

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

В.П. Арефьев, П.В. Арефьев

МАТЕМАТИКА

(выравнивающий курс)

Учебное пособие

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 512.64+514.12(075.8)
ББК 22.143+22.151.5я73
А80

Арефьев В.П.

А80 Математика (выравнивающий курс): учебное пособие / В.П. Арефьев, П.В. Арефьев; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 108 с.

Пособие содержит основные разделы и темы школьного курса в соответствии со стандартом образования: преобразование алгебраических выражений; уравнения; неравенства; тригонометрия.

Пособие может быть полезно студентам ВУЗов при изучении высшей математики.

УДК 512.64+514.12(075.8)
ББК 22.143+22.151.5я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой высшей математики СибГМУ
В.В. Свищенко

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
и математической физики ТПУ
А.А. Михальчук

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2011
© Арефьев В.П., Арефьев П.В., 2011
© Обложка. Издательство Томского
политехнического университета, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. Преобразование алгебраических выражений.....	6
1.1. Теоретические основы темы и решение типовых задач	6
1.1.1. Формулы сокращенного умножения	6
1.1.2. Многочлен $P_n(x)$ и его корень. Теорема Безу. Разложение многочлена на множители	7
1.1.3. Арифметические корни и их свойства	11
1.1.4. Степени и их свойства	12
1.2. Вопросы для самоподготовки по теме «Преобразование алгебраических выражений»	16
1.3. Тесты по теме «Преобразование алгебраических выражений»	17
1.4. Задачи для самостоятельной работы	18
1.5. Варианты проверочной работы №1	19
1.6. Ответы по теме «Преобразование алгебраических выражений»	20
2. Уравнения	21
2.1. Эквивалентные уравнения	21
2.2. Рациональные уравнения с одним неизвестным	22
2.3. Уравнения, содержащие знак абсолютной величины	25
2.4. Иррациональные уравнения	28
2.5. Системы алгебраических уравнений.....	31
2.6. Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений	34
2.7. Показательные уравнения.....	35
2.8. Логарифмические уравнения.....	38
2.9. Системы показательных и логарифмических уравнений	41
2.10. Вопросы для самоподготовки по теме «Уравнения»	42
2.11. Тесты по теме «Уравнения».....	42
2.12. Задачи для самостоятельной работы	43
2.13. Варианты проверочной работы №2	45
2.14. Ответы по теме «Уравнения»	45
3. Неравенства	47
3.1. Общие сведения	47
3.2. Рациональные неравенства. Метод интервалов.....	48
3.3. Неравенства, содержащие знак абсолютной величины	52
3.4. Иррациональные неравенства	58
3.5. Показательные неравенства	64
3.6. Логарифмические неравенства	68
3.7. Уравнения и неравенства с параметрами.....	72
3.8. Вопросы для самоподготовки по теме «Неравенства»	74
3.9. Тесты по теме «Неравенства».....	74
3.10. Задачи для самостоятельной работы	75

3.11. Варианты проверочной работы №3	76
3.12. Ответы по теме «Неравенства»	77
4. Тригонометрия	78
4.1. Основные формулы тригонометрии	78
4.2. Тожественные преобразования тригонометрических выражений. Вычисление значений тригонометрических функций	80
4.3. Тригонометрические уравнения	83
4.3.1. Уравнения, приводящиеся к алгебраическим с помощью основных формул	84
4.3.2. Уравнения вида $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x) = 0$	84
4.3.3. Однородные уравнения	84
4.3.4. Уравнения, решаемые понижением степени	85
4.3.5. Уравнения вида $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$	86
4.3.6. Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$	87
4.3.7. Уравнения вида $R(\sin kx, \cos nx, \operatorname{tg} mx, \operatorname{ctg} lx) = 0$	88
4.3.8. Уравнения вида $R(\sin x + \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$	89
4.3.9. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения, преобразований суммы в произведение и произведения тригонометрических функций в сумму	91
4.4. Системы тригонометрических уравнений	92
4.5. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции	93
4.6. Тригонометрические неравенства	96
4.7. Неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции..	97
4.8. Вопросы для самоподготовки по теме «Тригонометрия»	98
4.9. Тесты по теме «Тригонометрия»	99
4.10. Задачи для самостоятельной работы	100
4.11. Варианты проверочной работы №4	104
4.12. Ответы по теме «Тригонометрия»	105
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	107

ВВЕДЕНИЕ

Это пособие посвящено методам решения задач части курса школьной математики. В учебном пособии ставится цель помочь студенту самостоятельно или при минимальной помощи преподавателя систематизировать свои задания по решению задач и ознакомиться с основными методами решения задач. Попыткой достигнуть этой цели, и определяется структура настоящего пособия: вначале каждого параграфа кратко изложен теоретический материал (определения, основные теоремы и формулы), знания которого необходимо для решения задач данного раздела. Это позволяет использовать пособие, не прибегая к учебникам.

Далее приводятся подробно разобранные задачи с разъяснениями методов их решения. Среди решенных задач многие можно назвать типовыми. Как правило, в пособии приводятся только простые задачи. Сознательно были исключены задачи повышенной сложности, так как ставилась цель научить студента решать основные задачи, дать некоторый минимум, необходимый для усвоения студентом основных разделов школьной математики используемых при изучении высшей математики.

По каждому разделу дается минимальное число задач в предположении, что обучающийся будет разбирать все приведенные задачи подряд. Этим объясняется сравнительно небольшое общее число разобранных задач по сравнению с другими задачками.

При составлении настоящего пособия был использован ряд задач из известных задачников по школьной математике.

1. Преобразование алгебраических выражений

1.1. Теоретические основы темы и решение типовых задач

1.1.1. Формулы сокращенного умножения

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2; \\a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b); \\a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2); \\a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2); \\(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b); \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Кроме того, если рассмотреть

$$a = (a^{\frac{1}{2}})^2 = (\sqrt{a})^2, \text{ при } a \geq 0; \quad a = (a^{\frac{1}{3}})^3 = (\sqrt[3]{a})^3,$$

то формулы разности квадратов, суммы и разности кубов можно увидеть и в выражениях:

$$\begin{aligned}a - b &= a^{\frac{2}{2}} - b^{\frac{2}{2}} = (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}), \text{ при } a, b \geq 0; \\a \pm b &= a^{\frac{3}{3}} \pm b^{\frac{3}{3}} = (a^{\frac{1}{3}} \pm b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} \mp a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Важно знать, как выделить полный квадрат в квадратном трехчлене ($a \neq 0$):

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Пример 1. Выделить полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$1. \quad x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned}2. \quad -x^2 + 8x - 7 &= -(x^2 - 8x + 7) = -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 16 - 16 + 7) = \\&= -[(x - 4)^2 - 9] = 9 - (4 - x)^2.\end{aligned}$$

Пример 2. Преобразовать данное уравнение к квадратному:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Решение. Полагаем $\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$, (*).

Преобразуем первое слагаемое, исходя из нашей замены:

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Рассматривая $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ как $\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, подставляя в исходное уравнение и делая замену (*), имеем $y^2 - 2y - 3 = 0$.

1.1.2. Многочлен $P_n(x)$ и его корень. Теорема Безу.

Разложение многочлена на множители

Схема Горнера

Напомним, что одночленом называется произведение нескольких сомножителей, один из которых числовой (коэффициент), а другие – степени с буквенными основаниями (например, $3x^4y^2$).

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех букв, входящих в этот одночлен. Два одночлена называются подобными, если они одинаковы или отличаются только коэффициентами.

Многочленом называется сумма нескольких одночленов (например, $3x^4y^2 + x^2y^2 + x^2y - 1$).

Степенью многочлена называется наибольшая из степеней одночленов, образующих данный многочлен.

Разложить многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1.4)$$

на множители – значит заменить его тождественно равным ему произведением, то есть представить его в виде

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (1.5)$$

или с учетом кратности корней:

$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{\kappa_1} (x - x_2)^{\kappa_2} \dots (x - x_n)^{\kappa_n}$, где $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ – кратности корней.

Приведем примеры, иллюстрирующие три основных способа разложения многочленов на множители.

1. Разложение на множители путем вынесения общего множителя за скобки.

Пример 3. $18x^3y^2 - 12x^4y - 24x^3yz = 6x^3y(3y - 2x - 4z).$

Пример 4.

$$\begin{aligned} & 6a(2c - d) + 3(d - 2c) = \\ & = 6a(2c - d) - 3b(2c - d) = 3(2c - d)(2a - b). \end{aligned}$$

2. Разложение на множители многочлена методом группировки

Пример 5.

$$\begin{aligned} & xy - zy - x + z - y + 1 = (xy - zy - y) - \\ & - (x - z - 1) = y(x - z - 1) - (x - z - 1) = (x - z - 1)(y - 1). \end{aligned}$$

Пример 6.

$$\begin{aligned} & y^4 + y^2 - 2 = (y^4 - 1) + (y^2 - 1) = \\ & = (y^2 - 1)(y^2 + 1) + (y^2 - 1) = (y^2 - 1)(y^2 + 2) = \\ & = (y - 1)(y + 1)(y^2 + 2). \end{aligned}$$

3. Разложение на множители многочлена, применяя формулы сокращенного умножения.

Пример 7. $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}).$

Пример 8.

$$\begin{aligned} & 4x^4 - 9 = (2x^2 + 3)(2x^2 - 3) = \\ & = (2x^2 + 3)(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Корни многочлена n -ой степени (1.4) можно найти с помощью следующей теоремы: если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ имеет целый корень, то он является делителем свободного члена a_0 многочлена $P_n(x)$.

Если путем подбора делителей свободного члена a_0 найти x_1 — корень многочлена n -ой степени $P_n(x)$, то многочлен (1.4) запишется в виде:

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x), \quad (1.6)$$

где $P_{n-1}(x)$ — некоторый многочлен степени $n - 1$.

Здесь уместно привести формулировку *теоремы Безу*.

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x - x_1)$ равен $P_n(x_1)$, т. е. значению многочлена при $x = x_1$.

Многочлен $P_{n-1}(x)$ находят путем деления «углом» многочлена на многочлен (в нашем случае на одночлен), для этого надо:

- 1) расположить делимое и делитель по убывающим степеням x ;
- 2) разделить старший член делимого на старший член делителя; полученный одночлен является первым членом частного;
- 3) первый член частного умножить на делитель, результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;
- 4) чтобы получить следующий член частного, надо с первым остатком поступить так же, как поступили с делимым в п. 2) и 3).

Это следует продолжать до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю, или остаток, степень которого ниже степени делителя. Далее находят корни многочлена $P_{n-1}(x)$.

Следствие из *теоремы Безу*:

Многочлен делится на двучлен $(x - x_1)$ без остатка тогда и только тогда, когда число x_1 является корнем данного многочлена.

Пример 9. Найти остаток от деления многочлена

$$P_4(x) = x^4 + 15x^3 - 3x + 6 \text{ на } x + 3.$$

Решение. Найдем остаток от деления многочлена $P_4(x) = x^4 + 15x^3 - 3x + 6$ на $x + 3$ по теореме Безу:

$$P_4(-3) = (-3)^4 + 15(-3)^3 - 3(-3) + 6 = -39.$$

Проверить (самостоятельно) путем деления «углом» данного многочлена на $x + 3$, что остаток будет равен -39 .

Пример 10. Найти корень x_1 многочлена:

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24.$$

Найти $P_3(x)$ и записать $P_4(x) = (x - x_1) \cdot P_3(x)$.

Решение. Согласно теореме целый корень этого уравнения следует искать среди делителей свободного члена 24, т. е. среди чисел $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$.

Путем подбора делителей свободного члена находим корень многочлена $P_4(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 13 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 + 24 \neq 0$,

$$P_4(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 13(-1)^2 + 14(-1) + 24 = 0.$$

Таким образом $x_1 = -1$ – корень данного уравнения.

Многочлен $P_3(x)$ находят путем деления «углом» многочлена на одночлен $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 & x + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^4 + x^3 \\
 - 3x^3 - 13x^2 \\
 \hline
 - 3x^3 - 3x^2 \\
 - 10x^2 + 14x \\
 - 10x^2 - 10x \\
 \hline
 24x + 24 \\
 - 24x + 24 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Получили

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 10x + 24).$$

$$\text{Ответ: } x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 10x + 24).$$

Оказывается, в случае, когда делитель есть двучлен $(x - x_1)$, обычную схему деления «углом» можно значительно упростить в записи. Это правило нахождения частного и остатка называется *схемой Горнера* и состоит в следующем: *старший коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого. Для получения каждого следующего коэффициента частного нужно соответствующий коэффициент делимого сложить с предыдущим коэффициентом частного, умноженным на число x_1 . Остаток вычисляется аналогично: нужно свободный член делимого сложить со свободным членом частного, умноженным на число x_1* . Эти вычисления обычно записываются с помощью таблицы:

	← коэффициенты делимого →					
	a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
x_1	$b_{n-1}(a_n)$	b_{n-2} $= (a_{n-1} +$ $+ x_1 b_{n-1})$	...	b_1 $= (a_2 +$ $+ x_1 b_2)$	b_0 $= (a_1 +$ $+ x_1 b_1)$	R $= (a_0 +$ $+ x_1 b_0)$
	← коэффициенты частного →					остаток

Пример 11. Для того же многочлена, что и в примере 10:

$P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$ найти $P_3(x)$, зная корень $x_1 = 1$, и записать $P_4(x) = (x - x_1) \cdot P_3(x)$.

Решение. Составим таблицу *схемы Горнера*:

← коэффициенты делимого →					
	$a_4 = 1$	$a_3 = -2$	$a_2 = -13$	$a_1 = 14$	$a_0 = 24$
1	1	-3	10	24	$R=0$
← коэффициенты частного →					↔ остаток

Получили

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 10x + 24).$$

Ответ: $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 10x + 24).$

Когда $n = 2$, то есть $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ – квадратный трехчлен, имеем $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, они находятся по следующей формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.7)$$

При решении приведенных квадратных уравнений $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

корни x_1, x_2 находят обычно по *теореме Виета*:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; x_1 + x_2 = -\frac{c}{a}. \quad (1.8)$$

1.1.3. Арифметические корни и их свойства

Корнем n -ой степени (или арифметическим корнем n -ой степени) из положительного числа a называется единственное положительное решение уравнения $x^n = a$.

При любом a и натуральном n справедливы равенства:

$$\sqrt[n+1]{-a} = -\sqrt[n+1]{a}, \quad \sqrt[n]{a^{2n}} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

В частности, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Если m – целое, n – натуральное (т. е. $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$), то для любого $a > 0$ справедливо $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Для любых натуральных m, n и любых $a \geq 0, b \geq 0$ справедливы:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}} \text{ и } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ (при } b \neq 0); \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Наконец, если $0 \leq a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Следующая формула называется *формулой сложного радикала*:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \quad (1.11)$$

где $a > 0, b > 0$ и $a^2 > b$, а знаки в правой и левой части одновременно берутся верхние, либо нижние (соответственно).

1.1.4. Степени и их свойства

Для любых действительных m и n и любых $a > 0, b > 0$ справедливы равенства:

$$a^0 = 1; a^1 = a; 1^m = 1; \quad (1.12)$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n; \quad a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}; \quad (ab)^m = a^m \cdot b^m; \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \quad (1.14)$$

Пример 12. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{8}}.$$

Решение. Для того, чтобы в данном выражении освободиться от иррациональности в знаменателе, необходимо числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{8}} &= \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{8})}{(\sqrt{5} - \sqrt{8})(\sqrt{5} + \sqrt{8})} = \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{8})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{8})^2} = \\ &= \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{8})}{5 - 8} = -2(\sqrt{5} + \sqrt{8}). \end{aligned}$$

Ответ: $-2(\sqrt{5} + \sqrt{8})$.

Пример 13. Упростить $\frac{(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}})^{\frac{3}{2}} \cdot (\sqrt{a^3 \sqrt{a^2 b}})^4}{(\sqrt[5]{a^4})^3 \cdot (\sqrt[4]{a \sqrt{b}})^6}$.

Решение. Область допустимых значений (О.Д.З.): $a > 0; b > 0$.

$$1) \left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} = \left((a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{4}{15}} \right)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{5}};$$

$$2) \left(\sqrt[5]{a^4} \right)^3 = \left(a^{\frac{4}{5}} \right)^3 = a^{\frac{12}{5}};$$

$$3) \frac{a^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{12}{5}}} = a^{\frac{2}{5} - \frac{12}{5}} = a^{-\frac{10}{5}} = a^{-2};$$

$$4) (\sqrt{a^3 \sqrt{a^2 b}})^4 = (\sqrt[3]{a^3 a^2 b})^4 = (\sqrt[6]{a^5 b})^4 = (\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[6]{b})^4 = a^{\frac{10}{3}} b^{\frac{2}{3}};$$

$$5) (\sqrt[4]{a \sqrt{b}})^6 = (\sqrt[4]{\sqrt{a^2 b}})^6 = (\sqrt[8]{a^2 b})^6 = (a^{\frac{2}{8}})^6 (b^{\frac{1}{8}})^6 = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{4}};$$

$$6) \frac{a^{\frac{10}{3}} b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{10}{3} - \frac{3}{2}} b^{\frac{2}{3} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{11}{6}} b^{-\frac{1}{12}};$$

$$7) a^{-2} a^{\frac{11}{6}} b^{-\frac{1}{12}} = a^{-\frac{1}{6}} b^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{b}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^2 b}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[12]{a^2 b}}$, при $a > 0; b > 0$.

Пример 14. Вычислить $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что $27 + 10\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 5)^2$;

$$27 - 10\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 5)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} &= \sqrt{(\sqrt{2} + 5)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} = \\ &= |\sqrt{2} + 5| + |\sqrt{2} - 5| = \sqrt{2} + 5 + 5 - \sqrt{2} = 10. \end{aligned}$$

Ответ: 10.

Пример 15. Вычислить $\sqrt{29-12\sqrt{5}} - \sqrt{29+12\sqrt{5}}$.

Решение. Подкоренные выражения не являются полными квадратами, т. е. применить прием из предыдущего примера не удастся. Возведем вычисляемое выражение в квадрат:

$$\begin{aligned} (\sqrt{29-12\sqrt{5}} - \sqrt{29+12\sqrt{5}})^2 &= 29-12\sqrt{5} - \\ &- 2\sqrt{(29-12\sqrt{5})(29+12\sqrt{5})} + 29+12\sqrt{5} = 58 - 2\sqrt{841-144 \cdot 5} = \\ &= 58 - 2\sqrt{121} = 58 - 22 = 36. \end{aligned}$$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 6 или -6 ; так как $\sqrt{29-12\sqrt{5}} < \sqrt{29+12\sqrt{5}}$, то это выражение отрицательно.

Ответ: -6 .

Пример 16. Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{|40\sqrt{2}+57|}$ является целым числом. Найдите это число.

Решение. Обозначим $A = \sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{|40\sqrt{2}+57|}$. Поскольку $\sqrt{|40\sqrt{2}+57|} > \sqrt{|40\sqrt{2}-57|}$, то A – отрицательное (и целое по условию) число. Далее находим A^2 , учитывая, что $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} = \sqrt{57-40\sqrt{2}}$. Получаем, что $A = -10$.

Ответ: -10 .

Пример 17. Вычислить $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = x$. Тогда,

$$x^3 = 40 + 3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}}).$$

Подставляя x вместо выражения в скобках, получим

$$x^3 = 40 + 3x\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}.$$

Отсюда $x^3 - 6x - 40 = 0$. Это уравнение имеет один действительный корень: $x = 4$.

Ответ: 4.

Пример 18. Упростить выражение:

$$\frac{a}{a^2+1} \sqrt{1 + \left(\frac{a^2-1}{2a} \right)^2}.$$

Решение. Заметим, что $a \neq 0$, тогда:

$$\begin{aligned}
Y(a) &= \frac{a}{a^2+1} \sqrt{1 + \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2} = \frac{a}{a^2+1} \sqrt{\frac{4a^2 + a^4 - 2a^2 + 1}{4a^2}} = \\
&= \frac{a}{a^2+1} \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4a^2}} = \frac{a}{a^2+1} \sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{4a^2}} = \frac{a}{a^2+1} \cdot \frac{a^2+1}{2|a|} = \frac{a}{2|a|},
\end{aligned}$$

так как $\sqrt{a^2} = |a|$. Далее по определению модуля действительного числа имеем

$$Y(a) = \begin{cases} \frac{a}{2a}, & a > 0, \\ \frac{a}{2(-a)}, & a < 0. \end{cases} \Rightarrow Y(a) = \begin{cases} 0,5 \text{ если } a > 0, \\ -0,5 \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Ответ: 0,5 если $a > 0$; -0,5 если $a < 0$.

Пример 19. Упростить выражение

$$\left[\frac{x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} + 1} \right] : \frac{\sqrt{x}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in (1; \infty)$. Обозначим

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) : \sqrt{x^2 - 1} = \\
&= \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}{x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2} + \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)^2}{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - x^2} \right] : \sqrt{x^2 - 1} = \\
&= \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 - (\sqrt{x^2 - 1} - x)^2 \right] : \sqrt{x^2 - 1} = \\
&= 4x\sqrt{x^2 - 1} : \sqrt{x^2 - 1} = 4x.
\end{aligned}$$

Ответ: $4x$ при $x \in (1; \infty)$.

Пример 20. Упростить выражение

$$2(x^2 + \sqrt{x^4 - 1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x}} \right)^{-2}.$$

Решение. ОДЗ: $x \neq 0, x^2 - 1 \geq 0, x^4 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

При решении задач на упрощение иррациональных алгебраических выражений часто применяют способ замены младших степеней переменных какими-либо новыми переменными. При этом должно получиться более простое алгебраическое выражение относительно новых переменных. Упростив полученное выражение, следует вернуться к выражению с прежними переменными. Обозначим $y = x^2$, тогда

$$\begin{aligned} & 2(x^2 + \sqrt{x^4 - 1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x}} \right)^{-2} = \\ & = 2(y + \sqrt{y^2 - 1}) \cdot \frac{\sqrt[3]{y}}{(\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1})^2} = \frac{2(y + \sqrt{y^2 - 1}) \cdot \sqrt[3]{y}}{2(y + \sqrt{y^2 - 1})} = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt[3]{x^2}$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

1.2. Вопросы для самоподготовки по теме «Преобразование алгебраических выражений»

1. Записать формулы сокращенного умножения.
2. Что называется одночленом и как определяется его степень?
3. Дать определение многочлена. Как определяется степень многочлена?
4. Как выделить полный квадрат в квадратном трехчлене?
5. Разложите многочлен на множители.
6. Как следует искать корень уравнения среди делителей его свободного члена?
7. Описать схему деления «углом» многочлена на одночлен.
8. Изложите правило нахождения частного и остатка по схеме Горнера.
9. Перечислите арифметические корни и их свойства. Изложите формулу сложного радикала.
10. Перечислите степени и их свойства.

1.3. Тесты по теме «Преобразование алгебраических выражений»

№	Задание	Варианты ответов
1	Упростить выражение $(m-4)^2 - (3-m)^2$	1) $14m-7$; 2) $7+2m$; 3) $2m$; 4) $2m-7$; 5) правильный ответ не указан
2	Разложить на множители $9x^2 - 4y^2 + 4y - 1$	1) $(3x-2y-1)(3x+2y-1)$; 2) $(3x-2y)(3x+2y)$; 3) $(3x+2y-1)^2$; 4) $(3x-2y+1)(3x+2y+1)$; 5) правильный ответ не указан
3	Упростить выражение $\sqrt{(m-n)^2} - \sqrt{9m^2}$, если $m < 0 < n$	1) $2m+n$; 2) $-n+2m$; 3) $n-4m$; 4) $4m+n$; 5) правильный ответ не указан
4	Упростить выражение $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1}$	1) $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{3}$; 5) правильный ответ не указан
5	При каких значениях k и p корнями уравнения $kx^2 + px + 3 = 0$ являются числа 1 и -3?	1) $k=1$; $p=2$; 2) $k=-1$; $p=-2$; 3) $k=-1$; $p=2$; 4) $k=1$; $p=-2$; 5) правильный ответ не указан
6	Упростить выражение $\frac{(x^{-\frac{2}{3}})^4 xy^{-1,6}}{(x^{0,5} y^{-\frac{1}{5}})^3}$	1) $\frac{1}{xy}$; 2) $x^{-2}y^{-2,2}$; 3) xy^{-3} ; 4) $\frac{x}{y}$; 5) правильный ответ не указан
7	Вычислить $\frac{\sqrt[4]{6-3\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{6+3\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$	1) $\sqrt{3}$; 2) 1; 3) 3; 4) $\frac{1}{3}$; 5) правильный ответ не указан
8	Освободиться от иррациональности в знаменателе $\frac{14}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$	1) $2\sqrt{2}+\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; 4) $2(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$; 5) правильный ответ не указан

9	Упростить выражение $\sqrt{\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}}$	1) $x^{17/24}$; 2) $x^{17/25}$; 3) $x^{11/24}$; 4) $x^{7/24}$; 5) правильный ответ не указан
10	Выделить полный квадрат в трехчлене $x^2 + 6x + 13$	1) $(x + 3)^2 + 4$; 2) $(x + 1)^2 + 4$; 3) $(x + 3)^2 + 5$; 4) $(x + 4)^2 + 1$; 5) правильный ответ не указан.

1.4. Задачи для самостоятельной работы

1. Выделить полный квадрат в квадратном трехчлене

а) $-2x^2 + 4x + 7$; б) $x^2 - 11x + 30$.

2. Разложить на множители

а) $x^3 - x^2 - 8x + 12$; б) $2x^2 - 20xy + 50y^2 - 2$.

3. Вычислить $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

4. Упростить $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}$.

5. Упростить $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-4\sqrt{a^{-1}}} - \frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{64a}} \right)^{-2} - \sqrt{a^2+8a+16}$.

6. Упростить $\sqrt{\frac{4}{x} + \frac{1}{4x^{-1}}} - 2 + \sqrt{\frac{1}{4x^{-1}} + \frac{2^{-2}}{x} + \frac{1}{2}}$.

7. Упростив левую часть, найти x :

$$\frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3}{a+b+\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}} + \frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3}{a-b-\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}} = \frac{2x-3}{3x+1}.$$

8. Упростить $\frac{\frac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b} + b\sqrt{b^2-2b+1} + 2 - \frac{2}{b}}{\sqrt{b-2} + \frac{1}{b}}$, где $0 < b < 1$.

9. Упростить выражение и вычислить его при данных значениях x , y параметров $x = 23$, $y = 1,32$:

$$\left[\frac{2\sqrt[4]{2}xy}{x^2y^2-\sqrt{2}} + \frac{xy-\sqrt[4]{2}}{2xy+2\sqrt[4]{2}} \right] \cdot \frac{2xy}{xy+\sqrt[4]{2}} - \frac{xy}{xy-\sqrt[4]{2}} + 4,1.$$

10. Проверить, что число $\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ является корнем уравнения $x^3 + 12x - 8 = 0$.

11. Доказать, что если $x = 4(a-1)$ и $1 < a < 2$, то

$$(a + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} + (a - \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2-a}.$$

1.5. Варианты проверочной работы №1

Вариант 1.

1. Освободиться от иррациональности в знаменателе $\frac{6}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{4}}$.

2. Сократить дробь $\frac{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24}{x^3 + 9x^2 + 26x + 24}$.

Вариант 2.

1. Освободиться от иррациональности в знаменателе $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}}$.

2. Упростить выражение: $\frac{1}{m + \frac{1}{n + \frac{1}{p}}} : \frac{1}{m + \frac{1}{n}} - \frac{1}{n(mnp + m + p)}$.

Вариант 3.

1. Доказать равенство

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}(\sqrt{5}+1).$$

2. Упростить выражение

$$\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}} \right] : [(1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (1-2x+x^2)^{-1}].$$

Вариант 4.

1. Вычислить $\sqrt{6 - \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}}$.

2. Упростить выражение $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt[4]{bx^3} + \sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt[4]{bx} \right)^2 + bx + 3}{x(\sqrt{b} + \sqrt{3x^{-1}})^2}$.

Вариант 5.

1. Вычислить $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$.

2. Упростить выражение $\frac{|x-1|(x^2+x+2)(x+1) \cdot x}{x^3-1-|x-1|}$.

Вариант 6.

1. Найти x , если $49^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{2,5} = 7^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49 \cdot x^{0,5}$.

2. Упростить выражение $\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 - 1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 - 1} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}} - \sqrt{a}\right)}$.

1.6. Ответы по теме «Преобразование алгебраических выражений»

Тесты

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	5	4	1	3	2	2	3	4	1	1

Задачи для самостоятельной работы

- а) $9 - 2(x-1)^2$; б) $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.
- а) $(x-2)^2(x+3)$; б) $2(x-6)(x-4)$.
- 1,23; 2.
- $2\sqrt{x-9}$, если $x \geq 18$; 6, если $9 \leq x \leq 18$.
- $4\sqrt{a}$ при $a > 0$, $a \neq 4$.
- $\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$ при $x \in [4; \infty)$; $\frac{5}{2\sqrt{x}}$ при $x \in (0; 4)$.
- $x = -\frac{5}{4}$.
- $\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$.
- 4,1.

Варианты проверочной работы №1

- $\frac{1}{6}(1 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25})$.
- $x+1$.

3. $\frac{1}{23}(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})$.
4. 1.
5. x .
6. $\sqrt{2}+1$.
7. 1.
8. $5+3\sqrt{2}$.
9. $-x(x+1)$ при $x \in (-\infty; 1)$; x^2+x+2 при $x \in (1; \infty)$.
10. 49.
11. 2 при $0 < a < 1$; $\frac{2}{3}$ при $a > 1$.

2. Уравнения

2.1. Эквивалентные уравнения

Для уравнения

$$f_1(x) = 0 \text{ и } f_2(x) = 0$$

называются равносильными (эквивалентными), если совпадают множества всех их решений или оба они не имеют решений и обозначают $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow f_2(x) = 0$.

Из определения равносильности уравнения следует, что вместо того, чтобы решать данное уравнение, можно решать уравнение ему равносильное.

Пример.

а) Уравнение $x=1$ равносильно уравнению $\sqrt{x}=1$, так как число 1 является корнем каждого уравнения, а других корней ни одного из этих уравнений не имеет;

б) $x^2 + \frac{4x^2}{x} = 0$ и уравнение $x^2 + 4x = 0$, полученное после сокращения дроби x^2/x , неравносильны. В результате такого преобразования получается значение $x=0$, не принадлежащее области допустимых значений (О.Д.З.) данного уравнения.

Уравнение $f(x)=0$ считают эквивалентным двум (или нескольким) уравнениям $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, если множество корней уравнения

$f(x) = 0$ совпадает с объединением множеств корней уравнений $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$.

Некоторые эквивалентные уравнения:

1) уравнение $f_1(x) + f_2(x) = f_2(x)$ эквивалентно уравнению $f_1(x) = 0$, рассматриваемому на множестве допустимых значений исходного уравнения;

2) уравнение $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$ эквивалентно уравнению $f_1(x) = 0$, рассматриваемому на множестве значений исходного уравнения;

3) уравнение $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ эквивалентно двум уравнениям: $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$, каждое из которых рассматривается на множестве допустимых значений исходного уравнения;

4) уравнение $f^n(x) = 0$ эквивалентно уравнению $f(x) = 0$;

5) уравнение $f^n(x) = g^n(x)$ при нечетном n эквивалентно уравнению $f(x) = g(x)$, а при четном n эквивалентно двум уравнениям: $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$.

Замечания:

1. От возведения в квадрат обеих частей уравнения нарушается равносильность уравнений, могут появиться посторонние корни. Это особенно важно при решении тригонометрических уравнений, где сложно произвести отборку полученных решений.

2. При проверке корней их значений необходимо подставлять именно в исходное уравнение или в равносильное ему.

3. При делении левой и правой частей уравнения на общий множитель, содержащий неизвестную величину, возможна потеря корней (если этот множитель в О.Д.З. уравнения обращается в нуль). Можно сокращать только в том случае, если он не равен нулю.

2.2. Рациональные уравнения с одним неизвестным

Приведем решения:

а) уравнений первой степени

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \quad (2.1)$$

$$x_1 = -\frac{b}{a};$$

б) квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (2.2)$$

$$1) \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ при } D = b^2 - 4ac > 0$$

2) $x_1 = -\frac{b}{2a}$ – корень кратности 2 при $D = 0$;

3) нет корней при $D < 0$.

При решении уравнений степени больше двух используют следующие приемы:

1. Вынесение общего множителя за скобки.

2. Метод группировки. Члены многочлена объединяются в группы так, чтобы в каждой группе можно получить множитель, общий для всех групп.

3. Использование формул сокращенного умножения.

4. Комбинирование выше перечисленных приемов.

5. С помощью нахождения корней многочлена.

Пусть $P_n(x)$ – многочлен n -ой степени и $x = a$ – корень этого многочлена. Тогда, по следствию из теоремы Везу, многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на двучлен $x - a$. Следовательно, можно записать равенство $P_n(x) = (x - a)P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ – есть многочлен, равный частному от деления $P_n(x)$ на двучлен $x - a$, степень которого на единицу меньше степени многочлена $P_n(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Решение. $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1) = 0$.

Ответ: $x = -1$.

Пример 2. Решить уравнение $(x + 2)^3 - (x - 2)^3 = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned}(x + 2)^3 - (x - 2)^3 &= ((x + 2) - (x - 2)) \times \\ &\times ((x + 2)^2 + (x + 2)(x - 2) + (x - 2)^2) = (x + 2 - x + 2) \times \\ &\times (x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4 + x^2 - 4x + 4) = 4(3x^2 + 4) = 0.\end{aligned}$$

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решить уравнение $x^3 + x^2 - 2 = 0$.

Решение. Первый способ.

$$\begin{aligned}x^3 + x^2 - 2 &= x^3 + x^2 - 1 - 1 = (x^3 - 1) + (x^2 - 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x + 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1 + x + 1) = (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0\end{aligned}$$

$x = 1$, уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$ действительных корней не имеет ($D < 0$).

Второй способ. Метод «подбора» находим корень уравнения $x = 1$. Следовательно, одним из множителей, на которые разлагается многочлен, будет двучлен $x - 1$. Разделим многочлен $x^3 + x^2 - 2$ на двучлен $x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 -\frac{x^3+x^2-2}{x^3-x^2} \quad \left| \frac{x-1}{x^2+2x+2} \right. \\
 \underline{-2x^2-2} \\
 \underline{2x^2-2x} \\
 \underline{2x-2} \\
 \underline{2x-2} \\
 0
 \end{array}$$

Следовательно, имеем $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$, $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Решение многих рациональных уравнений заключаются в сведении их тем или иным способом к уравнениям (2.1) или (2.2).

Пример 4. Решить уравнение $\frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{9}{2(x+4)} + \frac{1}{x-1}$.

Решение. О.Д.З. уравнения есть любое x , кроме $x = 1$ и $x = -4$.

Исходное уравнение после приведения к общему знаменателю эквивалентно уравнению $\frac{x^2 - 6x + 5}{2(x-1)(x+4)} = 0$ или $x^2 - 6x + 5 = 0$ при условии $x \neq 1$ и $x \neq -4$.

Решая полученное уравнение, находим, что $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, но $x_2 = 1$ – посторонний корень, так как $x_2 = 1$ не входит в О.Д.З. неизвестного.

Ответ: $x = 5$.

Одним из приемов сведения рациональных уравнений и уравнений вида (2.1) и (2.2) является введение вспомогательного неизвестного.

Пример 5. Решить уравнение $\frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2$.

Решение. Обозначая $z = x^2 + 4$, запишем исходное уравнение в виде $\frac{4}{z} + \frac{5}{z+1} = 2$ или $\frac{-2z^2 + 4z + 1}{z(z+1)} = 0$.

О.Д.З. уравнения есть любое z , кроме $z = 0$ и $z = -1$.

Последнее уравнение эквивалентно уравнению $-2z^2 + 4z + 1 = 0$. Эквивалентность этих уравнений следует из того, что корни последнего уравнения $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = 4$ принадлежат О.Д.З. неизвестного. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно двум квадратным уравнениям: $x^2 + 4 = -\frac{1}{2}$ и $x^2 + 4 = 4$. Корень второго уравнения: $x = 0$. Первое уравнение действительных корней не имеет.

Ответ: $x = 0$.

2.3. Уравнения, содержащие знак абсолютной величины

По определению

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

При решении уравнения, содержащего знак абсолютной величины (знак модуля), как правило, следует разбить О.Д.З. уравнения на множества, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве уравнение записать без знака модуля и решить на этом множестве. Объединение множеств решений, найденных на всех частях О.Д.З. уравнения, составляет множество всех решений уравнения.

Простейшими уравнениями с модулями являются уравнения вида

$$f(|x|) = g(x) \quad (2.3)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции.

Для того, чтобы решить уравнение (2.3), нужно найти сначала все решения уравнения $f(x) = g(x)$, принадлежащие множеству $x \geq 0$, затем решить уравнение $f(-x) = g(x)$ на множестве $x < 0$; множеств найденных решений составляет множество всех решений уравнения (2.3), т.е. уравнение (2.3) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(-x) = g(x), \\ x < 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $|x| = x + 2$.

Решение. Исходное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x = x + 2, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -x = x + 2, \\ x < 0. \end{cases}$$

Уравнение $x = x + 2$ не имеет решений ($0 \neq 2$).

Уравнение $-x = x + 2$ имеет решение $x = -1$, которое является решением второй системы, так как $x = -1 < 0$.

Ответ: $x = -1$.

Уравнение вида

$$|f(x)| = g(x) \quad (2.4)$$

равносильно двум совокупностям систем

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} & \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} & \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Если в уравнении (2.4) функции $f(x)$ имеет более простой вид, чем $g(x)$, то целесообразно уравнение (2.4) заменять первой совокупностью систем, а если более простой вид имеет функция $g(x)$, то уравнение (2.4) целесообразно заменять второй совокупностью систем.

Пример 2. Решить уравнение $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 1$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \frac{x+1}{x-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-1} = 0 \\ \frac{2x}{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{1-2x}{3-|x-1|} = 1$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ \frac{1-2x}{3-(x-1)} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 < 0, \\ \frac{1-2x}{3+(x-1)} = 1. \end{cases}$$

Решая уравнение $\frac{1-2x}{4-x} = 1$ находим $x_1 = -3$, но он не удовлетворяет условию $x-1 \geq 0$, поэтому первая система решений не имеет.

Решая уравнение $\frac{1-2x}{2+x} = 1$ находим $x_2 = -\frac{1}{3}$. Он удовлетворяет условию $x-1 < 0$.

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

При решении уравнения, в котором под знаком модуля находится выражение, также содержащее модуль, следует сначала освободиться от внутренних модулей, а затем в полученных уравнениях раскрыть оставшиеся модули.

Пример 4. Решить уравнение $||x-1|+2|=1$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ |x-1+2| = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 < 0, \\ |1-x+2| = 1, \end{cases}$$

т.е. совокупности систем

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ |x+1| = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ |3-x| = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Первая система совокупности (2.5) равносильна совокупности двух следующих систем:

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x+1 \geq 0, \\ x+1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x+1 < 0, \\ -(x+1) = 1, \end{cases}$$

т.е. совокупности

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x > -1, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x < -1, \\ x = -2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Совокупность (2.6) решений не имеет.

Вторая система совокупности (2.5) равносильна совокупности двух следующих систем:

$$\begin{cases} x < 1, \\ 3-x \geq 0, \\ 3-x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ 3-x < 0, \\ x-3 = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Совокупность (2.7) решений не имеет.

Ответ: нет решений.

Рассмотрим уравнения вида

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x), \quad (2.8)$$

где $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), g(x)$ – некоторые функции.

Такие уравнения обычно решают методом интервалов. Для этого находят сначала все точки, в которых хотя бы одна из функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ меняет знак. Эти точки делят область допустимых значений уравнения (2.8) на промежутки, на каждом из которых все функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ сохраняют знак. Затем, используя определение абсолютной величины, переходят от уравнения (2.8) к совокупности уравнений, не содержащих знаков модуля.

Пример 5. Решить уравнение $|7x-12| - |7x-11| = 1$.

Решение. Методом интервалов (рис. 1) находим интервалы знакопостоянства выражений

$$7x-12 \text{ и } 7x-11: \quad x < 11/7, \quad 11/7 \leq x < 12/7, \quad x \geq 12/7.$$

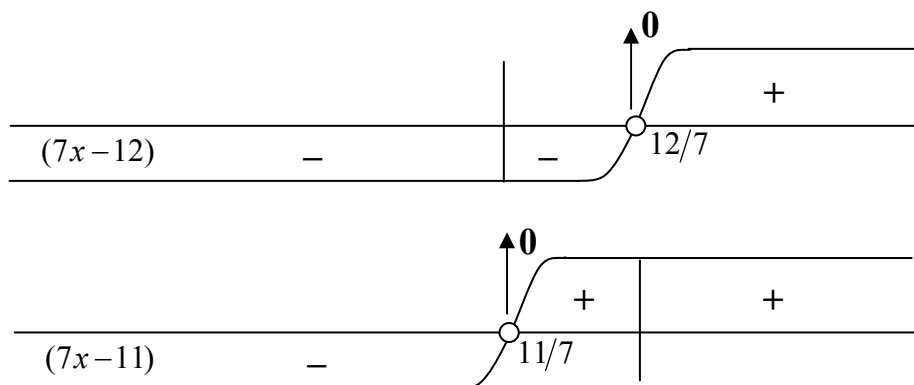


Рис. 1

Итак, данное уравнение эквивалентно следующим уравнениям:

- 1) $12 - 7x + 7x - 11 = 1$ для $x < 11/7$;
- 2) $12 - 7x - 7x + 11 = 1$ для $11/7 \leq x < 12/7$;
- 3) $7x - 12 - 7x + 11 = 1$ для $x \geq 12/7$.

Первое уравнение обращается в тождество для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $x < 11/7$; второе уравнение имеет решение $x < 11/7$; третье не имеет решений.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{11}{7}\right]$.

2.4. Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называют уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня (радикала). Область допустимых значений иррационального уравнения состоит из тех значений неизвестного, при которых неотрицательны все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

Используя О.Д.З. иррационального уравнения, иногда удастся решить уравнение, не прибегая к преобразованиям.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 3$.

Решение. О.Д.З. уравнения определяется системой неравенства

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x+9 \geq 0, \end{cases} \text{ т.е. } x \geq 0.$$

На О.Д.З. уравнения имеем $x+9 \geq 3$ и $x \geq 0$, т.е. его левая часть не меньше 3, а правая равна 3. Единственное решение данного уравнения, исходя из О.Д.З. уравнения $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Один из способов решения иррационального уравнения заключается в последовательном возведении обеих частей уравнения в степень, являющуюся наименьшим общим кратным показателей всех радикалов, входящих в данное уравнение. При этом, если степень, в которую воз-

водится уравнение, четная, то полученное следствие исходного уравнения может иметь посторонние корни. Проверка осуществляется непосредственной подстановкой корней в исходное иррациональное уравнение.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1} = 8$.

Решение. Уединим один из корней в левой части:

$$\sqrt{x+1} = 8 - \sqrt{3x+1}.$$

Возводя в квадрат обе части уравнения, имеем

$$x+1 = 64 - 16\sqrt{3x+1} + 3x+1.$$

Приводя подобные члены и уединяя радикал в левую часть, получим

$$8\sqrt{3x+1} = x+32.$$

Возводя обе части в квадрат, имеем

$$64(3x+1) = x^2 + 64x + 1024$$

т.е. уравнение

$$x^2 - 128x + 960 = 0,$$

корни которого: $x_1 = 8$ и $x_2 = 120$.

Подставим каждый из этих корней в исходное уравнение.

При $x_1 = 8$ получим верное числовое равенство.

При $x_2 = 120$ получим $\sqrt{361} + \sqrt{121} \neq 8$ т.е. $x_2 = 120$ – посторонний корень.

Ответ: $x = 8$.

Уравнения вида

$$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x) \quad (2.9)$$

где $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ – некоторые функции, обычно решают следующим образом. Возводят обе части уравнения в куб и получают уравнение

$$f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x) \cdot g(x)}(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}) = \varphi^3(x).$$

В этом уравнении заменяют выражение $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}$, являющееся левой частью исходного уравнения, на $\varphi(x)$. Затем действуют по обычной схеме.

Уравнение вида (2.9) может быть также решено введением вспомогательных неизвестных, что в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к системе рациональных уравнений, являющейся его следствием.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1$.

Решение. Первый способ. Возводя обе части уравнения в куб, получим

$$5x+7 - 3\sqrt[3]{(5x+7)^2(5x-12)} + 3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)^2} - 5x+12 = 1.$$

Приводя подобные члены, получим

$$19 + 3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}(-\sqrt[3]{5x+7} + \sqrt[3]{5x-12}) = 1.$$

По условию $-\sqrt[3]{5x+7} + \sqrt[3]{5x-12} = -1$, т.е. $19 - 3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)} = 1$

или

$$3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)} = 18 \quad (2.10)$$

Возводим уравнение (2.10) в куб:

$$(5x+7)(5x-12) = 216.$$

Последнее уравнение имеет корни $x_1 = 4$ и $x_2 = -3$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Второй способ. Обозначим $\sqrt[3]{5x+7} = u$, $\sqrt[3]{5x-12} = v$. Исключая x их уравнений $u^3 = 5x+7$, $v^3 = 5x-12$, приводим к системе

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^3 = 19. \end{cases}$$

Ее решение сводится к уравнению $v^2 + v - 6 = 0$, корни которого: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

Возвращаясь к исходному неизвестному, получаем линейные уравнения:

$$5x - 12 = 8 \Rightarrow x_1 = 4; \quad 5x - 12 = -27 \Rightarrow x_2 = -3.$$

Проверкой убеждаемся, что корни $x_1 = 4$ и $x_2 = -3$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 4$.

Пример 4. Решить уравнение $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$.

Решение. Обозначая $\sqrt{x^2+5x+2} = y$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = x^2 + 5x + 2 \\ 3y = x^2 + 5x - 2. \end{cases} \quad (2.11)$$

Исключая из системы (2.11) неизвестное x , получаем $y^2 - 3y - 4 = 0$.

Корнями этого уравнения являются $y_1 = 4$, $y_2 = -1$. Так как через y обозначен арифметический корень, то из двух найденных корней уравнения выбираем положительный. Подставляем его во второе уравнение системы (2.11), получаем для x уравнение

$$x^2 + 5x - 14 = 0,$$

корни которого: $x_1 = -7$, $x_2 = 2$. Делая проверку, убеждаемся, что оба корня являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = -7$, $x_2 = 2$.

В некоторых случаях метод выделения полных квадратов в подкоренных выражениях позволяет упростить процедуру решения уравнения.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2$.

Решение. Обозначаем $\sqrt{x+1} = t$. Тогда исходное уравнение приобретает вид:

$$\sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 2t + 1} = 2 \quad (2.12)$$

Так как под радикалами в левой части уравнения (2.12) стоят полные квадраты, то оно может быть представлено в эквивалентном виде

$$|t+1| + |t-1| = 2. \quad (2.13)$$

Данное уравнение эквивалентно следующим уравнениям:

1) $-(t+1) - (t-1) = 2$ для $t < -1$.

2) $t+1 - t+1 = 2$ для $-1 \leq t < 1$.

3) $t+1 + t-1 = 2$ для $t \geq 1$.

Первое уравнение не имеет решений; второе уравнение обращается в тождество для всех $t \in [-1; 1)$; третье уравнение имеет решение $t = 1$.

Возвращаясь к исходному неизвестному решением имеем $x \in [-1; 0]$.

Ответ: $x \in [-1; 0]$.

2.5. Системы алгебраических уравнений

Линейным уравнением с n неизвестным называют уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ – некоторые числа.

Система уравнений называется линейной, если все уравнения системы линейные. Если система уравнений имеет решения, то говорят, что она совместна. Если система уравнений не имеет решений, то говорят, что она несовместна. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение. Совместная система уравнений называется неопределенной, если она имеет более одного решения. Две совместные системы уравнений эквивалентны, если все их решения совпадают.

При нахождении решений системы m линейных уравнений с n неизвестными удобно использовать метод Гаусса, состоящий в том, что данную систему приводят к треугольному или трапецеидальному виду.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 3x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=6 \end{cases}.$$

Решение. Умножая обе части первого уравнения на -3 и складываем со вторым уравнением, получаем $-5y-8z=-18$, или, что то же, $5y+8z=18$.

Умножая обе части первого уравнения на -2 и складываем с третьим уравнением системы, получаем уравнение $-3y-4z=-10$, или что то же,

$$3y+4z=10.$$

Следовательно, данную систему можно записать в виде эквивалентной системы, в которой второе и третье уравнение не содержат неизвестного x :

$$\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 5y+8z=18 \\ 3y+4z=10. \end{cases} \quad (2.14)$$

Умножая обе части второго уравнения на $-\frac{3}{5}$ и складываем с третьим уравнением, получаем уравнение $-\frac{4}{5}z=-\frac{4}{5}$; система (2.14) записывается в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 5y+8z=18 \\ -\frac{4}{5}z=-\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система приведена к треугольному виду. Подставляя $z=1$ во второе уравнение системы, находим $y=2$. Подставляя значение $z=1$ и $y=2$ в первое уравнение, находим $x=1$.

Обычно при решении систем уравнений используют обозначения, вместо длинных словесных пояснений. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены помещаются в таблицу.

Рассмотрим решение данной системы с использованием условных обозначений:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3) \cdot (-2)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -8 & -18 \\ 0 & -3 & -4 & -18 \end{array} \right) \cdot (-1) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 18 \\ 0 & 3 & 4 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\left(-\frac{3}{5}\right)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Последняя таблица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 5y + 8z = 18 \\ -\frac{4}{5}z = -\frac{4}{5} \end{cases},$$

решение которой: $z = 1, y = 2, x = 1$.

Ответ: $x = 1, y = 2, z = 1$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + y + z = 6 \\ x - 3y - 5z = -10. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & -5 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3) \cdot (-1)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -8 & -18 \\ 0 & -5 & -8 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -8 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Последняя таблица соответствует системе трапецидального вида

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ -5y - 8z = -18. \end{cases}$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений.

$$y = \frac{18}{5} - \frac{8}{5}z;$$

$$x = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}z; \quad z - \text{любое действительное число.}$$

Ответ: $x = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}z; y = \frac{18}{5} - \frac{8}{5}z; z - \text{любое действительное число.}$

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + y + z = 6 \\ x - 3y - 5z = -8. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 8 \\ 3 & 1 & 1 & | & 6 \\ 1 & -3 & -5 & | & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 8 \\ 0 & -5 & -8 & | & -18 \\ 0 & -5 & -8 & | & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 8 \\ 0 & -5 & -8 & | & -18 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Система несовместна, т.е. не имеет решений. Это легко понять, если обратиться к последней строке получившейся в результате преобразований таблицы. Если записать эту строку в виде уравнения, то получим

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2, \quad \text{т.е.} \quad 0 = 2.$$

Это уравнение не имеет смысла.

Ответ: нет решений.

2.6. Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений

Пусть a – положительное число, отличное от единицы, а M – любое положительное число. Логарифмом числа M по основанию a называется такое число, обозначаемое $\log_a M$, что

$$a^{\log_a M} = M$$

Основные свойства логарифмов:

1. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c, \quad a \neq 1, a > 0, b > 0, c > 0,$
2. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad a \neq 1, a > 0, b > 0, c > 0,$
3. $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b, \quad a \neq 1, a > 0, b > 0, p \neq 0,$
4. $\log_a b^q = q \log_a b, \quad a \neq 1, b > 0, a > 0,$

$$5. \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a \neq 1, c \neq 1, a > 0, b > 0, c > 0,$$

$$6. \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a \neq 1, b \neq 1, a > 0, b > 0,$$

Пример 1. Упростить $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2 - 1}$.

Решение: Согласно третьего и четвертого свойств логарифмов имеем:

$$\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2 - 1} = 3 \log_a \sqrt[6]{a^2 - 1} = \frac{3}{6} \log_a (a^2 - 1) = \log_a \sqrt{a^2 - 1}.$$

Ответ: $\log_a \sqrt{a^2 - 1}$.

Пример 2. Вычислить $81^{1/\log_5 3} + (\sqrt{7})^{2/\log_{25} 7} - 125^{\log_{25} 6}$.

Решение: Согласно шестого свойства логарифмов имеем $81^{1/\log_5 3} = 81^{\log_3 5}$.

Используя свойства степеней, получим:

$$81^{\log_3 5} = (3^4)^{\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^4.$$

Согласно определению логарифма $3^{\log_3 5} = 5$.

Таким образом

$$81^{1/\log_5 3} = 5^4 = 625.$$

Аналогично

$$(\sqrt{7})^{2/\log_{25} 7} = 7^{1/\log_{25} 7} = 7^{\log_7 25} = 25.$$

$$125^{\log_{25} 6} = (5^3)^{\log_{25} 6} = (5^3)^{\frac{1}{2} \log_5 6} = (5^{\log_5 6})^{3/2} = 6^{3/2} = 6\sqrt{6}.$$

Складывая полученные значения, получаем искомое число.

Ответ: $650 + 6\sqrt{6}$.

Пример 3. Зная, что $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$, найти $\lg 56$.

Решение:

$$\lg 56 = \lg(7 \cdot 8) = \lg 7 + \lg 8 = \frac{\log_2 7}{\log_2 10} + \lg 2^3 = \log_2 7 \cdot \lg 2 + 3 \lg 2 =$$

$$= b \cdot a + 3a = a(b + 3).$$

Ответ: $a(b + 3)$.

2.7. Показательные уравнения

Показательными принято называть уравнения, в которых неизвестное входит только в показатели степеней при постоянных основаниях. Простейшим показательным уравнением является уравнение вида

$$a^x = b. \quad (2.15)$$

Его решением при $a > 0$ и $b > 0$, $a \neq 1$, является $x = \log_a b$.

Некоторые показательные уравнения приводятся к виду (2.15) с помощью равенств

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Многие показательные уравнения решаются методом приведения обеих частей к одному основанию.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 225$.

Решение. Поскольку $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 3^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 15^{\frac{x}{2}}$, то

$$15^{\frac{x}{2}} = 225 \Leftrightarrow 15^{\frac{x}{2}} = 15^2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

При решении простейших показательных уравнений используются преобразование, состоящее в вынесении общего множителя за скобки.

Пример 2. Решить уравнение $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$.

Решение. Вынося в левой части уравнения выражение 5^{2x-1} за скобки, получаем

$$5^{2x-1}(5^2 - 3) = 550 \Leftrightarrow 5^{2x-1} = 5^2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $x = 1,5$.

Уравнение вида

$$a^{f(x)} = b, \quad a > 0, b \neq 1, b > 0 \quad (2.16)$$

может быть решено при помощи логарифмирования обеих частей (это возможно, так как обе части уравнения положительны).

Логарифмируя, получаем уравнение $f(x) = \log_a b$, равносильное уравнению (2.16).

Пример 3. Решить уравнение $5^{2x-1} = 7^{3-x}$.

Решение. Обе части положительны, поэтому можно прологарифмировать его по основанию 5. Получим уравнение

$$2x - 1 = (3 - x) \log_5 7,$$

равносильно исходному. Таким образом,

$$x(2 + \log_2 7) = 1 + 3\log_5 7, \quad \text{т.е.} \quad x = \frac{1 + \log_5 7}{2 + \log_5 7}.$$

Ответ: $x = \frac{1 + \log_5 7}{2 + \log_5 7}.$

Если показательное уравнение имеет вид

$$g(a^{f(x)}) = 0, \quad (2.17)$$

то его решение заменой $y = a^{f(x)}$ сводится к решению уравнения вида

$$a^{f(x)} y_i,$$

где y_i – корни уравнения $g(y) = 0$.

Пример 4. Решить уравнение $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$

Решение. Обозначая $2^{\sqrt{3x^2-2x}} = y$, получаем квадратное уравнение

$$4y^2 - 9y + 2 = 0,$$

корнями которого будут $y_1 = 2, y_2 = \frac{1}{4}.$

Таким образом, решение данного уравнения свелось к решению уравнений $2^{\sqrt{3x^2-2x}} = 2, \quad 2^{\sqrt{3x^2-2x}} = \frac{1}{4}.$

Второе уравнение решений не имеет, так как $\sqrt{3x^2-2x} > 0$ при всех допустимых значениях x . Из первого уравнения получаем

$$\sqrt{3x^2-2x} = 1 \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0 \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Проверкой убеждаемся, что эти корни удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$

Показательные уравнения, основания степеней которых являются последовательными членами геометрической прогрессии, а показатели степеней одинаковы, делением на любой из крайних членов приводятся к уравнениям вида (2.17).

Пример 5. Решить уравнение $16^x - 5 \cdot 8^x + 6 \cdot 4^x = 0.$

Решение. Разделим обе части уравнения на 4^x . Имеем

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0.$$

Обозначая $2^x = y$, получаем уравнение $y^2 - 5y + 6 = 0$, корнями которого будут $y_1 = 3, \quad y_2 = 2.$

Таким образом, решение уравнения сводится к решению двух простейших показательных уравнений $2^x = 3 \Rightarrow x_1 = \log_2 3; \quad 2^x = 2 \Rightarrow x_2 = 1.$

Ответ: $x_1 = \log_2 3; \quad x_2 = 1.$

Пример 6. Решить уравнение $6\sqrt[3]{9} - 13\sqrt[3]{6} + 6\sqrt[3]{4} = 0$.

Решение. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех натуральных чисел, больших 1.

Разделив обе части уравнения на $\sqrt[3]{4}$ и положив $t = \sqrt[3]{3/2}$, получим уравнение $6t^2 - 13t + 6 = 0$, корни которого $t_1 = 3/2$, $t_2 = 2/3$.

Таким образом, решение уравнения сводится к решению двух уравнений $\sqrt[3]{3/2} = 3/2$, $\sqrt[3]{3/2} = (3/2)^{-1}$, которые решений не имеют.

Ответ: нет решений.

Уравнения вида

$$(a(x))^{b(x)} = (a(x))^{c(x)} \quad (2.18)$$

с множеством допустимых значений, определяемых условием $a(x) > 0$, логарифмированием обеих частей приводятся к эквивалентному уравнению

$$b(x)\log_d(a(x)) = c(x)\log_d(a(x)). \quad (2.19)$$

Последнее уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\log_d(a(x)) = 0, \quad b(x) = c(x). \quad (2.20)$$

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$.

Решение. Множество допустимых значений неизвестного данного уравнения: $x \neq 3$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 3 и приводя подобные члены, получаем $\frac{11-x}{12}\log_3|x-3| = 0$, которое эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{11-x}{12} = 0 \Rightarrow x_1 = 11; \quad \log_3|x-3| = 0 \Rightarrow x_2 = 4; \quad x_3 = 2.$$

Ответ: $x_1 = 11$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$.

2.8. Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком логарифма. Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad (2.21)$$

с множеством допустимых значений $x > 0$ имеет решение $x = a^b$.

Логарифмическое уравнение, в котором под знаком логарифма стоит функция $f(x)$:

$$\log_a f(x) = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \quad (2.22)$$

имеет множество допустимых значений x , задаваемых неравенством $f(x) > 0$, и эквивалентно уравнению $f(x) = a^b$.

К простейшим логарифмическим уравнениям относятся также уравнения вида

$$\log_x A = B, \quad A > 0, \quad (2.23)$$

которое:

- а) при $A \neq 1$ и $B \neq 0$ имеет единственный корень $x = A^{1/B}$;
- б) при $A = 1$ и $B = 0$ имеет решение любое положительное, отличное от единицы, число;
- в) при $A = 1$ и $B \neq 0$ корней не имеет;
- г) при $A \neq 1$ и $B = 0$ корней не имеет.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{\log_3 2x}{\log_3(4x-16)} = 1$.

Решение. О.Д.З. исходного уравнения определяется системой:

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 4x - 16 > 0 \\ \log_3(4x - 16) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 4 \\ 4x - 16 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \neq \frac{17}{4} \end{cases}.$$

Перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем их к общему знаменателю. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{\log_3 2x - \log_3(4x-16)}{\log_3(4x-16)} = 0 \\ x > 4 \\ x \neq \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 2x - \log_3(4x-16) = 0 \\ x > 4 \\ x \neq \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4x - 16 \\ x > 4 \\ x \neq \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x > 4 \\ x \neq \frac{17}{4} \end{cases}.$$

Число 8 – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 8$.

Если логарифмическое уравнение имеет вид

$$f(\log_a x) = 0 \quad (2.24)$$

где f – некоторая функция, то заменой $y = \log_a x$ оно сводится к уравнениям вида (2.22):

$$\log_a x = y_i,$$

где y_i – корни уравнения $f(y) = 0$.

Аналогично решается уравнение вида

$$f(\log_x A) = 0, \quad A > 0. \quad (2.25)$$

Пример 2. Решить уравнение $\log_x^3 10 - \log_x^2 10 - 6 \log_x 10 = 0$.

Решение. Обозначим $y = \log_x 10$ и произведем замену неизвестного уравнения.

$$\text{Тогда } y^3 - y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow y(y^2 - y - 6) = 0 \Leftrightarrow y(y-3)(y+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Возвращаясь к прежней переменной, имеем

$$\begin{cases} \log_x 10 = 0 \\ \log_x 10 = -2 \Leftrightarrow \\ \log_x 10 = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 10^{-1/2} \\ x = 10^{1/3} \end{cases}.$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{10}/10$; $x_2 = \sqrt[3]{10}$.

Логарифмическое уравнение вида

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \quad (2.26)$$

эквивалентно уравнению

$$f(x) = g(x),$$

рассматриваемому на множестве допустимых значений x , задаваемом системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Если в данное уравнение входят логарифмы по разным основаниям, то предварительно необходимо привести все логарифмы к одному основанию.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{3}{2} \log_{1/4} (x+2)^2 + \log_4 (x+6)^3 - \log_{1/4} (4-x)^3 = 3.$$

$$\text{Решение. О.Д.З. уравнения определяется системой } \begin{cases} x+2 \neq 0, \\ x+6 > 0, \\ 4-x > 0. \end{cases}$$

решение которой: $x \in (-6; -2) \cup (-2; 4)$.

Переходя в уравнении к основанию $1/4$ и используя формулу

$$\log_{1/4} (x+2)^2 = 2 \log_{1/4} |x+2|, \text{ получаем}$$

$$3 \log_{1/4} |x+2| - 3 \log_{1/4} (x+6) - 3 \log_{1/4} (4-x) = 3.$$

Последнее уравнение на О.Д.З. исходного уравнения равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} \frac{|x+2|}{(x+6)(4-x)} = 1; \\ x \in (-6; -2) \cup (-2; 4), \end{cases}$$

т.е. системе

$$\begin{cases} 4|x+2| = (x+6)(4-x), \\ x \in (-6; -2) \cup (-2; 4). \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \in (-6; -2), \\ -4(x+2) = (x+6)(4-x), \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-2; 4), \\ x^2 + 6x - 16 = 0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x_1 = 1 - \sqrt{33}$, вторая — $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 1 - \sqrt{33}$, $x_2 = 2$

2.9. Системы показательных и логарифмических уравнений

Системы содержащие показательные или логарифмические уравнения, обычно решаются сведением показательного (или логарифмического) уравнения к алгебраическому уравнению и решением полученной алгебраической системы.

Пример. Решить систему
$$\begin{cases} \log_y x - \log_x y = 8/3 \\ xy = 16 \end{cases}.$$

Решение. Множество допустимых значений x и y в данной системе определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

Обозначая $z = \log_y x$ и учитывая, что при x и y из О.Д.З.

$$\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$$

получим уравнение $z - 1/z = 8/3$.

Множество всех решений этого уравнения числа

$$z_1 = 3 \quad \text{и} \quad z_2 = -1/3.$$

Таким образом, данная система на своем множестве допустимых значений равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \log_y x = 3, \\ xy = 16, \end{cases} \quad \begin{cases} \log_y x = -1/3, \\ xy = 16. \end{cases}$$

Из равенства $\log_y x = 3$ следует $x = y^3$; поэтому первая система этой совокупности равносильна на О.Д.З. системе $\begin{cases} x = y^3, \\ xy = 16. \end{cases}$

Отсюда находим $x = 8, y = 2$.

Вторая система совокупности равносильна на О.Д.З. системе

$$\begin{cases} x = 1/\sqrt[3]{y}, \\ xy = 16. \end{cases}$$

Отсюда находим $x = 1/4, y = 64$.

Ответ: $(8; 2); (1/4; 64)$.

2.10. Вопросы для самоподготовки по теме «Уравнения»

1. Какие уравнения считают эквивалентными?
2. Дать определение модуля.
3. Какие уравнения называют иррациональными? Способы решения этих уравнений.
4. Дать определение линейной системы уравнений.
5. Когда система линейных уравнений называется совместной, несовместной, определенной, неопределенной?
6. Опишите метод Гаусса. Решение системы m линейных уравнений с n неизвестными.
7. Дать определение логарифма и перечислить основные свойства логарифмов.
8. Какие уравнения принято называть показательными?
9. Какие уравнения называются логарифмическими?
10. Как решаются системы показательных и логарифмических уравнений?

2.11. Тесты по теме «Уравнения»

№	Задание	Варианты ответов
1	Решите уравнение: $x - 2\sqrt{x+2} + 3 = 0$	1) -1 ; 2) 3 ; 3) -7 ; 4) 0
2	Решите уравнение: $\frac{2^{x+3} - 1}{7} = \frac{4}{2^{x+2}}$	1) 0 ; 2) ± 2 ; 3) 17 ; 4) -6
3	Решите уравнение:	1) ± 2 ; 2) ± 4 ; 3) $\pm \sqrt{3}$; 4) $\pm \sqrt{10} - 6$.

	$1 + \frac{6}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x^2 - 1}$	
4	Решите уравнение: $(x-7)^{3/2} - 12(x-7) + 48\sqrt{x-7} = 64$	1) -4; 2) 23; 3) 0; 4) 37.
5	Решите уравнение: $\lg^2 x + 2\log_{100} x - 6 = 0$	1) ± 7 ; 2) 100; 0,001; 3) -2; 6; 4) 10.
6	Решите уравнение: $\frac{1}{x} - 5 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} = 0$	1) $\frac{1}{2}$; 2) 4; 3) 43; 4) 9.
7	Решите уравнение: $\sqrt{x} = x-4 + 2$	1) 13; 2) -27; 3) 4; 4) ± 2 .
8	Решите уравнение: $4\log_9^2(6-x) - 4\log_9(6-x) + 1 = 0$	1) ± 7 ; 2) 12; 3) $\pm \sqrt{17}$; 4) 3.
9	Решите уравнение: $9^{\sqrt{x-2}} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x-2}} = 18$	1) 6; 2) 7; 3) 4; 4) 11.
10	Решите уравнение: $4x - x-2 - 3 = 0$	1) ± 3 ; 2) 1; 3) -8; 4) 9.

2.12. Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения:

1. $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5 = 0$

2. $x^3 + 6x + 4x^2 + 3 = 0$

3. $7\left(x + \frac{1}{2}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$

4. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{9}$

5. $\frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{x+1}{2(x-2)} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x+2}$

6. $\frac{x^2}{x^2 - 4} + \frac{x+1}{2(x-2)} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x+2}$

7. $|-x+2| = 2x+1$

8. $|x-1| + |x-2| = 1$

9. $\sqrt{x+1} = 8 - \sqrt{3x+1}$

10. $\sqrt{x^{2+x-5}} + \sqrt{x^2 + 8x - 4} = 5$

$$11. \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - x}} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \sqrt{3}$$

Вычислить:

$$12. 5^{\log_{0,2} 0,5} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \log_{0,5} \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}}$$

$$13. \frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$$

14. Известно, что $\log_3 7 = a$, $\log_7 5 = b$, $\log_5 4 = c$. Найти $\log_3 12$.

Решить уравнения:

$$15. 9^{3-5x} \cdot 7^{5x-3} = 1$$

$$16. 5 \cdot (0,004)^{\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} = 25^{0,5 \sin 2x}$$

$$17. |x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$$

$$18. x^{\lg x + 7} = 10^{(\lg x + 1) \cdot 4}$$

$$19. 4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$$

$$20. \log_x 5\sqrt{5} - 1,25 = \log_x^2 \sqrt{5}$$

$$21. \lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$$

$$22. \frac{\lg(35-x)}{\lg(5-x)} = 3$$

$$23. \log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$$

Решить системы уравнений:

$$24. \begin{cases} \sqrt{x-2} + 5 = y, \\ y^2 - 10\sqrt{x-2} = 2x + 5. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 9^x = 725 + 2^2, \\ 25 + 2^{0,5 \cdot y} - 3^x = 0. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 63. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 5, \\ \log_9 x + \log_3 y = 7. \end{cases}$$

2.13. Варианты проверочной работы №2

Вариант 1

4.3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$$

1.2. Решить уравнение

$$3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6.$$

1.3. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 18, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 26, \\ x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

2.1. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7.$$

2.2. Решить уравнение

$$3\sqrt[3]{81} - 10\sqrt[3]{9} + 3 = 0.$$

2.3. Решить систему

$$\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

3.1. Решить уравнение

$$x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}.$$

3.2. Решить уравнение

$$5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}.$$

3.3. Решить систему

$$\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x}, \\ 4^{\log \sqrt{2} x} = y^4 - 5. \end{cases}$$

Вариант 4

4.1. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{9 - \sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x+1}} = 4.$$

4.2. Решить уравнение

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x.$$

4.3. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Вариант 5

5.1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4.$$

5.2. Решить уравнение

$$27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x.$$

5.3. Решить систему

$$\begin{cases} x^{x^2-y^2-16} = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Вариант 6

6.1. Решить уравнение

$$x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0.$$

6.2. Решить уравнение

$$4\sqrt{3x^2-2x+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$$

6.3. Решить систему

$$\begin{cases} y - x^2 = 17 - 8x, \\ \frac{1}{3}(y+1) + 8x = x^2 + 16. \end{cases}$$

2.14. Ответы по теме «Уравнения»

Тесты.

№	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10.
Ответ	1	1	4	2	2	3	3	4	1	2

Задачи для самостоятельной работы

1. $1; -\frac{5}{2}$; 2. $-1; 3$; 3. $2; \frac{1}{2}$; 4. $0; -2$; 5. 5 ; 6. $-\frac{1}{3}$;
 8. $[1; 2]$; 7. $\frac{1}{3}$; 9. 8 ; 10. 2 ; 11. 4 ; 12. 6 ;
 13. 3 ; 16. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 14. $a \cdot b \cdot c + 1$; 15. $0, 6$; 17. $\frac{1}{3}; 2; 4$; 18. 10 ;
 19. 10 ; 20. $\sqrt[5]{5}; 5$; 21. $-1; 7$; 22. $2; 3$; 23. $1; 3$; 24. $(18; 9)$;
 25. $(3; 2)$; 26. $(9; 3)$; 27. $(9; 729)$.

Варианты ответов проверочной работы №2

Вариант 1 1.1. $-61; 30$. 1.2. $\log_3(2 + \sqrt{5})$; $\log_3(0,5(\sqrt{5} - 1))$. 1.3. $(8; 4; 2)$.	Вариант 4 4.1. 0. 4.2. 2. 4.3. нет решений.
Вариант 2 2.1. $1; -\frac{1}{3}$. 2.2. 2. 2.3. $(4; 2)$.	Вариант 5 5.1. 2. 5.2. 0. 5.3. $(1; -1); (5; 3)$.
Вариант 3 3.1. $6; -2$. 3.2. $1, 4$. 3.3. $(0,5; -1,5)$.	Вариант 6 6.1. $\pm 2\sqrt{2}$. 6.2. $1; -\frac{1}{3}$. 6.3. $(-15; -19); (17; 9)$.

3. Неравенства

3.1. Общие сведения

Пусть $f(x)$ – функция одного переменного (аргумента). Решить неравенство

$$f(x) < 0 \quad (3.1)$$

– это значит найти все значения аргумента функции f , при которых неравенство (3.1) справедливо. Множество всех значений аргумента функции f , при которых неравенство (3.1) справедливо, называется множеством решений неравенства или решением неравенства.

Множество решений нестрого неравенства

$$f(x) \leq 0 \quad (3.2)$$

представляет собой объединение множества решений неравенства (3.1) и множества решений уравнения $f(x) = 0$.

Два неравенства считаются эквивалентными, если множество их решений совпадают.

Под множеством допустимых значений неизвестных, входящих в неравенство, понимают область определения функции $f(x)$.

Отдельные неравенства вида (3.1) или (3.2), составленные для различных функций $f_i(x)$, могут быть сведены в систему неравенств. Решить систему неравенств – это значит найти множество всех значений аргументов функций $f_i(x)$, при которых справедливы все неравенства систем одновременно.

Системы неравенств считаются эквивалентными, если множества их решений совпадают. Приведем следующие равносильные неравенства:

1. $f(x) > g(x)$ и $f(x) - g(x) > 0$ равносильны для любых функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$;
2. $f(x) > g(x)$ и $f(x) + \alpha > g(x) + \alpha$ равносильны для любого числа α ;
3. $f(x) > g(x)$ и $\alpha \cdot f(x) > \alpha \cdot g(x)$ равносильны для любого числа $\alpha > 0$;
4. $f(x) > g(x)$ и $\alpha \cdot f(x) < \alpha \cdot g(x)$ равносильны для любого числа $\alpha < 0$;
5. $f(x) > g(x)$ и $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильны для любого числа $a \in (1; +\infty)$;

6. $f(x) > g(x)$ и $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильны для любого числа $a \in (0; 1)$;

7. Если функция $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ тождественно равны, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) > \varphi(x)$ равносильны.

3.2. Рациональные неравенства. Метод интервалов

Пример 1. Решить неравенство

$$-x^2 - 2x + 3 > 0.$$

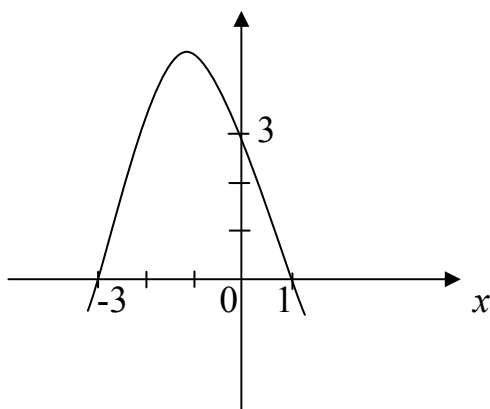


Рис. 2

Решение. Решив уравнение

$$-x^2 - 2x + 3 = 0, \text{ получим } x_1 = -3, \quad x_2 = 1.$$

Графиком функции

$y = -x^2 - 2x + 3$ является парабола, ветви которой направлены вниз (рис.2), и которая лежит выше оси абсцисс при $x \in (-3; 1)$. Следовательно, решением исходного неравенства будет множество значений x , заключенное в интервале между корнями уравнения.

Ответ: $x \in (-3; 1)$.

Заметим, что при решении примера мы использовали знание того, что график функции

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

есть парабола. Для более сложных интервалов не всегда удастся построить график функции, стоящей в левой части неравенства, или задача построения такого графика много труднее самой задачи решения неравенства. Поэтому для решения рациональных неравенств степеней, больших второй, и дробно-рациональных неравенств используется метод интервалов. Этот метод прост и эффективен и может быть применен также для решения квадратных и линейных неравенств.

Идея метода интервалов для решения неравенств вида $p(x) > 0$ или $p(x) < 0$, где $p(x)$ – заданный многочлен, заключается в следующем. На числовой оси выделяются интервалы, на которых функция, стоящая в левой части неравенства, имеет постоянный знак и отмечаются точки, в которых рассматриваемое выражение равно нулю. На каждом из получившихся интервалов ставят знак левой части на данном интервале и записывают ответ.

Пример 2. Решить неравенство

$$-x^2 - 2x + 3 > 0.$$

Решение. Решив уравнение $-x^2 - 2x + 3 = 0$, находим точки $x = -3$, и $x = 1$ числовой оси, в которой функция $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ обращается в нуль. При этом функцию $f(x)$ можно представить $f(x) = -(x+3)(x-1)$. Следовательно, на промежутках $-\infty < x < -3$, $-3 < x < 1$, $x > 1$ функция $f(x)$ не изменяет своего знака. Для определения знака $f(x)$ на всем промежутке достаточно вычислить знак $f(x)$ в какой-либо «удобной» точке внутри промежутка. В качестве этих точек возьмем, например, точки $x = -4$, $x = 0$, и $x = 2$. Находим $f(-4) < 0$, $f(0) > 0$, $f(2) < 0$. Отметим на рис. 3 полученные знаки. Осталось лишь записать ответ, «прочитав» его с рисунка.

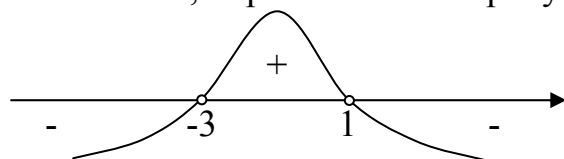


Рис. 3

Ответ: $x \in (-3; 1)$.

Нет необходимости вычислять знак функции в избранной точке каждого промежутка. Следующий пример познакомит с правилом чередования знаков.

Пример 3. Решить неравенство

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 (2-x)(x-1)^4 (x-3)^5 \left(x - \frac{2}{3}\right) < 0.$$

Решение: Обозначим левую часть неравенства $p(x)$. Обозначим на числовой оси точки, в которых многочлен обращается в нуль (рис. 4).

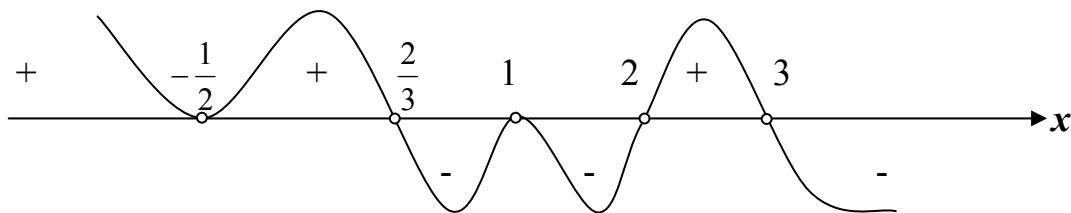


Рис. 4

Определим знаки $p(x)$ на каждом промежутке. Для этого определим знак $p(x)$ на каком-либо одном промежутке. Удобно взять x больше большего корня уравнения $p(x) = 0$, например, $x = 4$. Очевидно, что $p(x) < 0$ при $x > 3$. В точке $x = 3$ функция $p(x)$ меняет знак «-» на «+», поскольку двучлен $(x-3)$ состоит в нечетной степени (говорят, что корень многочлена $p(x)$ $x_1 = 3$ имеет кратность $k_1 = 5$) и выражение $(x-3)^5$

меняет знак при переходе через точку $x = 3$. В точке $x = 2$ функция $p(x)$ меняет знак с «+» на «-». В точке $(x = 1)$ смена знака не происходит, потому что двучлен $(x - 1)$ стоит в четной степени (корень $x_2 = 1$ имеет кратность $k_2 = 4$) и выражение $(x - 1)^4$ не меняет знак при переходе через точку $x = 1$. Далее в точке $x = 2/3$ знак меняется с «-» на «+» и в точке $x = -1/2$ смена знака не происходит.

Ответ: $x \in (2/3; 1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Замечание. Очевидно, что множество решений неравенства

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 (2 - x)(x - 1)^4 (x - 3)^5 \left(x - \frac{2}{3}\right) \leq 0$$

запишется в виде $x \in [2/3; 2] \cup [3; +\infty]$.

Приведенные примеры позволяют сформулировать МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ следующим образом.

Пусть $p(x)$ – многочлен n -й степени с действительными коэффициентами, а $x_1, x_2, \dots, x_r$ – все действительные корни многочлена с кратностями $k_1, k_2, \dots, k_r$ соответственно, причем $x_1 > x_2 > \dots > x_r$. Многочлен $p(x)$ можно представить в виде

$$p(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r} \cdot Q(x) \quad (3.3)$$

где многочлен $Q(x)$ действительных корней не имеет и либо положителен, либо отрицателен при всех $x \in R$. Положим для определенности, что $Q(x) > 0$. Тогда при $x > x_1$ все сомножители в разложении (3.3) положительны и $p(x) > 0$. Если x_1 – корень нечетной кратности (k_1 – нечетное, то при $x_2 < x < x_1$ все сомножители в разложении (3.3), за исключением первого, положительны и $p(x) < 0$. В этом случае говорят, что многочлен $p(x)$ меняет знак при переходе через корень x_1 .

Аналогичным способом, используя разложение (3.3), нетрудно убедиться, что при переходе через корень x_2 многочлен $p(x)$ меняет знак, если k_2 – нечетное, и не меняет знака, если k_2 – четное.

Рассмотренное свойство многочленов используется для решения неравенств методом интервалов. Для этого, чтобы найти все решения неравенств

$$p(x) > 0, \quad (3.4)$$

достаточно знать все действительные корни многочлена $p(x)$, их кратности и знак многочлена $p(x)$ в произвольно выбранной точке, не совпадающей с корнем многочлена.

Пример 4. Решить неравенство

$$x^2(x + 2)(x - 1)^3(x^2 + x + 1) > 0.$$

Решение. Расположим на числовой оси ox действительные корни многочлена $p(x)$, стоящего в левой части неравенства (рис. 5).

$$p(x) = x^2(x+2)(x-1)^3(x^2+x+1)$$

$x_1 = 0$	$x_2 = -2$	$x_3 = 1$	$D < 0$
$k_1 = 2$	$k_2 = 1$	$k_3 = 3$	$\emptyset$
ч	н/ч	н/ч	

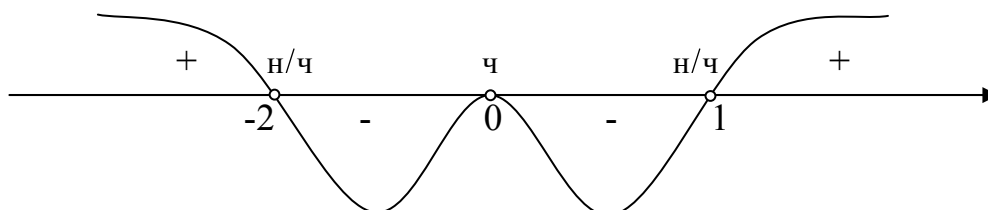


Рис. 5

При $x > 1$ многочлен $p(x)$ положителен, так как все сомножители, стоящие в левой части неравенства, положительны. Будем двигаться по оси $0x$ справа налево. При переходе через точку $x_3 = 1$ многочлен меняет знак и становится отрицательным, так как $x_3 = 1$ – корень кратности $k_3 = 3$; при переходе через точку $x_1 = 0$ многочлен не меняет знака, так как $x_1 = 0$ – корень кратности $k_1 = 2$; при переходе через точку $x_2 = -2$ многочлен опять меняет знак и становится положительным. Промежутки знакопостоянства данного многочлена схематически изображены на рис. 5. Используя этот рисунок, легко выписать множества решений неравенства $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Решение рационального неравенства, т.е. неравенства вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad (3.5)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, сводится к решению эквивалентного неравенства (3.4) следующим образом: умножив обе части неравенства (3.5) на многочлен $(Q(x))^2$, который положителен при всех допустимых значениях неизвестного x (т.е. при тех значениях x , при которых $Q(x) \neq 0$), получим рациональное неравенство

$$P(x) \cdot Q(x) > 0,$$

эквивалентное неравенству (3.5); оно решается методом интервалов.

Замечание. При решении неравенства вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, абитуриенты нередко допускают грубую ошибку, записывая систему, неравносильную исходному неравенству

$$\begin{cases} P(x) > 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{(x^2 + 1)(x - 2)} \geq 0.$$

Решение. О.Д.З. неизвестного $x \neq 2$. Умножив обе части неравенства на $(x^2 + 1)^2(x - 2)^2$ получим неравенство эквивалентное исходному неравенству:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)(x^2 + 1)(x - 2) \geq 0.$$

Найдем корни многочлена, стоящего в левой части неравенства. Для этого решим уравнения

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x - 2 = 0.$$

Корни первого уравнения найдем «угадав» один из корней $x_1 = 1$ и разделив многочлен $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ на двучлен $x - 1$. Тогда эквивалентное неравенство с учетом О.Д.З. запишется в виде

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x^2 + 1) \geq 0.$$

Множество решений последнего неравенства находится методом интервалов (рис. 6): $x \in (-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup [3; +\infty)$.

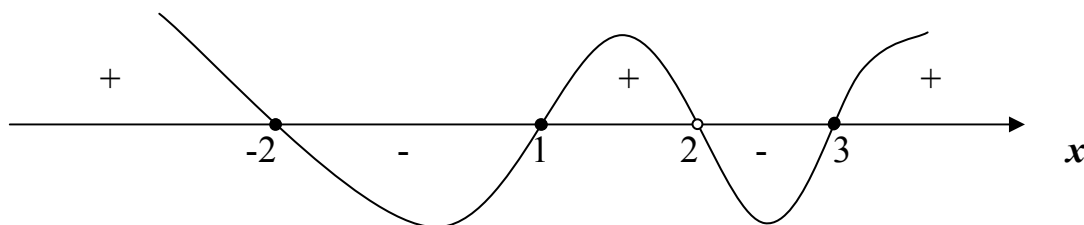


Рис. 6

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup [3; +\infty)$.

3.3. Неравенства, содержащие знак абсолютной величины

При решении неравенств, содержащих знак абсолютной величины (знак модуля), следует разбить область допустимых значений неравенства на множества, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве нужно решать неравенство и полученные решения объединять в множество решений исходного неравенства.

Пример 1: Решить неравенство

$$|x^2 - 2x| - x < 0.$$

Решение. Выражение, стоящее под знаком модуля, может принимать как положительные так и отрицательные значения.

1) Предположим, что $x^2 - 2x \geq 0$ ($x^2 - 2x \geq 0$ при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$); тогда, согласно определению абсолютной величины

$$|x^2 - 2x| = x^2 - 2x,$$

исходное неравенство принимает вид

$$x^2 - 2x - x < 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 3x < 0.$$

Решение этого неравенства: $x \in (0; 3)$. Пересечение множеств решений неравенств $x^2 - 2x \geq 0$ и $x^2 - 3x < 0$ дает первое множество решений данного неравенства (рис. 7): $x \in [2; 3)$.



Рис. 7

2) Предположим, что $x^2 - 2x < 0$ ($x^2 - 2x < 0$ при $x \in (0; 2)$); тогда согласно определению абсолютной величины

$$|x^2 - 2x| = -(x^2 - 2x),$$

данное неравенство принимает вид $-(x^2 - 2x) - x < 0$ или $-x^2 + x < 0$.

Решение последнего неравенства $x^2 - 2x < 0$ и $-x^2 + x < 0$ дает второе множество решений данного неравенства (рис. 8): $x \in (1; 2)$.

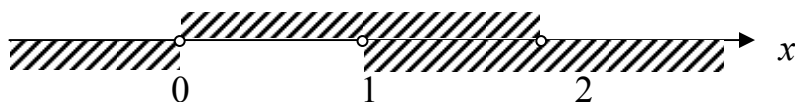


Рис. 8

Итак, окончательно, решениями данного неравенства являются $x \in (1; 2) \cup [2; 3)$.

Ответ: $x \in (1; 3)$.

Неравенство вида

$$|f(x)| < g(x), \tag{3.6}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ -f(x) < g(x). \end{cases}$$

Для тех x , при которых $g(x) \leq 0$, эта система, а значит, и данное неравенство решений не имеют.

В частности, неравенство

$$|f(x)| < a, \quad (3.7)$$

при $a \leq 0$ решений не имеет, а при $a > 0$ оно равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a, \\ -f(x) < a. \end{cases}$$

Пример 2. Решить неравенство

$$|x^2 - 5x| \leq 6.$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leq 6 \\ x^2 - 5x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases}.$$

Неравенство $x^2 - 5x - 6 \leq 0$ выполняется при $x \in [-1; 6]$, а неравенство $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ выполняется при $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. Пересечение множеств решений неравенств системы дает $x \in [-1; 2] \cup [3; 6]$.

Ответ: $x \in [-1; 2] \cup [3; 6]$.

Пример 3. Решить неравенство

$$3x^2 - |x - 3| > 9x - 2.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде

$$|x - 3| < 3x^2 - 9x + 2.$$

Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - 3 < 3x^2 - 9x + 2 \\ x - 3 > -(3x^2 - 9x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 10x + 5 > 0, \\ 3x^2 - 8x - 1 > 0. \end{cases}$$

Неравенство $3x^2 - 10x + 5 > 0$ выполняется при

$$x \in \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{10}}{3}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{10}}{3}; +\infty\right).$$

Неравенство $3x^2 - 8x - 1 > 0$ выполняется при

$$x \in \left(-\infty; \frac{4 - \sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{19}}{3}; +\infty\right).$$

Пересечение множеств решений неравенств системы дает ответ.

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; \frac{4 - \sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{19}}{3}; +\infty\right).$$

Неравенство вида

$$|f(x)| > g(x), \quad (3.8)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, равносильно совокупности двух неравенств: $f(x) > g(x)$, $f(x) < -g(x)$, т.е. совокупности

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

Все те x из О.Д.З. неравенства (3.8), для которых $g(x) < 0$, входят в множество решений неравенства (3.8) и равносильной ему совокупности.

В частности, неравенство

$$|f(x)| > a, \quad (3.9)$$

равносильно совокупности

$$\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{cases}$$

Если $a < 0$, то неравенство вида (3.9) выполняется при любом допустимом значении x данного неравенства.

Пример 4. Решить неравенство

$$|x^3 - x| \geq 1 - x.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^3 - x \geq 1 - x, \\ x^3 - x \leq -(1 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 \geq 0, \\ x^3 - 2x + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство последней совокупности выполняется только при $x \geq 1$ (так как $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, а $x^2 + x + 1 > 0$ при любом x). Поскольку

$$x^3 - 2x + 1 = (x - 1) \left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right),$$

то множеством решений $x^3 - 2x + 1 \leq 0$ является множество

$$\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; 1 \right].$$

Объединяя множества решений обеих неравенств совокупности, получаем множество решений исходного неравенства.

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; +\infty \right).$$

Неравенство вида

$$|f(|x|)| < g(x) \quad (3.10)$$

можно решить двумя способами: оно равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} f(|x|) < g(x), \\ f(|x|) > -g(x). \end{cases}$$

Выбор способа решения зависит от конкретного неравенства и от сложности функций f и g .

Пример 5. Решить неравенство $||x|-1| < 1-x$.

Решение. Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} |x-1| < 1-x, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |-x-1| < 1-x, \\ x < 0. \end{cases}$$

Неравенство $|x-1| < 1-x$ первой системы равносильно системе

$$\begin{cases} x-1 < 1-x, \\ x-1 > -(1-x), \end{cases}$$

которая решений не имеет. Следовательно, не имеет решений и первая система совокупности.

Неравенство $|-x-1| < 1-x$ равносильно неравенству $|x+1| < 1-x$, которое в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} x+1 < 1-x, \\ x+1 > -(1-x). \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что множество $(-\infty; 0)$ является множеством решений второй системы совокупности и исходного неравенства.

Ответ: $x \in (-\infty; 0)$.

Неравенства вида

$$|f(|x|)| > g(x) \tag{3.11}$$

можно решить двумя способами: равносильно совокупности неравенств

$$\begin{cases} f(|x|) > g(x), \\ f(|x|) < -g(x), \end{cases}$$

а также равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} |f(x)| > g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |f(-x)| > g(x), \\ x < 0. \end{cases}$$

Пример 6. Решить неравенство

$$\left| \frac{2-3|x|}{1+|x|} \right| > 1.$$

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех действительных чисел. Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \left| \frac{2-3x}{1+x} \right| > 1 \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \left| \frac{2+3x}{1-x} \right| > 1 \\ x < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Первая система совокупности (3.12) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} \frac{2-3x}{1+x} > 1 \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x-2}{1+x} > 1 \\ x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решим первую систему совокупности

$$\begin{cases} \frac{2-3x}{1+x} > 1 \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-4x}{1+x} > 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4x > 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$$

Решим вторую систему совокупности

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{1+x} > 1 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{1+x} > 0 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Вторая система совокупности (3.12) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} \frac{-(2+3x)}{1-x} > 1, \\ -\infty < x < -\frac{2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2+3x}{1-x} > 1, \\ -\frac{2}{3} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Решим первую систему совокупности

$$\begin{cases} \frac{-(2+3x)}{1-x} > 1, \\ -\infty < x < -\frac{2}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x-3}{1-x} > 0, \\ -\infty < x < -\frac{2}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-3 > 0 \\ -\infty < x < -\frac{2}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow -\infty < x < -\frac{3}{2}.$$

Решить вторую систему совокупности

$$\begin{cases} \frac{2+3x}{1-x} > 1, \\ -\frac{2}{3} \leq x \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+4x}{1-x} > 0, \\ -\frac{2}{3} \leq x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4x > 0 \\ -\frac{2}{3} \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < 0.$$

Множество всех решений исходного неравенства запишем в ответ.

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup \left[0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Неравенства вида

$$|f(x)| \geq |g(x)| \quad (3.13)$$

решаются при помощи разбиения области его допустимых значений на промежутки, каждый из которых является промежутком знакопостоянства как функции $f(x)$, так и функции $g(x)$. Затем на каждом из этих промежутков решается неравенство без знака абсолютной величины. Объединяя найденные решения на всех частях О.Д.З. исходного неравенства, получаем множество всех его решений.

Также решаются и неравенства более общего вида:

$$k_1|f_1(x)| + k_2|f_2(x)| + \dots + k_n|f_n(x)| \geq g(x), \quad (3.14)$$

где $k_1, k_2, \dots, k_n$ – некоторые действительные числа.

Некоторые неравенства вида (3.13) целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству:

$$f^2(x) \geq g^2(x).$$

Например, неравенство $|x-2| > |x|$ равносильно неравенству $(x-2)^2 > x^2$, т.е. $x < 1$.

Пример 7. Решить неравенство $|x-2| > 2+x-|3-x|$.

Решение. Нули подмодульных выражений разделяют числовую ось на три промежутка

$$x < 2, \quad 2 \leq x < 3, \quad x \geq 3.$$

На левом промежутке первый модуль раскрывается со знаком «-», а второй со знаком «+»; на среднем – оба модуля раскрываются со знаком «+», на правом – первый модуль раскрывается со знаком «+», а второй со знаком «-». Получаем совокупность трех систем неравенств:

$$\begin{cases} x < 2, \\ -(x-2) > 2+x-(3-x), \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq x < 3, \\ (x-2) > x-(3-x), \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ (x-2) > 2+x+(3-x). \end{cases}$$

Решив эти системы и объединив полученные ответы, получим $x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$.

3.4. Иррациональные неравенства

Под иррациональным неравенством понимают неравенство, в котором неизвестные величины (или некоторые функции неизвестных величин) находятся под знаком радикала. Для того, чтобы найти множество решений иррационального неравенства, приходится, как правило, возводить обе части неравенства в натуральную степень. При этом (в силу принципиальной невозможности проверки полученных решений

подстановкой) необходимо следить за тем, чтобы при преобразовании неравенств каждый раз получалось неравенство, эквивалентное исходному.

При решении иррациональных неравенств следует помнить, что при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, эквивалентное исходному неравенству. Если же обе части неравенства возводить в четную степень, то будет получаться неравенство, эквивалентное исходному и имеющее тот же знак, лишь в случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны. Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, т.е. найти О.Д.З. этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей О.Д.З. или ее частях.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{1-x}{\sqrt{22x-11x^2+33}} < 0.$$

Решение. Неравенство с учетом О.Д.З. эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} 1-x < 0, \\ 22x-11x^2+33 > 0, \end{cases}$$

из которой находим: $1 < x < 3$.

Ответ: $x \in (1; 3)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}. \quad (3.15)$$

Решение. О.Д.З. исходного неравенства определяется системой

$$\begin{cases} 8-2x-x^2 \geq 0, \\ x+10 \neq 0, \\ 2x+9 \neq 0, \end{cases}$$

из которой находим: $x \in [-4; 2]$.

Для значений $x = -4$ и $x = 2$ неравенство (3.15) выполняется, следовательно, эти значения являются его решениями.

Пусть $-4 < x < 2$. Для любого x из этого интервала $x+10 > 0$, $2x+9 > 0$, $8-2x-x^2 > 0$. Поэтому на интервале $(-4; 2)$ исходное неравенство равносильно

$$2x+9 \leq x+10,$$

из которого находим $x \leq 1$. Из этих значений x интервалу $-4 < x < 2$ принадлежат все числа промежутка $-4 < x \leq 1$. Следовательно, решениями неравенства являются $x \in [-4; 1]$ и $x = 2$.

Ответ: $x \in [-4; 1] \cup \{2\}$.

Неравенство вида

$$\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}, \quad n \in N, \quad (3.16)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > f(x), \end{cases}$$

а неравенство вида

$$\sqrt[n+1]{f(x)} < \sqrt[n+1]{g(x)}, \quad n \in N, \quad (3.17)$$

равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$.

Решение. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x+1 > x-1, \end{cases}$$

из которой находим $x \in [1; +\infty)$.

Ответ: $x \in [1; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2}} < \sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}.$$

Решение. Неравенство равносильно неравенству

$$\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1},$$

которое после приведения к общему знаменателю можно переписать в виде

$$\frac{4x^2 - 15x - 25}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+5/4)(x-5)}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получим решение неравенства.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-5/4; -1) \cup (1; 5)$.

Неравенство вида

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \quad (3.18)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x), \end{cases}$$

а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \quad (3.19)$$

равносильно неравенству $f(x) < g^{2n+1}(x)$.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{x^2 + 4x + 4} < x + 6$.

Решение. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 \geq 0, \\ x + 6 > 0, \\ x^2 + 4x + 4 < (x + 6)^2, \end{cases}$$

из которой находим $x \in (-4; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-4; +\infty)$.

Неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \quad (3.20)$$

равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \quad (3.21)$$

равносильно неравенству $f(x) > g^{2n+1}(x)$.

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 5x - 24} > x + 2$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 24 > (x + 2)^2, \\ x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 5x - 24 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 24 \geq 0, \\ x + 2 < 0. \end{cases}$$

Первая система совокупности решений не имеет. Из второй системы совокупности находим $x \in (-\infty; -3]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3]$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{24 - 2x - x^2}}{x} < 1.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{24 - 2x - x^2} < x, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \sqrt{24 - 2x - x^2} > x. \end{cases}$$

Решим каждую из этих систем. Для первой системы имеем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 24 - 2x - x^2 \geq 0, \\ 24 - 2x - x^2 < x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -6 \leq x \leq 4, \\ x \in (-\infty; -4) \cup (3; +\infty). \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; 4]$$

Вторая система совокупности равносильна системе

$$\begin{cases} x < 0, \\ 24 - 2x - x^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ -6 \leq x \leq 4. \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-6; 0).$$

Следовательно, решениями исходного неравенства являются $x \in [-6; 0) \cup (3; 4]$.

Ответ: $x \in [-6; 0) \cup (3; 4]$.

Для решения иррациональных неравенств может применяться способ подстановки или введения вспомогательного неизвестного.

Пример 8. Решить неравенство $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

Решение. Обозначим $t = \sqrt{15-x}$; тогда $t \geq 0$ и $x = 15 - t^2$. Делая замену переменной в исходном неравенстве, получим систему

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ \frac{3 - (15 - t^2)}{t} < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ \frac{t^2 - t - 12}{t} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ t \in (-\infty; 0) \cup (0; 4). \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 4.$$

Вернемся к прежней переменной

$$0 < \sqrt{15-x} < 4 \Leftrightarrow 0 < 15-x < 16 \Leftrightarrow -1 < x < 15.$$

Ответ: $x \in (-1; 15)$.

Пример 9. Решить неравенство

$$\frac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} \leq 3x + 2.$$

Решение. Воспользуемся методом интервалов для решения данного алгебраического неравенства. Его применение позволяет свести задачу к решению иррационального уравнения и исследованию знака иррациональной алгебраической функции. Перепишем неравенство в виде

$$f(x) = \frac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} - (3x + 2) = \frac{9x^2 - 4 - (3x + 2)\sqrt{5x^2 - 1}}{\sqrt{5x^2 - 1}} = \frac{(3x + 2)((3x - 2) - \sqrt{5x^2 - 1})}{\sqrt{5x^2 - 1}} \leq 0$$

Находим область определения $f(x)$:

$$5x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{5}/5) \cup (\sqrt{5}/5; +\infty).$$

Поскольку знаменатель дроби неотрицателен, то достаточно найти нули числителя дроби в области определения $f(x)$. Так как уравнение

$$3x - 2 = \sqrt{5x^2 - 1}$$

имеет на множестве области определения функции $f(x)$ единственный корень $x = 5/2$, то множество нулей функции $f(x)$ есть $\{-2/3; 5/2\}$. Нули функции $f(x)$ разбивают область определения $f(x)$ на три интервала. Установим знак функции $f(x)$ на каждом из полученных интервалов:

1. если $x \in (-\infty; -2/3)$, то $f(x) > 0$;
2. если $x \in (-2/3; -\sqrt{5}/5)$, то $f(x) < 0$;
3. если $x \in (\sqrt{5}/5; 5/2)$, то $f(x) < 0$.

Запишем в ответ объединение тех промежутков, на которых функция $f(x)$ отрицательна и, поскольку исходное неравенство является нестрогим, множество нулей этой функции.

Ответ: $x \in [-2/3; -\sqrt{5}/5) \cup (\sqrt{5}/5; 5/2]$.

Пример 10. Решить неравенство $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$.

Решение. О.Д.З. неравенства определяется из системы

$$\begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ 5+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-5; \frac{1}{3}\right].$$

Исходное неравенство эквивалентно неравенству $\sqrt{1-3x} > \sqrt{5+x} + 1$, обе части которого неотрицательны. Возводя обе части последнего неравенства в квадрат, получаем эквивалентное неравенство $-5-4x > 2\sqrt{5+x}$.

1) Если $-5-4x \leq 0$, т.е. $x \geq -5/4$, то левая часть отрицательна или равна нулю, а правая положительна. Поэтому при любом значении x из промежутка $[-5/4; 1/3]$ неравенство не выполняется.

2) Если $-5-4x > 0$, т.е. $x < -5/4$, то обе части неравенства неотрицательны, и после возведения в квадрат получаем неравенство, эквивалентное последнему неравенству:

$$(-5-4x)^2 > 4(5+x).$$

Таким образом, множество решений исходного неравенства получается как множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x \in [-5; 1/3], \\ x < -5/4, \\ (-5-4x)^2 > 4(5+x), \end{cases}$$

откуда получаем ответ.

$$\text{Ответ: } x \in \left[-5; \frac{-9-\sqrt{61}}{8}\right).$$

Пример 11. Решить неравенство $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$.

Решение. О.Д.З. неравенства: $x \in [0; 5]$. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно системе

$$\begin{cases} x \in [0; 5], \\ 25 - x^2 + 2\sqrt{25 - x^2} \sqrt{x^2 + 7x} + x^2 + 7x > 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 5], \\ 2\sqrt{25 - x^2} \sqrt{x^2 + 7x} > -16 - 7x. \end{cases}$$

При $x \in [0; 5]$ имеем $-16 - 7x < 0$ и $2\sqrt{25 - x^2} \sqrt{x^2 + 7x} \geq 0$; поэтому решением последней системы являются $x \in [0; 5]$.

Ответ: $x \in [0; 5]$.

3.5. Показательные неравенства

Решение простейших показательных неравенств основано на свойствах монотонности степени:

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ a > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ a > 1, \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ 0 < a < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ 0 < a < 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

Учитывая эти свойства, многие простейшие показательные неравенства решаются методом приведения обеих частей неравенства к одному основанию.

Замечание. Решение любого нестрогого показательного неравенства отличается от решения соответствующего строгого неравенства только включением в множество всех его решений корней соответствующего уравнения.

Пример 1. Решить неравенство

$$4^{56} \cdot (1/4)^x \cdot (1/4)^{\sqrt{x}} > 1.$$

Решение. О.Д.З. неравенства $x \geq 0$. Приводя левую часть неравенства к степени с основанием 4, получим

$$4^{56} \cdot (1/4)^x \cdot (1/4)^{\sqrt{x}} = 4^{56-x-\sqrt{x}}.$$

Таким образом данное неравенство равносильно неравенству

$$56 - x - \sqrt{x} > 0.$$

Обозначив $t = \sqrt{x}$; имеем:

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 + t - 56 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ (t-7)(t+8) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t < 7.$$

Таким образом, данное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 \leq \sqrt{x} < 7 \quad \text{и} \quad 0 \leq x < 49.$$

Ответ: $x \in [0; 49)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$3^{x-10} - 2^{x-9} - 3^{x-11} - 2^{x-12} > 0.$$

Решение. Поскольку

$$3^{x-10} = \frac{3^x}{3^{10}}; \quad 2^{x-9} = \frac{2^x}{2^9}; \quad 3^{x-11} = \frac{3^x}{3^{11}}; \quad 2^{x-12} = \frac{2^x}{2^{12}},$$

то данное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \frac{3^x}{3^{11}}(3-1) &> \frac{2^x}{2^{12}}(2^3+1) \Leftrightarrow 3^{x-13} > 2^{x-13} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-13} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-13 > 0 \Leftrightarrow x > 13. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in (13; +\infty)$.**Пример 3.** Решить неравенство

$$\sqrt{4-x} \left(3^{x^2-6x+7,5} - 9\sqrt{3} \right) \geq 0.$$

Решение. О.Д.З. неравенства определяется условием $4-x \geq 0$, т.е. $x \leq 4$. Исходное неравенство равносильно совокупности, состоящей из уравнения и системы двух неравенств:

$$\sqrt{4-x} = 0, \quad \begin{cases} 3^{x^2-6x+7,5} - 9\sqrt{3} \geq 0, \\ x < 4. \end{cases}$$

Из уравнения $\sqrt{4-x} = 0$ находим $x = 4$. Поскольку $9\sqrt{3} = 3^{2,5}$, то первое неравенство системы равносильно неравенству

$$\begin{aligned} 3^{x^2-6x+7,5} &\geq 3^{2,5} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7,5 \geq 2,5 \Leftrightarrow x - 6x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty). \end{aligned}$$

Учитывая условие $x < 4$, получаем решение системы $x \in (-\infty; 1]$.Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup \{4\}$.**Пример 4.** Решить неравенство

$$\frac{2 \cdot 3^{x+3} - 5^{x+3}}{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x} < 1.$$

Решение. Неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+3} - 5^{x+3} < 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x, \\ 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^{x+3} - 5^{x+3} > 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x, \\ 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x < 0. \end{cases}$$

Решим каждую из этих систем. Для первой системы имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 49 \cdot 3^x < 122 \cdot 5^x, \\ 5 \cdot 3^x > 3 \cdot 5^x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (5/3)^x > 49/122, \\ (3/5)^x > 3/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_{5/3}(49/122), \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (\log_{5/3}(49/122); 1). \end{aligned}$$

Вторая система совокупности равносильна системе

$$\begin{cases} (5/3)^x < 49/122, \\ (3/5)^x < 3/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_{5/3}(49/122), \\ x > 1. \end{cases}.$$

Вторая система не имеет решений.

Ответ: $x \in (\log_{5/3}(49/122); 1)$.

Неравенство вида

$$f(a^x) \geq 0. \quad (3.24)$$

при помощи замены переменной $t = a^x$ сводится к решению соответствующих простейших показательных неравенств.

Пример 5. Решить неравенство

$$98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49}.$$

Решение. Обозначив $t = 7^{x^2+5x-49}$, получим

$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 + 7t - 98 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ (t+14)(t-7) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in (0; 7].$$

Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству

$$7^{x^2+5x-49} \leq 7 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 49 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-10; 5].$$

Ответ: $x \in [-10; 5]$.

Неравенство вида

$$a^{f(x)} \geq b, \quad (3.25)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, может быть решено при помощи логарифмирования обеих частей (это возможно, так как обе части неравенства положительны). При всех $b \leq 0$ неравенство (3.25) справедливо для любого x из О.Д.З. неравенства.

Неравенство $a^{f(x)} \leq b$ при $b \leq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ решений не имеет.

Пример 6. Решить неравенство

$$5^{2x-3} < 8^{3-x}.$$

Решение. Обе части неравенства положительны при любом значении x . Прологарифмировав обе части по основанию 5, получим неравенство

$$2x - 3 < (3 - x) \log_5 8,$$

равносильное исходному.

Таким образом, $(2 + \log_5 8)x < 3 + 3 \log_5 8$. Отсюда с учетом того, что $2 + \log_5 8 > 0$, находим все решения исходного неравенства.

Ответ: $x \in \left(-\infty, \frac{3 + 3 \log_5 8}{2 + \log_5 8}\right)$.

Решение показательных неравенств, которые имеют три различных основания, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии (причем эти основания возводятся в одну и ту же степень, зависящую от x), сводится заменой переменной к решению квадратного неравенства.

Такие показательные неравенства, в частности, имеют вид

$$\alpha a^{f(x)} + \beta b^{f(x)} + \gamma c^{f(x)} \geq 0, \quad (3.26)$$

$$\alpha a^{f(x)} + \beta b^{f(x)} + \gamma c^{f(x)} \leq 0, \quad (3.27)$$

где $\alpha \neq 0, \beta, \gamma$ — действительные числа, $f(x)$ — некоторая функция, а основания a, b, c удовлетворяют условию $b^2 = a \cdot c$.

Пример 7. Решить неравенство $10^{2/x} + 25^{1/x} \geq 4,25 \cdot 50^{1/x}$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$25^{1/x} - 4,25 \cdot 50^{1/x} + 100^{1/x} \geq 0.$$

В этом неравенстве числа 25, 50, 100 образуют три последовательных числа геометрической прогрессии со знаменателем 2. Разделив обе части на $100^{1/x}$, получим неравенство

$$1 + (1/2)^{2/x} - 4,25(1/2)^{1/x} \geq 0.$$

Обозначив $t = (1/2)^{1/x}$, имеем

$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 - 4,25t + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ (t-4)\left(t-\frac{1}{4}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty).$$

В результате получаем, что исходное неравенство эквивалентно двум неравенствам:

$$(1/2)^{1/x} \leq (1/4), \quad (1/2)^{1/x} \geq 4.$$

Объединение их множеств решений и дает множество решений исходного неравенства: $x \in [-1/2; 0) \cup (0; 1/2]$.

Ответ: $x \in [-1/2; 0) \cup (0; 1/2]$.

Решение некоторых показательных неравенств сводится к решению алгебраических однородных неравенств.

Пример 8. Решить неравенство

$$6\sqrt[3]{9} - 13\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} \leq 0.$$

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех натуральных чисел, больших 1. Неравенство является однородным неравенством вида

$$6f^2(x) - 13f(x) \cdot g(x) + 6g^2(x) \leq 0,$$

где $f(x) = \sqrt[3]{3}$, $g(x) = \sqrt[3]{2}$. Разделив обе его части на $\sqrt[3]{9}$ и положив $t = \sqrt[3]{2/3}$, получим

$$6 - 13t + 6t^2 \leq 0.$$

Решением этого неравенства является промежуток $2/3 \leq t \leq 3/2$. Таким образом, исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$2/3 \leq \sqrt[3]{2/3} \leq 3/2,$$

откуда находим

$$\log_{2/3}(3/2) \leq 1/x \leq \log_{2/3}(2/3).$$

Таким образом, исходному неравенству удовлетворяют все числа из О.Д.З., т.е. решением неравенства является множество $X \in \{x : x \geq 2, x \in N\}$.

Ответ: $X \in \{x : x \geq 2, x \in N\}$.

Некоторые показательные неравенства содержат выражения $f(x)^{g(x)}$. В этом случае функция $f(x)^{g(x)}$ определена тогда, когда определены обе функции $f(x)$, $g(x)$ и, кроме того, $f(x) > 0$.

Пример 9. Решить неравенство $(x-1)^{x^2-6x+5} > 1$.

Решение. О.Д.З. данного неравенства определяется условием $x > 1$. Прологарифмировав исходное неравенство по основанию 10, при условии $x > 1$, получим

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 5) \lg(x-1) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0, \\ \lg(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5) > 0, \\ \lg(x-1) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0, \\ \lg(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5) < 0, \\ \lg(x-1) < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty), \\ x-1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (5; +\infty), \\ x \in (1; 5), \\ 1 < x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (5; +\infty), \\ x \in (1; 2). \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x \in (1; 2) \cup (5; +\infty)$.

3.6. Логарифмические неравенства

Решение простейших логарифмических неравенств основано на следующих свойствах монотонности логарифма:

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x), \\ a > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ a > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x), \\ 0 < a < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \quad (3.29)$$

В данных переходах от простейшего логарифмического неравенства к равносильным системам неравенств, не содержащих знака логарифма, учтена область допустимых значений исходного неравенства. Решение любого нестрогого логарифмического неравенства отличается от решения соответствующего строгого логарифмического неравенства только включением в множество всех его решений множества корней соответствующего логарифмического уравнения.

Пример 1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,25}\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right)} \leq 1.$$

Решение. Так как основание показательной функции меньше единицы, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{0,25}\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right) \geq 0.$$

Поскольку основание логарифма меньше единицы, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$0 < x^2 - \frac{10}{3}x + 1 \leq 1,$$

т.е. системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - \frac{10}{3}x + 1 > 0, \\ x^2 - \frac{10}{3}x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1/3) \cup (3; +\infty), \\ x \in [0; 10/3] \end{cases}$$

$$x \in [0; 1/3) \cup (3; 10/3].$$

Ответ: $x \in [0; 1/3) \cup (3; 10/3]$.

Решение неравенства вида

$$f(\log_a x) > 0, \quad (3.30)$$

а также неравенств $f < 0$, $f \geq 0$, $f \leq 0$, где f — некоторая функция, указанного аргумента находится следующим образом. Вводится новое неизвестное $t = \log_a x$, и неравенство (3.30) решается как алгебраическое относительно неизвестного t с последующим решением соответствующих простейших логарифмических неравенств.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_2 \sqrt{x} - 2 \log_{1/4}^2 x + 1 > 0.$$

Решение. Множество допустимых значений неизвестного: $x > 0$. Приводя логарифмы к одному основанию, получаем неравенство, эквивалентное исходному неравенству

$$\frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{2} \log_2^2 x + 1 > 0.$$

Решаем это неравенство как квадратное относительно нового неизвестного $t = \log_2 x$. В результате получаем, что логарифмическое неравенство эквивалентно неравенству

$$-1 < \log_2 x < 2 \Leftrightarrow 1/2 < x < 4.$$

Ответ: $x \in (1/2; 4)$.

Существуют различные способы оформления решения логарифмических неравенств. Наиболее распространенные из них – метод перехода к решению равносильных совокупностей неравенств и метод разбиения О.Д.З. данного неравенства на интервалы, на которых решаются соответствующие равносильные (на рассматриваемом интервале) неравенства.

Замечание. При решении логарифмических неравенств следует избегать преобразований, которые могут привести к потере или появлению посторонних решений, так как в противном случае обоснование правильности ответа, как правило, есть более сложная задача, чем решение исходного неравенства.

Неравенства вида $\log_{f(x)} g(x) \geq C$, равносильны совокупности систем

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 1, \\ g(x) > (f(x))^C, \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < (f(x))^C, \end{cases}$$

а неравенства вида $\log_{f(x)} g(x) \leq C$, равносильны совокупности систем

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 1, \\ g(x) \geq (f(x))^C, \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1, \\ g(x) \leq (f(x))^C. \end{cases}$$

Неравенства вида $\log_{f(x)} g(x) < C$ равносильны совокупности систем

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 1, \\ g(x) < (f(x))^C, \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > (f(x))^C, \end{cases}$$

а неравенства вида $\log_{f(x)} g(x) \leq C$ равносильны совокупности систем

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 1, \\ g(x) \leq (f(x))^C, \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1, \\ g(x) \geq (f(x))^C. \end{cases}$$

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{x^2} (3 + 2x) < 1.$$

Решение. Первый способ. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{x^2} (3 + 2x) < \log_{x^2} x^2,$$

которое равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2 > 1, \\ 3 + 2x < x^2, \\ 3 + 2x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ x^2 < 3 + 2x. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; 1).$$

Решением первой системы совокупности являются $x \in (-3/2; -1) \cup (3; +\infty)$. Объединяя полученные множества решений систем совокупности, находим множество решений исходного неравенства

$$x \in (-3/2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty).$$

Второй способ. Область допустимых значений данного неравенства определяется системой

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ 3 + 2x > 0 \end{cases}$$

откуда находим О.Д.З. неравенства:

$$x \in (-3/2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

1. Рассмотрим данное неравенство на множестве $x \in (-3/2; -1) \cup (1; +\infty)$. На этом множестве оно равносильно неравенству (так как $x^2 > 1$)

$$3 + 2x < x^2,$$

решением которого на этом множестве являются $x \in (-3/2; -1) \cup (3; +\infty)$.

2. На множестве $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ данное неравенство равносильно неравенству (так как $x^2 < 1$)

$$3 + 2x > x^2,$$

решением которого на этом множестве являются $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Ответ: $x \in (-3/2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$.

3.7. Уравнения и неравенства с параметрами

Уравнения и неравенства с параметрами являются наиболее трудными задачами курса элементарной математики. Решение этих задач по существу представляет собой исследование функций, входящих в уравнение, с последующим решением уравнений или неравенств с числовыми коэффициентами. При решении уравнения (неравенства) с параметрами необходимо выяснить, при каких значениях параметров уравнение (неравенство) имеет решение, и найти все эти решения.

Пример 1. Найти такие значения a, b, c , при которых уравнение

$$\sqrt{x+a\sqrt{x+b}+\sqrt{x}}=c \quad (3.31)$$

имеет бесконечно много решений.

Решение. Перенесем $\sqrt{x}$ в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат. После приведения подобных членов получим уравнение

$$(a+2c)\sqrt{x}=c^2-b,$$

являющееся следствием уравнения (3.31). При $a+2c=0$ и $c^2-b=0$, и только в этом случае, последнее уравнение имеет бесконечно много решений (все неотрицательные числа). Подставив $a=-2c$ и $b=c^2$ в исходное уравнение, получим

$$\begin{aligned}\sqrt{x-2c\sqrt{x}+c^2} &= c-\sqrt{x}, \\ \sqrt{(\sqrt{x}-c)^2} &= c-\sqrt{x},\end{aligned}$$

т.е. уравнение

$$|\sqrt{x}-c|=c-\sqrt{x}. \quad (3.32)$$

При $c < 0$ это уравнение корней не имеет, а при $c = 0$ имеет единственное решение: $x_1 = 0$.

Пусть $c > 0$. Рассмотрим такие значения неизвестного x , которые удовлетворяют неравенству $0 \leq x \leq c^2$. Тогда $\sqrt{x} \leq c$, а потому $|\sqrt{x}-c|=c-\sqrt{x}$. Следовательно, уравнение (3.32) равносильно системе

$$\begin{cases} c > 0, \\ 0 \leq x \leq c^2. \end{cases}$$

Итак, уравнение (3.31) имеет бесконечно много решений, когда $a = -2c$, $b = c^2$ и $c > 0$, и его решениями являются $x \in [0; c^2]$.

Ответ: $a = -2c$, $b = c^2$, $c > 0$.

Пример 2. При всех значениях a ($a > 0$, $a \neq 1$) решить неравенство

$$\left| a^{2x} + a^{x+2} - 1 \right| \geq 1. \quad (3.33)$$

Решение. Обозначив $t = a^x$, запишем неравенство (3.33) следующим образом

$$\left| t^2 + a^2 t - 1 \right| \geq 1, \quad (3.34)$$

где $t > 0$.

Поскольку
$$t^2 + a^2 t - 1 = \left(t - \frac{1}{2} \left(-a^2 - \sqrt{a^4 + 4} \right) \right) \times \left(t - \frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 4} \right) \right)$$

при всех a , то неравенство (3.34) равносильно совокупности двух систем (так как $t > 0$)

$$\begin{cases} 0 < t < \frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 4} \right), \\ -t^2 - a^2 t + 1 \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 4} \right), \\ t^2 + a^2 t - 1 \geq 1. \end{cases}$$

Решим первую систему. Неравенство $-t^2 - a^2 t + 1 \geq 1$ равносильно неравенству $t^2 + a^2 t \leq 0$, которое при $t > 0$ решений не имеет; следовательно, первая система решений не имеет.

Решим вторую систему. Неравенство $t^2 + a^2 t - 1 \geq 1$ равносильно совокупности двух неравенств:

$$t \leq \frac{1}{2} \left(-a^2 - \sqrt{a^4 + 8} \right), \quad t \geq \frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 8} \right).$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 8} \right) > \frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 4} \right),$$

то вторая система совокупности равносильна неравенству

$$t \geq \frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 8} \right).$$

Следовательно, при $a > 0$, $a \neq 1$ и любом x неравенство (3.33) равносильно неравенству

$$a^x \geq \frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 8} \right).$$

Откуда находим:

а) при $0 < a < 1$ неравенство (3.33) имеет решение

$$x \leq \log_a \left(\frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 8} \right) \right);$$

б) при $a > 1$ неравенство (3.34) имеет решение

$$x \geq \log_a \left(\frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 8} \right) \right).$$

Ответ: при $0 < a < 1$ $x \in \left[-\infty; \log_a \left(\frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 8} \right) \right) \right]$;
 при $a > 1$ $x \in \left[\log_a \left(\frac{1}{2} \left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 8} \right) \right); +\infty \right]$.

3.8. Вопросы для самоподготовки по теме «Неравенства»

1. Какие неравенства считаются эквивалентными?
2. Дать определение решения неравенства.
3. Что значит решить систему неравенств?
4. Описать метод интервалов для решения неравенств.
5. Описать схему решения неравенства, содержащего знак абсолютной величины.
6. Привести схему решения иррациональных неравенств.
7. Привести способы подстановки или введения вспомогательного неизвестного при решении иррациональных неравенств.
8. Каковы методы решения показательных неравенств.
9. Логарифмические неравенства. Схема их решения.
10. Как избежать потерю или появление посторонних корней при решении логарифмических неравенств?

3.9. Тесты по теме «Неравенства»

№	Задание	Варианты ответов
1	Решите неравенство $(x^2 + x - 6)(x - 5) \geq 0$	1) $(-\infty; 3] \cup [2; 5]$; 2) $(-3; 5]$; 3) $[-3; 2] \cup [5; \infty)$; 4) $(7; 13) \cup (19; 23]$.
2	Решите неравенство $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{8+x} - 16}{x^2 + 3x + 9} < 0$.	1) $(-\infty; 3) \cup (4; 7)$; 2) $(-12; +\infty)$; 3) $(-\infty; 12)$; 4) $(3; 4)$.
3.	Решите неравенство $\frac{(x^2 + 8x - 65)(x + 3)}{x - 8} \leq 0$.	1) $[-13; 3] \cup [5; 8]$; 2) $[-3; 5]$; 3) $[-13; 3]$; 4) $[-20; 3] \cup [5; 8]$.
4.	Решите неравенство $27^{\frac{2}{3}(x-2)} + 3^4 - 4^{2(x-1)} > 73$	1) $(-\infty; -2)$; 2) $(-2; 2)$; 3) $(3; 7)$; 4) $(2; +\infty)$.

5.	Решите неравенство $0,5(1 + \log_3 x) - \log_{\frac{1}{3}}(x+3) > \log_3 5x$.	1) $(0; +\infty)$; 2) $(9; 81)$; 3) $(27; 81)$; 4) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right)$.
6.	Решите неравенство $5^x - 4 \leq (x-2)^2$.	1) $(-1; 3]$; 2) $(-\infty; 1]$; 3) $[3; 7]$; 4) $[1; +\infty)$.
7.	Решите неравенство $3^{x-2} < 1 + \sqrt{x+1}$.	1) $(0; 7)$; 2) $(-3; 1)$; 3) $(-1; 3)$; 4) $(3; +\infty)$.
8.	Решите неравенство $\lg 10x < \lg 10^{\lg(x^2+21)}$.	1) $(0; 3) \cup (7; +\infty)$; 2) $(-1; 3) \cup (7; +\infty)$; 3) $(-1; 0) \cup (3; +\infty)$; 4) $(0; 3) \cup (3; +\infty)$.
9.	Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 + 3 > 4x \\ \log_3(x^2 - 4x + 3) \leq \log_3 8 \end{cases}$	1) $[-1; 1) \cup (3; 5]$; 2) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$; 3) $(1; 3)$; 4) $[5; +\infty)$.
10.	Решите систему неравенств $\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{3+x} - 25 > 0; \\ x^2 + 2x - 99 \leq 0. \end{cases}$	1) $[-1; 1)$; 2) $[-11; -5)$; 3) $(-1; 3]$; 4) $[3; 7)$.

3.10. Задачи для самостоятельной работы

Решите неравенства:

1. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \geq 0$.

2. $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.

3. $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x+8} \leq 0$.

4. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$.

5. $|x-3| > -1$.

6. $\sqrt{3x-8} < -2$.

7. $\sqrt[3]{x+2} \leq -5$.

8. $\sqrt[4]{x-5} < 3$.

9. $(x-12)\sqrt{x-3} \leq 0$.

10. $\sqrt{(2x-5)^2} > 5$.

11. $\sqrt{x} - 9\sqrt[4]{x} + 18 \geq 0$.

12. $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11} \geq \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$.
13. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{5}{\sqrt{x-3}}$.
14. $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} > 1$.
15. $2^{x-1} > (1/16)^{1/x}$.
16. $(\sqrt{2}+1)^{(6x-6)/(x+1)} \leq (\sqrt{2}-1)^{-x}$.
17. $\sqrt{8+2^{\sqrt{3-x}+1}} - 4^{\sqrt{3-x}} + 2^{\sqrt{3-x}+1} > 5$.
18. $4x^2 + 3^{\sqrt{x+1}} + x3^{\sqrt{x}} < 2x^2 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$.

3.11. Варианты проверочной работы №3

Вариант 1 1. Решить неравенство $ x^2 + 21x + 34 < -1$. 2. Решить неравенство $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$. 3. Решить неравенство $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leq 0$.	Вариант 4 1. Решить неравенство $ -4x^2 - 6x - 5 < 9$. 2. Решить неравенство $9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 > 0$. 3. Решить неравенство $\log_{1/2}(2x+3) > 0$.
Вариант 2 1. Решить неравенство $ 2x-1 < x+3 $. 2. Решить неравенство $7^x - 2^{x-2} \leq 5 \cdot 7^{x-1} - 2^{x-1}$. 3. Решить неравенство $\log_{1/2}(4-x) \geq \log_{1/2} 2 - \log_{1/2}(x-1)$.	Вариант 5 1. Решить неравенство $\ x-1 -5 \leq 2$. 2. Решить неравенство $2^{x+4} \cdot 7^{x+4} > 2^{3x} \cdot 7^{3x}$. 3. Решить неравенство $\log_2 \sqrt{x} - 2 \log_{1/4}^2 x + 1 > 0$.
Вариант 3 1. Решить неравенство $\left \frac{-5}{x+2} \right < \left \frac{10}{x-1} \right $. 2. Решить неравенство $\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$. 3. Решить неравенство $\log_{10} 2x+3 ^3 + 2 \log_{(2x+3)^2} 10 < 3$.	Вариант 6 1. Решить неравенство $\left \frac{x^2 - 2x + 1}{x-3} \right > 1$. 2. Решить неравенство $3^{ 3x-4 } \leq 9^{2x-2}$. 3. Решить неравенство $\log_3 \sqrt{5-2x} \cdot \log_x 3 < 1$.

3.12. Ответы по теме «Неравенства»

Тесты

№	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	2.5.	2.6.	2.7.	2.8.	2.9.	2.10.
Ответ	3	2	1	4	1	2	3	1	1	2

Задачи для самостоятельного решения

1. $x \in [-1; 3]$;	10. $x \in (0; 5)$;
2. $x \in \left(-\frac{9}{2}; -2\right) \cup (3; \infty)$;	11. $x \in [0; 81]$;
3. $x \in (-8; 1]$;	12. $x \in \{-3\} \cup [-2; 4]$;
4. $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0]$;	13. $x \in (6; +\infty)$;
5. $x \in (-\infty; \infty)$;	14. $x \in \left(\frac{14+\sqrt{7}}{2}; 9\right)$;
6. нет решений.	15. $x \in (0; +\infty)$;
7. $x \in (-\infty; -2] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.	16. $x \in (-\infty; -1) \cup [2; 3]$;
8. $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.	17. $x \in [-1; 3)$;
9. $x \in (-2/3; 4)$;	18. $x \in (0; \log_3^2 2) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Варианты проверочной работы №3

Вариант 1 1. нет решений 2. $x \in (2 - \log_2^2 3; 2]$; 3. $x \in [1/4; 2]$.	Вариант 4 1. $x \in [-\infty; -2] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 2. $x \in (-\infty; 1]$; 3. $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.
Вариант 2 1. $x \in (-2/3; 4)$; 2. $x \in (-\infty; 2]$; 3. $x \in (1; 2] \cup [3; 4)$.	Вариант 5 1. $x \in [-6; -2] \cup [4; 8]$; 2. $x \in (-\infty; 2)$; 3. $x \in \left(\frac{1}{2}; 4\right)$.
Вариант 3 3. $x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$; 4. $x \in (-\infty; 1]$; 3. $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left(\frac{\sqrt[3]{10}-3}{2}; \frac{\sqrt[3]{100}-3}{2}\right)$.	Вариант 6 1. $x \in [-\infty; -1] \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$; 2. $x \in \left(-\infty; \frac{8}{7}\right)$; 3. $x \in (0; 1) \cup (\sqrt{6}-1; 5/2)$.

4. Тригонометрия

4.1. Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (4.1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (4.2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (4.3) \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (4.4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (4.5) \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (4.6)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.7) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.8)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (4.9) \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \pm 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha} \quad (4.10)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (4.11) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (4.12)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (4.13)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (4.14) \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad (4.15)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.16) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (4.17)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.18) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (4.19)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad (4.20) \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad (4.21)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (4.22) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (4.23)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (4.24) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (4.25)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (4.26) \quad \cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4} \quad (4.27)$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4} \quad (4.28) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (4.29)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (4.30) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (4.31)$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (4.32) \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (4.33)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (4.34)$$

Замечания: В формулах 4.29, 4.30, 4.31 знак «+» или «-» выбирается в зависимости от того, в какой четверти находится угол.

Формулы приведения

Наименование функции	Значение аргумента						
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$
$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

Значения тригонометрических функций основных углов

Функция	Угол				
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Обратные тригонометрические функции

Определение 1. $\alpha = \arcsin a$, если:

$$1) \sin \alpha = a \quad 2) \alpha \in [-90^\circ; 90^\circ].$$

Например, $\arcsin 0 = 0^\circ$, $\arcsin 1 = 90^\circ$, $\arcsin(-1) = -90^\circ$,

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ, \quad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -30^\circ.$$

Определение 2. $\alpha = \arccos a$, если:

$$1) \cos \alpha = a \quad 2) \alpha \in [0^\circ; 180^\circ].$$

Например, $\arccos 0 = 90^\circ$, $\arccos 1 = 0^\circ$, $\arccos(-1) = 180^\circ$,

$$\arccos \frac{1}{2} = 60^\circ, \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ.$$

Определение 3. $\alpha = \operatorname{arctg} a$, если:

$$1) \operatorname{tg} \alpha = a \quad 2) \alpha \in (-90^\circ; 90^\circ).$$

Например, $\operatorname{arctg} 0 = 0^\circ$, $\operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$, $\operatorname{arctg}(-1) = -45^\circ$.

Определение 4. $\alpha = \operatorname{arctg} a$, если:

$$1) \operatorname{ctg} \alpha = a \qquad 2) \alpha \in (0; \pi).$$

Например, $\operatorname{arctg} 0 = 90^\circ$, $\operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$, $\operatorname{arctg}(-1) = 135^\circ$.

Период тригонометрических функций

Периодом функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является число $T = 2\pi$. Например, $\sin 750^\circ = \sin(360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Периодом функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ является число $T = \pi$. Известно, что периодом функций $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ вычисляется по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а период функций $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$, $y = A \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ по формуле $T = \frac{\pi}{\omega}$.

Если период функции $y = f(x)$ равен T_1 , а период функции $y = g(x)$ равен T_2 , то период функций $y = f(x) + g(x)$ и $y = f(x) - g(x)$ равен наименьшему числу, при делении которого на T_1 и T_2 получаются целые числа.

4.2. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Вычисление значений тригонометрических функций

При доказательстве тригонометрических тождеств используются как формулы сокращенного умножения, так и формулы, связывающие между собой основные тригонометрические функции.

Задачи, связанные с вычислением значений тригонометрических выражений без использования таблиц, обычно решаются с помощью тождественных преобразований, приводящих искомое выражение к виду, содержащему только табличные значения тригонометрических функций.

Пример 1. Доказать тождество $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$.

Решение. Воспользуемся формулой сокращенного умножения $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, полагая в ней $x = \sin^2 \alpha$, $y = \cos^2 \alpha$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \\
&= 1 \cdot (\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \\
&= (\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\
&= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha.
\end{aligned}$$

Пример 2. Упростить $\frac{4 \sin 25^\circ \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$.

Решение. Заметим, что $65^\circ = 90^\circ - 25^\circ$, тогда

$$\begin{aligned}
\frac{4 \sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ} &= \frac{4 \sin 25^\circ \sin(90^\circ - 25^\circ)}{\cos 40^\circ} = \frac{4 \sin 25^\circ \cos 25^\circ}{\cos 40^\circ} = \\
&= \frac{2 \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{2 \sin(90^\circ - 40^\circ)}{\cos 40^\circ} = \frac{2 \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 2.
\end{aligned}$$

Ответ: 2.

Пример 3. Вычислить $\cos 840^\circ$.

Решение. $\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ)$.

Применяем формулу приведения $\cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -0,5$.

Ответ: -0,5.

Пример 4. Вычислить $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Решение. Воспользуемся определением тангенса $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, для вычисления $\cos \alpha$ воспользуемся формулой (4.1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25},$$

тогда $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ или $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. Так как $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, то $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. Вычис-

ляем $\operatorname{tg} \alpha$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Ответ: 0,75.

Пример 5. Вычислить значение $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} 3\right)$.

Решение. Обозначим $\alpha = \operatorname{arccotg} 3$. Тогда $\operatorname{ctg} \alpha = 3$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислим теперь значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Используя формулу $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}} / \left(1 + \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = \frac{1}{\sqrt{10} + 3}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10} + 3}$.

Пример 6. Вычислить без таблиц $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{2 \sin(\pi/7)}{2 \sin(\pi/7)} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) = \\ &= \frac{\left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right) + \left(\sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin(\pi/7)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: -0,5.

Пример 7. Вычислить $\cos \left(3 \arccos \frac{1}{4} \right)$.

Решение. Введем обозначение $\arccos \frac{1}{4} = \alpha$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \cos \left(3 \arccos \left(\frac{1}{4} \right) \right) &= \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \\ &= \frac{4}{64} - \frac{3}{4} = -\frac{11}{16}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{11}{16}$.

Пример 8. Вычислить $\arccos \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$.

Решение. $\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$. Отсюда $\arccos \frac{1}{2} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Пример 9. Найти период функции $y = \cos x \cdot \cos 6x$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.23)

$$\begin{aligned} y &= \cos x \cos 6x = \frac{1}{2} [\cos(x - 6x) + \cos(x + 6x)] = \\ &= \frac{1}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos 7x. \end{aligned}$$

Период функции $y = \cos 5x$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{5}$. Период функции $y = \cos 7x$ равен $T_2 = \frac{2\pi}{7}$. Наименьшее число, при делении которого на $T_1 = \frac{2\pi}{5}$ и $T_2 = \frac{2\pi}{7}$ получаются целые числа, есть число 2π . Следовательно период заданной функции $T = 2\pi$.

Ответ: 2π .

4.3. Тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида $\sin x = a$ (где $|a| \leq 1$), $\cos x = a$ (где $|a| \leq 1$), $\operatorname{tg} x = a$ (где $-\infty < a < \infty$), $\operatorname{ctg} x = a$ (где $-\infty < a < \infty$).

Решения этих уравнений имеют вид

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В некоторых частных случаях полезны следующие упрощенные формулы:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение сложных тригонометрических уравнений, как правило сводится к решению простейших тригонометрических уравнений.

Рассмотрим некоторые методы решения уравнений.

4.3.1. Уравнения, приводящиеся к алгебраическим с помощью основных формул

Пример 1. Решить уравнение $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$.

Решение. Заменяя $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$ получаем

$$8(1 - \sin^2 x) + 6\sin x - 3 = 0 \text{ или } 8\sin^2 x - 6\sin x - 5 = 0.$$

Это уравнение является алгебраическим относительно $\sin x$. Решая его, находим $\sin x = -\frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{5}{4}$;

а) $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;

б) $\sin x \neq \frac{5}{4}$ – это уравнение корней не имеет, т.к. $\sin x$ не может быть больше единицы.

Ответ: $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

4.3.2. Уравнения вида $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x) = 0$

Решение таких уравнений основано на следующем положении: если левая часть уравнения является произведением нескольких сомножителей, а правая часть равна нулю, то корнями такого уравнения служат те и только те значения переменной, при которых обращается в нуль хотя бы один из множителей, но ни один из остальных не теряет числового смысла.

Пример 1. Решить уравнение $3\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = 0$.

Решение. $3\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x(3\operatorname{tg}^2 x + 1) = 0$. Данное уравнение распадается на два уравнения

а) $\operatorname{tg} x = 0$, откуда $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;

б) $3\operatorname{tg}^2 x = -1$.

Уравнение б) корней не имеет, так как левая часть положительна при всяком значении x , принадлежащем О.Д.З.

Ответ: $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

4.3.3. Однородные уравнения

Пример 1. Решить уравнение $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 2$.

Решение. Для того чтобы свести данное уравнение к однородному воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, записывая уравнение в виде

$3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$. После приведения подобных членов получаем

$$\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0.$$

Это однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. Это можно сделать, так как множество значений x , удовлетворяющих уравнению $\cos x = 0$, не является решением данного уравнения:

$$\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0:$$

$$\text{а) } \operatorname{tg} x = 2;$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} x = 3.$$

$$x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. Решить уравнение $3\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2 x = 0$.

Решение. Замечаем, что корни уравнения $\cos x = 0$ (так как числа $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$) удовлетворяют данному уравнению. Поэтому следует левую его часть разложить на множители (вынести за скобки $\cos x$) и затем решить уравнение $\cos x = 0$ и однородное уравнение первого порядка. Мы поступим иначе. Заметим, что $\sin x \neq 0$ в противном случае из уравнения следует, что и $\cos x = 0$, что для одних и тех же значений переменной не выполняется. Разделим обе части уравнения на $\sin^2 x \neq 0$:

$$3\operatorname{ctg} x - 5\operatorname{ctg}^2 x = 0;$$

$$\operatorname{ctg} x(3 - 5\operatorname{ctg} x) = 0;$$

$$\text{а) } \operatorname{ctg} x = 0;$$

$$\text{б) } 3 - 5\operatorname{ctg} x = 0;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = \operatorname{arccctg} \frac{3}{5} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \operatorname{arccctg} \frac{3}{5} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4.3.4. Уравнения, решаемые понижением степени

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

Решение. Используем формулы (4.25) и (4.26) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, тогда имеем $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$ отсюда получаем $\cos 2x + \cos 6x - \cos 4x = 0$, используя формулу (4.18) имеем:

$$2\cos 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x = 0,$$

или

$$\cos 4x(2\cos 2x - 1) = 0,$$

$$\text{а) } \cos 4x = 0; \quad \text{б) } 2 \cos 2x - 1 = 0,$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2};$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \pi n \pm \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{8}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \pi n \pm \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$. В ответе указать число корней, принадлежащих промежутку монотонности функций $\cos x$, $x \in [0, \pi]$.

Решение. Прибавим $2\sin^2 x \cos^2 x$ к обеим частям уравнения

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x,$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \frac{7}{8} + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x,$$

$$2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{8}; \quad \sin^2 2x = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{4}; \quad \cos 4x = \frac{1}{2}; \quad x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поставленному условию $x \in [0, \pi]$ удовлетворяют четыре корня $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$.

4.3.5. Уравнения вида $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$

Корни этого уравнения те и только те значения x , при которых выполняются следующие условия: $f_1(x) = 0$; $f_2(x) \neq 0$.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{1+2\cos x}{2+\sin x} = 0$.

Решение. О.Д.З. переменной служит все множество действительных чисел, так как $2 + \sin 2x$ не обращается в нуль ни при каком значении x , а числитель $1 + 2\cos x$ — функция, которая определена на всем множестве действительных чисел. Найдем корни числителя, которые и являются корнями данного уравнения.

$$\text{Имеем } 1 + 2\cos x = 0, \text{ откуда } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ и } x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$.

Решение. О.Д.З. переменной x определяется условиями:

$$x \neq \frac{\pi}{2}(1+2n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x \neq \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем значения x , при которых числитель равен 0. Имеем:

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{3} \cdot 3n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

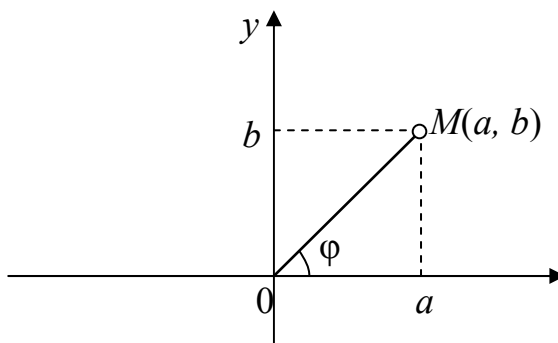
Сравнивая полученные корни числителя с выражением $\frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$ заключаем, что они не принадлежат О.Д.З., следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Ответ: нет решений.

4.3.6. Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$

Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$ можно решить при помощи введения вспомогательного угла. Разделим левую и правую часть на $\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Обозначим: $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ или $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Уравнение имеет решение, если $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1, \quad \frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq 1$ т.е.

$$c^2 \leq a^2 + b^2.$$

Введение вспомогательного угла основывается на лемме: если сумма квадратов двух действительных чисел равна единицы, то одно из этих чисел можно рассматривать как косинус, а другое как синус некоторого угла.

Пример 1. Решить уравнение $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

Решение. Так как $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, то данное уравнение эквивалентно уравнению $\sin(x + \varphi) = 1$, где φ определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{4}{5} \\ \cos \varphi = \frac{3}{5} \end{cases},$$

так как $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ больше нуля, то в качестве φ можно взять $\varphi = \arcsin \frac{4}{5}$ и решение данного уравнения имеет вид

$$x = -\arcsin \frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\arcsin \frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4.3.7. Уравнения вида $R(\sin kx, \cos nx, \operatorname{tg} mx, \operatorname{ctg} lx) = 0$

Уравнения вида $R(\sin kx, \cos nx, \operatorname{tg} mx, \operatorname{ctg} lx) = 0$, где R — рациональная функция указанных аргументов (k, n, m, l — натуральные числа), с помощью формул для тригонометрических функций суммы углов (в частности, формул двойного и тройного углов) можно свести к рациональному уравнению относительно неизвестного $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ с помощью формул универсальной тригонометрической подстановки:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; & \cos x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \\ \operatorname{tg} x &= \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; & \operatorname{ctg} x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

При этом следует помнить, что такое преобразование может повлечь потерю корней $x = \pi + 2\pi k$, для которых замена не имеет смысла (в этом случае $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не существует). Поэтому при решении уравнения указанным методом наличие или отсутствие корней вида $x = \pi + 2\pi k$, $n \in \mathbb{Z}$ должно устанавливаться непосредственной проверкой.

Пример 1. Решить уравнение $3\sin x - 2\cos x = 2$.

Решение. Заменяя $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, получаем уравнение

$$3 \cdot \frac{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2,$$

которое после упрощения примет вид $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$.

Следовательно $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Остается проверить, будут ли числа $x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ удовлетворять исходному уравнению. Подставляя эти значения в левую часть уравнения, убеждаемся, что они также ему удовлетворяют:

$$3 \sin(\pi + 2\pi n) - 2 \cos(\pi + 2\pi n) = -2 \cos \pi = 2.$$

Ответ: $x_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $(\cos x - \sin x) \left(2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right) + 2 = 0$.

Решение. Обозначая $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, с помощью формул универсальной тригонометрической подстановки запишем уравнение в виде

$$\frac{3t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 2t - 3}{(t^2 + 1)(1 - t^2)} = 0$$

корнями его будут $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, решение уравнения сводится к решению двух простейших уравнений:

$$\text{а) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Делая проверку, убеждаемся, что числа $\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ не являются корнями данного уравнения.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

4.3.8. Уравнения вида $R(\sin x + \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$

Уравнения вида $R(\sin x + \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$, где R — рациональная функция указанных в скобках аргументов, может быть сведено к урав-

нению относительно неизвестного $t = \sin x + \cos x$, если воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x,$$

из которого следует равенство $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Учитывая это равенство, уравнение можно привести к виду

$$R\left(t, \frac{1-t^2}{2}\right) = 0.$$

Точно так же, уравнения вида $R(\sin x - \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$ заменой $\sin x - \cos x = t$ сводятся к уравнениям

$$R\left(t, \frac{1-t^2}{2}\right) = 0.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x) = 3 \sin x \cdot \cos x.$$

Решение. Обозначив $\sin x + \cos x = t$ и воспользовавшись равенством

$\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ сведем уравнение к новому уравнению относительно t :

$$1 + t - t \cdot \frac{t^2 - 1}{2} = \frac{3}{2}(t^2 - 1).$$

Если это уравнение переписать в форме $(t+1)(t^2 + 2t - 5) = 0$, то находим три корня: $t_1 = -1$; $t_2 = -1 + \sqrt{6}$; $t_3 = -1 - \sqrt{6}$. Первый корень приводит к уравнению $\sin x + \cos x = -1$ или $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнения $\sin x + \cos x = -1 + \sqrt{6}$ и $\sin x + \cos x = -1 - \sqrt{6}$ соответствующие двум другим корням t_2 и t_3 решений не имеют, так как не существуют

$$\begin{aligned} & \arcsin \frac{2+2\sqrt{3}}{2}, \quad \arcsin \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}. \\ & \left(\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} > 1, \quad \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2} < -1 \right). \end{aligned}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4.3.9. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения, преобразований суммы в произведение и произведения тригонометрических функций в сумму

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $\sin 3x \cdot \cos 2x = \sin 5x$. В ответе указать $x \in (0^\circ, 90^\circ)$.

Решение. Представим $\sin 5x = \sin(3x + 2x) = \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \cdot \sin 2x$, тогда

$$\sin 3x \cos 2x = \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \cdot \sin 2x,$$

$$\cos 3x \cdot \sin 2x = 0.$$

$$a) \cos 3x = 0;$$

$$б) \sin 2x = 0;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из этих решений предстоит выбрать те, которые лежат в заданном интервале.

Найдем значения x_1 и x_2 при $n = 0, \pm 1$ и $k = 0, \pm 1$

$$n = 0, \quad x_1 = 30^\circ \quad k = 0, \quad x_2 = 0^\circ$$

$$n = -1, \quad x_1 = -30^\circ \quad k = -1, \quad x_2 = -90^\circ$$

$$n = 1, \quad x_1 = 90^\circ \quad k = 1, \quad x_2 = 90^\circ$$

На интервале $(0^\circ, 90^\circ)$ имеется лишь корень исходного уравнения $x = 30^\circ$.

Ответ: $x = 30^\circ$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0.$$

Решение. Воспользуемся формулами преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$(\sin x + \sin 3x) - (\sin 2x + \sin 4x) = 0,$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos x - 2 \sin 3x \cdot \cos x = 0$$

$$2 \cos x (\sin 2x - \sin 3x) = 0$$

$$2 \cos x \cdot 2 \cos \frac{5x}{2} \cdot \sin \left(-\frac{x}{2} \right) = 0$$

$$a) \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$б) \cos \frac{5x}{2} = 0$$

$$x_1 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \left(\frac{\pi}{5} (2n+1) \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$в) \cos x = 0$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} (2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{5}(2n+1)$, $x_3 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$.

Решение. Воспользуемся формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\frac{\cos 4x + \cos 2x}{2} = \frac{\cos 12x + \cos 2x}{2},$$

откуда $\cos 4x - \cos 12x = 0$.

Преобразуем разность косинусов в произведение:

$$2 \sin 8x \cdot \sin 4x = 0$$

$$a) \sin 8x = 0;$$

$$б) \sin 4x = 0;$$

$$x_1 = \frac{\pi n}{8}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Все корни второго уравнения входят в число корней первого уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. В некоторых случаях решение уравнения обычными методами затруднительно, например, решение уравнения $\sin \frac{x}{2} \cos 2x = 1$ предполагает решение двух систем

$$a) \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}.$$

Не существует единого метода, следуя которому можно было решить любое тригонометрическое уравнение. Только в результате длительной практики можно научиться видеть те или иные полезные приемы и комбинации, которые целесообразно применять при решении отдельных тригонометрических уравнений.

4.4. Системы тригонометрических уравнений

Системы уравнений, в которых неизвестные являются аргументами тригонометрических функций, называются системами тригонометрических уравнений. При решении систем тригонометрических уравнений используются как методы решения систем алгебраических уравнений, так и методы решения тригонометрических уравнений.

Пример: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Решение. Складывая уравнения системы, приходим к уравнению

$$\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = 0 \Leftrightarrow \sin(x+y) = 0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, приходим к уравнению

$$\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = -1 \Leftrightarrow \sin(x-y) = -1.$$

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pi n, \\ x-y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + \pi k; \quad y = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} - \pi k.$

4.5. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

Уравнения вида $P(y(x)) = 0$, где P – некоторая рациональная функция, а $y(x)$ – одна из аркфункций, сводятся к простейшим уравнениям

$$y(x) = y_i,$$

где y_i – корни уравнения $P(t) = 0$.

Если в уравнения входят выражения, содержащие разные аркфункции или эти аркфункции зависят от разных аргументов, то сведение уравнения к его алгебраическому следствию осуществляется обычно вычислением некоторой тригонометрической функции от обеих частей уравнения. Получившиеся при этом простейшие корни отделяются проверкой. Если в качестве прямой функции выбираются тангенс или котангенс, то решения, не входящие в область определения этих функций, могут быть потеряны. Поэтому перед вычислением значений тангенса и котангенса от обеих частей уравнений следует убедиться в том, что среди точек, не входящих в область определения этих функций, нет корней исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{3} - 4\operatorname{arctg} \frac{x}{3} - 5 = 0.$$

Решение. Вводя новое неизвестное $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$, получаем уравнение $y^2 - 4y - 5 = 0$, решение которого следующее: $y_1 = 5; y_2 = -1$. Следовательно, исходное уравнение распадается на два простейших:

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{3} = 5, \quad \operatorname{arctg} \frac{x}{3} = -1.$$

Так как $5 > \frac{\pi}{2}$, а $|-1| < \frac{\pi}{2}$, то единственным решением будет $\frac{x}{3} = \operatorname{tg}(-1)$ или $x = -3\operatorname{tg}1$.

Ответ: $x = -3\operatorname{tg}1$.

Пример 2. Решить уравнение $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}$.

Решение. Перенесем $\arcsin 6x$ в правую часть уравнения и вычислим от обеих частей получившегося уравнения значения синуса:

$$\sin(\arcsin 6x) = \sin\left(-\arcsin 6\sqrt{3}x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Преобразуя правую часть этого уравнения по формулам приведения, получаем алгебраическое следствие исходного уравнения:

$$6x = -\sqrt{1-108x^2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат. После приведения подобных членов получаем уравнение $144x^2 = 1$, корнями которого являются числа $\frac{1}{12}$ и $-\frac{1}{12}$.

Сделаем проверку. Подставляя в исходное уравнение значение $x = -\frac{1}{12}$, имеем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $x = -\frac{1}{12}$ — является корнем исходного уравнения. Подставляя в уравнение $x = \frac{1}{12}$, замечаем, что левая часть получившегося соотношения положительна, а правая отрицательна, т.е. $x = \frac{1}{12}$ — посторонний корень уравнения.

Ответ: $x = -\frac{1}{12}$.

Пример 3. Решить уравнение $2\operatorname{arctg}(2x+1) = \arccos x$.

Решение. Вычисляя от обеих частей уравнения значения косинуса, получаем $\cos[2\operatorname{arctg}(2x+1)] = x$.

Используя формулу (4.33) левую часть этого уравнения можно преобразовать к виду

$$\cos[2\operatorname{arctg}(2x+1)] = \frac{1-(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x}{1+2x+2x^2}.$$

Таким образом, алгебраическим следствием исходного уравнения будет уравнение

$$\frac{2x^2 + 2x}{1 + 2x + 2x^2} = x \Leftrightarrow 2x^3 - x = 0$$

корни которого равны $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Произведем проверку. При $x = 0$ обе части уравнения равны $\frac{\pi}{2}$.

При $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ правая и левая части уравнения равны соответственно $\frac{\pi}{4}$ и

$2\arctg(\sqrt{2}+1)$. Но $\sqrt{2}+1 > 1$ и, следовательно, $\arctg(\sqrt{2}+1) > \frac{\pi}{4}$; значит, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

не является корнем уравнения. При $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ левая часть уравнения от-

рицательна, а правая положительна. Следовательно, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – посторонний корень уравнения.

Ответ: $x = 0$.

Некоторые уравнения, содержащие неизвестное под знаком арк-функции, представляют собой тождества на общей области определения левой и правой частей уравнения. Процесс решения такого уравнения заключается в отыскании этой области.

Пример 4. Решить уравнение $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$.

Решение. Согласно определению функции $y = \arcsin x$ имеем

$$x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leq 1.$$

Подставляя выраженное таким образом x в правую часть уравнения получаем $\arccos(\sqrt{1-\sin^2 y}) = \arccos(\cos y)$.

По определению функции $y = \arccos x$ заключаем, что $\arccos(\cos y) = y$ для $0 \leq y \leq \pi$. Таким образом, левая часть исходного уравнения равна правой части для всех $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Возвращаясь к исходному неизвестному получаем, что $x \in [0; 1]$.

Ответ: $x \in [0; 1]$.

4.6. Тригонометрические неравенства

Решение простейших тригонометрических неравенств

Вид неравенства	Множество решений неравенства ($n \in \mathbb{Z}$)
$\sin x > a \quad (a < 1)$	$x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n)$
$\sin x < a \quad (a < 1)$	$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n)$
$\cos x > a \quad (a < 1)$	$x \in (-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n)$
$\cos x < a \quad (a < 1)$	$x \in (\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$
$\operatorname{tg} x > a$	$x \in (\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$
$\operatorname{tg} x < a$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right)$
$\operatorname{ctg} x > a$	$x \in (\pi n; \operatorname{arccctg} a + \pi n)$
$\operatorname{ctg} x < a$	$x \in (\operatorname{arccctg} a + \pi n; \pi + \pi n)$

Неравенства вида $R(y) > 0$, $R(y) < 0$, где R – некоторая рациональная функция, а y – одна из тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс или котангенс) решаются в два этапа – сначала решается рациональное неравенство относительно y , а потом – простейшее тригонометрическое неравенство.

Пример 1. Решить неравенство $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 1 < 0$.

Решение. Обозначая $\operatorname{ctg} x = y$, получаем неравенство $y^3 + y^2 - y - 1 < 0$, множество решений которого: $y < -1$ и $-1 < y < 1$.

Возвращаясь к исходному неизвестному, получаем, что данное неравенство эквивалентно двум неравенствам

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \operatorname{ctg} x < -1 & \text{б) } -1 < \operatorname{ctg} x < 1 \\ x \in \left(\frac{3}{4}\pi + \pi n; \pi + \pi n\right) & x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3}{4}\pi + \pi n\right). \end{array}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3}{4}\pi + \pi n\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi + \pi n; \pi + \pi n\right)$.

Пример 2. Решить неравенство $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

Решение. Это неравенство решается разложением на множителя. Преобразуя сумму крайних слагаемых в произведение, получаем неравенство $\cos 2x + 2\cos 2x \cdot \cos x > 0$.

Вынося $\cos 2x$ за скобки, имеем $\cos 2x(2\cos x + 1) > 0$. Это неравенство эквивалентно двум системам простейших неравенств:

$$\begin{cases} \cos 2x < 0 \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \cos x > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Объединяя решения этих систем, получаем решение исходного неравенства.

Ответ:

$$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{3}{4}\pi + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi + 2\pi n; \frac{4}{3}\pi + 2\pi n \right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4.7. Неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции

Решение простейших неравенств

Вид неравенства	Решение неравенства
$\arcsin x > a \quad \left(\left a \right < \frac{\pi}{2} \right)$	$x \in (\sin a; 1]$
$\arcsin x < a \quad \left(\left a \right \leq \frac{\pi}{2} \right)$	$x \in [-1; \sin a)$
$\arccos x > a \quad (0 < a < \pi)$	$x \in [-1; \cos a)$
$\arccos x < a \quad (0 < a \leq \pi)$	$x \in (\cos a; 1]$
$\operatorname{arctg} x > a \quad \left(\left a \right < \frac{\pi}{2} \right)$	$x \in (\operatorname{tg} a; \infty)$
$\operatorname{arctg} x < a \quad \left(\left a \right < \frac{\pi}{2} \right)$	$x \in (-\infty; \operatorname{tg} a)$
$\operatorname{arcctg} x > a \quad (0 < a < \pi)$	$x \in (-\infty; \operatorname{ctg} a)$
$\operatorname{arcctg} x < a \quad (0 < a < \pi)$	$x \in (\operatorname{ctg} a; \infty)$

Неравенства вида $R(y) > 0$, $R(y) < 0$, где R – некоторая рациональная функция, а y – одна из обратных тригонометрических функций решаются в два этапа – сначала решается рациональное неравенство относительно y , а потом – простейшее неравенство, содержащее обратную тригонометрическую функцию.

Для того, чтобы решить неравенство, связывающие значения различных обратных тригонометрических функций или значения одной тригонометрической функции, вычисленные от разных аргументов, удобно вычислить значение некоторой тригонометрической функции от обеих частей неравенства. Следует помнить, что получающееся при этом неравенство будет эквивалентно исходному лишь в том случае, когда множество значений правой и левой частей исходного неравенства принадлежат одному и тому же промежутку монотонности этой тригонометрической функции.

Пример 1. Решить неравенство $\operatorname{arctg}^2 x - 4\operatorname{arctg} x + 3 > 0$.

Решение. Обозначая $\operatorname{arctg} x = y$, исходное неравенство перепишем в виде неравенства $y^2 - 4y + 3 > 0$, решение которого: $y < 1$ и $y > 3$.

Возвращаясь к исходному неизвестному, получаем, что исходное неравенство сводится к двум простейшим неравенствам:

$$\text{а) } \operatorname{arctg} x < 1 \quad \text{и} \quad \text{б) } \operatorname{arctg} x > 3.$$

Решения уравнения а) $x \in (-\infty; \operatorname{tg} 1)$, уравнение б) решений не имеет, так как $3 > \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $x \in (-\infty; \operatorname{tg} 1)$.

Пример 2. Решить неравенство $\arcsin x > \arccos x$.

Решение. Множество допустимых значений x , входящих в неравенство: $x \in [-1; 1]$. При $x < 0$ $\arcsin x < 0$, $\arccos x > 0$.

Следовательно, значения $x < 0$ не являются решениями неравенства. При $x \geq 0$ как правая, так и левая части неравенства имеют значения, принадлежащие промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Так как на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция синус монотонно возрастающая, то при $x \in [0; 1]$ исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$\sin(\arcsin x) > \sin(\arccos x) \Leftrightarrow x > \sqrt{1-x^2}.$$

Последнее неравенство при рассматриваемых значениях неизвестного эквивалентно неравенству $2x^2 > 1$. Таким образом, решениями исходного неравенства будут решения последнего неравенства, которые попадут в промежуток $[0; 1]$.

$$\text{Ответ: } x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$$

4.8. Вопросы для самоподготовки по теме «Тригонометрия»

1. Основные формулы тригонометрии.
2. Функции половинного угла.
3. Формулы приведения.
4. Обратные тригонометрические функции.
5. Формулы для нахождения периода функции.
6. Решение простейших тригонометрических уравнений.
7. Определение решения системы тригонометрических уравнений.

Методы решения.

8. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции. Как избежать потерю корней при их решении?

9. Решение простейших тригонометрических неравенств.

10. Методика решения тригонометрических неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции.

4.9. Тесты по теме «Тригонометрия»

№	Задание	Варианты ответов
1.	Вычислить без таблиц $\sin 15^\circ$	1) 0,96; 2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$.
2.	Вычислить без таблиц $8\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9}$	1) 1; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 8.
3.	Вычислить $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$	1) $\sqrt{15}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{15}}{8}$; 4) $\frac{1}{2}$.
4.	Вычислить $78\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$	1) 20; 2) 4; 3) 8; 4) 26.
5.	Вычислить $\arcsin(\sin 2)$	1) $\pi-1$; 2) $\pi-2$; 3) 2; 4) π .
6.	Вычислить $\frac{\operatorname{ctg}150^\circ + 2\operatorname{tg}300^\circ}{\operatorname{ctg}240^\circ + \operatorname{tg}210^\circ}$	1) -4,5; 2) 2; 3) 4; 4) -2.
7.	Вычислить без таблиц $\frac{\sin 24^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \cdot \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 39^\circ - \cos 51^\circ \cdot \sin 69^\circ}$	1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -1; 4) -0,5.
8.	Найти период функции $y = \sin 2x - 2\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	1) π ; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
9.	Упростите выражение $\frac{\sin^2\alpha(1+3\operatorname{ctg}^2\alpha+3\operatorname{ctg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^6\alpha)}{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)^2}$	1) 1; 2) $\cos^3\alpha$; 3) $2\operatorname{tg}\alpha$; 4) 6.
10.	Найдите значение выражения $4\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{1+\pi}{6}\right) + 4\sin\frac{7\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$	1) 4; 2) 2; 3) -3; 4) $2\sqrt{2}$.

4.10. Задачи для самостоятельной работы

Вычислить без помощи таблиц:

1.	$\frac{\cos 66^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \cdot \sin 66^\circ}{\cos 69^\circ \cdot \cos 39^\circ - \cos 51^\circ \cdot \sin 69^\circ}$	Ответ: -1.
2.	$\sin^2 70^\circ \cdot \sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 10^\circ$	Ответ: $\frac{1}{64}$.
3.	$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$	Ответ: 3.
4.	Вычислить $\sin \alpha$, если $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 1,4$	Ответ: 0,96.
5.	Вычислить $1 + 5 \sin 2\alpha - 3 \cos^{-1} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$	Ответ: 2.
6.	Найти $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$. В ответе указать большее значение $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$	Ответ: 2.

Вычислить:

7. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17}\right)$ Ответ: $\frac{77}{85}$.
9. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) + \cos\left(\operatorname{arctg}2\sqrt{3}\right)$ Ответ: $\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{13}}{13}$.
10. $\frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$ Ответ: $-\frac{9}{4}$.

Найти период каждой из функций:

11. $y = 6\sin(0,25\pi x)$ Ответ: 8.
12. $y = \cos\left(\frac{3}{2}x - 18^\circ\right)$ Ответ: $\frac{4}{3}\pi$.
13. $y = 7\sin\frac{x}{2} - 2\cos\left(\frac{2}{5}x + \frac{\pi}{2}\right)$ Ответ: 20π .

Решить уравнения:

14. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ Ответ:

$$15. \quad \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x = 0$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

ОТВЕТ: πn .

$$16. \quad 4 \sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12 \cos^4 x$$

$$\text{ОТВЕТ: } \pm \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

$$17. \quad 6 \cos^2 x + \cos 3x = \cos x$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$18. \quad 8 \sin 2x - 3 \cos^2 x = 4$$

ОТВЕТ:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi; \quad \operatorname{arctg} \frac{7}{2} + k\pi.$$

$$19. \quad 4 \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + 3 \sin \frac{x}{2} = 3$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad \pi(2k+1).$$

$$20. \quad \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \pm \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

$$21. \quad 2 \sin^3 x - \sin^2 x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n.$$

$$22. \quad \sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{4}(4k+1).$$

$$23. \quad \sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$$

$$\text{ОТВЕТ: } -\frac{\pi}{4} + \pi n; \quad -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{7}.$$

$$24. \quad \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$$

ОТВЕТ:

$$\frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}; \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

$$25. \quad 2 \cos 2x + 2 \operatorname{tg}^2 x = 5$$

$$\text{ОТВЕТ: } \pm \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

$$26. \quad \frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } \pi + 2\pi n.$$

$$27. \quad \sin x + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 2$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

$$28. \quad \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 5 \operatorname{tg} 2x + 7$$

ОТВЕТ:

$$\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad \pi n - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

$$29. \quad 3 \sin 4x = (\cos 2x - 1) \operatorname{tg} x$$

ОТВЕТ:

$$\pi n; \quad \pm \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi n; \quad \pm \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

$$30. \quad \sin x + \cos x - 2\sqrt{2} \sin x \cos x = 0$$

ОТВЕТ:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

$$31. \quad 5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

$$32. \quad \cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1 \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{8}(2n+1); \frac{\pi n}{3}.$$

$$33. \quad \sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x \quad \text{Ответ: } \frac{\pi n}{4}.$$

Решить уравнения и найти (в градусах) корни, расположенные на заданных промежутках:

$$34. \quad 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x = 3,5 \text{ на } (90^\circ; 0^\circ) \quad \text{Ответ: } -30^\circ.$$

$$35. \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2} \text{ на } (0^\circ; 180^\circ) \quad \text{Ответ: } 45^\circ.$$

$$36. \quad \frac{1 - \cos x}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \text{ на } (0^\circ; 360^\circ) \quad \text{Ответ: } 180^\circ.$$

$$37. \quad |\cos 3x| = 0,5 \text{ на } (30^\circ; 60^\circ) \quad \text{Ответ: } 40^\circ.$$

$$38. \quad \cos 6x = 2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2x\right) \text{ на } (120^\circ; 180^\circ) \quad \text{Ответ: } 150^\circ.$$

$$39. \quad \cos 3x \cdot \cos 6x = \cos 4x \cos 7x \text{ на } (60^\circ; 90^\circ) \quad \text{Ответ: } 72^\circ.$$

$$40. \quad \cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x) \text{ на } (150^\circ; 180^\circ) \quad \text{Ответ: } 165^\circ.$$

$$41. \quad \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = 0 \text{ на } (0^\circ; 50^\circ) \quad \text{Ответ: } 18^\circ.$$

$$42. \quad 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = 1 \text{ на } [0^\circ; 180^\circ] \quad \text{Ответ: } 180^\circ.$$

$$43. \quad \sqrt{2} \sin 10x + \sin 2x = \cos 2x \text{ на } (0^\circ; 40^\circ) \quad \text{Ответ: } 3,75^\circ; 16,875^\circ.$$

$$44. \quad \sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x \text{ на } (0^\circ; 180^\circ) \quad \text{Ответ: } 90^\circ.$$

Решить уравнения и указать количество различных корней, находящихся на заданных промежутках:

$$45. \quad \frac{\cos^2 2x}{1 + \cos(90^\circ - 2x)} = 2(\sin^{-2} 2x - 1) \text{ на } [0^\circ; 180^\circ] \quad \text{Ответ: } 3.$$

$$46. \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ на } (-90^\circ; 0^\circ) \quad \text{Ответ: } 1.$$

$$47. \quad 3 \cdot \sin^2(270^\circ + x) = \sin^2(180^\circ + x) + \sin(180^\circ - 2x) \text{ на } [-180^\circ; 180^\circ] \quad \text{Ответ: } 4.$$

$$48. \quad (\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 4 - 2 \sin^2 2x \text{ на } [0^\circ; 180^\circ] \quad \text{Ответ: } 4.$$

Решить системы уравнений:

$$49. \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + (2n+k)\frac{\pi}{2}, & x_2 = \frac{\pi}{6} + (2n+k)\frac{\pi}{2}, \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + (k-2n)\frac{\pi}{2} & y_2 = \frac{\pi}{3} + (k-2n)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = \pi k + \pi n + \frac{\pi}{3}, & x_2 = \pi k + \pi n - \frac{\pi}{3}, \\ y_1 = \frac{\pi k}{2} - \pi n + \frac{\pi}{3} & y_2 = \pi k - \pi n - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} 4^{\sin x} + 3 \cdot 9^{\cos y} = 3, \\ 4^{-\sin x} + 5 \cdot 81^{\cos y + \frac{1}{2}} = \frac{11}{2} \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6}(6k + (-1)^k), \\ y = \frac{\pi}{3}(6n + 3 \pm 1) \end{cases}$$

Решить уравнения:

$$52. 2 \arcsin x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2/9}{\arcsin x}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$53. 3 \arctg^2 x - 4 \pi \arctg x + \pi^2 = 0$$

Ответ: $x = \sqrt{3}.$

$$54. \arccos \frac{x}{2} = 2 \arctg(x-1)$$

Ответ: $x = \sqrt{2}.$

$$55. \arccos x - \pi = \arcsin \frac{4x}{3}$$

Ответ: $x = -\frac{3}{5}.$

Решить уравнения. В ответе указать больший корень:

$$56. \arcsin 2x = 3 \arcsin x$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}.$

$$57. \arctg \frac{x}{3} + \arctg \frac{x}{2} = \arctg x$$

Ответ: $x = 1.$

$$58. 2 \arccos x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

Ответ: $x = 1.$

$$59. \arccos x = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

Ответ: $x = 0.$

$$60. \arccos x = \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Ответ: $x = 1.$

$$61. 2 \arctg x = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

Ответ: $x = 1.$

Решить неравенства.

$$62. \sin x > -\frac{1}{2}$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right).$

63. $\operatorname{tg} x > 2$ Ответ: $x \in \left(\operatorname{arctg} 2 + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$.
64. $\sin(x-1) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ответ: $x \in \left[1 - \frac{2}{3}\pi + 2\pi n; 1 - \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right]$.
65. $\sin(\cos x) \geq 0$ Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right]$.
66. $2 \cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$ Ответ:
 $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg} 2 + \pi n \right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n \right)$.
67. $\sin x + \sqrt{3} \cos x < 0$ Ответ: $x \in \left(\frac{2}{3}\pi + 2\pi; \frac{5}{3}\pi + 2\pi k \right)$.
68. $\sqrt{3-4\cos^2 x} > 2\sin x + 1$ Ответ: $x \in \left(\frac{7}{6}\pi + 2\pi k; \frac{11}{6}\pi + 2\pi k \right)$.
69. $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \cos 3x \cdot \sin^3 x < \frac{3}{8}$ Ответ: $x \in \left(\frac{\pi n}{2} + \frac{5\pi}{24}; \frac{\pi}{2}(n+1) + \frac{\pi}{24} \right)$.
70. $\arcsin x \leq 5$ Ответ: $x \in [-1; 1]$.
71. $\arcsin x \geq -2$ Ответ: $x \in [-1; 1]$.
72. $\arccos x \leq \arccos \frac{1}{4}$ Ответ: $x \in \left[\frac{1}{4}; 1 \right]$.

4.11. Варианты проверочной работы №4

Вариант 1	Вариант 4
1. Доказать тождество $\frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1.$	1. Доказать тождество $1 - \sin \alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$
2. Вычислить $\frac{2\operatorname{ctg} 225^\circ + 5\operatorname{tg} 315^\circ}{\sin 390^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ}.$	2. Вычислить $27 - 10\operatorname{ctg} \alpha, \text{ если } \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$
3. Решить уравнение $3 - 7\cos^2 x \sin x - 3\sin^3 x = 0.$	3. Решить уравнение $2\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 4$

Вариант 2 1. Доказать тождество $3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8 \sin^4 \alpha$. 2. Найти период функции $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 5 \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$. Решить уравнение $\operatorname{arctg}^2(3x + 2) + 2 \operatorname{arctg}(3x + 2) = 0$	Вариант 5 1. Доказать тождество $\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, если $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. 2. Найти период функции $y = \sin 2x - 2 \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 3. Решить уравнение и указать количество различных корней, находящихся на заданном промежутке $2 + 2 \cos(180^\circ - 2x) = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$ на $[0^\circ; 180^\circ]$.
Вариант 3 1. Доказать тождество $4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1 + 3 \cos^2 2\alpha$. 2. Решить неравенство $\sin x \geq \cos 2x$. 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin y = 5 \sin x, \\ 3 \cos x + \cos y = 2 \end{cases}$	Вариант 6 1. Доказать тождество $16 \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1$. 2. Решить неравенство $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 > 0$. 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3\pi}, \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases}$

4.12. Ответы по теме «Тригонометрия»

Тесты

№	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	3.10
Ответ	2	1	3	4	2	3	1	2	1	2

Варианты проверочной работы №4

Вариант 1 2. -24. 3. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$	Вариант 4 2. 47. 3. $\operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \pi n; -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \pi n$
Вариант 2 2. 4π.	Вариант 5

3. $x = -\frac{3}{2}$	2. π . 3. 5
Вариант 3 2. $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$ и $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. 3. $\begin{cases} x = 2\pi n, \\ y = 2\pi k + \pi \end{cases}$	Вариант 6 2. $x \in \left(-\frac{7}{6}\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$. 3. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} - \pi k \end{cases}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении пособия отметим следующее. В пособии подробно изложены практически все часто используемые методы решения задач части курса школьной математики (преобразование алгебраических выражений, уравнения, неравенства, тригонометрия).

В ряде случаев при разборе конкретных примеров приводится, возможно, не самое короткое и изящное решение задачи. Это объясняется прежде всего тем, что при разборе примера авторы в первую очередь стремились дать наглядное применение предложенного метода, а вовсе не продемонстрировать примеры нестандартных подходов к решению различных задач. Приведенные решения также могут служить иллюстрацией правильного оформления решения задач.

Пособие может быть использовано студентами заочной и дневной форм обучения.

Учебное издание

АРЕФЬЕВ Владимир Петрович
АРЕФЬЕВ Петр Владимирович

МАТЕМАТИКА

(выравнивающий курс)

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Компьютерная верстка *П.В. Арефьев*

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати 06.12.2011. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 5,68.

Заказ . Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru