ЗАДАНИЕ 15 ИЗ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

НЕРАВЕНСТВО

Оглавление

Глава 1

Образцы заданий 2018 года

1. Решите неравенство

$$\frac{15^x - 27\cdot 5^x}{x\cdot 3^x - 4\cdot 3^x - 27x + 108} \leqslant \frac{1}{x-4}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{15^x - 27\cdot 5^x}{3^x(x-4) - 27(x-4)} - \frac{1}{x-4} \leqslant 0 \iff \frac{15^x - 27\cdot 5^x}{(x-4)(3^x-27)} - \frac{1}{x-4} \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{1}{x-4}\cdot\left(\frac{15^x - 27\cdot 5^x}{3^x-27} - 1\right) \leqslant 0 \iff \frac{1}{x-4}\cdot\left(\frac{5^x(3^x-27)}{3^x-27} - 1\right) \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3^x - 27 \neq 0 \\ \dfrac{5^x-1}{x-4} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 3 \\ \dfrac{x}{x-4} \leqslant 0 \end{cases} \iff x \in [0;\, 3) \cup (3;\, 4).$$

Ответ: $x \in [0;\, 3) \cup (3;\, 4)$.

Комментарий.

При решении был использован метод замены множителя (МЗМ). Имеем:

$$5^x - 1 \vee 0 \iff 5^x - 5^0 \vee 0 \iff (5-1)(x-0) \vee 0 \iff x \vee 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 5^{2x} - 3\cdot 5^x\cdot 2^{x+1} + 4^{x+1}}{10^x - 2^{2x}} \leqslant 1.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{2\cdot 5^{2x} - 6\cdot 5^x\cdot 2^x + 4\cdot 2^{2x} - 10^x + 2^{2x}}{2^x(5^x - 2^x)} \leqslant 0 \iff \frac{2\cdot 5^{2x} - 7\cdot 5^x\cdot 2^x + 5\cdot 2^{2x}}{2^{2x}\left(\left(\dfrac{5}{2}\right)^x - 1\right)} \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{2\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x} - 7\left(\dfrac{5}{2}\right)^x + 5}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^x - 1} \leqslant 0 \iff \frac{\left(\left(\dfrac{5}{2}\right)^x - 1\right)\left(\left(\dfrac{5}{2}\right)^x - \dfrac{5}{2}\right)}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^x - 1} \leqslant 0 \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1]$.

3. Решите неравенство

$$3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geqslant 3.$$

Решение. Имеем:

$$3^{x^2-1} \cdot 5^{x-1} \geqslant 1 \iff \left(3^{x+1} \cdot 5\right)^{x-1} - \left(3^{x+1} \cdot 5\right)^{0} \geqslant 0 \iff \left(3^{x+1} \cdot 5 - 1\right)(x-1) \geqslant 0 \iff$$
$$\left(3^{x+1} - \frac{1}{5}\right)(x-1) \geqslant 0 \iff \left(3^{x+1} - 3^{\log_3 \frac{1}{5}}\right)(x-1) \geqslant 0 \iff (x+1+\log_3 5)(x-1) \geqslant 0$$
$$\iff x \in (-\infty;\ -1-\log_3 5] \cup [1;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1-\log_3 5] \cup [1;\ +\infty)$.

Комментарий.

А. При решении неравенства использовался метод замены множителя (МЗМ) для показательно-степенной функции:

$$f^{g(x)}(x) - f^{h(x)}(x) \vee 0 \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ (f(x)-1)(g(x)-h(x)) \vee 0 \end{cases}.$$

Б. Неравенство можно решить путем логарифмирования обеих частей по основанию $a = 3 > 1$:

$$\log_3(3^{x^2} \cdot 5^{x-1}) \geqslant \log_3 3 \iff \log_3 3^{x^2} + \log_3 5^{x-1} \geqslant 1 \iff x^2 - 1 + (x-1)\log_3 5 \geqslant 0 \iff$$
$$\iff (x-1)(x+1) + (x-1)\log_3 5 \geqslant 0 \iff (x-1)(x+1+\log_3 5) \geqslant 0 \iff$$
$$\iff x \in (-\infty;\ -1-\log_3 5] \cup [1;\ +\infty).$$

4. Решите неравенство

$$\log_7(2x^2+12) - \log_7(x^2-x+12) \geqslant \log_7\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

Решение. Область допустимых значений переменной x задается системой:

$$\begin{cases} 2x^2+12 > 0 \\ x^2-x+12 > 0 \\ 2 - \dfrac{1}{x} > 0 \end{cases} \iff \frac{2x-1}{x} > 0 \iff x \in (-\infty;\ 0) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right).$$

Имеем:

$$\log_7 \frac{2x^2+12}{x^2-x+12} \geqslant \log_7\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

Так как $y = \log_7 t$ возрастает, то имеем:

$$\frac{2x^2+12}{x^2-x+12} \geqslant 2 - \frac{1}{x} \iff \frac{3x^2-13x+12}{x(x^2-x+12)} \geqslant 0 \iff \frac{(x-3)(3x-4)}{x} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff x \in \left(0;\ \frac{4}{3}\right] \cup [3;\ +\infty).$$

С учетом ОДЗ имеем:

$$x \in \left(\frac{1}{2};\ \frac{4}{3}\right] \cup [3;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2};\ \frac{4}{3}\right] \cup [3;\ +\infty)$.

Комментарий.

При решении неравенства мы учли, что $2x^2+12 > 0$ и $x^2-x+12 > 0$ для любого значения x.

5. Решите неравенство

$$\log_2(x-1) + \log_2\left(x^2 + \frac{1}{x-1}\right) \leqslant 2\log_2\left(\frac{x^2+x-1}{2}\right).$$

Решение. Область допустимых значений переменной x задается условием $x > 1$. Обозначим $x - 1 = a$, $x^2 = b$, $a,\ b, > 0$. Имеем:

$$\log_2 a + \log_2\left(b + \frac{1}{a}\right) \leqslant 2\log_2 \frac{b+a}{2} \iff \log_2(ab+1) \leqslant \log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \iff ab+1 \leqslant \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\iff 4ab+4 \leqslant a^2+2ab+b^2 \iff (a-b)^2 - 2^2 \geqslant 0 \iff (a-b-2)(a-b+2) \geqslant 0 \iff$$

$$(x^2-x+3)(x^2-x-1) \geqslant 0 \iff x^2-x-1 \geqslant 0 \iff x \in \left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right).$$

С учетом ОДЗ имеем:

$$x \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$.

Комментарий.

А. При решении неравенства мы учли, что $x^2 - x + 3 > 0$ для любого значения x, так как $a = 1 > 0$, $D = -11 < 0$.

Б. При решении неравенства мы учли возрастание логарифмической функции $y = \log_2 t$.

6. Решите неравенство

$$2\log_2(x\sqrt{3}) - \log_2\left(\frac{x}{x+1}\right) \geqslant \log_2\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

Решение. Область допустимых значений переменной x задается неравенством $x > 0$. При $x > 0$ имеем:

$$\log_2(3x^2) - \log_2\left(\frac{x}{x+1}\right) \geqslant \log_2\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right) \iff \log_2\frac{3x^2(x+1)}{x} \geqslant \log_2\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right) \iff$$

$$\iff 3x^2 + 3x \geqslant 3x^2 + \frac{1}{x} \iff 3x \geqslant \frac{1}{x} \overset{x>0}{\iff} 3x^2 \geqslant 1 \overset{x>0}{\iff} x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};\ +\infty\right)$.

Комментарий.

А. При решении неравенства мы учли возрастание логарифмической функции $y = \log_2 t$.

7. Решите неравенство

$$\log_5(3x^2 - 2) - \log_5 x < \log_5\left(3x^2 + \frac{1}{x} - 3\right)$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2 - 2 > 0 \\ x > 0 \\ \log_5\dfrac{3x^2-2}{x} < \log_5\left(3x^2 + \dfrac{1}{x} - 3\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x > \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ \dfrac{3x^2-2}{x} < 3x^2 + \dfrac{1}{x} - 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ \dfrac{3x^3 - 3x^2 - 3x + 3}{x} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x} > 0 \end{cases} \iff x \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$.

Комментарий.

А. Мы не решали неравенство $3x^2 + \dfrac{1}{x} - 3 > 0$, поскольку из неравенства

$$\frac{3x^2-2}{x} < 3x^2 + \frac{1}{x} - 3$$

это следует автоматически, так как левая часть положительна.

Б. При решении неравенства мы учли возрастание логарифмической функции $y = \log_5 t$.

8. Решите неравенство

$$\log_5(4-x) + \log_5\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \log_5\left(\frac{1}{x} - x + 3\right).$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4 - x > 0 \\ \dfrac{1}{x} > 0 \\ \log_5 \dfrac{4-x}{x} \leqslant \log_5\left(\dfrac{1}{x} - x + 3\right) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 4 \\ \dfrac{4-x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x} - x + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x^2 - 4x + 3 \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff x \in [1;\ 3].$$

Ответ: $x \in [1;\ 3]$.

Комментарий.

При решении неравенства мы учли возрастание логарифмической функции $y = \log_5 t$.

9. Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{3}{x} + 2\right) - \log_2(x+4) \geqslant \log_2\left(\frac{x+3}{x^2}\right).$$

Решение. Область допустимых значений переменной x задается системой неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ \dfrac{x+3}{x^2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{3+2x}{x} > 0 \\ x > -4 \\ \dfrac{x+3}{x^2} > 0 \end{cases} \iff x \in \left(-3;\ -\frac{3}{2}\right) \cup (0;\ +\infty).$$

Имеем:

$$\log_2 \frac{\frac{3}{x} + 2}{x+4} \geqslant \log_2 \frac{x+3}{x^2} \iff \frac{\frac{3}{x} + 2}{x+4} \geqslant \frac{x+3}{x^2} \iff \frac{(x+2)(x-6)}{x^2(x+4)} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff x \in (-4;\ -2] \cup [6;\ +\infty).$$

Пересекая с ОДЗ, получим:

$$x \in (-3;\ -2] \cup [6;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in (-3;\ -2] \cup [6;\ +\infty)$.

Комментарий.

При решении неравенства мы учли возрастание логарифмической функции $y = \log_2 t$.

10. Решите неравенство

$$\log_5(3x+1) + \log_5\left(\frac{1}{72x^2}+1\right) \geqslant \log_5\left(\frac{1}{24x}+1\right).$$

Решение. Область допустимых значений переменной x задается системой неравенств:

$$\begin{cases} 3x+1>0 \\ \dfrac{1}{24x}+1>0 \\ \dfrac{1}{72x^2}+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{24x+1}{x}>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \iff x \in \left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{24}\right) \cup (0;\ +\infty).$$

Имеем:

$$\log_5(3x+1)\cdot\left(\frac{1}{72x^2}+1\right) \geqslant \log_5\left(\frac{1}{24x}+1\right) \iff (3x+1)\cdot\left(\frac{1}{72x^2}+1\right) \geqslant \frac{1}{24x}+1 \iff$$

$$\frac{216x^3+1}{x^2} \geqslant 0 \iff \frac{(6x)^3-(-1)^3}{x^2} \geqslant 0 \iff \frac{6x-(-1)}{x^2} \geqslant 0 \iff x \in \left[-\frac{1}{6};\ 0\right) \cup (0;\ +\infty).$$

Пересекая с ОДЗ, получим:

$$x \in \left[-\frac{1}{6};\ -\frac{1}{24}\right) \cup (0;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{6};\ -\frac{1}{24}\right) \cup (0;\ +\infty)$.

Комментарий.

При решении неравенства мы учли возрастание функций $y = t^3$ и $y = \log_5 t$.

11. Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{1}{x}-1\right) + \log_2\left(\frac{1}{x}+1\right) \leqslant \log_2(27x-1).$$

Решение. Область допустимых значений переменной x задается системой неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-1>0 \\ \dfrac{1}{x}+1>0 \\ 27x-1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}<0 \\ \dfrac{x+1}{x}>0 \\ x>\dfrac{1}{27} \end{cases} \iff x \in \left(\frac{1}{27};\ 1\right).$$

На ОДЗ имеем:

$$\log_2\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}+1\right) \leqslant \log_2(27x-1) \overset{\text{ОДЗ}}{\iff} \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}+1\right) \leqslant 27x-1 \overset{\text{ОДЗ}}{\iff}$$

$$\frac{1}{x^2}-1 \leqslant 27x-1 \overset{\text{ОДЗ}}{\iff} 27x^3 \geqslant 1 \iff x \geqslant \frac{1}{3}.$$

Пересекая с ОДЗ, получим:

$$x \in \left[\frac{1}{3};\, 1\right).$$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{3};\, 1\right)$.

12. Решите неравенство

$$2^{x+1} + 0.5^{x-3} \geqslant 17.$$

Решение. Имеем:

$$2^{x+1} + 0.5^{x-3} \geqslant 17 \iff 2^{x+1} + 2^{3-x} \geqslant 17 \iff 2 \cdot 2^x + \frac{8}{2^x} \geqslant 17 \overset{2^x>0}{\iff} 2 \cdot 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 8 \geqslant 0$$

$$\iff \left(2^x - \frac{1}{2}\right) \cdot (2^x - 8) \geqslant 0 \iff \left(2^x - 2^{-1}\right) \cdot \left(2^x - 2^3\right) \geqslant 0 \iff (x+1)(x-3) \geqslant 0 \iff$$

$$\iff x \in (-\infty;\, -1] \cup [3;\, +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty;\, -1] \cup [3;\, +\infty)$.

Комментарий.

При решении неравенства мы учли, что $2^x > 0$ для любого действительного числа x.

Задачи для самостоятельного решения

13. Решите неравенство

$$\frac{6^x - 4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x - 5\cdot 2^x - 4x + 20} \leqslant \frac{1}{x-5}.$$

Ответ: $x \in [0;\ 2) \cup (2;\ 5)$.

14. Решите неравенство

$$\frac{6^x - 4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x - 2^x - 4x + 4} \geqslant \frac{1}{x-1}.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0] \cup (1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

15. Решите неравенство

$$4^{x^2+2x+1}\cdot 3^x \leqslant 4.$$

Ответ: $x \in [-\log_4 3 - 2;\ 0]$.

16. Решите неравенство

$$\log_3(x^2+2) - \log_3(x^2 - x + 12) \geqslant \log_3\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Ответ: $\left(1; \frac{3}{2}\right] \cup [4; +\infty)$.

17. Решите неравенство

$$\log_7(11x^2+10) - \log_7(x^2 + x + 1) \geqslant \log_7\left(\frac{x}{x+8} + 10\right).$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -27] \cup \left(-\frac{80}{11};\ 0\right]$.

18. Решите неравенство

$$\log_3(2x+1) + \log_3\left(\frac{1}{32x^2} + 1\right) \geqslant \log_3\left(\frac{1}{16x} + 1\right).$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{4};\ -\frac{1}{16}\right) \cup (0;\ +\infty)$.

19. Решите неравенство

$$2\log_2 x + \log_2\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \leqslant 2\log_2\left(\frac{x^2+x}{2}\right).$$

Ответ: $x \in [2;\ +\infty)$.

20. Решите неравенство

$$\log_2(x-1)+\log_2\left(2x+\frac{4}{x-1}\right)\geqslant 2\log_2\left(\frac{3x-1}{2}\right).$$

Ответ: $x\in(1;\ 3]$.

21. Решите неравенство

$$\log_2(3-2x)+2\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant \log_2\left(\frac{1}{x}-2x+2\right).$$

Ответ: $x\in\left[1;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$.

22. Решите неравенство

$$\log_7(3-x)+\log_7\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant \log_7\left(\frac{1}{x}-x+2\right).$$

Ответ: $x\in(0;\ 1]\cup\left[2;\ 1+\sqrt{2}\right)$.

23. Решите неравенство

$$\log_3(1-2x)-\log_3\left(\frac{1}{x}-2\right)\leqslant \log_3(4x^2+6x-1).$$

Ответ: $x\in\left[\frac{\sqrt{41}-5}{8};\ \frac{1}{2}\right)$.

24. Решите неравенство

$$\log_3\left(\frac{1}{x}+2\right)-\log_3(x+5)\geqslant \log_3\left(\frac{x+4}{x^2}\right).$$

Ответ: $x\in(-4;\ -2]\cup[10;\ +\infty)$.

25. Решите неравенство

$$\log_5\left(\frac{2}{x}+2\right)-\log_5(x+6)\geqslant \log_5\left(\frac{x+3}{x^2}\right).$$

Ответ: $x\in(-3;\ -2]\cup[9;\ +\infty)$.

26. Решите неравенство

$$\log_3\left(\frac{1}{x}-1\right)+\log_3\left(\frac{1}{x}+1\right)\leqslant \log_3(8x-1).$$

Ответ: $x\in\left[\frac{1}{2};\ 1\right)$.

Глава 2

Образцы заданий 2017 года

1. Решите неравенство

$$\log_2^2(25-x^2)-7\log_2(25-x^2)+12\geqslant 0.$$

Решение. Раскладывая левую часть неравенства на множители и применяя метод замены множителя, получим:

$$\log_2^2(25-x^2)-7\log_2(25-x^2)+12\geqslant 0 \iff \big(\log_2(25-x^2)-3\big)\big(\log_2(25-x^2)-4\big)\geqslant 0 \iff$$

$$\big(\log_2(25-x^2)-\log_2 8\big)\big(\log_2(25-x^2)-\log_2 16\big)\geqslant 0 \iff \begin{cases} 25-x^2>0 \\ (25-x^2-8)(25-x^2-16)\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-25<0 \\ (x^2-17)(x^2-9)\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-5)(x+5)<0 \\ (x-\sqrt{17})(x+\sqrt{17})(x-3)(x+3)\geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff x\in\left(-5;\,-\sqrt{17}\right]\cup[-3;\,3]\cup\left[\sqrt{17};\,5\right).$$

Ответ: $x\in\big(-5;\,-\sqrt{17}\big]\cup[-3;\,3]\cup\big[\sqrt{17};\,5\big)$.

Комментарий.

А. Метод замены множителя для логарифмической функции:

$$\log_f g-\log_f h\vee 0 \iff \begin{cases} f>0,\ f\neq 1 \\ g>0 \\ h>0 \\ (f-1)(g-h)\vee 0 \end{cases}.$$

Б. Применять метод замены множителя вовсе необязательно. Обозначим $\log_2(25-x^2)=t$ и решим квадратное неравенство:

$$t^2-7t+12\geqslant 0 \iff (t-3)(t-4)\geqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} t\geqslant 4 \\ t\leqslant 3 \end{array}\right..$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(25-x^2)\geqslant 4\\ \log_2(25-x^2)\leqslant 3\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}25-x^2\geqslant 16\\ 0<25-x^2\leqslant 8\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x^2\leqslant 9\\ 17\leqslant x^2<25\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}|x|\leqslant 3\\ \sqrt{17}\leqslant |x|<5\end{array}\right.$$

$$\iff x\in\left(-5;\,-\sqrt{17}\right]\cup[-3;\,3]\cup\left[\sqrt{17};\,5\right).$$

2. Решите неравенство

$$(9^x-2\cdot 3^x)^2-62\,(9^x-2\cdot 3^x)-63\geqslant 0.$$

Решение. Раскладывая левую часть неравенства на множители и применяя метод замены множителя, получим:

$$(9^x-2\cdot 3^x)^2-62\,(9^x-2\cdot 3^x)-63\geqslant 0 \iff (9^x-2\cdot 3^x+1)\,(9^x-2\cdot 3^x-63)\geqslant 0 \iff$$

$$\iff (3^x-1)^2\,(3^x+7)\,(3^x-9)\geqslant 0 \iff \left(3^x-3^0\right)^2\left(3^x-3^2\right)\geqslant 0 \iff$$

$$\iff x^2(x-2)\geqslant 0 \iff x\in\{0\}\cup[2;\,+\infty).$$

Ответ: $x\in\{0\}\cup[2;\,+\infty)$.

Комментарий.

Метод замены множителя для показательной функции:

$$a^f-a^g\vee 0 \iff (a-1)(f-g)\vee 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2^x+8}{2^x-8}+\frac{2^x-8}{2^x+8}\geqslant\frac{2^{x+4}+96}{4^x-64}.$$

Решение. Перенесем правую часть налево, приведем к общему знаменателю, а затем применим метод замены множителя:

$$\frac{2^x+8}{2^x-8}+\frac{2^x-8}{2^x+8}\geqslant\frac{2^{x+4}+96}{4^x-64} \iff \frac{(2^x+8)^2+(2^x-8)^2}{4^x-64}-\frac{16\cdot 2^x+96}{4^x-64}\geqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{2\cdot 4^x+64-16\cdot 2^x-96}{4^x-64}\geqslant 0 \iff \frac{(2^x-4)^2}{4^x-64}\geqslant 0 \iff \frac{(2^x-2^2)^2}{4^x-4^3}\geqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(x-2)^2}{x-3}\geqslant 0 \iff x\in\{2\}\cup(3;\,+\infty).$$

Ответ: $x\in\{2\}\cup(3;\,+\infty)$.

4. Решите неравенство

$$\frac{8^{x+1}-40}{2\cdot 64^x-32}\leqslant 1.$$

Решение. Перенесем правую часть налево, приведем к общему знаменателю, а затем применим метод замены множителя:

$$\frac{8^{x+1}-40}{2\cdot 64^x-32}\leqslant 1 \iff \frac{8\cdot 8^x-40-2\cdot 64^x+32}{2\cdot 64^x-32}\leqslant 0 \iff \frac{8^{2x}-4\cdot 8^x+4}{64^x-16}\geqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(8^x-2)^2}{4^{3x}-4^2}\geqslant 0 \iff \frac{\left(2^{3x}-2^1\right)^2}{4^{3x}-4^2}\geqslant 0 \iff \frac{(3x-1)^2}{3x-2}\geqslant 0 \iff x\in\left\{\frac{1}{3}\right\}\cup\left(\frac{2}{3};\,+\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left\{\dfrac{1}{3}\right\} \cup \left(\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$.

5. Решите неравенство

$$\frac{\log_7(49x^2)-7}{\log_7^2 x-4} \leqslant 1.$$

Решение. Так как $x>0$, то $\log_7(49x^2)=\log_7 49+2\log_7 x=2+2\log_7 x$. Имеем:

$$\frac{\log_7(49x^2)-7}{\log_7^2 x-4} \leqslant 1 \iff \frac{\log_7 49+\log_7 x^2-7}{\log_7^2 x-4}-1 \leqslant 0 \iff \frac{2\log_7 x-5-\log_7^2 x+4}{\log_7^2 x-4} \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{\log_7^2 x-2\log_7 x+1}{\log_7^2 x-4} \geqslant 0 \iff \frac{(\log_7 x-1)^2}{(\log_7 x-2)(\log_7 x+2)} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(\log_7 x-\log_7 7)^2}{(\log_7 x-\log_7 49)\left(\log_7 x-\log_7 \dfrac{1}{49}\right)} \geqslant 0 \iff \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{(x-7)^2}{(x-49)\left(x-\dfrac{1}{49}\right)} \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff x \in \left(0;\ \frac{1}{49}\right) \cup \{7\} \cup (49;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{49}\right) \cup \{7\} \cup (49;\ +\infty)$.

6. Решите неравенство

$$1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{\log_2^2 x-\log_2(32x^{10})+30} \geqslant 0.$$

Решение. Так как $x>0$, то $\log_2(32x^{10})=5+10\log_2 x$. Имеем:

$$1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{\log_2^2 x-10\log_2 x+25} \geqslant 0 \iff 1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{(\log_2 x-5)^2} \geqslant 0 \iff$$

$$\frac{(\log_2 x-5)^2+10(\log_2 x-5)+16}{(\log_2 x-5)^2} \geqslant 0 \iff \frac{(\log_2 x-5+2)(\log_2 x-5+8)}{(\log_2 x-5)^2} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(\log_2 x-3)(\log_2 x+3)}{(\log_2 x-5)^2} \geqslant 0 \iff \frac{(\log_2 x-\log_2 8)\left(\log_2 x-\log_2 \frac{1}{8}\right)}{(\log_2 x-\log_2 32)^2} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{(x-8)\left(x-\dfrac{1}{8}\right)}{(x-32)^2} \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in \left(0;\ \frac{1}{8}\right] \cup (8;\ 32) \cup (32;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{8}\right] \cup (8;\ 32) \cup (32;\ +\infty)$.

7. Решите неравенство

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)} \geqslant \frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}.$$

Решение. Так как $x > 0$, то $\log_4 x^4 = 4\log_4 x$, $\log_4(64x) = 3 + \log_4 x$. Имеем неравенство:

$$\frac{\log_4 x + 3}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4 x + 3} \geqslant \frac{4\log_4 x + 16}{\log_4^2 x - 9}.$$

Обозначим $t = \log_4 x$ и решим неравенство:

$$\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-3}{t+3} - \frac{4t+16}{t^2-9} \geqslant 0 \iff \frac{t^2-2t+1}{(t+3)(t-3)} \geqslant 0 \iff \frac{(t-1)^2}{(t+3)(t-3)} \geqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t < -3 \\ t > 3 \end{array}\right. .$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \log_4 x = 1 \\ \log_4 x < -3 \\ \log_4 x > 3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ 0 < x < \dfrac{1}{64} \\ x > 64 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{64}\right) \cup \{4\} \cup (64;\ +\infty)$.

8. Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)} \geqslant \frac{2}{\log_3 x} + \frac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 x - 3} \geqslant \frac{2}{\log_3 x} + \frac{5}{\log_3^2 x - 3\log_3 x}$$

и сделаем замену переменной $t = \log_3 x$. Имеем:

$$\frac{t}{t-3} \geqslant \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2-3t} \iff \frac{(t-1)^2}{t(t-3)} \geqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t < 0 \\ t > 3 \end{array}\right. .$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x < 0 \\ \log_3 x > 3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ 0 < x < 1 \\ x > 27 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x \in (0;\ 1) \cup \{3\} \cup (27;\ +\infty)$.

9. Решите неравенство

$$9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geqslant 0.$$

Решение. Раскладывая левую часть неравенства на множители и применяя метод замены множителя, получим:

$$9^{4x-x^2-1}-36\cdot 3^{4x-x^2-1}+243\geqslant 0 \iff \left(3^{4x-x^2-1}-3^2\right)\left(3^{4x-x^2-1}-3^3\right)\geqslant 0 \iff$$

$$\iff (4x-x^2-1-2)(4x-x^2-1-3)\geqslant 0 \iff (x-1)(x-2)^2(x-3)\geqslant 0 \iff$$

$$\iff x\in(-\infty;\ 1]\cup\{2\}\cup[3;\ +\infty).$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ 1]\cup\{2\}\cup[3;\ +\infty)$.

10. Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(2x^2-17x+35\right)-1}{\log_7(x+6)}\leqslant 0.$$

Решение. Применяя метод замены множителя, получим:

$$\frac{\log_2\left(2x^2-17x+35\right)-1}{\log_7(x+6)}\leqslant 0 \iff \frac{\log_2\left(2x^2-17x+35\right)-\log_2 2}{\log_7(x+6)}\leqslant 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2-17x+35>0\\ x+6>0\\ \dfrac{2x^2-17x+35-2}{x+6-1}\leqslant 0\end{cases} \iff \begin{cases} (2x-7)(x-5)>0\\ x>-6\\ \dfrac{(x-3)(2x-11)}{x+5}\leqslant 0\end{cases} \iff$$

$$\iff x\in(-6;\ -5)\cup\left[3;\ \frac{7}{2}\right)\cup\left(5;\ \frac{11}{2}\right).$$

Ответ: $x\in(-6;\ -5)\cup\left[3;\ \dfrac{7}{2}\right)\cup\left(5;\ \dfrac{11}{2}\right)$.

11. Решите неравенство

$$\frac{10^x-25\cdot 2^x-2\cdot 5^x+50}{5x-x^2-4}\geqslant 0.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{2^x\cdot(5^x-25)-2\cdot(5^x-25)}{x^2-5x+4}\leqslant 0 \iff \frac{(5^x-25)(2^x-2)}{(x-1)(x-4)}\leqslant 0 \iff \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-4)}\leqslant 0$$

$$\iff \begin{cases} x\neq 1\\ \dfrac{x-2}{x-4}\leqslant 0\end{cases} \iff x\in[2;\ 4).$$

Ответ: $x\in[2;\ 4)$.

12. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-|x|}\leqslant 0.$$

Решение. Так как на ОДЗ $x > 0$, то $|x| = x$. Имеем:

$$\frac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-x} \leqslant 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{(9x-1)(64x-1)}{x(5x-1)} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{\left(x-\dfrac{1}{9}\right)\left(x-\dfrac{1}{64}\right)}{x-\dfrac{1}{5}} \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff x \in \left(0;\ \frac{1}{64}\right] \cup \left[\frac{1}{9};\ \frac{1}{5}\right).$$

Ответ: $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{64}\right] \cup \left[\dfrac{1}{9};\ \dfrac{1}{5}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

13. Решите неравенство

$$\log_3^2(25-x^2)-3\log_3(25-x^2)+2\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in\left(-5;\ -\sqrt{22}\right]\cup[-4;\ 4]\cup\left[\sqrt{22};\ 5\right)$.

14. Решите неравенство

$$\log_2^2\left(x^2-9\right)-9\log_2\left(x^2-9\right)+20\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{41}\right]\cup[-5;\ -3)\cup(3;\ 5]\cup\left[\sqrt{41};\ +\infty\right)$.

15. Решите неравенство

$$\log_3^2\left(x^2-16\right)-5\log_3\left(x^2-16\right)+6\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{43}\right]\cup[-5;\ -4)\cup(4;\ 5]\cup\left[\sqrt{43};\ +\infty\right)$.

16. Решите неравенство

$$\frac{7^x+7}{7^x-7}+\frac{7^{x-1}-1}{7^{x-1}+1}\geqslant\frac{4\cdot 7^x+96}{49^x-49}.$$

Ответ: $x\in\{0\}\cup(1;\ +\infty)$.

17. Решите неравенство

$$\frac{3^x+9}{3^x-9}+\frac{3^x-9}{3^x+9}\geqslant\frac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}.$$

Ответ: $x\in\{1\}\cup(2;\ +\infty)$.

18. Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}\geqslant\frac{3}{8^x-1}+\frac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}.$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ 0)\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}\cup\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.

19. Решите неравенство

$$\frac{2^x}{2^x-8}+\frac{2^x+8}{2^x-4}+\frac{66}{4^x-12\cdot 2^x+32}\leqslant 0.$$

Ответ: $x\in\{0\}\cup(2;\ 3)$.

20. Решите неравенство

$$\frac{9^{x-1}}{9^{x-1}-1} \geqslant \frac{5}{9^x-1} + \frac{36}{81^x - 10\cdot 9^x + 9}.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (1;\ +\infty)$.

21. Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 4^{x-2}}{2\cdot 4^{x-2}-1} \leqslant \frac{7}{4^x-1} + \frac{40}{16^x - 9\cdot 4^x + 8}.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$.

22. Решите неравенство

$$\frac{3^x}{3^x-3} + \frac{3^x+1}{3^x-2} + \frac{5}{9^x - 5\cdot 3^x + 6} \leqslant 0.$$

Ответ: $x \in \{0\} \cup (\log_3 2;\ 1)$.

23. Решите неравенство

$$\frac{2^x}{2^x-3} + \frac{2^x+1}{2^x-2} + \frac{5}{4^x - 5\cdot 2^x + 6} \leqslant 0.$$

Ответ: $x \in \{0\} \cup (1;\ \log_2 3)$.

24. Решите неравенство

$$\frac{6\cdot 9^{x-1} - 10}{81^{x-\frac{1}{2}} - 9} \leqslant 1.$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (1;\ +\infty)$.

25. Решите неравенство

$$\frac{4^{x+1} + 4^x - 4}{16^x - 9\cdot 4^x + 8} \geqslant -1.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$.

26. Решите неравенство

$$1 + \frac{11}{2^x-8} + \frac{28}{4^x - 2^{x+4} + 64} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [2;\ 3) \cup (3\ +\infty)$.

27. Решите неравенство

$$1 + \frac{14}{3^x-9} + \frac{48}{9^x - 2\cdot 3^{x+2} + 81} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

28. Решите неравенство
$$\frac{\log_4(16x^4)+11}{\log_4^2 x - 9} \geqslant -1.$$

Ответ: $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{64}\right) \cup \left\{\dfrac{1}{16}\right\} \cup (64;\ +\infty)$.

29. Решите неравенство
$$\frac{\log_3(9x)-13}{\log_3^2 x + \log_3 x^4} \leqslant 1.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{81}\right) \cup (1;\ +\infty)$.

30. Решите неравенство
$$\frac{\log_4(64x)-2}{\log_4^2 x - \log_4 x^3} \geqslant -1.$$

Ответ: $(0;\ 1) \cup \{4\} \cup (64;\ +\infty)$.

31. Решите неравенство
$$\frac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x - 36} \geqslant -1.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{64}\right) \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup (64;\ +\infty)$.

32. Решите неравенство
$$1+\frac{6}{\log_3 x - 3}+\frac{5}{\log_3^2 x - \log_3(27x^6)+12} \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{9}\right] \cup [9;\ 27) \cup (27;\ +\infty)$.

33. Решите неравенство
$$1+\frac{5}{\log_4 x - 3}+\frac{6}{\log_4^2 x - \log_4(64x^6)+12} \geqslant 0.$$

Ответ: $(0;\ 1] \cup [4;\ 64) \cup (64;\ +\infty)$.

34. Решите неравенство
$$\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2}+\frac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \geqslant \frac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{25}\right) \cup \left\{\dfrac{1}{5}\right\} \cup (25;\ +\infty)$.

35. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x-4}+\frac{\log_3 x-4}{\log_3(81x)}\geqslant\frac{24-\log_3 x^8}{\log_3^2 x-16}.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{81}\right)\cup\left\{\frac{1}{9}\right\}\cup(81;\ +\infty)$.

36. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(32x)}{\log_2 x-5}+\frac{\log_2 x-5}{\log_2(32x)}\geqslant\frac{\log_2 x^{16}+18}{\log_2^2 x-25}.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{32}\right)\cup\{16\}\cup(32;\ +\infty)$.

37. Решите неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)}\geqslant\frac{2}{\log_8 x}+\frac{3}{\log_8^2 x-\log_8 x^2}.$$

Ответ: $(0;\ 1)\cup\{8\}\cup(64;\ +\infty)$.

38. Решите неравенство

$$\frac{\log_4 x}{\log_4\left(\frac{x}{64}\right)}\geqslant\frac{4}{\log_4 x}+\frac{8}{\log_4^2 x-\log_4 x^3}.$$

Ответ: $(0;\ 1)\cup\{16\}\cup(64;\ +\infty)$.

39. Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x}{\log_2\left(\frac{x}{64}\right)}\geqslant\frac{10}{\log_2 x}-\frac{35}{\log_2^2 x-\log_2 x^6}.$$

Ответ: $(0;\ 1)\cup(64;\ +\infty)$.

40. Решите неравенство

$$4^{6x-x^2-4}-34\cdot 2^{6x-x^2-4}+64\geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;\ 1]\cup\{3\}\cup[5;\ +\infty)$.

41. Решите неравенство

$$\frac{5\log_2^2 x-100}{\log_2^2 x-25}\geqslant 4.$$

Ответ: $x\in\left(0;\ \frac{1}{32}\right)\cup\{1\}\cup(32;\ +\infty)$.

42. Решите неравенство

$$\frac{(\log_4 x+2)^2}{\log_4^2 x-9}\geqslant 0.$$

Ответ: $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{64}\right) \cup \left\{\dfrac{1}{16}\right\} \cup (64;\ +\infty)$.

43. Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geqslant 0.$$

Ответ: $x \in (0;\ \log_5 3] \cup [\log_3 5;\ 2)$.

44. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(8x) \cdot \log_3(27x)}{x^2 - |x|} \leqslant 0.$$

Ответ: $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{27}\right] \cup \left[\dfrac{1}{8};\ 1\right)$.

Глава 3

Образцы заданий 2016 года

1. Решите неравенство

$$(20-11x)\cdot\log_{5x-9}(x^2-4x+5)\leqslant 0.$$

Решение. Воспользуемся методом замены множителя:

$$\begin{cases} 5x-9>0 \\ 5x-9\neq 1 \\ x^2-4x+5>0 \\ (20-11x)(5x-9-1)(x^2-4x+5-1)\leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>\dfrac{9}{5} \\ x\neq 2 \\ x^2-4x+5>0 \\ (11x-20)(x-2)^3\geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$x\in\left(\frac{9}{5};\,\frac{20}{11}\right]\cup(2;\,+\infty).$$

Ответ: $x\in\left(\dfrac{9}{5};\,\dfrac{20}{11}\right]\cup(2;\,+\infty)$.

Комментарий.

Метод замены множителя для выражения $\log_f g$:

$$\log_f g\vee 0 \iff \begin{cases} f>0 \\ f\neq 1 \\ g>0 \\ (f-1)(g-1)\vee 0 \end{cases}.$$

2. Решите неравенство

$$(4^{x^2-x-6}-1)\cdot\log_{0.25}(4^{x^2+2x+2}-3)\leqslant 0.$$

Решение. Так как $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geqslant 1$, то $4^{x^2+2x+2}\geqslant 4^1=4>0$ и ОДЗ неравенства $x\in\mathbb{R}$. Воспользуемся методом замены множителя:

$$(4-1)(x^2-x-6-0)(0.25-1)(4^{x^2+2x+2}-4)\leqslant 0 \iff (x^2-x-6)(x^2+2x+2-1)\geqslant 0 \iff$$

$$\iff (x+2)(x-3)(x+1)^2\geqslant 0 \iff x\in(-\infty;\,-2]\cup\{-1\}\cup[3;\,+\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -2] \cup \{-1\} \cup [3;\ +\infty)$.

3. Решите неравенство

$$\frac{4^x + 2^{x+1} - 36}{2^x - 5} + \frac{4^{x+1} - 2^{x+5} + 4}{2^x - 8} \leqslant 5 \cdot 2^x + 7.$$

Решение. Обозначим $2^x = t$. Имеем:

$$\frac{t^2 + 2t - 36}{t - 5} + \frac{4t^2 - 32t + 4}{t - 8} \leqslant 5t + 7 \iff t + \frac{7t - 36}{t - 5} + 4t + \frac{4}{t - 8} \geqslant 5t + 7$$

$$\frac{7t - 36}{t - 5} + \frac{4}{t - 8} \leqslant 7 \iff \frac{t - 4}{(t - 5)(t - 8)} \leqslant 0.$$

Возвращаясь к исходной переменной и применяя метод замены множителя, получим:

$$\frac{2^x - 4}{(2^x - 5)(2^x - 8)} \leqslant 0 \iff \frac{x - 2}{(x - \log_2 5)(x - 3)} \leqslant 0 \iff x \in (-\infty;\ 2] \cup (\log_2 5;\ 3).$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 2] \cup (\log_2 5;\ 3)$.

4. Решите неравенство

$$125^x - 25^x + \frac{4 \cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \leqslant 4.$$

Решение. Обозначим $5^x = t$. Имеем:

$$t^3 - t^2 + \frac{4t^2 - 20}{t - 5} \leqslant 4 \iff t^3 - t^2 + \frac{4t^2 - 20 - 4t + 20}{t - 5} \leqslant 0 \iff t^2(t - 1) + \frac{4t(t - 1)}{t - 5} \leqslant 0$$

$$\iff t(t - 1)\left(t + \frac{4}{t - 5}\right) \leqslant 0 \iff \frac{t(t - 1)^2(t - 4)}{t - 5} \leqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} t \leqslant 0 \\ t = 1 \\ 4 < t < 5 \end{array}\right. .$$

Возвращаясь к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 5^x \leqslant 0 \\ 5^x = 1 \\ 4 < 5^x < 5 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \log_5 4 < x < 1 \end{array}\right. \iff x \in \{0\} \cup (\log_5 4;\ 1).$$

Ответ: $x \in \{0\} \cup (\log_5 4;\ 1)$.

5. Решите неравенство

$$\frac{9^{x+\frac{1}{2}} - 4 \cdot 3^x + 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 4 \cdot 3^x + 1} + \frac{5 \cdot 3^x - 19}{3^x - 4} \leqslant \frac{2 \cdot 3^{x+2} - 12}{3^{x+1} - 1}.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 5}{3 \cdot 3^2 x - 4 \cdot 3^x + 1} + \frac{5 \cdot 3^x - 19}{3^x - 4} \leqslant \frac{18 \cdot 3^x - 12}{3 \cdot 3^x - 1}$$

и сделаем замену $3^x = t$. Имеем:

$$\frac{3t^2-4t+5}{3t^2-4t+1}+\frac{5t-19}{t-4}\leqslant\frac{18t-12}{3t-1}\iff 1+\frac{4}{3t^2-4t+1}+5+\frac{1}{t-4}\leqslant 6-\frac{6}{3t-1}\iff$$

$$\iff \frac{3t^2-10t+3}{(3t-1)(t-1)(t-4)}\leqslant 0\iff\frac{(3t-1)(t-3)}{(3t-1)(t-1)(t-4)}\leqslant 0\iff$$

$$\iff \begin{cases} t\neq\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{t-3}{(t-1)(t-4)}\leqslant 0\end{cases}\iff\begin{cases} t\neq\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l} t<1\\ 3\leqslant t<4\end{array}\right.\end{cases}.$$

Возращаясь к исходной переменной, получим:

$$\begin{cases} 3^x\neq\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l} 3^x<1\\ 3\leqslant 3^x<4\end{array}\right.\end{cases}\iff\begin{cases} x\neq -1\\ \left[\begin{array}{l} x<0\\ 1\leqslant x<\log_3 4\end{array}\right.\end{cases}\iff x\in(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,0)\cup[1;\,\log_3 4).$$

Ответ: $x\in(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,0)\cup[1;\,\log_3 4)$.

6. Решите неравенство

$$2\log_{(x^2-6x+10)^2}\left(5x^2+3\right)\leqslant\log_{x^2-6x+10}\left(4x^2+7x+3\right).$$

Решение. Так как $x^2-6x+10=(x-3)^2+1>0$, то

$$\log_{(x^2-6x+10)^2}\left(5x^2+3\right)=\frac{1}{2}\log_{x^2-6x+10}\left(5x^2+3\right).$$

Применяя метод замены множителя, получим:

$$\log_{x^2-6x+10}\left(5x^2+3\right)-\log_{x^2-6x+10}\left(4x^2+7x+3\right)\leqslant 0\iff\begin{cases} x^2-6x+10\neq 1\\ 5x^2+3>0\\ 4x^2+7x+3>0\\ (x^2-6x+9)(x^2-7x)\leqslant 0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} x\neq 3\\ (4x+3)(x+1)>0\\ x(x-3)^2(x-7)\leqslant 0\end{cases}\iff\begin{cases} x\neq 3\\ (4x+3)(x+1)>0\\ x(x-7)\leqslant 0\end{cases}\iff x\in[0;\,3)\cup(3;\,7].$$

Ответ: $x\in[0;\,3)\cup(3;\,7]$.

7. Решите неравенство

$$\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right)\leqslant 0.$$

Решение. Применим метод замены множителя для логарифма, получим:

$$\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right)\leqslant 0 \iff \begin{cases} 1-\dfrac{1}{(x-1)^2}>0 \\ 1-\dfrac{1}{(x-1)^2}\neq 1 \\ \dfrac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}>0 \\ \left(1-\dfrac{1}{(x-1)^2}-1\right)\left(\dfrac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}-1\right)\leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(x-2)>0 \\ x\neq 1 \\ (x-1)(x-2)>0 \\ \dfrac{4x+3}{(x-1)(x-2)}\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-2)>0 \\ x\neq 1 \\ (x-1)(x-2)>0 \\ x\geqslant -\dfrac{3}{4} \end{cases} \iff x\in\left[-\frac{3}{4};\,0\right)\cup(2;\,+\infty).$$

Ответ: $x\in\left[-\frac{3}{4};\,0\right)\cup(2;\,+\infty)$.

8. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{2}}\left(x^2-2x+1\right)\geqslant 2.$$

Решение. Применим метод замены множителя, получим:

$$\log_{\frac{x}{2}}\left(x^2-2x+1\right)\geqslant 2 \iff \log_{\frac{x}{2}}\left(x^2-2x+1\right)-\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^2\geqslant 0 \iff$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}>0 \\ \dfrac{x}{2}\neq 1 \\ x^2-2x+1>0 \\ \left(\dfrac{x}{2}-1\right)\left(x^2-2x+1-\dfrac{x^2}{4}\right)\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<0 \\ x\neq 2 \\ x\neq 1 \\ (x-2)^2(3x-2)\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<0 \\ x\neq 2 \\ x\neq 1 \\ x\geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\iff x\in\left[\frac{2}{3};\,1\right)\cup(1;\,2)\cup(2;\,+\infty).$$

Ответ: $x\in\left[\frac{2}{3};\,1\right)\cup(1;\,2)\cup(2;\,+\infty)$.

9. Решите неравенство

$$(x-1)\cdot\log_{x+3}(x+5)\cdot\log_5(x+5)^2\leqslant 0.$$

Решение. Применим метод замены множителя, получим:

$$(x-1)\cdot\log_{x+3}(x+5)\cdot\log_5(x+5)^2 \leqslant 0 \iff \begin{cases} x+3>0 \\ x+3\neq 1 \\ x+5>0 \\ (x-1)(x+2)(x+4)\big((x+5)^2-1\big)\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>-3 \\ x\neq -2 \\ (x-1)(x+2)(x+4)^2(x+6)\leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-3 \\ x\neq -2 \\ (x-1)(x+2)\leqslant 0 \end{cases} \iff x\in(-2;\,1].$$

Ответ: $x \in (-2;\, 1]$.

Задачи для самостоятельного решения

10. Решите неравенство

$$(2-3x)\cdot\log_{2x-1}(x^2-2x+2)\leqslant 0.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right]\cup(1;\ +\infty)$.

11. Решите неравенство

$$(5x-13)\cdot\log_{2x+5}(x^2-6x+10)\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{5}{2};\ -2\right)\cup\left[\frac{13}{5};\ +\infty\right)$.

12. Решите неравенство

$$(3x+7)\cdot\log_{2x+5}(x^2+4x+5)\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{5}{2};\ -\frac{7}{3}\right]\cup(-2;\ +\infty)$.

13. Решите неравенство

$$(4x-7)\cdot\log_{x^2-4x+5}(3x-5)\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{5}{3};\ \frac{7}{4}\right]\cup(2\ +\infty)$.

14. Решите неравенство

$$(4x+13)\cdot\log_{x^2+6x+10}(3x+10)\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{10}{3};\ -\frac{13}{4}\right]\cup(-3;\ +\infty)$.

15. Решите неравенство

$$(3^{4x-x^2-3}-1)\cdot\log_{0.5}(x^2-4x+5)\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ 1]\cup\{2\}\cup[3;\ +\infty)$.

16. Решите неравенство

$$\frac{4^x-2^{x+3}+7}{4^x-5\cdot 2^x+4}\leqslant\frac{2^x-9}{2^x-4}+\frac{1}{2^x-6}.$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ 2)\cup(\log_2 6;\ 3]$.

17. Решите неравенство

$$2^x+\frac{2^{x+2}}{2^x-4}+\frac{4^x+7\cdot 2^x+20}{4^x-3\cdot 2^{x+2}+32}\leqslant 1.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0] \cup [\log_2 3;\ 3)$.

18. Решите неравенство

$$\frac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \frac{25^x + 7 \cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \leqslant 2 \cdot 5^x - 24.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0) \cup \left[\log_5 \dfrac{3}{2};\ \log_5 7\right)$.

19. Решите неравенство

$$\frac{4^x - 2^{x+4} + 30}{2^x - 2} + \frac{4^x - 7 \cdot 2^x + 3}{2^x - 7} \leqslant 2^{x+1} - 14.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1) \cup [2;\ \log_2 7)$.

20. Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leqslant 10 \cdot 3^x + 3.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1] \cup (\log_3 6;\ 2)$.

21. Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+2} + 20}{3^x - 3} + \frac{9^x - 3^{x+2} + 1}{3^x - 9} \leqslant 2 \cdot 3^x - 6.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1) \cup [\log_3 7;\ 2)$.

22. Решите неравенство

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leqslant 3^x + 5.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1] \cup (\log_3 5;\ 2)$.

23. Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^x + 2}{9^x - 3^x} + \frac{5 \cdot 3^x - 19}{3^x - 4} \leqslant \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 2}{3^x}.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0) \cup [1;\ \log_3 4)$.

24. Решите неравенство

$$\frac{49^x - 6 \cdot 7^x + 3}{7^x - 5} + \frac{6 \cdot 7^x - 39}{7^x - 7} \leqslant 7^x + 5.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0] \cup (\log_7 5;\ 1)$.

25. Решите неравенство

$$8^x - 3\cdot 4^x + \frac{9\cdot 4^x - 288}{2^x - 9} \leqslant 32.$$

Ответ: $x \in \{1\} \cup [3;\ \log_2 9)$.

26. Решите неравенство

$$2^x - 6 - \frac{9\cdot 2^x - 37}{4^x - 7\cdot 2^x + 12} \leqslant \frac{1}{2^x - 4}.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0] \cup (\log_2 3;\ 3]$.

27. Решите неравенство

$$\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10\cdot 9^x + 10\cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10\cdot 3^x + 3} \leqslant 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0] \cup (\log_3 2;\ 1)$.

28. Решите неравенство

$$2\log_{(x^2-8x+17)^2}\left(3x^2+5\right) \leqslant \log_{x^2-8x+17}\left(2x^2+7x+5\right).$$

Ответ: $x \in [0;\ 4) \cup (4;\ 7]$.

29. Решите неравенство

$$\log_{8x^2-23x+15}(2x-2) \leqslant 0.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{15}{8};\ 2\right)$.

Глава 4

Образцы заданий 2015 года

1. Решите неравенство

$$\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0.5}(4+3x-x^2)+10>0.$$

Решение. Так как $\log_{0.5} t=-\log_2 t$, то, раскладывая на множители квадратное относительно $t=\log_2(4+3x-x^2)$ неравенство и применяя МЗМ, имеем:

$$\log_2^2(4+3x-x^2)-7\log_2(4+3x-x^2)+10>0 \iff$$
$$\iff \big(\log_2(4+3x-x^2)-2\big)\big(\log_2(4+3x-x^2)-5\big)>0 \iff$$
$$\big(\log_2(4+3x-x^2)-\log_2 4\big)\big(\log_2(4+3x-x^2)-\log_2 32\big)>0 \iff$$
$$\iff \begin{cases} 4+3x-x^2>0 \\ (4+3x-x^2-4)(4+3x-x^2-32)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-3x-4<0 \\ x(x-3)(x^2-3x+28)>0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} (x+1)(x-4)<0 \\ x(x-3)>0 \end{cases} \iff x\in(-1;\,0)\cup(3;\,4).$$

Ответ: $x\in(-1;\,0)\cup(3;\,4)$.

Комментарий.

При решении неравенства мы учли, что $x^2-3x+28>0$, так как $a=1>0$ и $D<0$. Положительные множители на знак не влияют.

2. Решите неравенство

$$\frac{3\lg^2 x-8}{\lg^2 x-4}\geqslant 2.$$

Решение. Перенесем правую часть влево, приведем к общему знаменателю и применим метод замены множителя:

$$\frac{3\lg^2 x-8-2\lg^2 x+8}{\lg^2 x-4}\geqslant 0 \iff \frac{\lg^2 x}{(\lg x+2)(\lg x-2)}\geqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(\lg x-\lg 1)^2}{\left(\lg x-\lg\frac{1}{100}\right)(\lg x-\lg 100)}\geqslant 0 \iff \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{(x-1)^2}{\left(x-\frac{1}{100}\right)(x-100)}\geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff x\in\left(0;\ \frac{1}{100}\right)\cup\{1\}\cup(100;\ +\infty)\,.$$

Ответ: $x\in\left(0;\ \dfrac{1}{100}\right)\cup\{1\}\cup(100;\ +\infty)$.

3. Решите неравенство

$$\frac{31-5\cdot 2^x}{4^x-24\cdot 2^x+128}\geqslant 0.25.$$

Решение. Обозначим $t=2^x$, перенесем правую часть влево и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{31-5t}{t^2-24t+128}-0.25\geqslant 0 \iff \frac{4(31-5t)-(t^2-24t+128)}{t^2-24t+128}\geqslant 0 \iff$$

$$\frac{t^2-4t+4}{t^2-24t+128}\leqslant 0 \iff \frac{(t-2)^2}{(t-8)(t-16)}\leqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} t=2 \\ 8<t<16 \end{array}\right..$$

Возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x=2 \\ 8<2^x<16 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 3<x<4 \end{array}\right..$$

Ответ: $x\in\{1\}\cup(3;\ 4)$.

4. Решите неравенство

$$\frac{2}{3^x-9}\geqslant\frac{8}{3^x-3}.$$

Решение. Перенесем правую часть влево, приведем к общему знаменателю и применим метод замены множителя:

$$\frac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-3)(3^x-9)}\geqslant 0 \iff \frac{3^x-11}{(3^x-3)(3^x-9)}\leqslant 0 \iff \frac{x-\log_3 11}{(x-1)(x-2)}\leqslant 0$$

$$\iff x\in(-\infty;\ 1)\cup(2;\ \log_3 11].$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ 1)\cup(2;\ \log_3 11]$.

Комментарий.

Данное неравенство на порядок проще все остальных прототипов неравенств за 2015 год.

5. Решите неравенство

$$\frac{3^x}{3^x-9}+\frac{3^x+9}{3^x-4}+\frac{83}{9^x-13\cdot 3^x+36}\leqslant 0.$$

Решение. Обозначим $3^x=9$ и приведем к общему знаменателю. Имеем:

$$\frac{t(t-4)+(t-9)(t+9)+83}{(t-4)(t-9)}\leqslant 0 \iff \frac{t^2-2t+1}{(t-4)(t-9)}\leqslant 0 \iff \frac{(t-1)^2}{(t-4)(t-9)}\leqslant 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} t=1 \\ 4<t<9 \end{array}\right. .$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x=1 \\ 4<3^x<9 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \log_3 4<x<2 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x\in\{0\}\cup(\log_3 4;\ 2)$.

6. Решите неравенство

$$\frac{96}{(5^{2-x^2}-1)^2}-\frac{28}{5^{2-x^2}-1}+1\geqslant 0.$$

Решение. Обозначим $5^{2-x^2}-1=t$. Имеем:

$$\frac{96}{t^2}-\frac{28}{t}+1\geqslant 0 \iff \frac{t^2-28t+96}{t^2}\geqslant 0 \iff \frac{(t-4)(t-24)}{t^2}\geqslant 0 \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} t\neq 0 \\ (t-4)(t-24)\geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} t\leqslant 4 \\ t\geqslant 24 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\left\{\begin{array}{l} 5^{2-x^2}-1\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 5^{2-x^2}-1\leqslant 4 \\ 5^{2-x^2}-1\geqslant 24 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2-x^2\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2-x^2\leqslant 1 \\ 2-x^2\geqslant 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x\neq \pm\sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} |x|\geqslant 1 \\ x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff$$

$$\iff x\in(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\ -1]\cup\{0\}\cup[1;\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty).$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\ -1]\cup\{0\}\cup[1;\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$.

7. Решите неравенство

$$(\log_2^2 x-2\log_2 x)^2<11\log_2^2 x-22\log_2 x-24.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 - 11(\log_2^2 x - 2\log_2 x) + 24 < 0$$

и сделаем замену $\log_2^2 x - 2\log_2 x = t$. Имеем:

$$t^2 - 11t + 24 < 0 \iff (t-3)(t-8) < 0 \iff \begin{cases} t > 3 \\ t < 8 \end{cases}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\begin{cases} \log_2^2 x - 2\log_2 x > 3 \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x < 8 \end{cases} \iff \begin{cases} (\log_2 x + 1)(\log_2 x - 3) > 0 \\ (\log_2 x + 2)(\log_2 x - 4) < 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left(\log_2 x - \log_2 \dfrac{1}{2}\right)(\log_2 x - \log_2 8) > 0 \\ \left(\log_2 x - \log_2 \dfrac{1}{4}\right)(\log_2 x - \log_2 16) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x-8) > 0 \\ \left(x - \dfrac{1}{4}\right)(x-16) < 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff x \in \left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right) \cup (8;\ 16).$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2}\right) \cup (8;\ 16)$.

Комментарий.

Ученики, не заметившие замену $\log_2^2 x - 2\log_2 x = t$, могли обойтись заменой $t = \log_2 x$. Неравенство примет вид:

$$(t^2 - 2t)^2 < 11t^2 - 22t - 24 \iff t^4 - 4t^3 - 7t^2 + 22t + 24 < 0.$$

Легко заметить, что корнями уравнения $t^4 - 4t^3 - 7t^2 + 22t + 24 = 0$ являются числа $t = -2$, $t = -1$, $t = 3$, $t = 4$.

Таким образом, имеем:

$$(t+2)(t+1)(t-3)(t-4) < 0 \iff \left[\begin{array}{l} -2 < t < -1 \\ 3 < t < 4 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -2 < \log_2 x < -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{array}\right..$$

Задачи для самостоятельного решения

8. Решите неравенство

$$\log_2^2(16+6x-x^2)+10\log_{0.5}(16+6x-x^2)+24>0.$$

Ответ: $x\in(-2;\ 0)\cup(6;\ 8)$.

9. Решите неравенство

$$\log_2^2\left(8+2x-x^2\right)+9\log_{0,5}\left(8+2x-x^2\right)+18>0.$$

Ответ: $x\in(-2;\ 0)\cup(2;\ 4)$.

10. Решите неравенство

$$\log_5^2(25-x^2)-3\log_5(25-x^2)+2\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in(-5;\ -2\sqrt{5}]\cup\{0\}\cup[2\sqrt{5};\ 5)$.

11. Решите неравенство

$$\log_3^2\left(81-x^2\right)-7\log_3\left(81-x^2\right)+12\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in\big(-9;\ -3\sqrt{6}\big]\cup\{0\}\cup\big[3\sqrt{6};\ 9\big)$.

12. Решите неравенство

$$\log_4^2\left(64-x^2\right)-5\log_4\left(64-x^2\right)+6\geqslant 0.$$

Ответ: $x\in\big(-8;\ -4\sqrt{3}\big]\cup\{0\}\cup\big[4\sqrt{3};\ 8\big)$.

13. Решите неравенство

$$\frac{5\lg^2 x-1}{\lg^2 x-1}\geqslant 1.$$

Ответ: $x\in\left(0;\ \dfrac{1}{10}\right)\cup\{1\}\cup(10;+\infty)$.

14. Решите неравенство

$$\frac{25-5^x}{25^x-30\cdot 5^x+125}\geqslant 0.25.$$

Ответ: $x\in[0;\ 1)$.

15. Решите неравенство

$$\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27}\geqslant 0.5.$$

Ответ: $x\in\{0\}\cup(1;\ 2)$.

16. Решите неравенство

$$\frac{2}{8^x - 10} \geqslant \frac{4}{8^x - 8}.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (\log_8 10;\ \log_8 12)$.

17. Решите неравенство

$$\frac{1}{6^x + 7} \leqslant \frac{5}{6^{x+1} - 1}.$$

Ответ: $x \in (-1;\ 2]$.

18. Решите неравенство

$$\frac{2}{7^x - 7} \geqslant \frac{5}{7^x - 4}.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ \log_7 4) \cup (1;\ \log_7 9]$.

19. Решите неравенство

$$\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \leqslant 1 + \frac{1}{3^x - 2}.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0] \cup [\log_3 2;\ 1)$.

20. Решите неравенство

$$\frac{1}{5^x + 31} \leqslant \frac{4}{5^{x+1} - 1}.$$

Ответ: $x \in (-1;\ 3]$.

21. Решите неравенство

$$\frac{105}{(2^{4-x^2} - 1)^2} - \frac{22}{2^{4-x^2} - 1} + 1 \geqslant 0.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ -1] \cup \{0\} \cup [1;\ 2) \cup (2; +\infty)$.

22. Решите неравенство

$$\frac{3}{(2^{2-x^2} - 1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2} - 1} + 1 \geqslant 0.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2};\ -1] \cup \{0\} \cup [1;\ \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

23. Решите неравенство

$$\lg^4 x - 4\lg^3 x + 5\lg^2 x - 2\lg x \geqslant 0.$$

Ответ: $x \in (0;\ 1] \cup \{10\} \cup [10;\ +\infty)$.

24. Решите неравенство

$$\left(\log_2^2 x - 2\log_2 x\right)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log_2^2 x.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}\right) \cup (8;\ 32)$.

Глава 5

Образцы заданий 2014 года

1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7^x + \dfrac{98}{7^x} \geqslant 51 \\ \log_{x+3}\left(\dfrac{x+1}{3}\right) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Решение. а) Решим первое неравенство системы. Имеем:

$$7^x + \frac{98}{7^x} \geqslant 51 \iff 7^{2x} - 51 \cdot 7^x + 98 \geqslant 0 \iff (7^x - 2)(7^x - 49) \geqslant 0 \iff$$

$$\iff (x - \log_7 2)(x - 2) \geqslant 0 \iff x \in (-\infty; \log_2 7] \cup [2 + \infty).$$

б) Решим второе неравенство системы. Применим метод замены множителя, имеем:

$$\log_{x+3}\left(\frac{x+1}{3}\right) \leqslant 0 \iff \begin{cases} x+3>0 \\ x+3 \neq 1 \\ x+1>0 \\ (x+3-1)\left(\dfrac{x+1}{3}-1\right) \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-1 \\ (x+2)(x-2) \leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff x \in (-1;\, 2].$$

в) Пересекая множество решений неравенств, получим $x \in (-1; \log_2 7] \cup \{2\}$.

Ответ: $x \in (-1; \log_2 7] \cup \{2\}$.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^{x+\frac{1}{2}} - 28 \cdot 3^{x-1} + 1 \leqslant 0 \\ \log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leqslant \dfrac{4}{2x+1} \end{cases}.$$

Решение. а) Решим первое неравенство системы. Имеем:

$$9^{x+\frac{1}{2}} - 28 \cdot 3^{x-1} + 1 \leqslant 0 \iff 9 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 3 \leqslant 0 \iff 9\left(3^x - \frac{1}{9}\right)(3^x - 3) \leqslant 0 \iff$$

$$\iff (x+2)(x-1) \leqslant 0 \iff x \in [-2;\, -1].$$

б) Решим второе неравенство системы. Имеем:

$$\log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leqslant \frac{4}{2x+1} \iff \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{x^2+x}\cdot 2 \leqslant \frac{4}{2x+1} \iff \frac{4}{2x+1}\left(\frac{2}{x^2+x}-1\right)\leqslant 0$$

$$\iff \frac{x^2+x-2}{x(x+1)(2x+1)} \geqslant 0 \iff \frac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)(2x+1)} \geqslant 0 \iff x\in[-2;\,-1)\cup\left(-\frac{1}{2};\,0\right)\cup[1;\,+\infty).$$

в) Пересекая множество решений неравенств, получим $x\in[-2;\,-1)\cup\left(-\frac{1}{2};\,0\right)\cup\{1\}$.

Ответ: $x\in[-2;\,-1)\cup\left(-\frac{1}{2};\,0\right)\cup\{1\}$.

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x)\leqslant 0\\ 64^{x^2-3x+20}-0.125^{2x^2-6x-200}\leqslant 0 \end{cases}.$$

Решение. а) Решим первое неравенство системы. Применим метод замены множителя, имеем:

$$\log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x)\leqslant 0 \iff \begin{cases} 11-x>0\\ 11-x\neq 1\\ x+7>0\\ x+5>0\\ x+5\neq 1\\ 9-x>0\\ (11-x-1)(x+7-1)(x+5-1)(9-x-1)\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -5<x<9\\ x\neq -4\\ (x+4)(x-8)\geqslant 0 \end{cases} \iff x\in(-5;\,-4)\cup[8;\,9).$$

б) Решим второе неравенство системы. Применим метод замены множителя, имеем:

$$64^{x^2-3x+20}-0.125^{2x^2-6x-200}\leqslant 0 \iff 64^{x^2-3x+20}-64^{-x^2+3x+100}\leqslant 0 \iff$$

$$\iff x^2-3x+20-(-x^2+3x+100)\leqslant 0 \iff (x+5)(x-8)\leqslant 0 \iff x\in[-5;\,8].$$

в) Пересекая множество решений неравенств, получим $x\in(-5;\,-4)\cup\{8\}$.

Ответ: $x\in(-5;\,-4)\cup\{8\}$.

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x-2^{x+8}\leqslant 257\\ 2\log_{x+7}\left(\frac{x^2-x-56}{x}\right)^2+\log_{x+7}\frac{x-8}{x}\leqslant 9 \end{cases}.$$

Решение. а) Решим первое неравенство системы. Имеем:

$$4^x - 256 \cdot 2^x - 257 \leqslant 0 \iff (2^x + 1) \cdot (2^x - 257) \leqslant 0 \iff 2^x \leqslant 257 \iff$$
$$\iff x \in (-\infty;\ \log_2 257].$$

б) Решим второе неравенство системы. Имеем:

$$2\log_{x+7} \frac{(x+7)^2(x-8)^2}{x^2} + \log_{x+7} \frac{x-8}{x} \leqslant 9 \iff$$
$$\iff 2\log_{x+7}(x+7)^2 + 2\log_{x+7} \left(\frac{x-8}{x}\right)^2 + \log_{x+7} \frac{x-8}{x} \leqslant 9 \iff$$
$$\iff 4 + \log_{x+7} \left(\frac{x-8}{x}\right)^4 + \log_{x+7} \frac{x-8}{x} \leqslant 9 \iff$$
$$\iff \log_{x+7} \left(\frac{x-8}{x}\right)^5 \leqslant 5 \iff \log_{x+7} \left(\frac{x-8}{x}\right) - 1 \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{x-8}{x} > 0 \\ x+7 > 0 \\ x+7 \neq 1 \\ (x+7-1)\left(\dfrac{x-8}{x} - x - 7\right) \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-8}{x} > 0 \\ x > -7 \\ x \neq -6 \\ \dfrac{(x+6)(x+2)(x+4)}{x} \geqslant 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff x \in (-7;\ -6) \cup [-4;\ -2] \cup (8;\ +\infty).$$

в) Пересекая множество решений неравенств, получим:

$$x \in (-7;\ -6) \cup [-4;\ -2] \cup (8;\ \log_2 257].$$

Ответ: $x \in (-7;\ -6) \cup [-4;\ -2] \cup (8;\ \log_2 257]$.

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 36^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^{x-1} + 1 \geqslant 0 \\ x \cdot \log_4(5 - 3x - x^2) \geqslant 0 \end{cases}.$$

Решение. а) Решим первое неравенство системы. Имеем:

$$6^{2x-1} - 7 \cdot 6^{x-1} + 1 \geqslant 0 \iff 6^{2x} - 7 \cdot 6^x + 6 \geqslant 0 \iff (6^x - 1)(6^x - 6) \geqslant 0 \iff$$
$$\iff x(x-1) \geqslant 0 \iff x \in (-\infty;\ 0] \cup [1;\ +\infty).$$

б) Решим второе неравенство системы. Имеем:

$$\begin{cases} 5 - 3x - x^2 > 0 \\ x(5 - 3x - x^2 - 1) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(x - \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \dfrac{-3+\sqrt{29}}{3}\right) < 0 \\ x(x-1)(x+4) \leqslant 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff x \in \left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};\ -4\right] \cup [0;\ 1].$$

в) Пересекая множество решений неравенств, получим:

$$x \in \left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};\ -4\right] \cup \{0\} \cup \{1\}.$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2};\ -4\right] \cup \{0\} \cup \{1\}$.

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_3\left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{16}{x^2}\right) \leqslant 1 \\ \dfrac{2x^2+x-28}{(x-6)^3+(x-5)^3-1} \leqslant 0 \end{cases}.$$

Решение. а) Решим первое неравенство системы. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{16}{x^2} > 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{16}{x^2} \leqslant 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x^4-64}{4x^2} > 0 \\ \dfrac{x^4-12x^2-64}{4x^2} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(x^2+8)(x^2-8)}{x^2} > 0 \\ \dfrac{(x^2+4)(x^2-16)}{x^2} \leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ (x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8}) > 0 \\ (x-4)(x+4) \leqslant 0 \end{cases} \iff x \in \left[-4;\ -\sqrt{8}\right) \cup \left(\sqrt{8};\ 4\right].$$

б) Решим второе неравенство системы. Так как

$$(x-5)^3 - 1 = (x-5-1)((x-5)^2+(x-5)+1) = (x-6)(x^2-9x+21),$$

то

$$\frac{2x^2+x-28}{(x-6)((x-6)^2+x^2-9x+21)} \leqslant 0 \iff \frac{(2x-7)(x+4)}{x-6} \leqslant 0 \iff x \in (-\infty;\ -4] \cup \left[\frac{7}{2};\ 6\right).$$

в) Пересекая множество решений неравенств, получим:

$$x \in \{-4\} \cup \left[\frac{7}{2};\ 4\right].$$

Ответ: $x \in \{-4\} \cup \left[\dfrac{7}{2};\ 4\right]$.

Комментарий.

При решении второго неравенства мы учли, что $(x-6)^2 + x^2 - 9x + 21 > 0$.

Задачи для самостоятельного решения

7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x + \dfrac{54}{3^x} \geqslant 29 \\ \log_{x+3}\left(\dfrac{x+1}{4}\right) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in (-1;\ \log_3 2] \cup \{3\}$.

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x + \dfrac{270}{3^x} \geqslant 37 \\ \log_{x-1}\left(\dfrac{x+3}{6}\right) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in (2;\ \log_3 10] \cup \{3\}$.

9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3+x}(x-3)\cdot\log_{6-x}(x+4) \leqslant 0 \\ 4^{2x^2-5x+3} - 0.25^{-x^2-6x+25} \leqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in \{4\} \cup (5;\ 6)$.

10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x) \leqslant 0 \\ 25^{x^2-2x+10} - 0.2^{2x^2-4x-80} \leqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in \{-3\} \cup (3;\ 4)$.

11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \leqslant 0 \\ 2^{x^2+3} - 8^{x+1} \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in (-2;\ -1]$.

12. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x}(x+2) \leqslant \log_{7-x}(3-x) \\ 32\cdot 9^x \leqslant 60\cdot 3^x - 7 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in \left(-\log_3 8;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

13. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^{x-\frac{1}{2}} - 5^{x-1} + 5 \geqslant 0 \\ x \cdot \log_6(3 + x - x^2) \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\, -1\right] \cup [0;\, 2]$.

14. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 19 \cdot 4^x + 4^{-x} \leqslant 20 \\ x \cdot \log_{x+3}(7 - 2x) \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in [-\log_4 19;\, -2) \cup \{0\}$.

15. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x + 10 \cdot 3^{3-x} \geqslant 37 \\ \log_{2x-3}(10 - 3x) \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in (2;\, \log_3 10] \cup \{3\}$.

16. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 16^{x+\frac{1}{4}} - 9 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} + 1 \geqslant 0 \\ (x-1) \cdot \log_{x+3}(x+2) \cdot \log_3(x+3)^2 \leqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2};\, 1\right]$.

17. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 16^{x-\frac{5}{4}} - 3 \cdot 4^{x-\frac{3}{2}} + 1 \geqslant 0 \\ \log_2 \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 2} \leqslant 1 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{7}{2};\, -1\right] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Глава 6

Образцы заданий 2013 года

1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leqslant 0 \\ \dfrac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geqslant x^2 - \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{5}{x} \end{cases}.$$

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x - 31 \cdot 3^x + 108 \leqslant 0 \\ \dfrac{2x^3 - 8x^2 + 4x - 12}{x^2 - 4x} \leqslant 2x - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x} \end{cases}.$$

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5x-12} + \dfrac{2x^2 - 6x + 1}{x-3} \geqslant 2x \\ \log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \dfrac{2x^2 + 9x + 7}{(x+1)^4} \leqslant -2 \end{cases}.$$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{2x+2} - 21 \cdot 2^{x-1} + 1 \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \dfrac{3x+1}{x-1} \leqslant \dfrac{4x+1}{x} \end{cases}.$$

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 11 \cdot 3^{2x+2} - 4 \cdot 3^{x+2} + 1 \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2 + 3x - 3}{x^2 + 3x} + \dfrac{11x - 10}{x-1} \leqslant \dfrac{12x-1}{x} \end{cases}.$$

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-2x}(x+6) \leqslant 0 \\ x - \dfrac{x-3}{x+6} - \dfrac{x^2 + 27x + 90}{x^2 + 8x + 12} \leqslant -1 \end{cases}.$$

7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \dfrac{x+4}{(x-5)^{10}} \geqslant -10 \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{50x^2 + x - 7}{x-7} \leqslant 1 \end{cases}.$$

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+4}{(x-3)^{2}} \geqslant -2 \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x-4} \leqslant 3 \end{cases}.$$

9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \dfrac{x+6}{(x-4)^{6}} \geqslant -6 \\ x^3 + 9x^2 + \dfrac{40x^2 + 2x - 10}{x-5} \leqslant 2 \end{cases}.$$

10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x} \dfrac{x+5}{(x-6)^{12}} \geqslant -12 \\ x^3 + 7x^2 + \dfrac{30x^2 + 7x - 42}{x-6} \leqslant 7 \end{cases}.$$

11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \dfrac{-5-x}{x-4} \leqslant -1 \\ \dfrac{x^2 - 5x + 3}{x-4} + \dfrac{5x-27}{x-6} \leqslant x+4 \end{cases}.$$

12. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x} \dfrac{1-x}{x-7} \leqslant -1 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-2} + \dfrac{4x-22}{x-7} \leqslant x+2 \end{cases}.$$

13. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x} \dfrac{2-x}{x-6} \leqslant -1 \\ \dfrac{x^2 - 3x - 6}{x-4} + \dfrac{4x-29}{x-8} \leqslant x+5 \end{cases}.$$

14. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{2-x} \dfrac{-1-x}{x-2} \leqslant -1 \\ \dfrac{x^2 - 8x + 6}{x-1} + \dfrac{8x-37}{x-5} \leqslant x+1 \end{cases}.$$

15. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \dfrac{(x-4)^8}{x+5} \geqslant 8 \\ \dfrac{x^2-3x-5}{x-4} + \dfrac{x^2-6x+3}{x-6} \leqslant 2x+1 \end{cases}.$$

16. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{8-x} \dfrac{(x-8)^{10}}{x-1} \geqslant 10 \\ \dfrac{x^2-9x+15}{x-2} + \dfrac{x^2-7x+4}{x-7} \leqslant 2x-7 \end{cases}.$$

17. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x} \dfrac{(x-6)^2}{x-2} \geqslant 2 \\ \dfrac{x^2-x-14}{x-4} + \dfrac{x^2-8x+3}{x-8} \leqslant 2x+3 \end{cases}.$$

18. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x}(16-x^2) \leqslant 1 \\ 2x+1-\dfrac{21x+39}{x^2+x-2} \geqslant -\dfrac{1}{x+2} \end{cases}.$$

19. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x}(25-x^2) \leqslant 1 \\ x+17+\dfrac{144x-436}{x^2-10x+21} \leqslant \dfrac{1}{x-3} \end{cases}.$$

20. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x}(28-3x-x^2) \leqslant 1 \\ x+7+\dfrac{14x-24}{x^2-4x+3} \geqslant \dfrac{5}{x-1} \end{cases}.$$

21. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x+17\cdot 2^{3-x} \leqslant 25 \\ \dfrac{x^2-3x-5}{x-4} + \dfrac{3x^2-15x+2}{x-5} \leqslant 4x+1 \end{cases}.$$

22. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x+5\cdot 2^{2-x} \leqslant 21 \\ \dfrac{x^2-2x-10}{x-4} + \dfrac{2x^2-12x+3}{x-6} \leqslant 3x+2 \end{cases}.$$

Глава 7

Образцы заданий 2012 года

1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0 \\ \log_{x^2}(x-1)^2 \leqslant 1 \end{cases}.$$

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2 \cdot 4^{-x} - 33 \cdot 2^{-x} + 16 \leqslant 0 \\ \log_{x^2}(x+1)^2 \leqslant 1 \end{cases}.$$

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0 \\ \log_{x^2}(x-1)^2 \leqslant 1 \end{cases}.$$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 11^{x+1} + 3 \cdot 11^{-x} \leqslant 34 \\ \log_{2x} 0.25 \leqslant \log_2 32x - 1 \end{cases}.$$

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^{x+1} + 10 \cdot 3^{-x} \leqslant 31 \\ \log_{2x} 4 + 3 \leqslant \log_2 8x \end{cases}.$$

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 25 \cdot 2^{2-x} \leqslant 101 \\ \log_{3x} 27 \geqslant \log_3 9x - 3 \end{cases}.$$

7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \leqslant 87 \\ \log_{3x} \dfrac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \geqslant 0 \end{cases}.$$

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{160-4^x}{32-2^x} \geqslant 5 \\ \log_{0.25x^2}\left(\dfrac{6-x}{4}\right) \leqslant 1 \end{cases}.$$

9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{36-9^x}{9-3^x} \geqslant 4 \\ \log_{x^2}(2-x) \leqslant 1 \end{cases}.$$

10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{500\cdot 5^{-x}-5^x}{5\cdot 5^x-25^x} \geqslant 5^{-x} \\ \log_{3-x}\dfrac{x^2}{6-x} \leqslant 0 \end{cases}.$$

11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{15\cdot 5^x-5^{-x}}{5^{-x}-25^{-x}} \geqslant 5^x \\ \log_{x+2}\dfrac{(x-1)^2}{x+5} \leqslant 0 \end{cases}.$$

12. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^{4x}-4^{x+3} \leqslant 65 \\ \log_{x+5}\left(\dfrac{3-x}{x}\right)^4 + \log_{x+5}\left(\dfrac{x}{x-3}\right) \leqslant 3 \end{cases}.$$

13. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{9^x-3^x-90}{3^x-82} \leqslant 1 \\ \log_2 16x \geqslant \log_{0.5x} 2\cdot\log_4 16x^4 \end{cases}.$$

14. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x-28 \leqslant 3^{x+3} \\ \log_{x+7}\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)^2 \leqslant 1-\log_{x+7}\dfrac{x+1}{x-3} \end{cases}.$$

15. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x-2^{x+8} \leqslant 257 \\ \log_{x+7}\left(\dfrac{x^2-x-56}{x}\right)^2 + \log_{x+7}\dfrac{x-8}{x} \leqslant 5 \end{cases}.$$

16. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 129 \leqslant 2^{x+7} \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^2 \leqslant 1 - \log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7} \end{cases}.$$

17. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{25\cdot 0.5^{x-1} - 2^{x-2}}{2^{x+2} - 4^x} \geqslant 0.5^{x+2} \\ \log_{6-x}\dfrac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leqslant 0 \end{cases}.$$

18. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{8^{-x} - 5\cdot 0.5^x}{2^{-x} - 2^{x+4}} \geqslant 0 \\ \log_{x^2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Глава 8

Образцы заданий 2011 года

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x} - \frac{1}{2^{1+\lg x}}\right) \geqslant -1 + \lg x.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(5^{1+\log_{15} x} - \frac{1}{3^{1+\log_{15} x}}\right) \geqslant -1 + \log_{15} x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2\log_6(x^2+5x)}{\log_6 x^2} \leqslant 1.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{2\log_4(x^2-2x)}{\log_4 x^2} \leqslant 1.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{2\log_5(x^2-5x)}{\log_5 x^2} \leqslant 1.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{2\log_2(x^2+2x)}{\log_2 x^2} \leqslant 1.$$

7. Решите неравенство

$$3\log_{11}(x^2+8x-9) \leqslant 4 + \log_{11}\frac{(x-1)^3}{x+9}.$$

8. Решите неравенство

$$11\lg(x^2+11x+30) \leqslant 12 + \lg\frac{(x+6)^{11}}{x+5}.$$

9. Решите неравенство

$$9\log_7(x^2+x-2) \leqslant 10 + \log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}.$$

10. Решите неравенство
$$\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40.$$

11. Решите неравенство
$$\frac{\log_x 3x^{-1} \cdot \log_x 3x^2}{\log_{3x} x \cdot \log_{3x^{-2}} x} < 180.$$

12. Решите неравенство
$$\frac{\log_x 5x^{-1} \cdot \log_x 5x^3}{\log_{5x} x \cdot \log_{5x^{-3}} x} < 105.$$

13. Решите неравенство
$$\log_{0.25}(19 - 9x) \cdot \log_{3-x} 0.5 \geqslant 1.$$

14. Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{9}}(7 - 6x) \cdot \log_{2-x} \frac{1}{3} \geqslant 1.$$

15. Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{16}}(53 - 13x) \cdot \log_{5-x} 0.25 \geqslant 1.$$

16. Решите неравенство
$$3\log_5\left(5 + \frac{20}{x-5}\right) \leqslant 9 - 2\log_{0.2}\left(25 - \frac{100}{x-1}\right).$$

17. Решите неравенство
$$2\log_2\left(4 + \frac{4}{x-4}\right) \leqslant 16 - \log_{0.5}\left(8 - \frac{8}{x-3}\right).$$

18. Решите неравенство
$$\frac{2\log_{x+4}(x^2 - 2x)}{\log_{x+4} x^2} \geqslant 1.$$

19. Решите неравенство
$$\frac{2\log_{x+7}(x^2 - 3x)}{\log_{x+7} x^2} \geqslant 1.$$

20. Решите неравенство
$$\frac{2\log_{x+6}(x^2 - 4x)}{\log_{x+6} x^2} \geqslant 1.$$