\,|+4)^2$. **146.** $\sqrt{2}<a<4$. **147.** $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$. **148.** $(3;\,5)$. **149.** $\left(4;\frac{39}{9}\right]$. **150.** $\left(\frac{11}{6};\,2\right)\cup\left(2;\,\frac{8}{3}\right)\cup(3{,}5;\,+\infty)$. **151.** $(1;4)$. **152.** $a>\frac{9}{8}$. **153.** 3. **154.** -6. **155.** При $a=-1$ или $a=1$ решений нет; при $a=0$ бесконечно много решений вида $(c;\,-2)$, где $c\in\mathbf{R}$; при $a\notin\{-1;\,0;\,1\}$ одно решение вида $\left(\frac{3a^2-6}{2a^2-2};\frac{-2a^4-a^3+2a+4}{2a^2-2}\right)$. **156.** $p\in(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,1)\cup(1;\,+\infty)$. **157.** $(-\infty;\,-8]\cup[4;\,+\infty)$. **158.** $a=2$. *Указание.* Использовать симметрию относительно знака x. **159.** 2,5. **160.** $\frac{1}{3}$, 2. *Указание.* Замена $u=x-a,\ v=y-\frac{a}{2},\ b=3a^2+5a$. **161.** $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ или $-e^{\frac{1}{e}}<a<-1$. **162.** $1{,}5<a<6$. **163.** $a=\frac{\sqrt6}{3}$, $a=\frac{\sqrt6}{2}$, $-\frac{1}{2\sqrt6}<a\le\frac{1}{2\sqrt6}$. **164.** $a_1=4,\quad a_2=64$. **165.** $a_1=-1$ и $a_2=\frac{1}{3}$. **166.** $\{-\sqrt2\}\cup(-1;1)$. **167.** $\frac{4}{3}$. *Указание.* Использовать графическую интерпретацию. **168.** $-\frac{5}{2}<a\le-\frac{1}{4}$. **169.** $-1<a\le0$, $1\le a<1{,}5$. **170. а)** $a_1=\frac{9}{2},\quad a_2=\frac{117}{4}$; **б)** $a=2$, $a=\frac{2500}{121}$. **171.** $2+\sqrt2$. **172. а)** $(-4;\,-3)\cup(3;\,4)\cup\left\{-\frac{12}{5},\frac{12}{5}\right\}$; **б)** $\left(-5;\,-\frac{60}{13}\right)\cup\left(\frac{60}{13};\,5\right)$. **173.** $a=-1{,}25$, $-1<a\le5$. **174.** $-1\le a\le\frac{9+\sqrt{105}}{2}$. **175.** 1; $\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$. *Указание.* Использовать условие касания окружностей – расстояние между центрами равно сумме радиусов в случае внешнего касания и модулю разности радиусов в случае внутреннего. **176.** $\{-1\}\cup[-0{,}5;0)\cup(0;0{,}5]\cup\{1\}$. *Указание.* Привести к виду $\begin{cases}y=a(1-x),\\ a(x-1)(x^2+x+1-a^2(x-1)^2=0.\end{cases}$ **177.** 0. *Указание.* Использовать симметрию относительно знака x. **178.** $a=b=-2$. *Указание.* Использовать симметрию относительно знака x и y. **179.** 2; 4. **180.** Одно решение при $a=-1;\,b=1$. **181.** $p=-1$, $p=1$. **182.** $-1\le p\le1$. **183.** $a=-7$. **184. а)** $-2;2$; **б)** $\left(-2;\,-\frac{2+\sqrt3}{2}\right)\cup\left(\frac{2+\sqrt3}{2};\,2\right)$. **185.** $(-4;-1)$. **186.** $a=4$. **187.** $a\ge8$ **188.** $-8\le a<-6,\quad a=\pm\frac{24}{5},\quad 6<a\le8$. **189.** $(-\infty;\,-1{,}25\sqrt5]\cup[1{,}25\sqrt5;\,+\infty)$. **190.** $a=-4;\quad b\in\mathbf{R}$; $a=4;\,b=2$. **191.** -2. *Указание.* Использовать симметрию относительно перестановки переменных x и y. **192.** $\frac{69}{49};2$. **193.** 3. **194. а)** $a=-0{,}25$. *Указание.* Использовать симметрию относительно перестановки переменных x и y; **б)** $a=2{,}25$. *Указание.* Использовать симметрию относительно знака x. **195.** $a>1$. *Указание.* Умножая первое неравенство на 2, а второе на (-1), и складывая их, получим $(x+3y)^2\le-\frac{4}{a+1}$. Отсюда $a<-1$. Далее достаточно показать, что при любом $a<-1$ система имеет решение. Так как в этом случае $\frac{1-a}{1+a}=\frac{2}{1+a}-1<-1$, то достаточно показать, что система $\begin{cases} x^2+2xy-7y^2=-1, \\ 3x^2+10xy-5y^2=-2 \end{cases}$ имеет решение. **196.** $-\frac{13}{3}$ и $\frac{7}{3}$. **197.** $(5-2\sqrt{6};8-2\sqrt{6})\cup$ $\cup(5+2\sqrt{6};8+2\sqrt{6})$. **198.** $-1,25$ и 5. **199.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **200.** $4\le|a|\le\sqrt{41}+1$. **201.** 0. *Указание.* Использовать симметрию выражений относительно знака обеих переменных. **202**. $a=\frac{1}{8}$**. 203.** $-\frac{3}{4};\frac{4}{3}$. **204. а)** $\frac{1}{4};0$; **б)** $a=-1$ или $a=4$. **205.** $\frac{1}{3}$. *Указание.* Замена $u=y+2$, $v=x-1$. Далее использовать симметрию относительно перестановки переменных u и v. **206.** $\mathbf{Z}\setminus\{-11;-10;\ldots;-4;-3\}$**. 207.** $[-2;0]$. **208.** $[3;+\infty)$. *Указание.* Разложить правые части неравенств на множители $\begin{cases}(x-1)(x-2)(x-a)\ge0, \\ x(x-3)(x-a)\le0.\end{cases}$ **209. а)** $[1;3]$; **б)** $[-3;-1]$. **210.** $a<-1-\sqrt{5}$. **211.** $a=0$, $a\le-0,5$. **212.** $a=2,\ \ b=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}$; $a=-2,\ \ b\in\mathbf{R}$. *Указание.* Из второго неравенства получить оценку для a. **213. а)** $(5;4\sqrt{10}]\cup\left\{\frac{36}{17}\right\}$; **б)** $(\sqrt{10};\sqrt{17}]\cup\left\{\frac{13}{5}\right\}$.

214. $-\frac{4}{3};2$**. 215.** $\left(-2;-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{15}}{2};2\right)$**.**

Список и источники литературы

1. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2009.

2. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2011.

3. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

4. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2011.

5. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Условия и решения. Вып. 1-16. – М.: Школьная Пресса, – (Библиотека журнала «Математика в школе»).

6. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Использование метода наглядной графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами. // Математика в школе. 2011. №1. – стр. 18-26. и 2011. №2. – стр. 25-32.

7. Неравенства с двумя переменными: графическое и аналитическое решения / А. Корянов. – М.: Чистые пруды, 2008. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 22).

8. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Различные подходы к решению задач С5 ЕГЭ. // «Математика», 2011, № 5. − стр. 11–21.

9. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. – 477 с.

10. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. – 391 с.

11. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

12. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. Учебное пособие. – М.: МИЭТ, 2004. – 256 стр.

13. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2011: Математика / авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2010. – (Федеральный институт педагогических измерений).

14. Фалин Г., Фалин А. Инвариантность и задачи с параметрами. // Квант. 2007. №5, – с. 45-47.

15. Ященко И.В., Шестаков С.А., Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2010.

16. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2010, 2011 (открытый банк заданий).

17. www.alexlarin.narod.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлении в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

18. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.