

ЕГЭ. Профильный уровень. Задание 20
Задачи с параметрами

Квадратные уравнения и
уравнения с квадратным трёхчленом

Дихтярь М.Б.

Общие сведения

1. Уравнение $f(a)x^2 + g(a)x + \varphi(a) = 0$, где $f(a) \neq 0$, является *квадратным уравнением с параметром a* .

Число $D(a) = g^2(a) - 4\varphi(a) \cdot f(a)$ называется *дискриминантом квадратного уравнения*.

Для того чтобы найти решения квадратного уравнения с параметром надо рассмотреть три случая:

1) если $D(a) < 0$, то уравнение не имеет действительных корней;

2) если $D(a) > 0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-g(a) \pm \sqrt{D}}{2f(a)}$;

3) если $D(a) = 0$, то уравнение имеет два равных корня $x_1 = x_2 = \frac{-g(a)}{2f(a)}$.

Замечание. Если коэффициент при x чётный, то есть, если квадратное уравнение имеет вид $f(a)x^2 + 2g(a)x + \varphi(a) = 0$, то дискриминант $D(a)/4 = g^2(a) - \varphi(a) \cdot f(a)$.

Если $D(a)/4 > 0$, то $x_{1,2} = \frac{-g(a) \pm \sqrt{D/4}}{f(a)}$;

если $D(a)/4 = 0$, то $x_1 = x_2 = \frac{-g(a)}{f(a)}$.

2. Если в уравнении $f(a)x^2 + g(a)x + \varphi(a) = 0$ коэффициент при x^2 равен нулю, то уравнение принимает вид $g(a)x + \varphi(a) = 0$.

Уравнение $g(a)x + \varphi(a) = 0$ является *линейным уравнением с параметром a* .

Для того чтобы найти решения линейного уравнения с параметром надо рассмотреть три случая:

1) если $g(a) \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\varphi(a)/g(a)$;

2) если $g(a) = 0, \varphi(a) \neq 0$, то уравнение не имеет корней, то есть $x \in \emptyset$ (так как уравнение принимает вид $0 \cdot x = -\varphi(a) \neq 0$);

3) если $g(a)=0, \varphi(a)=0$, то корнями уравнения являются $x \in R$ (так как уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$).

Примеры

1. Решите уравнение $a(a-2)x^2 + 2ax + (2-a) = 0$ (1).

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $a(a-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 2. \end{cases}$

1) Если $a = 2$, то уравнение (1) принимает вид $4x = 0$ – это линейное уравнение, которое имеет единственный корень $x = 0$.

2) Если $a = 0$, то уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x + 2 = 0$ – это уравнение не имеет корней.

2. Пусть $a(a-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 2. \end{cases}$

Если $a \notin \{0; 2\}$, то уравнение (1) является квадратным с дискриминантом $D(a)/4 = a(a^2 - 3a + 4)$. Отметим $a^2 - 3a + 4 > 0$ при любом $a \in R$.

1) Если $a < 0$, то $D(a)/4 < 0$. Уравнение (1) не имеет действительных корней.

2) Если $a \in (0; 2) \cup (2; \infty)$, то $D(a)/4 > 0$. Уравнение (1) имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a(a^2 - 3a + 4)}}{a(a-2)}$.

Ответ. $x = 0$, если $a = 2$; $x \in \emptyset$, если $a \leq 0$; $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a(a^2 - 3a + 4)}}{a(a-2)}$, если $a \in (0; 2) \cup (2; \infty)$.

2. Решите уравнение $(a^2 - 9)x^2 + (a + 3)x + (9 - a^2) = 0$ (1).

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ a = 3. \end{cases}$

1) Если $a = -3$, то уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = 0$. Корнями уравнения являются $x \in R$.

2) если $a = 3$, то уравнение (1) принимает вид $6x = 0$ – это линейное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

2. Пусть $a^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq 3. \end{cases}$.

Уравнение (1) является квадратным, если $a \notin \{-3; 3\}$.

Так как $a \neq -3$, то уравнение (1) равносильно уравнению $(a-3)x^2 + x + (3-a) = 0$, где $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$, с дискриминантом $D(a) = 4a^2 - 24a + 37$. Так как $4a^2 - 24a + 37 > 0$ при любом $a \in R$, то $D(a) > 0$.

Таким образом, если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$, то уравнение (1) имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a^2 - 24a + 37}}{2(a-3)}$

Ответ. $x = 0$, если $a = 3$; $x \in R$, если $a = -3$; $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a^2 - 24a + 37}}{2(a-3)}$, если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$.

3. Решите уравнение $x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ (1).

Решение. Уравнение (1) является квадратным с дискриминантом

$$D(a)/4 = a^2 - a^2 + 4 \Leftrightarrow D(a)/4 = 4 \Rightarrow D(a)/4 > 0.$$

Так как $D(a)/4 > 0$ при любом $a \in R$, то исходное уравнение имеет два корня $x_1 = -a - 2$, $x_2 = -a + 2$, если $a \in R$.

Ответ. $x_1 = -a - 2$, $x_2 = -a + 2$, если $a \in R$.

4. Решите уравнение $(a^2 + 3)x^2 - 4ax + 4 = 0$.

Решение. Так как $a^2 + 3 \neq 0$, то исходное уравнение при любом $a \in R$ является квадратным с дискриминантом

$$D(a)/4 = 4a^2 - 4a^2 - 12 \Leftrightarrow D(a)/4 = -12 \Leftrightarrow D(a)/4 < 0.$$

Так как $D(a)/4 < 0$ при любом $a \in R$, то уравнение (1) не имеет действительных корней.

Ответ. $x \in \emptyset$, если $a \in R$.

5. Решите уравнение $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x+a}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x+a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + a^2 = 0, \\ x \neq -1, x \neq a, x \neq -a. \end{cases} \quad (1)$$

Найдём корни квадратного уравнения $x^2 + 2x + a^2 = 0$ (2).

Замечание. Корнями исходного уравнения являются только корни уравнения (2), если они не равны $-1, a, -a$. Если уравнение (2) не имеет корней, то и исходное уравнение не имеет корней.

Дискриминант уравнения (2), равен $D(a)/4 = 1 - a^2$.

1. Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $D(a)/4 < 0 \Leftrightarrow |a| > 1$. Если $|a| > 1$, то уравнение (2), а значит и исходное уравнение, не имеет действительных корней.

2) Пусть $D(a)/4 = 0 \Leftrightarrow |a| = 1$. Если $|a| = 1$, то квадратное уравнение (2) принимает вид $x^2 + 2x + 1 = 0$, корень которого $x = -1$ кратности два. Из замечания следует, что $x = -1$ не является корнем исходного уравнения, если $|a| = 1$. Исходное уравнение, если $|a| = 1$ не имеет действительных корней.

3) Пусть $D(a)/4 > 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < 1$. Если $|a| < 1$, то квадратное уравнение (2) имеет два корня $x_1 = -1 - \sqrt{1 - a^2}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1 - a^2}$.

Отметим: так как $|a| < 1$, то $-2 \leq x_1 < -1$ и $-1 < x_2 \leq 0$.

2. Рассмотрим уравнения (2), если $x \in \{-1; a; -a\}$, где $|a| < 1$.

а) Если $|a| < 1$, то $x = -1$ не является корнем квадратного уравнения (2), так как $-2 \leq x_1 < -1$ и $-1 < x_2 \leq 0$. Тогда из замечания следует, если $|a| < 1$, то $x = -1$ не является корнем исходного уравнения.

б) Если $x = a$, где $|a| < 1$, корень уравнения (2), то

$$\begin{cases} 2a + 2a^2 = 0, \\ |a| < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(a + 1) = 0, \\ |a| < 1; \end{cases} \Rightarrow a = 0.$$

Если $a = 0$, то уравнение (2) принимает вид $x^2 + 2x = 0$. Последнее уравнение имеет два корня: $x = 0$, $x = -2$.

Итак, при $a = 0$ имеем

1) корнем уравнения (2) является $x = 0$, но $x = 0$ не является решением системы (1), так как решением системы являются $x \neq a$. Значит, $x = 0$ не является корнем исходного уравнения.

2) корнем уравнения (2) является $x = -2$ и $x = -2$ является решением системы (1), так как решением системы являются $x \neq a$. Значит, $x = -2$ является корнем исходного уравнения.

Итак, если $a = 0$, то исходное уравнение имеет единственный корень $x = -2$

в) Если $x = -a$, где $|a| < 1$, корень уравнения (2), то

$$\begin{cases} 2a^2 - 2a = 0, \\ |a| < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(a-1) = 0, \\ |a| < 1; \end{cases} \Rightarrow a = 0.$$

Случай $a = 0$ рассмотрен в пункте в).

Ответ. $x \in \emptyset$, если $|a| \geq 1$; $x = -2$, если $a = 0$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a^2}$, если $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Задачи, на применение теоремы Виета

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, имеет действительные корни x_1 и x_2 , то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a. \end{cases}$

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют условию $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a, \end{cases}$ то числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

6. Определите, при каких значениях параметра a корни квадратного уравнения $ax^2 - (a+9)x + a = 0$ (1) удовлетворяют условиям:

- 1) сумма квадратов корней равна 14;
- 2) сумма корней в 6 раз больше суммы квадратов корней;
- 3) сумма кубов корней меньше -2 ;
- 4) разность корней равна $\sqrt{5}$.

Решение. Так как уравнение (1) является квадратным, то коэффициент при x^2 не равен нулю, то есть $a \neq 0$. Пусть x_1 и x_2 ($x_1 \leq x_2$) корни уравнения (1). Пусть $D(a)$ дискриминант квадратного уравнения (1).

Уравнение (1) имеет решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D(a) \geq 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+9)^2 - 4a^2 \geq 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a-9)(a+3) \leq 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq a < 0, \\ 0 < a \leq 9. \end{cases}$$

Итак, уравнение (1) имеет решение, если $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 1 + 9a^{-1}$, где $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$, и $x_1 x_2 = 1$.

1) Определим, при каких значениях $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$ выполняется условие $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Выразим $(x_1^2 + x_2^2)$ через a . Имеем

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (1 + 9a^{-1})^2 - 2.$$

Таким образом, $x_1^2 + x_2^2 = (1 + 9a^{-1})^2 - 2$, где $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$.

Если $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$, то

$$x_1^2 + x_2^2 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad \overset{x_1^2 + x_2^2 = (1+9a^{-1})^2 - 2}{(1 + 9a^{-1})^2 = 16} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 9a^{-1} = 4, \\ 1 + 9a^{-1} = -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ a = -1, 8. \end{cases}$$

Так как $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$, то $a \in \{-1, 8; 3\}$ удовлетворяют условию 1)

задачи.

2) Определим, при каких значениях $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$ выполняется условие $6(x_1^2 + x_2^2) = x_1 + x_2$.

Так как $x_1^2 + x_2^2 = (1 + 9a^{-1})^2 - 2$ и $x_1 + x_2 = 1 + 9a^{-1}$, то

$$\begin{aligned} 6(x_1^2 + x_2^2) = x_1 + x_2 &\Leftrightarrow 6(1 + 9a^{-1})^2 - (1 + 9a^{-1}) - 12 = 0 \quad \overset{1+9a^{-1}=t}{\Leftrightarrow} \quad 6t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -4/3, \\ t = 1, 5; \end{cases} \quad \overset{1+9a^{-1}=t}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 + 9a^{-1} = -4/3, \\ 1 + 9a^{-1} = 1, 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -27/7, \\ a = 18. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$, то только $a = -27/7$ удовлетворяет условию 2) задачи.

3) Определим, при каких значениях $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$ выполняется неравенство $x_1^3 + x_2^3 < -2$.

Выразим $(x_1^3 + x_2^3)$ через a .

Так как $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)$, $x_1 + x_2 = 1 + 9a^{-1}$, $x_1x_2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 = (1 + 9a^{-1})^2 - 2$, то

$$x_1^3 + x_2^3 = (1 + 9a^{-1})((1 + 9a^{-1})^2 - 2 - 1) = (1 + 9a^{-1})^3 - 3(1 + 9a^{-1}).$$

Таким образом, $x_1^3 + x_2^3 = (1 + 9a^{-1})^3 - 3(1 + 9a^{-1})$.

Рассмотрим неравенство $x_1^3 + x_2^3 < -2$, если $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$. Имеем

$$x_1^3 + x_2^3 < -2 \Leftrightarrow (1 + 9a^{-1})^3 - 3(1 + 9a^{-1}) + 2 < 0 \quad \overset{1+9a^{-1}=t}{\Leftrightarrow} \quad t^3 - 3t + 2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 \cdot (t+2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad \overset{(a+9)/a=t}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 + 9a^{-1} < -2, \\ 1 + 9a^{-1} \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow -3 < a < 0.$$

Так как $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$, то $a \in (-3; 0)$ удовлетворяют условию 3) задачи.

4) Определим, при каких значениях параметра a выполняется равенство $x_2 - x_1 = \sqrt{5}$. Отметим $x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 \geq 0$. Имеем

$$x_2 - x_1 = \sqrt{5} \stackrel{x_2 \geq x_1}{\Leftrightarrow} (x_2 - x_1)^2 = 5 \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 5 \stackrel{x_2+x_1=1+9a^{-1}}{\Leftrightarrow} \stackrel{x_1x_2=1}{\Leftrightarrow} (1+9a^{-1})^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+9a^{-1} = 3, \\ 1+9a^{-1} = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4, 5, \\ a = -2, 25. \end{cases}$$

Так как $a \in [-3; 0) \cup (0; 9]$, то $a \in \{-2, 25; 4, 5\}$ удовлетворяют условию 4) задачи.

Ответ. 1) $a \in \{-1, 8; 3\}$; 2) $a = -27/7$; 3); 4) $a \in \{-2, 25; 4, 5\}$.

7. Пусть x_1 и x_2 ($x_1 \leq x_2$) корни уравнения $x^2 - 2(a-4)x + a^2 = 0$ (1). Найдите, все значения параметра a , при которых:

1) сумма квадратов корней наименьшая; 2) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 14$?

Решение. Уравнение (1) имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $D(a)/4 \geq 0$. Имеем

$$D(a)/4 \geq 0 \Leftrightarrow (a-4)^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 2.$$

Уравнение имеет решение, если $a \in (-\infty; 2]$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2(a-4)$ и $x_1x_2 = a^2$, где $a \leq 2$.

1) Найдём все значения параметра a , при которых сумма квадратов корней уравнение (1) наименьшая.

$$\text{Имеем } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(a-4)^2 - 2a^2 = 2(a-8)^2 - 64.$$

Итак, $x_1^2 + x_2^2 = 2(a-8)^2 - 64$, где $a \leq 2$. Очевидно, $(x_1^2 + x_2^2)$ является функцией от a . Пусть $f(a) = 2(a-8)^2 - 64$, где $a \leq 2$.

Замечание. Функция $a(x) = k(x-x_0)^2 + a_0$, где $k > 0$, на промежутке $(-\infty; x_0]$ убывает, а на промежутке $[x_0; \infty)$ возрастает.

Графиком функции $f(a) = 2(a-8)^2 - 64$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Из замечания следует, что функция $f(a) = 2(a-8)^2 - 64$, где $a \leq 2$, убывает. Поэтому функция $f(a)$ наименьшее значение принимает при $a = 2$. Итак, $a = 2$ удовлетворяет условию 1) задачи.

2) Найдём все значения параметра a , при которых $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 14$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 14 &\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 - 14x_1x_2}{x_1x_2} \geq 0 \stackrel{x_1^2+x_2^2=2(a-8)^2-64}{\Leftrightarrow} \frac{2(a-8)^2 - 64 - 14a^2}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4(a+4)(3a-4)}{a^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq a < 0, \\ 0 < a \leq 4/3. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $a \in (-\infty; 2]$, то $a \in [-4; 0) \cup (0; 4/3]$ удовлетворяет условию 2) задачи.

Ответ. 1) $a = 2$; 2) $a \in [-4; 0) \cup (0; 4/3]$.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $ax^2 + 2(a-1)x + 3a = 0$ (1) имеет два корня, которые являются целыми числами.

Решение. Так как уравнение (1) является квадратным, то коэффициент при x^2 не равен нулю, то есть $a \neq 0$.

Пусть x_1 и x_2 , где $x_1 \leq x_2$, корни уравнения (1).

По теореме Виета $x_1x_2 = 3$.

Так как надо найти все значения параметра a , при которых корни уравнения (1) являются целыми числами, то из равенства $x_1x_2 = 3$, где $x_1 \leq x_2$ следует, что возможны следующие два случая:

1) $x_1 = 1, x_2 = 3$; 2) $x_1 = -3, x_2 = -1$.

1) По теореме Виета $x_1 + x_2 = -2 + 2a^{-1}$. Если $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ корни уравнения (1), то $1 + 3 = -2 + 2a^{-1} \Leftrightarrow a = 1/3$.

Итак, если $a = 1/3$, то $x_1 = 1, x_2 = 3$ являются корнями исходного уравнения.

2) Если $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$ корни уравнения (1), то $-1 - 3 = -2 + 2a^{-1} \Leftrightarrow a = -1$.

Итак, если $a = -1$, то $x_1 = -3, x_2 = -1$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $a \in \{-1; 1/3\}$.

9. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$ (1) имеет только целые корни. Найдите эти корни.

Решение. Рассмотрим уравнение (1) при различных значениях параметра a .

1. Если $a=0$, то уравнение (1) является линейным уравнением, которое имеет один корень, равный $x=1$.

2. Если $a \neq 0$, то уравнение (1) является квадратным.

Пусть x_1 и x_2 , где $x_1 \leq x_2$, корни уравнения (1). Дискриминант квадратного уравнения (1), равен $D(a) = 9 - 4a(2a^2 - 3)$.

Замечание. Квадратное уравнение (1) может иметь целые корни только в случае, если $D(a)$ полный квадрат.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -3a^{-1}$ и $x_1 x_2 = 2a - 3a^{-1}$. Так как корни целые, то числа $-3a^{-1}$ и $2a - 3a^{-1}$ целые. Пусть $k = -3a^{-1}$, где k целое отличное от нуля число. Тогда $a = -3k^{-1}$ и $2a - 3a^{-1} = k - 6k^{-1}$. Так как $2a - 3a^{-1}$ целое число, то $k - 6k^{-1}$ тоже целое число. Тогда, так как k и $k - 6k^{-1}$ целые числа, то $-6k^{-1}$ тоже целое число. Откуда следует, что k может принимать значения $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Тогда $a = -3k^{-1}$ принимает значения $\mp 3; \mp 3/2; \mp 1; \mp 1/2$. Для этих значений параметра a найдём $D(a)$: $D(3) < 0$; $D(-3) = 189$, $D(1) = 13$, $D(-1) = 5$, $D(-3/2) = 18$, $D(3/2) = 0 = 0^2$, $D(-1/2) = 4 = 2^2$, $D(1/2) = 14$.

Так как $D(3/2) = 0^2$, $D(-1/2) = 2^2$ являются полными квадратами, то уравнение (1) может иметь целые корни при $a = 3/2$ и $a = -1/2$.

Если $a = 3/2$, то уравнение имеет корень двойной кратности $x = -1$. Если $a = -1/2$, то уравнение имеет два различных корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$.

Ответ. Если $a = 0$, то $x = 1$; если $a = 3/2$, то $x_1 = x_2 = -1$; если $a = -1/2$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Задачи на расположении корней приведённого квадратного уравнения относительно нуля

Для приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с дискриминантом $D = p^2 - 4q \geq 0$ корни уравнения x_1 и x_2 удовлетворяют теореме Виета:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Из теоремы Виета следует:

1. оба корня положительные тогда и только тогда, когда $p < 0$ и $q > 0$;
2. оба корня отрицательные тогда и только тогда, когда $p > 0$ и $q > 0$;
3. корни разного знака тогда и только тогда, когда $q < 0$.

10. Найдите все значения параметра a , при которых корни квадратного уравнения $ax^2 - 2(a-1)x - 2 + 2a = 0$ (1) а) отрицательные; б) положительные; в) разного знака.

Решение. Так как уравнение (1) квадратное, то $a \neq 0$.

При $a \neq 0$ уравнение (1) равносильно уравнению

$$x^2 - 2a^{-1}(a-1)x - 2a^{-1} + 2 = 0 \quad (2).$$

Уравнение (2), а значит и уравнение (1) при $a \neq 0$, имеет корни, если $D(a)/4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a^2} + \frac{2}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-a^2}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq a < 0, \\ 0 < a \leq 1. \end{cases}$

Итак, уравнение (1) имеет корни, если $a \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.

Очевидно, $p = -2(a-1) \cdot a^{-1}$, $q = 2 - 2a^{-1}$.

Пусть $a \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.

а) Оба корня уравнение (2), а значит и уравнение (1) при $a \in [-1; 0) \cup (0; 1]$, отрицательные тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p > 0, \\ q > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(a-1) \cdot a^{-1} > 0, \\ 2 - 2a^{-1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1) \cdot a^{-1} < 0, \\ (a-1) \cdot a^{-1} > 0. \end{cases}$$

Так как последняя система не имеет решений, то ни при каких значениях параметра a оба корня уравнения (1) не могут быть одновременно отрицательными.

б) Оба корня уравнение (2), а значит и уравнение (1) при $a \in [-1; 0) \cup (0; 1]$, положительные тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p < 0, \\ q > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(a-1) \cdot a^{-1} < 0, \\ 2 - 2a^{-1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1) \cdot a^{-1} > 0, \\ (a-1) \cdot a^{-1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a \in [-1; 0) \cup (0; 1] \\ -1 \leq a < 0. \end{matrix}$$

Оба корня уравнения (1) положительные, если $a \in [-1; 0)$

в) Оба корня уравнение (2), а значит и уравнение (1) при $a \in [-1; 0) \cup (0; 1]$, разного знака тогда и только тогда, когда

$$q < 0 \Leftrightarrow 2 - 2a^{-1} < 0 \Leftrightarrow (a-1) \cdot a^{-1} < 0 \stackrel{a \in [-1; 0) \cup (0; 1]}{\Leftrightarrow} 0 < a < 1.$$

Итак, оба корня уравнения (1) разного знака, если $a \in (0; 1)$.

Ответ. а) $a \in \emptyset$; б) $a \in [-1; 0)$; в) $a \in (0; 1)$.

11. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a+1)x^2 + (|a+2| - a - 10)x + a - 5 = 0$ (1) имеет два различных отрицательных корня.

Решение. Уравнение (1) имеет два корня только в случае, когда оно квадратное. Тогда $a \neq -1$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\begin{cases} a+2 < 0, \\ a \neq -1; \end{cases} \Leftrightarrow a < -2.$

Если $a < -2$, то уравнение (1) принимает вид

$$(a+1)x^2 - 2(a+6)x + a - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(a+6)(a+1)^{-1}x + (a-5)(a+1)^{-1} = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2), а значит и уравнение (1), имеет два различных корня, если $\begin{cases} D(a)/4 > 0, \\ a < -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a+6)^2}{(a+1)^2} - \frac{a-5}{a+1} > 0, \\ a < -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16a+41}{(a+1)^2} > 0, \\ a < -2; \end{cases} \Leftrightarrow -41/16 < a < -2.$

Если $a \in (-41/16; -2)$, то уравнение (2), а значит и уравнение (1), имеет два различных корня.

Очевидно, $p = -2(a+6) \cdot (a+1)^{-1}$, $q = (a-5)(a+1)^{-1}$, где $a \in (-41/16; -2)$.

а) Оба корня уравнение (2), а значит и уравнение (1), если $a \in (-41/16; -2)$, отрицательные тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p > 0, \\ q > 0, \\ -41/16 < a < -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(a+6) \cdot (a+1)^{-1} > 0, \\ (a-5) \cdot (a+1)^{-1} > 0, \\ -41/16 < a < -2; \end{cases} \Leftrightarrow -41/16 < a < -2.$$

Квадратное уравнение (1) имеет два различных отрицательных корня, если $a \in (-41/16; -2)$.

2. Пусть $\begin{cases} a+2 \geq 0, \\ a \neq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq a < -1, \\ a > -1. \end{cases}$

Если $a \in [-2; -1) \cup (-1; \infty)$, то уравнение (1) принимает вид

$$(a+1)x^2 - 8x + a - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8(a+1)^{-1}x + (a-5)(a+1)^{-1} = 0 \quad (3)$$

Уравнение (3), а значит и уравнение (1), имеет два различных корня, если

$$\begin{cases} D(a)/4 > 0, \\ \begin{cases} -2 \leq a < -1, \\ a > -1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{(a+1)^2} - \frac{a-5}{a+1} > 0, \\ \begin{cases} -2 \leq a < -1, \\ a > -1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a+3)(a-7)}{(a+1)^2} < 0, \\ \begin{cases} -2 \leq a < -1, \\ a > -1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq a < -1, \\ -1 < a < 7. \end{cases}$$

Если $a \in [-2; -1) \cup (-1; 7)$, то уравнение (3), а значит и уравнение (1), имеет два различных корня.

Очевидно, $p = -8(a+1)^{-1}$, $q = (a-5)(a+1)^{-1}$, где $a \in [-2; -1) \cup (-1; 7)$.

Оба корня уравнение (3), а значит и уравнение (1), если

$a \in [-2; -1) \cup (-1; 7)$, отрицательные тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p > 0, \\ q > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8(a+1)^{-1} > 0, \\ (a-5) \cdot (a+1)^{-1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1, \\ a < -1, \Leftrightarrow a < -1. \\ a > 5; \end{cases}$$

Так как $a \in [-2; -1) \cup (-1; 7)$, то только $a \in [-2; -1)$ удовлетворяют условию задачи. Из 1. и 2. следует ответ.

Ответ. $a \in (-41/16; -1)$.

Теоремы о расположении корней приведённого квадратного уравнения относительно заданных точек

Рассмотрим уравнение $x^2 + px + q = 0$.

Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Графиком функции $f(x)$ является парабола с абсциссой вершины $x_0 = -p/2$ и, ветви которой направлены вверх.

1. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, каждый из которых больше некоторого числа $\alpha \in R$, тогда и только тогда, ко-

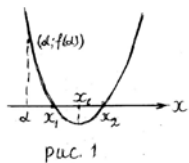


рис. 1

$$\text{гда: } \begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 > \alpha, \\ f(\alpha) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \geq 0, \\ p < -2\alpha, \\ \alpha^2 + p\alpha + q > 0. \end{cases}$$

2. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, каждый из которых меньше некоторого числа $\alpha \in R$, тогда и только тогда, ко-

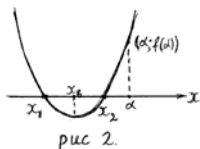


рис. 2

$$\text{гда: } \begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 < \alpha, \\ f(\alpha) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \geq 0, \\ p > -2\alpha, \\ \alpha^2 + p\alpha + q > 0. \end{cases}$$

3. Точка $\alpha \in R$ расположена между корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$, тогда и только тогда, когда $\alpha^2 + p\alpha + q < 0$.

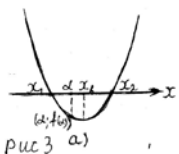


рис. 3 а)

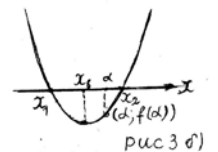
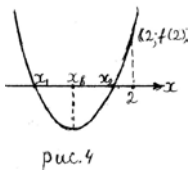


рис. 3 б)

Замечание. Так как в некоторой точке $\alpha \in R$ значение функции $f(x)$ меньше нуля, то есть $f(\alpha) < 0$, то квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + px + q$ пересечёт ось абсцисс, а это означает, что уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $p = p(a)$, $q = q(a)$, имеет корни для всех значениях параметра a , для которых $f(\alpha) < 0$.

12. Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 + (3a - 7)x + 5 - a^2 = 0$ меньше 2.



Решение. Пусть $f(x) = x^2 + (3a - 7)x + 5 - a^2$. Абсцисса вершины параболы – $x_0 = 0,5(7 - 3a)$. Искомое значения параметра находим из системы (рис.4)

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 < 2, \\ f(2) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a - 7)^2 + 4a^2 - 20 \geq 0, \\ 0,5(7 - 3a) < 2, \\ 2^2 + 2(3a - 7) - a^2 + 5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (13a - 29) \cdot (a - 1) \geq 0, \\ a > 1, \\ (a - 5) \cdot (a - 1) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow 29/13 \leq a < 5.$$

Ответ. $a \in [29/13; 5)$.

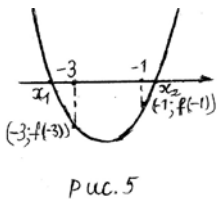
13. Для квадратного уравнения $(a - 1)x^2 - 2ax + 2 + a = 0$ (1) определите при каких значениях параметра a

- 1) один из корней уравнения меньше -3 , а другой – больше -1 ;
- 2) один из корней уравнения больше -2 , а другой – меньше 3 ;
- 3) только один из корней уравнения удовлетворяет неравенству $|x| > 2$?

Решение. Так как уравнение (1) квадратное, то $a \neq 1$.

Если $a \neq 1$, то уравнение (1) равносильно уравнению

$$x^2 - 2a(a - 1)^{-1}x + (2 + a)(a - 1)^{-1} = 0 \quad (2).$$



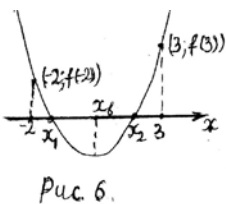
Пусть $f(x) = x^2 - 2a(a - 1)^{-1}x + (2 + a)(a - 1)^{-1}$. (3)

1) Один из корней уравнения (1) меньше -3 , а другой корень больше -1 , если выполняется следующая система неравенств (рис 5):

$$\begin{cases} f(-3) < 0, \\ f(-1) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + \frac{6a}{a-1} + \frac{2+a}{a-1} < 0, \\ 1 + \frac{2a}{a-1} + \frac{2+a}{a-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16a-7}{a-1} < 0, \\ \frac{4a+1}{a-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow 7/16 < a < 1.$$

Итак, $a \in (7/16; 1)$ удовлетворяют условию 1) задачи.

2) Один корень уравнения (1) больше -2 , а другой корень меньше 3 , если выполняется следующая система неравенств (рис 6):



$$f(-2) > 0, f(3) > 0, D(a)/4 > 0, -2 < x_0 < 3. \quad (4)$$

где x_0 – абсцисса вершины параболы, заданной уравнением (3).

Рассмотрим неравенства системы (4):

$$f(-2) > 0 \Leftrightarrow 4 + \frac{4a}{a-1} + \frac{2+a}{a-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{9a-2}{a-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2/9, \\ a > 1. \end{cases}$$

$$f(3) > 0 \Leftrightarrow 9 - \frac{6a}{a-1} + \frac{2+a}{a-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{4a-7}{a-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a > 7/4. \end{cases}$$

$$D(a)/4 > 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{(a-1)^2} - \frac{2+a}{a-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{a-2}{(a-1)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ 1 < a < 2. \end{cases}$$

$$-2 < x_6 < 3 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_6 = a(a-1)^{-1} \\ \Leftrightarrow -2 < \frac{a}{a-1} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3a-2}{a-1} > 0, \\ \frac{3-2a}{a-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2/3, \\ a > 3/2. \end{cases} \end{matrix}$$

Из рисунка (7) следует: решениями системы (3) являются $a \in (-\infty; 2/9) \cup (7/4; 2)$.

Итак, $a \in (-\infty; 2/9) \cup (7/4; 2)$ удовлетворяют условию 2) задачи.

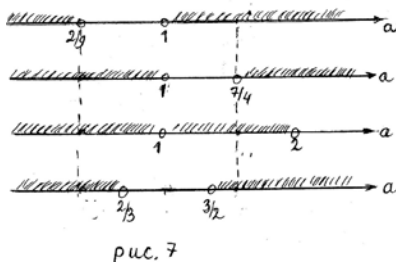


рис. 7

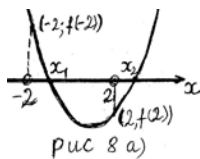


рис. 8 а)

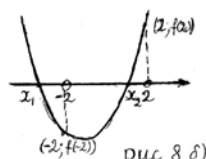


рис. 8 б)

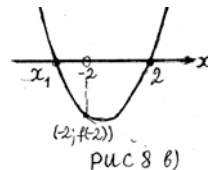


рис. 8 в)

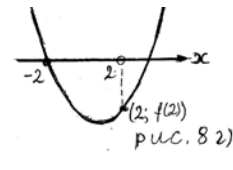


рис. 8 г)

3) Только один из корней уравнения (1) удовлетворяет неравенству $|x| > 2$, если выполняется следующая совокупность систем неравенств (рисунки 8)

$$\begin{cases} f(-2) > 0, \\ f(2) < 0; \end{cases} \begin{cases} f(-2) < 0, \\ f(2) > 0; \end{cases} \begin{cases} f(2) = 0, \\ f(-2) < 0; \end{cases} \begin{cases} f(-2) = 0, \\ f(2) < 0. \end{cases} \quad (4)$$

а) Очевидно, первые два неравенства совокупности (4) равносильны неравенству $f(-2) \cdot f(2) < 0 \Leftrightarrow \frac{9a-2}{a-1} \cdot \frac{a-2}{a-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2/9 < a < 1, \\ 1 < a < 2. \end{cases}$

Итак, $a \in (2/9; 1) \cup (1; 2)$ удовлетворяют условию 3) задачи.

б) Пусть

$$\begin{cases} f(2) = 0, \\ f(-2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \frac{4a}{a-1} + \frac{a+2}{a-1} = 0, \\ 4 + \frac{4a}{a-1} + \frac{a+2}{a-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-2}{a-1} = 0, \\ \frac{9a-2}{a-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ 2/9 < a < 1. \end{cases}$$

Так как последняя система не имеет решений, то в этом случае не существуют значений параметра a , удовлетворяющих условию 3) задачи.

в) Пусть

$$\begin{cases} f(-2) = 0, \\ f(2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \frac{4a}{a-1} + \frac{a+2}{a-1} = 0, \\ 4 - \frac{4a}{a-1} + \frac{a+2}{a-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9a-2}{a-1} = 0, \\ \frac{a-2}{a-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2/9, \\ 1 < a < 2. \end{cases}$$

Так как последняя система не имеет решений, то в этом случае не существуют значений a , удовлетворяющих условию 3) задачи.

Ответ. 1) $a \in (7/16; 1)$; 2) $a \in (-\infty; 2/9) \cup (7/4; 2)$; 3) $a \in (2/9; 1) \cup (1; 2)$.

14. Найдите все значения параметра a , при которых все корни уравнения $(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ (1) удовлетворяют двойному неравенству $2 < x < 5$.

Решение. 1. Если $a = -1$, то уравнение (1) принимает вид $3x - 4 = 0$. Линейное уравнение имеет единственный корень $x = 4/3$, который не удовлетворяет условию $2 < x < 5$.

2. Если $a \neq -1$, то уравнение (1) является квадратным. Так как $a \neq 1$, то уравнение (1) равносильно уравнению

$$x^2 - 3a(a+1)^{-1}x + 4a(a+1)^{-1} = 0. \quad (2)$$

Дискриминант уравнения (2) равен

$$D(a) = \frac{9a^2}{(a+1)^2} - \frac{16a}{a+1} \Leftrightarrow D(a) = \frac{-a(7a+16)}{(a+1)^2}.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $D(a) = 0$. Тогда $a \in \{-16/7; 0\}$.

а) Если $a = -16/7$, то уравнение (2) принимает вид $(3x - 8)^2 = 0$, корнем двойной кратности которого является $x = 8/3$. Очевидно, $8/3 \in (2; 5)$.

б) Если $a = 0$, то уравнение (2) принимает вид $x^2 = 0$, корнем двойной кратности которого является $x = 0$. Очевидно, $0 \notin (2; 5)$.

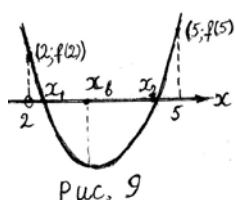
2) Пусть $D(a) > 0$. Тогда $\frac{-a(7a+16)}{(a+1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -16/7 < a < -1, \\ -1 < a < 0. \end{cases}$

Пусть $f(x) = x^2 - 3a(a+1)^{-1}x + 4a(a+1)^{-1}$. (3)

Оба корня принадлежат интервалу $(2; 5)$ тогда и только тогда, когда корни меньше числа 5 и одновременно больше числа 2. Это возможно, если выполняется следующая система неравенств (рис. 9):

$$f(2) > 0, f(5) > 0, D(a) > 0, 2 < x_6 < 5. \quad (4)$$

где x_6 – абсцисса вершины параболы, заданной уравне-



нием (3)

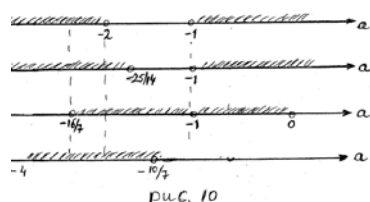
Рассмотрим неравенства системы (4):

$$f(2) > 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{6a}{a+1} + \frac{4a}{a+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2(a+2)}{a+1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2, \\ a > -1. \end{cases}$$

$$f(5) > 0 \Leftrightarrow 25 - \frac{15a}{a+1} + \frac{4a}{a+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{14a+25}{a+1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -25/14, \\ a > -1. \end{cases}$$

$$D(a) > 0 \Leftrightarrow \frac{a(7a+16)}{(a+1)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -16/7 < a < -1, \\ -1 < a < 0. \end{cases}$$

$$2 < x_6 < 5 \Leftrightarrow 2 < \frac{3a}{2(a+1)} < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7a+10}{a+1} > 0, \\ \frac{a+4}{a+1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -4 < a < -10/7.$$



Из рисунка (10) следует: решениями системы (4) являются $a \in (-16/7; -2)$.

Ответ. $a \in (-16/7; -2)$

15. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)x^2 - 2ax + 2 - 3a = 0$ (1) имеет единственный корень, который удовлетворяет неравенству $x > 1$?

Решение. 1. Если $a=1$, то уравнение (1) принимает вид $2x+1=0$. Линейное уравнение $2x+1=0$ имеет единственный корень $x=-0,5$, который не удовлетворяет неравенству $x > 1$.

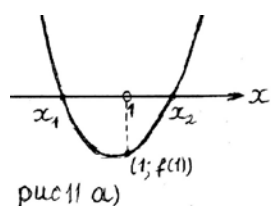
2. Пусть $a \neq 1$. Дискриминант уравнения

$$D(a)/4 = a^2 - (2-3a) \cdot (a-1) \Leftrightarrow D(a)/4 = 4a^2 - 5a + 2 \Rightarrow D(a)/4 > 0.$$

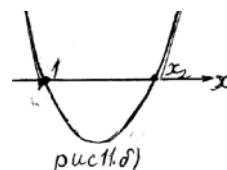
Так как $D(a)/4 > 0$, то уравнение (1), если $a \neq 1$, имеет два различных корня.

Если $a \neq 1$, то квадратное уравнение (1) имеет единственный корень, который удовлетворяет неравенству $x > 1$ в двух случаях (рисунки 11):

1) уравнение имеет один корень больше единицы, а другой корень меньше единицы (рис 11 а));



2) уравнение имеет один корень больше единицы, а другой корень равный единицы (рис 11 б)).



Так как $a \neq 1$, то уравнение (1) равносильно при-

ведённому уравнению $x^2 - \frac{2a}{a-1}x + \frac{2-3a}{a-1} = 0$ (2).

1) Пусть один корень больше единицы, а другой меньше единицы. Это возможно тогда и только тогда, когда число 1 расположено между корнями уравнения (2). Пусть $f(x) = x^2 - \frac{2a}{a-1}x + \frac{2-3a}{a-1}$. Искомые значения параметра находятся из неравенства

$$f(1) < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2a}{a-1} + \frac{2-3a}{a-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{1-4a}{a-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1/4, \\ a > 1. \end{cases}$$

Итак, $a \in (-\infty; 1/4) \cup (1; \infty)$ удовлетворяют условию задачи.

2) Пусть один корень уравнения (1) равен единицы. Тогда

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{4a-1}{a-1} = 0 \Rightarrow a = 1/4.$$

Легко определить, что при $a = 1/4$ корни рассматриваемого уравнения $x = 1$ и $x = -5/3 < 1$. Это означает, что $a = 1/4$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $a \in (-\infty; 1/4] \cup (1; \infty)$

16. Найдите все значения параметра a , при которых один из корней уравнения $x^2 + (1-a)x + a - 2a^2 = 0$ находится между числами -3 и 0 , а другой – между числами 3 и 5 .

Решение. Найдём дискриминант уравнения (1). Имеем

$$D(a) = (1-a)^2 - 4a + 8a^2 \Leftrightarrow D(a) = (3a-1)^2.$$

Так как $D(a) = (3a-1)^2$, то легко находим корни уравнения (1) $x_1 = -a$ и $x_2 = 2a-1$. Искомое значения параметра находим из совокупности

$$\begin{cases} -3 < x_1 < 0, \\ 3 < x_2 < 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < -a < 0, \\ 3 < 2a-1 < 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 3, \\ 2 < a < 3; \end{cases} \Leftrightarrow 2 < a < 3.$$

Ответ. $a \in (2; 3)$.

17. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $ax^2 + x + a - 1 = 0$ (1) имеет два различных корня x_1, x_2 , удовлетворяющих неравенству $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > 1$.

Решение. Так как уравнение (1) имеет два корня, то оно квадратное. Тогда $a \neq 0$. Из условия задачи следует, что $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$. Тогда $x_1 \cdot x_2 \neq 0$.

Дискриминант уравнения (1) равен $D(a) = 1 - 4a^2 + 4a$.

Уравнение (1) имеет два различных корня, если

$$\begin{aligned} \begin{cases} D(a) > 0, \\ a \neq 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a^2 + 4a > 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a - (1 - \sqrt{2})) \cdot (2a - (1 + \sqrt{2})) < 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5(1 - \sqrt{2}) < a < 0, \\ 0 < a < 0,5(1 + \sqrt{2}). \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, если $a \in (0,5(1 - \sqrt{2}); 0) \cup (0; 0,5(1 + \sqrt{2}))$, то уравнение (1) имеет два различных корня.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -1/a$ и $x_1 x_2 = (a - 1)/a$.

Так как $x_1 x_2 \neq 0$, то $a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

Имеем

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1 x_2|} > 1 \stackrel{x_1 x_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} |x_2 - x_1| > |x_1 x_2| \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 > (x_1 x_2)^2.$$

Так как $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$, то

$$(x_2 - x_1)^2 > (x_1 x_2)^2 \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 > 4x_1 x_2 + (x_1 x_2)^2$$

Итак,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > 1, \\ a \neq 1; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 + x_1)^2 > 4x_1 x_2 + (x_1 x_2)^2, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\frac{1}{a} \right)^2 > 4 \frac{a-1}{a} + \left(\frac{a-1}{a} \right)^2, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(5a-6)}{a} < 0, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 1 < a < 6/5. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $a \in (0; 1) \cup (1; 6/5) \subset (0,5(1 - \sqrt{2}); 0) \cup (0; 0,5(1 + \sqrt{2}))$ (легко доказать, что $6/5 < 0,5(1 + \sqrt{2})$), то $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > 1$, если $a \in (0; 1) \cup (1; 6/5)$.

Ответ. $a \in (0; 1) \cup (1; 6/5)$.

18. Найдите все значения параметра a , при которых корни x_1 и x_2 уравнения $(a^2 - 2a + 3)x^2 + 2(a - 2)ax - 5a^2 = 0$ (1), если $x_2 > x_1$, удовлетворяют неравенству $x_1 x_2 < |ax_2| - |ax_1|$ (2)?

Решение. 1) Если $a = 0$, то уравнение (1) принимает вид $3x^2 = 0$. В

этом случае не выполняется условие $x_2 > x_1$ (уравнение $3x^2 = 0$ имеет корень $x = 0$ двойной кратности).

2) Пусть $a \neq 0$. Так как в уравнении (1) коэффициент при x^2 положительный (очевидно, $a^2 - 2a + 3 > 0$), а свободный член отрицательный при любых значениях a , то уравнение имеет два отличных от нуля корня разного знака (следует из замечания на стр.12). Тогда $x_2 \cdot x_1 < 0$. Так как $x_2 > x_1$, то $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$.

$$\text{По теореме Виета } x_1 + x_2 = -\frac{2(a-2)a}{a^2 - 2a + 3}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{5a^2}{a^2 - 2a + 3}.$$

Если $a \neq 0$, то

$$\begin{aligned} x_1 x_2 < |ax_2| - |ax_1| &\stackrel{x_1 < 0}{\Leftrightarrow} x_1 x_2 < |a|(x_2 + x_1) \Leftrightarrow \frac{-5a^2}{a^2 - 2a + 3} < \frac{-2|a|a(a-2)}{a^2 - 2a + 3} \Leftrightarrow \\ &\stackrel{a^2 - 2a + 3 > 0}{\Leftrightarrow} 5a^2 > 2|a|a(a-2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 > 2a^2(a-2), \text{ если } a > 0, \\ 5a^2 > 2a^2(2-a), \text{ если } a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 2a^3 > 0, \text{ если } a > 0, \\ a^2 + 2a^3 > 0, \text{ если } a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 9 - 2a > 0, \text{ если } a > 0, \\ 1 + 2a > 0, \text{ если } a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 9/2, \\ -1/2 < a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $a \in (-1/2; 0) \cup (0; 9/2)$, то x_1, x_2 удовлетворяют неравенству (2).

Ответ. $a \in (-1/2; 0) \cup (0; 9/2)$.

19. При каких значениях параметра a имеет единственный корень уравнение $\frac{x^2 - (4 + 3a)x - 5 + 15a}{\sqrt{x^2 - 4x - 1}} = 0$ (1)?

Решение. Из неравенства $x^2 - 4x - 1 > 0$ находим ОДЗ уравнения (1): $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}; \infty)$.

Рассмотрим уравнение $x^2 - (4 + 3a)x - 5 + 15a = 0$. (2)

Так как дискриминант $D(a) = 9(a-2)^2$, то легко находим, что $x_1 = 5$, $x_2 = 3a - 1$, где $a \in \mathbb{R}$, являются корнями уравнения (2).

Так как $x_1 = 5$ принадлежит ОДЗ уравнения (1) и является корнем уравнения (2), то $x_1 = 5$ является корнем уравнения (1), при любом $a \in \mathbb{R}$.

Уравнение (1) имеет единственный корень в следующих случаях.

1) Если $x_1 = x_2 \Leftrightarrow 5 = 3a - 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Итак, если $\underline{a = 2}$, то уравнение (1) имеет единственный корень.

2) Так как $x_1 = 5$ является корнем уравнения (1) при любом $a \in R$, то уравнение (1) имеет единственный корень, если $x_2 = 3a - 1$ (корень уравнения (2)) не является корнем уравнения (1), то есть, если $x_2 = 3a - 1$ не принадлежит ОДЗ уравнения (1). Нужно значение параметра находим из двойного неравенства

$$2 - \sqrt{5} \leq 3a - 1 \leq 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{5}/3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}/3.$$

Итак, если $\underline{a \in [1 - \sqrt{5}/3; 1 + \sqrt{5}/3]}$, то $x_2 = 3a - 1$ не является корнем уравнения (1).

$$\text{Ответ. } [1 - \sqrt{5}/3; 1 + \sqrt{5}/3] \cup \{2\}.$$

20. При каких значениях параметра a имеет решение уравнение $ax^2 + y^2 + ax - 2ay + 2xy + a^2 - 3 = 0$ (1)?

Решение. Рассмотрим уравнение (1) как квадратное относительно y .

Перепишем уравнение (1) $y^2 - 2(a - x)y + ax^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ (2).

Уравнение (2) имеет решение, если

$$D(a)/4 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ax + x^2 - ax^2 - ax - a^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - a)x^2 - 3ax + 3 \geq 0.$$

Определим, при каких значениях параметра a неравенство $(1 - a)x^2 - 3ax + 3 \geq 0$ (3) имеет решения.

Рассмотрим следующие два случая.

1) Пусть $a = 1$. Тогда неравенство (3) равносильно неравенству $x \leq 1$. Это означает, что уравнение (1), если $\underline{a = 1}$, имеет решения.

2) Пусть $a \neq 1$. Рассмотрим уравнение $(1 - a)x^2 - 3ax + 3 = 0$ (4).

Замечание. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет решение, то и неравенство $ax^2 + bx + c \geq 0$ имеет решение.

Пусть $D_1(a)$ дискриминант уравнения (4). Уравнение (4) имеет решение, если

$$\begin{cases} D_1(a) \geq 0, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 + 12a - 12 \geq 0, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a + 2)(3a - 2) \geq 0, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -2, \\ 2/3 \leq a < 1, \\ a > 1. \end{cases}$$

Итак, если $a \in (-\infty; -2] \cup [2/3; 1) \cup (1; \infty)$, то уравнение (4), а значит и неравенство (3), имеет решение.

Из замечания следует: если $\underline{a \in (-\infty; -2] \cup [2/3; 1) \cup (1; \infty)}$, то исходное уравнение имеет решение.

Из 1) и 2) следует ответ.

Ответ. $a \in (-\infty; -2] \cup [2/3; \infty)$.

21. Найти все значения параметра α , при каждом из которых уравнение $x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha} + 36 = 0$ (1) имеет единственное решение.

Решение. В область определения параметра входят те значения параметра α , для которых $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha \neq 0$.

1. Если $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha \neq 0$, то квадратное уравнение (1) имеет единственное решение только в том случае, когда

$$\begin{aligned} D(\alpha)/4 = 0 &\Leftrightarrow \frac{9}{\sin \alpha} - \frac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha} - 36 = 0 \stackrel{\substack{\cos \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha > 0}}{\Leftrightarrow} \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) - \sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha \right) - \sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) - \sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi - 18\alpha}{12} \cos \frac{\pi + 6\alpha}{12} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{\pi - 18\alpha}{12} = 0, \\ \cos \frac{\pi + 6\alpha}{12} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Последняя совокупность имеет две серии решений:

$$\alpha_n = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \alpha_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

2. Докажем, что все решения (2) удовлетворяют условию $\cos \alpha \neq 0$.

1) Пусть $\alpha_n = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Так как $\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha_m = \pi/2 + \pi m$, где $m \in \mathbb{N}$, то $\cos \alpha_n = 0$, где $n \in \mathbb{N}$, если

$$\begin{cases} \alpha_n = \alpha_m, \\ n, m \in \mathbb{N}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi m, \\ n, m \in \mathbb{N}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n - 3m = 4/3, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3)$$

Первое уравнение система (3) не имеет решений, так как $n, m \in \mathbb{Z}$.

Так как система (3) не имеет решений, то $\cos \alpha_n \neq 0$.

2) Если $\alpha_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$, то

$$\alpha_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow \cos \alpha_k = \cos \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из 1) и 2) следует, что решения (2) удовлетворяют условию $\cos \alpha \neq 0$.

3. Из решений (2) выделим те, которые удовлетворяют условию $\sin \alpha > 0$.

1) Пусть $\alpha_n = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$. Имеем

$$\begin{aligned} \sin \alpha > 0 &\Leftrightarrow 2\pi m < \alpha_n < \pi(2m+1), m \in Z \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\pi m < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < \pi(2m+1), n, m \in Z \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 36m < 1 + 12n < 36m + 18, n, m \in Z \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3m - 1/12 < n < 3m + 17/12, n, m \in Z. \end{aligned}$$

Итак, $\sin \alpha_n > 0 \Leftrightarrow 3m - 1/12 < n < 3m + 17/12$, $n, m \in Z$.

Из неравенства $3m - 1/12 < n < 3m + 17/12$, $n, m \in Z$, следует, что $n = 3m$ и $n = 3m + 1$, $n, m \in Z$.

Таким образом, из чисел $\alpha_n = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, где $n \in Z$, только числа, полученные при $n = 3m$ и $n = 3m + 1$, $n, m \in Z$, удовлетворяют условию $\sin \alpha_n > 0$.

Из 2. и 3. следует, что $\alpha_m = \frac{\pi}{18} + 2\pi m$, $\alpha_m = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi(3m+1)}{3}$, $m \in Z$

являются решениями уравнения (1).

2) Если $\alpha_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, то

$$\alpha_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \Leftrightarrow \sin \alpha_k = \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in Z, \Leftrightarrow \sin \alpha_k = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0, k \in Z.$$

Итак, α_k удовлетворяют условию $\sin \alpha_k > 0$.

Если $\alpha_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, $\alpha_m = \frac{\pi}{18} + 2\pi m$, $\alpha_m = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi(3m+1)}{3}$, $m \in Z$, то уравнение (1) имеет единственное решение.

$$\text{Ответ. } \alpha_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \alpha_m = \frac{\pi}{18} + 2\pi m, \alpha_m = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi(3m+1)}{3}, m \in Z.$$

22. При каких значениях параметра m один из корней уравнения $x^2 - 2\log_m(m+1) \cdot x + \log_m(m-4) = 0$ меньше 0, а другой – больше 1?

Решение. ОДЗ для параметра m находится из системы неравенств:

$$m > 0, m \neq 1, m+1 > 0, m-4 > 0. \text{ Из системы следует, что } m > 4 \text{ является}$$

ОДЗ параметра m .

Один из корней уравнения меньше 0, а другой – больше 1 тогда и только тогда, когда числа 0 и 1 расположены между корнями уравнения.

Пусть $f(x) = x^2 - 2\log_m(m+1) \cdot x + \log_m(m-4)$. При условии, что $m > 4$, $\log_m m = 1$ искомые значения параметра находятся из системы

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) < 0, \\ m > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_m(m-4) < 0, \\ 1 - 2\log_m(m+1) + \log_m(m-4) < 0 \\ m > 4; \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 0 < m-4 < 1, \\ \log_m m(m-4) < \log_m(m+1)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m < 5, \\ m(m-4) < (m+1)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m < 5, \\ m > -1/6; \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 5. \end{aligned}$$

Ответ. $m \in (4; 5)$

23. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(a-4)(\sin x)^{-4} + (a+1)(\sin x)^{-2} + 2a-1 = 0$ (1) не имеет корней.

Решение. Пусть $\sin^{-2} x = t$, где $t \geq 1$. Тогда уравнение (1) принимает вид $(a-4)t^2 + (a+1)t + 2a-1 = 0$, где $t \geq 1$. (2)

1. Если $a = 4$, то уравнение (2) принимает вид $5t + 7 = 0$, где $t \geq 1$. Очевидно, последнее уравнение, а значит и уравнение (1) при $a = 4$, не имеет корней.

2. Если $a \neq 4$, то уравнение (2) является квадратным.

Уравнение (2) при $a \neq 4$ не имеет корней в двух случаях: 1) $D(a) < 0$; 2) $D(a) \geq 0$ и корни уравнения (2) меньше 1.

Найдём дискриминант уравнения (2). Имеем

$$D(a) = (a+1)^2 - 4(2a-1) \cdot (a-4) = -7a^2 + 38a - 15 = (3-7a) \cdot (a-5).$$

Итак, $D(a) = (3-7a) \cdot (a-5)$.

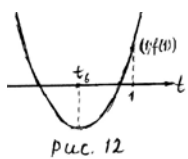
$$1) \text{ Пусть } \begin{cases} D(a) < 0, \\ a \neq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-7a) \cdot (a-5) < 0, \\ a \neq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3/7, \\ a > 5. \end{cases}$$

Уравнение (2), а значит и уравнение (1) не имеет корней, если $a \in (-\infty; 3/7) \cup (5; \infty)$.

б) При $a \neq 4$, уравнение (2) равносильно уравнению

$$t^2 + (a+1) \cdot (a-4)^{-1}t + (2a-1) \cdot (a-4)^{-1} = 0, \text{ где } t \geq 1. \quad (3)$$

Пусть $f(t) = t^2 + (a+1) \cdot (a-4)^{-1}t + (2a-1) \cdot (a-4)^{-1}$, где $t \geq 1$. (4) .



Абсцисса вершины параболы, заданной уравнением (4) – это $t_e = -0,5(a+1)(a-4)^{-1}$. Корни уравнения (3) меньше 1 (рис. 12), если

$$\begin{cases} f(1) > 0, \\ t_6 < 1, \\ D \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{a+1}{a-4} + \frac{2a-1}{a-4} > 0, \\ -\frac{a+1}{2(a-4)} < 1, \\ (3-7a)(a-5) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{a-4} > 0, \\ \frac{3a-7}{a-4} > 0, \\ (3-7a)(a-5) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3/7 \leq a < 1, \\ 4 < a \leq 5. \end{cases}$$

Уравнение (2), а значит и уравнение (1) не имеет корней, если $a \in [3/7; 1) \cup (4; 5]$.

Из 1. и 2. следует ответ.

Ответ. $a \in (-\infty; 1) \cup [4; \infty)$.

24. При каких значениях параметра a уравнения $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ и $a^2x^2 - 2x + 1 = 0$ имеют общие корни?

Решение. 1. Если $a = 0$, то корень первого уравнения $x = 1$, а корень второго уравнения $x = 0,5$.

Итак, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

2. Пусть $a \neq 0$.

Уравнения $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ и $a^2x^2 - 2x + 1 = 0$ имеют общие корни при тех значениях параметра a , при которых имеет решения система двух уравнений с двумя неизвестными x и a

$$\begin{cases} ax^2 + 2x - a - 2 = 0, \\ a^2x^2 - 2x + 1 = 0; \end{cases} \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -a^2x^2 - 2ax + a^2 + 2a = 0, \\ a^2x^2 - 2x + 1 = 0; \end{cases} \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (a+1)(a+1-2x) = 0, \\ a^2x^2 - 2x + 1 = 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} a+1=0, \\ a^2x^2 - 2x + 1 = 0; \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} 2x = a+1, \\ a^2x^2 - 2x + 1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Так как решением системы (1) является точка $(1; -1)$, то $a = -1$ удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим систему (2). Имеем

$$\begin{cases} 2x = a+1, \\ a^2x^2 - 2x + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a+1, \\ a^2(0,5(a+1))^2 - (a+1) + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a+1, \\ a^4 + 2a^3 + a^2 - 4a = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a+1, \\ a(a^3 + 2a^2 + a - 4) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a+1, \\ a(a^2 + 3a + 4)(a-1) = 0; \end{cases} \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1, \\ a = 1. \end{cases}$$

Отметим: $a^3 + 2a^2 + a - 4 = (a^3 - 1) + 2(a^2 - 1) + (a - 1)$.

Так как система (2) имеет решение при $a = 1$, то $a = 1$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $a \in \{-1; 1\}$.

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ равносильно уравнению $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ при тех значениях параметра a , при которых множество решений уравнений совпадают. Это означает, что надо найти значения параметра a , при которых

1) уравнения одновременно не имеют корней. Эти значения параметра a находятся из системы

$$\begin{cases} D < 0, \\ D_1 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q < 0, \\ p_1^2 - 4q_1 < 0; \end{cases}$$

2) уравнения совпадают. Эти значения параметра a находятся из системы $\begin{cases} p = p_1, \\ q = q_1. \end{cases}$

25. При каких значениях параметра a уравнения $ax^2 - 2x + 9a + 3 = 0$ и $2a^2x^2 + 2x - 3a = 0$ равносильны?

Решение. 1. Если $a = 0$, то корень первого уравнения $x = 1,5$, а корень второго уравнения $x = 0$.

Итак, $a = 0$ не удовлетворяет условиям задачи (так как уравнения равносильны только в случае, когда множества их решений совпадают).

2. Пусть $a \neq 0$. Тогда исходные уравнения равносильны приведённым уравнениям $x^2 - 2a^{-1}x + 9 + 3a^{-1} = 0$ и $x^2 + a^{-2}x - 1,5a^{-1} = 0$.

Имеем $p = -2a^{-1}$, $q = 9 + 3a^{-1}$, $p_1 = a^{-2}$, $q_1 = -1,5a^{-1}$. Если $a \neq 0$, то уравнения равносильны в двух случаях.

1) Уравнения одновременно не имеют корней, если

$$\begin{cases} D/4 < 0, \\ D_1 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-2} - 9 - 3a^{-1} < 0, \\ a^{-4} + 6a^{-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-2}(9a^2 + 3a - 1) > 0, \\ a^{-4}(1 + 6a^3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -(1 + \sqrt{5})/6, \\ a > (\sqrt{5} - 1)/6, \\ a < -1/\sqrt[3]{6}. \end{cases} \quad (1)$$

Для того чтобы найти решение последней системы (1) надо сравнить числа $a_1 = -(1 + \sqrt{5})/6$, $a_2 = -1/\sqrt[3]{6}$.

$$\text{Имеем } a_1^3 = -\frac{(1 + \sqrt{5})^3}{6^3} \Leftrightarrow a_1^3 = -\frac{8(2 + \sqrt{5})}{6^3} \Leftrightarrow a_1^3 = -\frac{2 + \sqrt{5}}{3^3}.$$

$$\text{Так как } 2 < \sqrt{5} < 2,3, \text{ то } -\frac{43}{270} < a_1^3 < -\frac{4}{27} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < a_1^3 < -\frac{4}{27}.$$

Так как $a_2^3 = -1/6$, $a_1^3 > -1/6$, то $a_2^3 < a_1^3 \overset{\substack{\text{функция } a^3 \\ \text{возрастает}}}{\Leftrightarrow} a_2 < a_1$.

Так как $a_2 < a_1$, то решениями системы (1) являются $a \in (-\infty; -1/\sqrt[3]{6})$.

2) Корни уравнений совпадают, если

$$\begin{cases} p = p_1, \\ q = q_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a^{-1} = a^{-2}, \\ 9 + 3a^{-1} = -1,5a^{-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5, \\ a = -0,5; \end{cases} \Leftrightarrow a = -0,5.$$

Итак, $a = -0,5$ удовлетворяет условию задачи.

Отметим, что $-0,5 \notin (-\infty; -1/\sqrt[3]{6})$.

Ответ. $a \in (-\infty; -1/\sqrt[3]{6}) \cup \{-0,5\}$.

26. При каких значениях параметра a из того, что x является корнем уравнения $4x^2 - 2(4a - 1)x + 3(a + 2) \cdot (a - 1) = 0$ (1) следует, что x не является корнем уравнения $|x - a| + |x - 3a| = 2|a|$ (2)?

Решение. 1. Найдём корни квадратного уравнения (1).

Дискриминант уравнения (1)

$$D(a)/4 = (4a - 1)^2 - 12(a + 2)(a - 1) \Leftrightarrow D(a)/4 = (2a - 5)^2.$$

Так как $D(a)/4 = (2a - 5)^2$, то $x_1 = 0,5(a + 2)$, $x_2 = 1,5(a - 1)$ являются корнями уравнения (1).

2. Определим, при каких значениях параметра a числа $x_1 = 0,5(a + 2)$, $x_2 = 1,5(a - 1)$ не являются корнями уравнения (2).

1) Если $a = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -1,5$ являются корнями уравнения (1). Если $a = 0$, то уравнение (2) принимает вид $2|x| = 0$. Очевидно, $x_1 = 1$ и $x_2 = -1,5$ не являются корнями последнего уравнения. Это означает, что $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Замечание. Корнем уравнения $|x - b| + |x - c| = c - b$, где $c > b$, является любое $x \in [b; c]$.

2) Если $a > 0$, то $3a > a$.

Хотя бы одно из чисел $x_1 = 0,5(a + 2)$ и $x_2 = 1,5(a - 1)$, где $a > 0$, не является корнем уравнения (2) тогда и только тогда когда $x_1 \notin [a; 3a]$ или $x_2 \notin [a; 3a]$. (следует из замечания). Это означает, что хотя бы одно из

чисел $x_1 = 0,5(a+2)$ и $x_2 = 1,5(a-1)$, где $a > 0$, принадлежат интервалу $(-\infty; a)$ или интервалу $(3a; \infty)$. Тогда имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5(a+2) < a, \\ 0,5(a+2) > 3a, \\ 1,5(a-1) < a, \\ 1,5(a-1) > 3a, \\ a > 0; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > 2, \\ a < 0,4, \\ a < 3, \\ a < -1, \\ a > 0; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < a < 0,4, \\ 2 < a < 3. \end{array} \right.$$

Из последней совокупности следуют, что $a \in (0; 0,4) \cup (2; 3)$ удовлетворяют условию задачи.

2) Если $a < 0$, то $3a < a$.

Хотя бы одно из чисел $x_1 = 0,5(a+2)$ и $x_2 = 1,5(a-1)$, где $a < 0$, не является корнем уравнения (2) тогда и только тогда когда $x_1 \notin [3a; a]$ или $x_2 \notin [3a; a]$. (следует из замечания). Это означает, что хотя бы одно из чисел $x_1 = 0,5(a+2)$ и $x_2 = 1,5(a-1)$, где $a < 0$, принадлежат интервалу $(-\infty; 3a)$ или интервалу $(a; \infty)$. Тогда имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5(a+2) > a, \\ 0,5(a+2) < 3a, \\ 1,5(a-1) > a, \\ 1,5(a-1) < 3a, \\ a < 0; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < 2, \\ a > 0,4, \\ a > 3, \\ a > -1, \\ a < 0; \end{array} \right\} \Leftrightarrow -1 < a < 0.$$

Итак, $a \in (-1; 0)$ удовлетворяют условию задачи.

Из 1) – 3) следует ответ.

Ответ. $a \in (-1; 0,4) \cup (2; 3)$.

27. При каких значениях параметра a совпадают множество решений уравнений $6\sin^2 x + (12+a)\sin x - 18 + 3a = 0$ (1) и $2\sin^2 x + (12-a^2)\sin x + 16 - 2a^2 = 0$ (2)?

Решение. 1. Сделаем замену $t = \sin x$, где $|t| \leq 1$. Исходные уравнения соответственно принимают вид $6t^2 + (12+a)t - 18 + 3a = 0$, где $|t| \leq 1$,

(3) и $2t^2 + (12 - a^2)t + 16 - 2a^2 = 0$, где $|t| \leq 1$, (4).

Отметим: уравнения (1) и (3) (а также уравнения (2) и (4)) имеют или не имеют решений при одних и тех же значениях параметра a .)

2. а) Найдём корни уравнения $6t^2 + (12 + a)t - 18 + 3a = 0$.

Дискриминант уравнения $D(a) = (12 + a)^2 + 24(18 - 3a) \Leftrightarrow D(a) = (a - 24)^2$.

Так как $D(a) = (a - 24)^2$, то $t_1 = 1 - a/6$, $t_2 = -3$ являются корнями уравнения $6t^2 + (12 + a)t - 18 + 3a = 0$. Так как $|t| \leq 1$, то $t_2 = -3$ не являются корнем уравнения (3).

Корнем уравнения (3) является $t_1 = 1 - a/6$, если

$$|t_1| \leq 1 \Leftrightarrow |1 - a/6| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 12.$$

Итак, если $a \in [0; 12]$, то только $t_1 = 1 - a/6$ является корнем уравнения (3).

б) Найдём корни квадратного уравнения $2t^2 + (12 - a^2)t + 16 - 2a^2 = 0$.

Дискриминант уравнения $D(a) = (12 - a^2)^2 - 8(16 - 2a^2) \Leftrightarrow D(a) = (a^2 - 4)^2$.

Так как $D(a) = (a^2 - 4)^2$, то $t_3 = a^2/2 - 4$, $t_4 = -2$ являются корнями уравнения $2t^2 + (12 - a^2)t + 16 - 2a^2 = 0$. Так как $|t| \leq 1$, то $t_4 = -2$ не являются корнем уравнения (4).

Корнем уравнения (4) является $t_3 = a^2/2 - 4$, если

$$|t_3| \leq 1 \Leftrightarrow |a^2/2 - 4| \leq 1 \Leftrightarrow 6 \leq a^2 \leq 10 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} \leq a \leq -\sqrt{6}, \\ \sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{10}. \end{cases}$$

Итак, если $a \in [-\sqrt{10}; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; \sqrt{10}]$, то только $t_3 = a^2/2 - 4$ является корнем уравнения (4).

3. Множество решений уравнений (3) и (4), а значит и уравнений (1) и (2), совпадают в следующих двух случаях.

а) Корни уравнений (3) и (4) равны. Это *возможно* для тех значениях параметра a , для которых

$$\underline{a \in [0; 12] \cap \left([-\sqrt{10}; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; \sqrt{10}] \right) \Rightarrow a \in [\sqrt{6}; \sqrt{10}]}.$$

Корни уравнений (3) и (4) равны, если

$$\begin{cases} t_1 = t_3, \\ \sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{10}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2/2 - 4 = 1 - a/6, \\ \sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{10}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + a - 30 = 0, \\ \sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{10}; \end{cases} \Leftrightarrow a = 3.$$

Итак, если $a = 3$, то корни уравнений (3) и (4), а значит и уравнений (1) и (2), равны.

б) Множество решений уравнений (3) и (4) совпадают, если $t_1 = 1 - a/6$ и $t_3 = a^2/2 - 4$ не являются соответственно корнями уравнений (3) и (4), то есть, если

$$\left\{ \begin{array}{l} |t_1| > 1, \\ |t_3| > 1; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |1 - a/6| > 1, \\ |a^2/2 - 4| > 1; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - a/6 > 1, \\ 1 - a/6 < -1, \\ a^2/2 - 4 > 1, \\ a^2/2 - 4 < -1; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < 0, \\ a > 12, \\ a^2 < 6, \\ a^2 > 10; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < -\sqrt{10}, \\ -\sqrt{6} < a < 0, \\ a > 12. \end{array} \right.$$

Итак, если $a < -\sqrt{10}, -\sqrt{6} < a < 0, a > 12$, то множество решений уравнений (3) и (4), а значит и уравнений (1) и (2), совпадают.

Ответ. $a < -\sqrt{10}, -\sqrt{6} < a < 0, a > 12, a = 3$.

28. Найдите все пары a и c , при которых уравнение $x^2 - 2(2c - 1)x - 2c - 7 = 0$ (1) является следствием уравнения $x^2 - 2(2a - 3)x + a^2 + a - 3 = 0$ (2).

Уравнение (1) является следствием уравнения (2) при тех значениях параметров a, c , при которых множество решений уравнения (1) содержит множество решений уравнения (2).

Решение. Рассмотрим квадратное уравнение (2).

Дискриминант уравнения

$$D(a)/4 = (2a - 3)^2 - a^2 - a + 3 \Leftrightarrow D(a)/4 = 3a^2 - 13a + 12.$$

Рассмотрим следующие три случая.

1) Пусть $D(a)/4 < 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 13a + 12 < 0 \Leftrightarrow 4/3 < a < 3$.

Если $a \in (4/3; 3)$, то квадратное уравнение (2) не имеет корней (множество решений пустое множество). Тогда любое уравнение с одной переменной, в частности и уравнение (1), при любом $c \in R$, является следствием уравнения (2).

2) Пусть $D(a)/4 = 0$. Тогда $a \in \{4/3; 3\}$.

а) Если $a = 4/3$, то корнем уравнения (2) является $x = -1/3$.

Найдём значения параметра c , при котором $x = -1/3$ является корнем квадратного уравнения (1). Если $x = -1/3$ является корнем квадратного уравнения (1), то $1/9 - 2(2c - 1)(-1/3) - 2c - 7 = 0 \Leftrightarrow c = -34/3$.

Если $a = 4/3$ и $c = -34/3$, то уравнение (1), является следствием

уравнения (2).

б) Если $a = 3$, то корнем уравнения (2) является $x = 3$.

Найдём значения параметра c , при котором $x = 3$ является корнем квадратного уравнения (1). Если $x = 3$ является корнем квадратного уравнения (1), то $9 - 2(2c - 1)(3) - 2c - 7 = 0 \Leftrightarrow c = 4/7$.

Если $a = 3$ и $c = 4/7$, то уравнение (1), является следствием уравнения (2).

3) Если $D(a)/4 > 0$, то $a \in (-\infty; 4/3) \cup (3; \infty)$.

Если $a \in (-\infty; 4/3) \cup (3; \infty)$, то квадратное уравнение имеет два различных корня. Уравнение (1), является следствием уравнения (2), если эти уравнения совпадают.

Имеем $p = 2(2c - 1)$, $q = -7 - 2c$, $p_1 = 2(2a - 3)$, $q_1 = a^2 + a - 3$.

Корни уравнений совпадают, если

$$\begin{cases} p = p_1, \\ q = q_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2c - 1) = 2(2a - 3), \\ -7 - 2c = a^2 + a - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 1, \\ a^2 + 3a + 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 1, \\ (a + 1) \cdot (a + 2) = 0. \end{cases}$$

Из уравнения $(a + 1) \cdot (a + 2) = 0$ находим $a = -1$ или $a = -2$, которые принадлежат множеству $(-\infty; 4/3) \cup (3; \infty)$.

Из последней системы находим: если $a = -1$, то $c = -2$; если $a = -2$, то $c = -3$.

Ответ. $a \in (4/3; 3)$, $c \in R$; $a = 4/3$, $c = -34/3$; $a = 3$, $c = 4/7$;
 $a = -1$, $c = -2$; $a = -2$, $c = -3$.

29. Найдите, все значения параметра a , при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{6 - a^2 - a} + 3a + 4,5 = 0$ (1) принимает наименьшее значение.

Решение. ОДЗ параметра: $a \in [-3; 2]$ (находим из неравенства $6 - a^2 - a \geq 0$)

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения (1). Пусть D дискриминант квадратного уравнения (1).

Уравнение (1) имеет решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D(a) \geq 0, \\ -3 \leq a \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - a^2 - a - 12a - 18 \geq 0, \\ -3 \leq a \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 12) \cdot (a + 1) \leq 0, \\ -3 \leq a \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq a \leq -1.$$

Итак, уравнение (1) имеет решение, если $a \in [-3; -1]$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\sqrt{6 - a^2 - a}$, $x_1 \cdot x_2 = 3a + 4,5$, где $a \in [-3; -1]$.

Выразим $(x_1^2 + x_2^2)$ через a . Имеем

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -a^2 - 7a - 3.$$

Таким образом, $x_1^2 + x_2^2 = -a^2 - 7a - 3$, где $a \in [-3; -1]$.

Обозначим $f(a) = -a^2 - 7a - 3$, где $a \in [-3; -1]$.

По условию надо найти значения параметра a , при которых функция $f(a) = -a^2 - 7a - 3$, где $a \in [-3; -1]$, принимает наименьшее значение.

Графиком функции $f(a) = -a^2 - 7a - 3$ является парабола, абсцисса вершины которой $a_0 = -3,5$ и ветви которой направлены вниз. Это означает, что функция $f(a) = -a^2 - 7a - 3$ на промежутке $a \in [-3; -1]$ убывает. Тогда сумма квадратов корней уравнения (1) принимает наименьшее значение, если $a = -1$.

Ответ. $a = -1$.

30. Найдите, все значения параметра a , при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{a^2 - 2a - 8} - 0,6a + 6,4 = 0$ (1) принимает наименьшее значение.

Решение. ОДЗ параметра: $a \in (-\infty; -2] \cup [4; \infty)$ (находим из неравенства $a^2 - 2a - 8 \geq 0$)

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения (1). Пусть D дискриминант квадратного уравнения (1). Имеем

$$D(a) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 + 2,4a - 25,6 \geq 0 \Leftrightarrow (a + 6) \cdot (a - 5,6) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -6, \\ a \geq 5,6. \end{cases}$$

Итак, $D(a) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $a \in (-\infty; -6] \cup [5,6; \infty)$. Так как $a \in (-\infty; -2] \cup [4; \infty)$ (ОДЗ параметра), то уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда $a \in (-\infty; -6] \cup [5,6; \infty)$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\sqrt{a^2 - 2a - 8}$, $x_1 \cdot x_2 = -0,6a + 6,4$ где $a \in (-\infty; -6] \cup [5,6; \infty)$.

Выразим $(x_1^2 + x_2^2)$ через a . Имеем

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 0,8a - 20,8.$$

Таким образом, $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 0,8a - 20,8$, где $a \in (-\infty; -6] \cup [5,6; \infty)$.

Обозначим $f(a) = a^2 - 0,8a - 20,8$, где $a \in (-\infty; -6] \cup [5,6; \infty)$.

По условию надо найти значения параметра a , при которых функция $f(a) = a^2 - 0,8a - 20,8$, где $a \in (-\infty; -6] \cup [5,6; \infty)$, принимает наименьшее значение.

Графиком функции $f(a) = a^2 - 0,8a - 20,8$ является парабола, абсцисса вершины которой $a_0 = 0,4$ и ветви которой направлены вверх. Функция $f(a) = a^2 - 0,8a - 20,8$ на промежутке $(-\infty; -6]$ убывает, а на промежутке $[5,6; \infty)$ возрастает. Поэтому функция $f(a) = a^2 - 0,8a - 20,8$ принимает наименьшее значение в точке $a = -6$ или в точке $a = 5,6$.

Найдём

$$f(-6) = 36 + 4,8 - 20,8 = 20; \quad f(5,6) = 31,6 - 4,48 - 20,8 = 6,1.$$

Так как $f(-6) > f(5,6)$, то сумма квадратов корней уравнения (1) принимает наименьшее значение, если $a = 5,6$.

Ответ. $a = 5,6$

Биквадратные уравнения

Уравнение $f(a)x^4 + g(a)x^2 + \varphi(a) = 0$, где $f(a) \neq 0$, является биквадратным с параметром a .

Для того чтобы найти корни биквадратного уравнения $f(a)x^4 + g(a)x^2 + \varphi(a) = 0$, где $f(a) \neq 0$, (1) надо сделать замену $x^2 = t$, где $t \geq 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид $f(a)t^2 + g(a)t + \varphi(a) = 0$, где $f(a) \neq 0$, $t \geq 0$. (2).

Число корней уравнения (1) зависит от числа корней квадратного уравнения $f(a)t^2 + g(a)t + \varphi(a) = 0$, где $f(a) \neq 0$. (2).

Если уравнение (2) имеет два разных положительных корня: $t_1 > 0, t_2 > 0$, то биквадратное уравнение (1) имеет четыре разных корня: $x_1 = -\sqrt{t_1}, x_2 = \sqrt{t_1}, x_3 = -\sqrt{t_2}, x_4 = \sqrt{t_2}$.

Если уравнение (2) имеет два корня: $t_1 = 0, t_2 > 0$, то биквадратное уравнение (1) имеет три разных корня: $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -\sqrt{t_2}, x_4 = \sqrt{t_2}$.

Если уравнение (2) имеет два разных корня: $t_1 < 0, t_2 > 0$, или два равных корня: $t_1 = t_2 > 0$, то биквадратное уравнение (1) имеет два разных корня: $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = \sqrt{t_2}$.

Если уравнение (2) имеет два равных корня: $t_1 = t_2 = 0$, то биквадратное уравнение (1) имеет четыре равных корня: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Если уравнение (2) имеет отрицательные корни или не имеет действительных корней, то биквадратное уравнение (1) не имеет действительных корней.

31. Найдите все значения параметра a , при которых два корня уравнения $(a+1)x^4 - (4a+5)x^2 + 2a+3 = 0$ (1) удовлетворяют условию $|x| < 1$, а другие два корня удовлетворяют условию $|x| > 2$.

Решение. Так как уравнение (1) имеет четыре корня (следует из условия), то уравнение является биквадратным. Тогда $a+1 \neq 0$.

Сделаем замену $x^2 = t$, где $t \geq 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид $(a+1)t^2 - (4a+5)t + 2a+3 = 0$, где $t \geq 0$, $a+1 \neq 0$. (2)

Так как биквадратное уравнение (1) имеет четыре корня, то квадратное уравнение (2) имеет два положительных корня.

Замечание. Так как $x^2 = t$, где $t > 0$, то $|x| < 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 1 \stackrel{t=x^2}{\Leftrightarrow} 0 < t < 1$.

Так как $x^2 = t$, то $|x| > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4 \stackrel{t=x^2}{\Leftrightarrow} t > 4$.

Из замечания следует, что надо найти значения параметра $a \neq -1$, при которых один корень уравнения (2) удовлетворяет условию $0 < t < 1$, а другой корень удовлетворяет условию $t > 4$.

Так как $a \neq -1$, то уравнение (2) равносильно уравнению

$$t^2 - (4a+5)(a+1)^{-1}t + (2a+3)(a+1)^{-1} = 0 \quad (3).$$

Пусть $f(t) = t^2 - (4a+5)(a+1)^{-1}t + (2a+3)(a+1)^{-1}$.

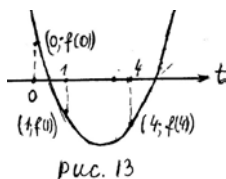


рис. 13

Один из корней уравнения (3) удовлетворяет условию $0 < t < 1$, а другой корень удовлетворяет условию $t > 4$, если выполняется следующая система неравенств (рис 13):

$$\begin{cases} f(4) < 0, \\ f(1) < 0, \\ f(0) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - \frac{16a+20}{a+1} + \frac{2a+3}{a+1} < 0, \\ 1 - \frac{4a+5}{a+1} + \frac{2a+3}{a+1} < 0, \\ \frac{2a+3}{a+1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a-1}{a+1} < 0, \\ \frac{a+1}{a+1} > 0, \\ \frac{2a+3}{a+1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow -1 < a < 0,5.$$

Итак, $a \in (-1; 0,5)$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $a \in (-1; 0,5)$

32. Найдите все значения параметра a , при которых биквадратное уравнение $(a-4)x^4 - 2(a-10)x^2 + a^2 - 8a - 20 = 0$ (1) имеет ровно два корня на промежутке $(-2; 2]$.

Решение. Так как уравнение биквадратное, то $a - 4 \neq 0$.

Сделаем замену $x^2 = t$, где $t \geq 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид $(a-4)t^2 - 2(a-10)t + a^2 - 8a - 20 = 0$, где $t \geq 0$. (2)

Биквадратное уравнение (1) *может* иметь ровно два корня на промежутке $(-2; 2]$, если квадратное уравнение (2)

1) имеет два корня: $t = 0, t = 4$ (в этом случае уравнение (1) на промежутке $(-2; 2]$ имеет два корня $x = 0, x = 2$)

2) уравнение (2) на промежутке $(0; 4)$ имеет один корень, который удовлетворяет условию $0 < t < 4$, (в этом случае уравнение (1) на интервале $(-2; 2)$ имеет два корня).

Рассмотрим случай 1).

Пусть $t = 0, t = 4$ корни уравнения (2). Тогда они удовлетворяют уравнению (2). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} (a-4) \cdot 0^2 - 2(a-10) \cdot 0 + a^2 - 8a - 20 = 0, \\ (a-4) \cdot 4^2 - 2(a-10) \cdot 4 + a^2 - 8a - 20 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-10) \cdot (a+2) = 0, \\ (a-2) \cdot (a+2) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow a = -2.$$

Итак, если $\underline{a = -2}$, то уравнение (2) имеет два корня ($t = 0, t = 4$).

Тогда уравнение (1) имеет два корня ($x = 0, x = 2$) на промежутке $(-2; 2]$.

Рассмотрим случай 2).

а) Пусть уравнение (2) имеет корень t_1 кратности два и он удовлетворяет условию $0 < t < 4$. В этом случае

$$D(a)/4 = 0 \Leftrightarrow (a-10)^2 - (a-4) \cdot (a-10) \cdot (a+2) = 0 \Leftrightarrow -(a-10) \cdot (a-1) \cdot (a-2) = 0.$$

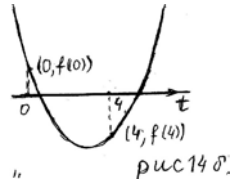
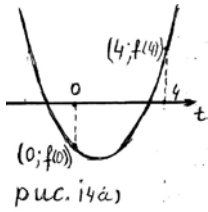
Итак, если $D(a)/4 = 0$, то $a \in \{1; 2; 10\}$ и $t_1(a) = t_2(a) = (10-a)/(a-4)$.

Легко проверить, что $t_1(a) = t_2(a) \leq 0$, если $a \in \{1; 2; 10\}$.

Итак, $a \in \{1; 2; 10\}$ не удовлетворяют условию задачи.

б) Так как $a - 4 \neq 0$, то уравнение (2) равносильно уравнению $t^2 - 2(a-10) \cdot (a-4)^{-1} t + (a^2 - 8a - 20)(a-4)^{-1} = 0$.

Обозначим $f(t) = t^2 - 2(a-10) \cdot (a-4)^{-1} t + (a^2 - 8a - 20)(a-4)^{-1}$.



Пусть уравнение (2) имеет два корня и только один из них удовлетворяет условию $0 < t < 4$. Это возможно, когда выполняется следующая совокупность систем неравенств (рис. 14)

$$\begin{cases} f(4) > 0, \\ f(0) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(4) < 0, \\ f(0) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Имеем

$$f(0) = \frac{(a+2) \cdot (a-10)}{(a-4)},$$

$$f(4) = 16 - 8 \frac{a-10}{a-4} + \frac{a^2 - 8a - 20}{a-4} \Leftrightarrow f(4) = \frac{(a+2) \cdot (a-2)}{(a-4)}.$$

Очевидно, совокупность (3) равносильна неравенству

$$f(4) \cdot f(0) < 0 \Leftrightarrow \frac{(a+2) \cdot (a-2)}{a-4} \cdot \frac{(a+2) \cdot (a-10)}{a-4} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < a < 4, \\ 4 < a < 10. \end{cases}$$

Итак, $a \in (2; 4) \cup (4; 10)$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $a \in (2; 4) \cup (4; 10) \cup \{-2\}$.

33. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x-a-2)^2((x-a-2)^2-2) = a^2+2a$ (1) имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

Решение. Преобразуем уравнение (1). Имеем

$$\begin{aligned} (x-a-2)^2((x-a-2)^2-2) &= a^2+2a \quad t=(x-a-2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^2-2t-a(a+2) &= 0 \Leftrightarrow (t+a)(t-a-2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = -a, \\ t = a+2; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a-2)^2 = -a, \\ (x-a-2)^2 = a+2. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, исходное уравнение (1) равносильно совокупности

$$\begin{cases} (x-a-2)^2 = -a, \\ (x-a-2)^2 = a+2. \end{cases} \quad (2)$$

Если $a < 0$, то первое уравнение совокупности (2) имеет два корня: $x_1 = a+2+\sqrt{-a}$, $x_2 = a+2-\sqrt{-a}$ (отметим: если $a < 0$, то $x_1 \neq x_2$).

Если $a = 0$, то первое уравнение совокупности (2) имеет один корень $x = 2$ (двойной кратности).

Если $a > 0$, то первое уравнение совокупности (2) не имеет корней.

Если $a > -2$, то второе уравнение совокупности (2) имеет два корня: $x_3 = a + 2 + \sqrt{a + 2}$, $x_4 = a + 2 - \sqrt{a + 2}$ (отметим: если $a < -2$, то $x_3 \neq x_4$).

Если $a = -2$, то второе уравнение совокупности (2) имеет один корень $x = 0$ (двойной кратности).

Если $a < -2$, то второе уравнение совокупности (2) не имеет корней.

Так как $-a = a + 2 \Leftrightarrow a = -1$, то при $a = -1$ совокупность (2), а значит и уравнение (1), имеет два разных корня (отметим: если $a = -1$, то $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$).

Итак, если $a \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$, совокупности (2), а значит и уравнение (1), имеет четыре корня. Очевидно, $x_1 > 0$, $x_3 > 0$.

Определим, при каких значениях $a \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$ выполняются неравенства $x_2 > 0$, $x_4 > 0$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_2 > 0, \\ x_4 > 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 - \sqrt{-a} > 0, \\ a + 2 - \sqrt{a + 2} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 > \sqrt{-a}, \\ a + 2 > \sqrt{a + 2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 5a + 4 > 0, \\ a^2 + 3a + 2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a + 1) \cdot (a + 4) > 0, \\ (a + 1) \cdot (a + 2) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -4, \\ a > -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $a \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$, то из последней совокупности следует, если $-1 < a < 0$, то $x_2 > 0$, $x_4 > 0$.

Итак, если $-1 < a < 0$, то исходное уравнение имеет 4 разных положительных корня.

Ответ. $-1 < a < 0$.

34. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^4 + 2(2a - 1)(x + 2)x^2 - (5a^2 - 8a + 3)(x + 2)^2 = 0$ имеет четыре разных корня.

Решение. Преобразуем исходное уравнение. Для этого сначала выделим полный квадрат, а затем, полученное выражение, разложим на множители. Имеем

$$\begin{aligned} x^4 + 2(2a - 1) \cdot (x + 2)x^2 - (5a^2 - 8a + 3) \cdot (x + 2)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x^4 + 2(2a - 1) \cdot (x + 2)x^2 + (2a - 1)^2 \cdot (x + 2)^2 \right) - & \\ - \left((2a - 1)^2 \cdot (x + 2)^2 + (5a^2 - 8a + 3) \cdot (x + 2)^2 \right) &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + (2a-1) \cdot (x+2))^2 - ((4a^2 - 4a + 1 + 5a^2 - 8a + 3) \cdot (x+2)^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + (2a-1) \cdot (x+2))^2 - ((3a-2) \cdot (x+2))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + (2a-1-3a+2) \cdot (x+2)) \cdot (x^2 + (2a-1+3a-2) \cdot (x+2)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - (a-1) \cdot (x+2))(x^2 + (5a-3) \cdot (x+2)) = 0.$$

Итак, исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x^2 - (a-1)(x+2)) \cdot (x^2 + (5a-3)(x+2)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (a-1)(x+2) = 0, \\ x^2 + (5a-3)(x+2) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Исходное уравнение *может иметь* четыре разных корня при тех значениях параметра a , при которых каждое квадратное уравнение совокупности имеет по два разных корня.

Пусть $D_1(a)$ дискриминант первого квадратного уравнения совокупности (1). Имеем

$$D_1(a) > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + 8(a-1) > 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+7) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -7, \\ a > 1. \end{cases}$$

Итак, первое уравнение совокупности имеет два разных корня тогда и только тогда, когда $a \in (-\infty; -7) \cup (1; \infty)$.

Пусть $D_2(a)$ дискриминант второго квадратного уравнения совокупности (1). Имеем

$$D_2(a) > 0 \Leftrightarrow (5a-3)^2 - 8(5a-3) > 0 \Leftrightarrow (5a-3)(5a-11) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0,6, \\ a > 2,2. \end{cases}$$

Итак, второе уравнение совокупности имеет два разных корня тогда и только тогда, когда $a \in (-\infty; 0,6) \cup (2,2; \infty)$.

Если $a \in ((-\infty; -7) \cup (1; \infty)) \cap ((-\infty; 0,6) \cup (2,2; \infty)) \Leftrightarrow a \in (-\infty; -7) \cup (2,2; \infty)$, то каждое квадратное уравнение совокупности (1) имеют по два корня.

Исходное уравнение имеет четыре разных корня при тех значениях параметра $a \in (-\infty; -7) \cup (2,2; \infty)$, при которых квадратные уравнения совокупности (1) не имеют общих корней.

Квадратные уравнения $x^2 - (a-1) \cdot (x+2) = 0$ и $x^2 + (5a-3) \cdot (x+2) = 0$ имеют общие корни при тех значениях параметра a , при которых имеет решения система двух уравнений с двумя неизвестными x и a

$$\begin{cases} x^2 - (a-1) \cdot (x+2) = 0, \\ x^2 + (5a-3) \cdot (x+2) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = (a-1) \cdot (x+2), \\ ((5a-3) + (a-1)) \cdot (x+2) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (a-1) \cdot (x+2) = 0, \\ (6a-4) \cdot (x+2) = 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2 - (a-1) \cdot (x+2) = 0, \\ 6a - 4 = 0. \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x^2 - (a-1) \cdot (x+2) = 0, \\ x+2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система (2) не имеет решений, так как $a = 2/3$ не принадлежит множеству $(-\infty; -7) \cup (2, 2; \infty)$. Система (3) не имеет решений, так как $x = -2$ не удовлетворяет первому уравнению этой системы.

Итак, ни при каких значениях $a \in (-\infty; -7) \cup (2, 2; \infty)$ квадратные уравнения $x^2 - (a-1) \cdot (x+2) = 0$ и $x^2 + (5a-3) \cdot (x+2) = 0$ не имеют общих корней.

Ответ. $a \in (-\infty; -7) \cup (2, 2; \infty)$.

35. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|x^2 - 4x - 5| - 3a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня.

Графический метод.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$|x^2 - 4x - 5| + 1 = |x - a| + 3a \quad (1)$$

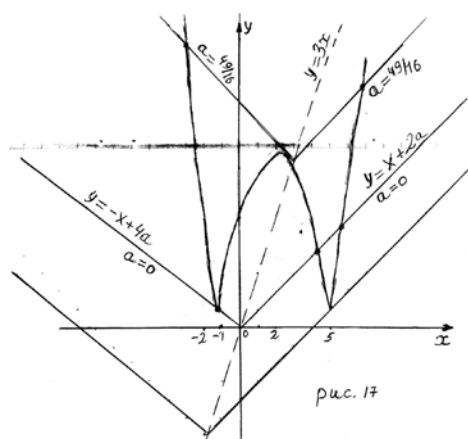
Рассмотрим функции $\varphi(x) = |x - a| + 3a$, $y(x) = |x^2 - 4x - 5| + 1$.

Графиком функции $\varphi(x) = |x - a| + 3a$ является «подвижный уголок» с вершиной в точке $A(a; 3a)$ (отметим: точка $A(a; 3a)$ принадлежит прямой $y = 3x$) и сторонами $y = -x + 4a$, если $x \leq a$, $y = x + 2a$, если $x > a$.

Построим график функции $y(x) = |x^2 - 4x - 5| + 1$.

а) Имеем $y = x^2 - 4x - 5 \Leftrightarrow y = (x - 2)^2 - 9$.

Из последнего уравнения следует, что графиком функции $y = x^2 - 4x - 5$ является парабола с вершиной в точке $(2; -9)$, ветви которой направлены вверх. Точками пересечения параболы $y = x^2 - 4x - 5$ с осью абсцисс являются точки $(-1; 0)$, $(5; 0)$.



Строим график функции $y(x) = |x^2 - 4x - 5| + 1$, который проходит через точки $(-1; 1)$, $(5; 1)$, $(2; 10)$.

На рисунке 17 изображён график функции $y(x) = |x^2 - 4x - 5| + 1$, а также график «подвижного уголка» при некоторых значениях параметра a .

Исходное уравнение имеет три корня при

тех значениях параметра a , при которых графики функций $y(x) = |x^2 - 4x - 5| + 1$, $\varphi(x) = |x - a| + 3a$ пересекаются в трёх точках.

Так как вершина «подвижного уголка» принадлежит прямой $y = 3x$, то это возможно в следующих случаях.

1) Из рисунка 17 следует: уравнение (1) имеет три корня, если график функции $\varphi(x) = |x - a| + 3a$ проходит через точку $(-1; 1)$ и при этом $\varphi(5) \geq 1$.

График функции $\varphi(x) = |x - a| + 3a$ проходит через точку $(-1; 1)$, если

$$1 = |-1 - a| + 3a \Leftrightarrow \begin{cases} |1 + a| = 1 - 3a, \\ 1 - 3a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$$

Если $a = 0$, то $\varphi(5) = 5 \Rightarrow \varphi(5) > 1$.

Из 1) и рисунка 17 следует, если $a = 0$, то графики функций $y(x) = |x^2 - 4x - 5| + 1$, $\varphi(x) = |x - a| + 3a$ пересекаются в трёх точках.

Итак, если $a = 0$, то уравнение (1) имеет три корня.

2) Уравнение (1) имеет три корня, если прямая $y = -x + 4a$, если $x \leq a$, (сторона «подвижного уголка») является касательной к параболе $y = -x^2 + 4x + 6$, при этом выполняется следующее:

а) абсцисса точки касания $x_0 \in (2; 5)$,

б) $a > 0$ (следует из рисунка 17).

В этом случае, прямая $y = -x + 4a$, если $x \leq a$, пересекает график функции $y(x) = |x^2 - 4x - 5| + 1$ в трёх точках. Этими точками являются точка касания, точка с абсциссой $x < -1$, точка с абсциссой $x > 5$.

Отметим: прямая $y = kx + d$ является касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$, если имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ y = kx + d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c = kx + d, \\ y = kx + d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + (b - k)x + (c - d) = 0, \\ y = kx + d. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение, если имеет единственное решение квадратное уравнение $ax^2 + (b - k)x + (c - d) = 0$.

Прямая $y = -x + 4a$, если $x \leq a$, является касательной к параболе $y = -x^2 + 4x + 6$, если имеет единственное решение квадратное уравнение $-x^2 + 4x + 6 = -x + 4a \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 + 4a = 0$.

Квадратное уравнение $x^2 - 5x - 6 + 4a = 0$ имеет единственное решение при тех значениях параметра $a > 0$, при которых равен нулю дискриминант D этого уравнения. Имеем

$$\begin{cases} D = 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 16a = 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow a = 49/16.$$

Так как дискриминант D квадратного уравнения $x^2 - 5x - 6 + 4a = 0$ равен нулю, то $x_0 = 2,5$ (абсцисса точки касания) является решением квадратного уравнения. Очевидно, $2,5 \in (2; 5)$

Рассмотрим уравнение (1) при $a = 49/16$, если $x < -1$ или $x > 5$. Имеем

$$\begin{cases} |x^2 - 4x - 5| + 1 = |x - 49/16| + 147/16, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > 5; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 4x - 5 + 1 = -x + 49/16 + 147/16, \\ x < -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 4x - 5 + 1 = x - 49/16 + 147/16, \\ x > 5; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x - 65 = 0, \text{ где } x < -1, \\ 8x^2 - 40x - 49 = 0, \text{ где } x > 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (3 - \sqrt{74})/3, \\ x = (10 + \sqrt{198})/4. \end{cases}$$

Итак, графики функций $y(x) = |x^2 - 4x - 5| + 1$, $\varphi(x) = |x - a| + 3a$, где $a = 49/16$, пересекаются в трёх точках с абсциссами $x_0 = 2,5$, $x_1 = (3 - \sqrt{74})/3$, $x_2 = (10 + \sqrt{198})/4$. Тогда исходное уравнение при $a = 49/16$ имеет три корня.

Ответ. $a \in \{0; 49/16\}$.

Метод областей.

Решение. На плоскости $(x; a)$ построим множество точек, удовлетворяющих уравнению $|x^2 - 4x - 5| - 3a = |x - a| - 1$. (1)

Для построения множества точек сделаем следующее.

1. Приравняем нулю $(x - a)$. Откуда следует, что $x - a = 0 \Leftrightarrow a = x$.

На плоскости $(x; a)$ построим прямую $a = x$. Эта прямая разобьёт плоскость $(x; a)$ на 2 области.

Найдём точки пересечения графика уравнения (1) и прямой $a = x$ из системы

$$\begin{cases} a = x, \\ |x^2 - 4x - 5| - 3a = |x - a| - 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x, \\ |a^2 - 4a - 5| = 3a - 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x, \\ a^2 - 4a - 5 = 3a - 1, \text{ где } 3a \geq 1, \\ a^2 - 4a - 5 = 1 - 3a, \text{ где } 3a \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x, \\ a^2 - 7a - 4 = 0, \text{ где } 3a \geq 1, \\ a^2 - a - 6 = 0, \text{ где } 3a \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x, \\ a = 0,5(7 + \sqrt{65}), \\ a = 3. \end{cases}$$

Из последней системы следует: график исходного уравнения проходит через точки $(0,5(7 + \sqrt{65}); 0,5(7 + \sqrt{65}))$, $(3; 3)$, которые принадлежат прямой $a = x$.

2. Рассмотрим уравнение (1) в каждой области.

1) В области I, где $x - a < 0$, уравнение (1) равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 - 3a = -x + a - 1, \text{ где } x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty), \\ -x^2 + 4x + 5 - 3a = -x + a - 1, \text{ где } x \in [-1; 5]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = x^2 - 3x - 4, \text{ где } x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty), \\ 4a = -x^2 + 5x + 6, \text{ где } x \in [-1; 5]. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим уравнение $4a = x^2 - 3x - 4$, где $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$, совокупности (2). Имеем $4a = x^2 - 3x - 4 \Leftrightarrow a = 1/4 \cdot (x - 3/2)^2 - 25/16$.

Так как абсцисса вершины параболы $x = 3/2$ не принадлежит множеству $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$ и ветви параболы направлены вверх, то на интервале $(-\infty; -1)$ функция $a = 1/4 \cdot (x - 3/2)^2 - 25/16$ убывает, а на интервале $(5; \infty)$ функция возрастает. Поэтому для построения части параболы, найдём $a(-1) = 0$, $a(5) = 1,5$. Точка $(-1; 0) \in I$, а точка $(5; 1,5) \notin I$ (находится ниже прямой $a = x$).

Итак, парабола $4a = x^2 - 3x - 4$, где $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$, проходит через точку $(-1; 0)$ и точку $(0,5(7 + \sqrt{65}); 0,5(7 + \sqrt{65}))$, которая принадлежит прямой $a = x$.

Рассмотрим уравнение $4a = -x^2 + 5x + 6$, где $x \in [-1; 5]$, совокупности (2). Графиком функции $4a = -x^2 + 5x + 6$, где $x \in [-1; 5]$, является часть параболы. Имеем $4a = -x^2 + 5x + 6 \Leftrightarrow a = -1/4 \cdot (x - 5/2)^2 + 49/16$.

Абсцисса вершины параболы $(5/2; 49/16)$ принадлежит отрезку $x \in [-1; 5]$ и ветви параболы направлены вниз. Для построения части параболы, найдём $a(-1) = 0$, $a(5) = 1,5$. Точка $(-1; 0) \in I$, а точка $(5; 1,5) \notin I$ (находится ниже прямой $a = x$).

Итак, парабола $4a = -x^2 + 5x + 6$, где $x \in [-1; 5]$, проходит через точку $(-1; 0)$ и точку $(3; 3)$, которая принадлежит прямой $a = x$.

Строим график уравнения (1) в области I, где $x - a < 0$.

2) В области II, где $x - a > 0$, уравнение (1) равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 - 3a = x - a - 1, \text{ где } x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty), \\ -x^2 + 4x + 5 - 3a = x - a - 1, \text{ где } x \in [-1; 5]; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = x^2 - 5x - 4, \text{ где } x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty), \\ 2a = -x^2 + 3x + 6, \text{ где } x \in [-1; 5]. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим уравнение $2a = x^2 - 5x - 4$, где $x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$, совокупности (3). Графиком функции $2a = x^2 - 5x - 4$, где $x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$, является часть параболы.

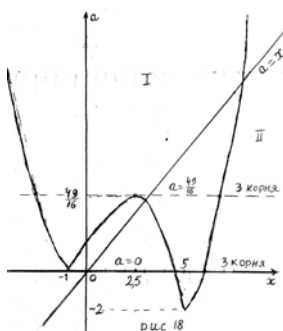
$$\text{Имеем } 2a = x^2 - 5x - 4 \Leftrightarrow a = 1/2 \cdot (x - 5/2)^2 - 49/8.$$

Так как абсцисса вершины параболы $x = 5/2$ не принадлежит множеству $x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$ и ветви параболы направлены вверх, то на интервале $(-\infty; 1)$ функция $a = 1/2 \cdot (x - 5/2)^2 - 49/8$ убывает, а на интервале $(5; \infty)$ возрастает функция. Поэтому для построения части параболы, найдём $a(-1) = 0$, $a(5) = 2$. Точка $(-1; 0) \notin II$ (находится выше прямой $a = x$), а точка $(5; 1,5) \in II$.

Итак, парабола $2a = x^2 - 5x - 4$, где $x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$, проходит через точку $(5; 1,5)$ и точку $(0,5(7 + \sqrt{65}); 0,5(7 + \sqrt{65}))$, которая принадлежит прямой $a = x$.

Рассмотрим уравнение $2a = -x^2 + 3x + 6$, где $x \in [-1; 5]$, совокупности (3). Графиком функции $2a = -x^2 + 3x + 6$, где $x \in [-1; 5]$ является часть параболы.

$$\text{Имеем } 2a = -x^2 + 3x + 6 \Leftrightarrow a = -1/2 \cdot (x - 3/2)^2 + 33/8.$$



Вершина параболы $(3/2; 33/8)$ не принадлежит области II (так как эта точка лежит выше прямой $a = x$) и ветви параболы направлены вниз. Для построения части параболы, найдём $a(-1) = 0$, $a(5) = -2$. Точка $(-1; 0) \notin II$ (находится выше прямой $a = x$), а

точка $(5; -2) \in \Pi$.

Итак, парабола $2a = x^2 - 5x - 4$, где $x \in [-1; 5]$ проходит через точку $(5; -2)$ и точку $(3; 3)$, которая принадлежит прямой $a = x$.

Строим график уравнения (1) в области Π , где $x - a > 0$.

Из рисунка 18 следует ответ.

Ответ. $a \in \{0; 49/16\}$.

37. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{5 + 4x - x^2} + 6a = ax + 3$ имеет единственное решение.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{5 + 4x - x^2} = a(x - 6) + 3 \quad (1)$$

Область определения уравнения является отрезок $[-1; 5]$ (находится из неравенства $5 + 4x - x^2 \geq 0$).

1. Если $a = 0$, то исходное принимает вид

$$\sqrt{5 + 4x - x^2} = 3 \Leftrightarrow 5 + 4x - x^2 = 9 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Итак, если $a = 0$, то исходное уравнение имеет единственное решение.

2. Пусть $a \neq 0$.

Рассмотрим функции $\varphi(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$, $y(x) = a(x - 6) + 3$.

Графиком функции $y(x) = a(x - 6) + 3$ является семейство прямых, проходящих через точку $A(6; 3)$.

Построим график функции $\varphi(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$.

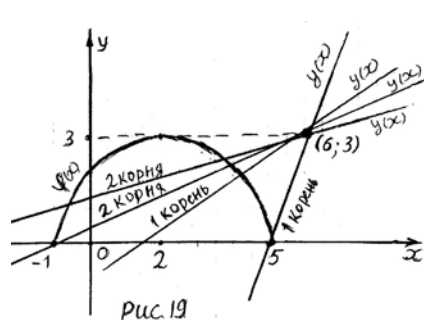
Областью определения функции $\varphi(x)$ является отрезок $[-1; 5]$.

Графиком функции $y = 5 + 4x - x^2 \Leftrightarrow y = 9 - (x - 2)^2$ на отрезке $[-1; 5]$ является часть параболы. Ветви параболы направлены вниз. Вершиной параболы является точка $(2; 9)$. Так как абсцисса параболы $x_0 = 2$ принадлежит отрезку $[-1; 5]$, то функция $y = 5 + 4x - x^2$ на отрезке $[-1; 2]$ возрастает, а на отрезке $[2; 5]$ убывает. Так как функция $y(u) = \sqrt{u}$ возрастает, то функция $\varphi(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$ на отрезке $[-1; 2]$ возрастает, а на отрезке $[2; 5]$ убывает.

Для построения графика функции $\varphi(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$ найдём значения: $\varphi(-1) = 0$, $\varphi(2) = 3$, $\varphi(5) = 0$.

На рисунке 19 изображён график функции $\varphi(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$, а также график прямой $y(x) = a(x - 6) + 3$ при некоторых значениях параметра a .

Исходное уравнение имеет единственное решение при тех значениях параметра $a \neq 0$, при которых графики функций



$\varphi(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$, $y(x) = a(x - 6) + 3$ пересекаются в одной точке.

3. Из рисунка 19 следует, что исходное уравнение имеет единственное решение, если график функции $y(x) = a(x - 6) + 3$, где $a \neq 0$, проходит через точку $(k; 0)$, где $-1 < k \leq 5$. График функции $y(x) = a(x - 6) + 3$, где $a \neq 0$, проходит через точку $(k; 0)$, если

$$0 = a(k - 6) + 3 \Leftrightarrow k = \frac{6a - 3}{a} \Leftrightarrow -1 < \frac{6a - 3}{a} \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a - 3}{a} \leq 0, \\ \frac{7a - 3}{a} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 3/7 < a \leq 3.$$

График функции $y(x) = a(x - 6) + 3$ проходит через точку $(k; 0)$, если $a \in (3/7; 3]$. Это означает, что при этих значениях параметра a исходное уравнение имеет единственное решение.

Из 1. и 2. следует ответ.

Ответ. $a \in (3/7; 3] \cup \{0\}$.

38. Найдите все значения параметра a , при которых имеет хотя бы одно решение уравнение $a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$.

Решение. 1. Преобразуем исходное уравнение

$$a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{(x + 1)^2 + 4} = 2a + 3|(x + 1) - 4a|$$

Пусть $x + 1 = t$. Исходное уравнение принимает вид

$$a^2 + 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} = 2a + 3|t - 4a| \quad (1)$$

Исходное уравнение и уравнение (1) имеют одинаковое число решений при одних и тех же значениях параметра a (так как $x + 1 = t$, то

для каждого значения t находится единственное значение x).

2. Рассмотрим функции

$$f(t) = 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a, \quad \varphi(t) = 3|t - 4a|.$$

Построим график функции $f(t) = 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a$. (2)

Функция $f(t)$ является чётной, так как $f(-t) = f(t)$, где $t \in (-\infty; \infty)$. Построим график функции (2) при $t > 0$.

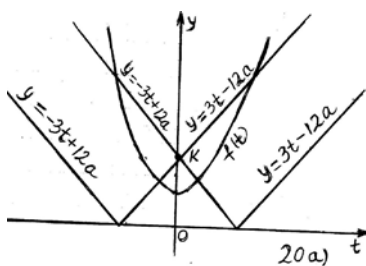
Если $t > 0$, то $f(t) = 7t + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a$, где $t > 0$.

Так как $f(t)$ является суммой возрастающих функций ($y = t$, $y = 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a$, где $t > 0$), то функция $f(t)$ возрастает. Тогда для построения этой функции найдём значение $f(0) = a^2 - 2a + 10$. Так как $a^2 - 2a + 10 > 0$, то $f(0) > 0$.

Графиком функции $\varphi(t) = 3|t - 4a|$ является «подвижный уголок» с вершиной в точке $A(4a; 0)$ и сторонами $y = -3t + 12a$, если $t \leq 4a$, $y = 3t - 12a$, если $t > 4a$.

На рисунках 20 изображён при некотором значении параметра a график функции $f(t) = 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a$ и график «подвижного уголка» при некоторых значениях параметра a .

Исходное уравнение имеет хотя бы одно решение при тех значениях параметра a , при которых графики функций $f(t) = 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a$, $\varphi(t) = 3|t - 4a|$ пересекаются хотя бы в одной точке.



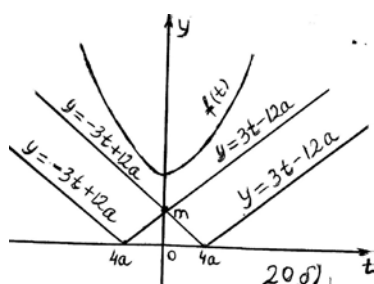
3. Из рисунка 20 а) следует, что графики функций $f(t)$, $\varphi(t)$ пересекаются, если график функции $\varphi(t) = 3|t - 4a|$ проходит через точку $(0; k)$, где $k \geq a^2 - 2a + 10$. График функции $\varphi(t) = 3|t - 4a|$ проходит через точку $(0; k)$, если

$$3|4a| = k \stackrel{k \geq a^2 - 2a + 10}{\Rightarrow} 12|a| \geq a^2 - 2a + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 12a \geq a^2 - 2a + 10, \\ 12a \leq -a^2 + 2a - 10; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 14a + 10 \leq 0, \\ a^2 + 10a + 10 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - \sqrt{39} \leq a \leq 7 + \sqrt{39}, \\ -5 - \sqrt{15} \leq a \leq -5 + \sqrt{15}. \end{cases}$$

Итак, график функции $\varphi(t) = 3|t - 4a|$ проходит через точку $(0; k)$, если $a \in [-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}] \cup [7 - \sqrt{39}; 7 + \sqrt{39}]$. При этих значениях параметра a графики функций $f(t)$, $\varphi(t)$ пересекаются. Это означает, что при $a \in [-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}] \cup [7 - \sqrt{39}; 7 + \sqrt{39}]$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

4. Из рисунка 20 б) следует, что графики функций $f(t)$, $\varphi(t)$ не пересекаются, если график функции $\varphi(t) = 3|t - 4a|$ проходит через точку $(0; m)$, где $0 < m < a^2 - 2a + 10$. Докажем это.



а) Пусть $a > 0$ и прямая $y = -3t + 12a$, если $t \leq 4a$, (сторона «подвижного уголка»), проходит через точку $(0; m)$, где $0 < m < a^2 - 2a + 10$.

Очевидно, если $t > 0$, то графики функций $y = 3t - 12a$, если $t > 4a$, и $f(t) = 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a$ не пересекаются, так как $f(t) - (3t - 12a) > 0$, если $t > 4a$, (следует из рисунка 20 б)).

Так как может быть $f(t) - (-3t + 12a) < 0$, если $t \leq 4a$, тогда докажем: если $t < 0$, то графики функций $f(t) = 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a$ и $y = -3t + 12a$, если $t \leq 4a$, не пересекаются.

График функции $y = -3t + 12a$, если $t \leq 4a$, проходит через точку $(0; m)$, если $12a = m \Rightarrow 0 < 12a < a^2 - 2a + 10 \Rightarrow a^2 - 14a + 10 > 0$.

Итак, $a^2 - 14a + 10 > 0$.

Рассмотрим разность $f(t) - y(t)$, если $t < 0$ и $a^2 - 14a + 10 > 0$.

Отметим $5\sqrt{t^2 + 4} > 10$. Имеем

$$\begin{aligned} f(t) - y(t) &= \left(-7t + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a \right) - (-3t + 12a) \stackrel{\sqrt{t^2 + 4} > 2}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow f(t) - y(t) > -4t + 10 + a^2 - 2a - 12a \stackrel{a^2 - 14a + 10 > 0}{\Rightarrow} f(t) - y(t) > -4t \stackrel{t < 0}{\Rightarrow} f(t) > y(t). \end{aligned}$$

Итак, если прямая $y = -3t + 12a$, если $t \leq 4a$, проходит через точку $(0; m)$, то $f(t) > y(t)$, где $t < 0$. Это означает, если $t < 0$, то графики функций $y = -3t + 12a$, если $t \leq 4a$, $f(t) = 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a$ не пересекаются. Тогда исходное уравнение в этом случае не имеет решений.

б) Аналогично доказывается, что графики функций $\varphi(t) = 3|t - 4a|$, $f(t) = 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} + a^2 - 2a$, если $a < 0$, не пересекаются.

Итак, доказали, что графики функций $f(t)$, $\varphi(t)$ не пересекаются, если график функции $\varphi(t) = 3|t - 4a|$ проходит через точку $(0; m)$, где $0 < m < a^2 - 2a + 10$.

$$\text{Ответ. } a \in [-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}] \cup [7 - \sqrt{39}; 7 + \sqrt{39}].$$

39. Найдите все значения a , при которых имеет два неотрицательных корня уравнение $|10 \cdot 0,2^{1-x} - a| - |5^x + 2a| = 0,04^{-x}$.

Решение. 1. Преобразуем исходное уравнение

$$|10 \cdot 0,2 \cdot 0,2^{-x} - a| - |5^x + 2a| = 0,2^{-2x} \Leftrightarrow |2 \cdot 5^x - a| - |5^x + 2a| = 5^{2x}.$$

Пусть $5^x = t$. Исходное уравнение принимает вид

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2, \text{ где } t > 0. \quad (1)$$

Исходное уравнение и уравнение (1) имеют одинаковое число корней при одних и тех же значениях параметра a (так как $5^x = t$, то для каждого значения t находится единственное значение x).

Надо найти все значения a , при которых имеет два неотрицательных корня исходное уравнение. Определим, какие значения принимает t , если $x \geq 0$.

Так как функция $t = 5^x$ возрастает, то имеем $x \geq 0 \Leftrightarrow 5^x \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 1$.

Итак, надо все значения a , при которых уравнение $|2t - a| - |t + 2a| = t^2$ имеет два корня, которые не меньше единицы.

На плоскости $(t; a)$ построим множество точек, удовлетворяющих уравнению $|2t - a| - |t + 2a| = t^2$, где $t \geq 1$. (2).

Для построения множества точек, удовлетворяющих уравнению (2), сделаем следующее.

1. Приравняем нулю выражения, стоящие под знаком модуля: $2t - a = 0$ и $t + 2a = 0$. Откуда следует: $a = 2t$ и $a = -0,5t$.

На плоскости $(t; a)$ построим прямые $a = 2t$ и $a = -0,5t$. Эти прямые разобьют часть плоскости $(t; a)$, при $t \geq 1$, на 3 области.

2. Рассмотрим уравнение (2) в каждой области. Для этого надо раскрыть модули в каждой области.

Замечание. При раскрытии модулей надо учитывать знак выражения, стоящего под модулем в соответствующей области. Так как знак в

каждой области постоянный, то знак выражения в области совпадает со знаком выражения в любой точке этой области.

1) В области I уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} 2t - a \leq 0, \\ t + 2a > 0, \\ -2t + a - t - 2a = t^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - a \leq 0, \\ t + 2a > 0, \\ a = -t^2 - 3t. \end{cases}$$

Графиком функции $a(t) = -t^2 - 3t$ является парабола, которая не принадлежит области I, так как $a(t) < 0$, если $t \geq 1$.

2) В области II уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} 2t - a > 0, \\ t + 2a \geq 0, \\ 2t - a - t - 2a = t^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - a > 0, \\ t + 2a \geq 0, \\ a = -1/3(t^2 - t). \end{cases}$$

Графиком функции $a(t) = -1/3 \cdot (t^2 - t)$, где $t \in [1; \infty)$, является часть параболы. Так как абсцисса вершины параболы $t = 0,5$ не принадлежит промежутку $[1; \infty)$, и ветви параболы направлены вниз, то на этом промежутке функция $a(t) = -1/3 \cdot (t^2 - t)$ убывает. Поэтому для построения части параболы, найдём $a(1) = 0$, а также точку пересечения параболы $a(t) = -1/3 \cdot (t^2 - t)$ и прямой $a = -0,5t$ из системы

$$\begin{cases} a = -0,5t, \\ a = -1/3(t^2 - t), \\ t \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5t, \\ -0,5t = -1/3(t^2 - t), \\ t \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5t, \\ 2t^2 - 5t = 0, \\ t \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1,25, \\ t = 2,5. \end{cases}$$

В области II парабола $a(t) = -1/3 \cdot (t^2 - t)$ проходит через точки: $(1; 0)$, $(2,5; -1,25)$.

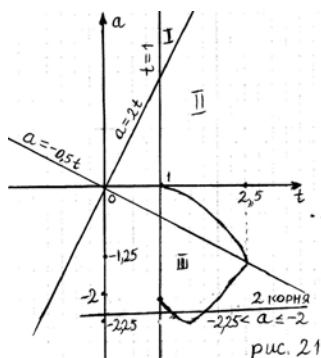
3) В области III уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} 2t - a > 0, \\ t + 2a < 0, \\ 2t - a + t + 2a = t^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - a > 0, \\ t + 2a < 0, \\ a = t^2 - 3t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - a > 0, \\ t + 2a < 0, \\ a = (t - 1,5)^2 - 2,25. \end{cases}$$

Графиком функции $a(t) = (t - 1,5)^2 - 2,25$, где $t \in [1; \infty)$, является часть параболы. Вершиной параболы является точка $(1,5; -2,25)$, которая принадлежит области III. Ветви параболы направлены вверх. Для построе-

ния части параболы, найдём $a(1) = -2$, а также точку пересечения параболы $a = t^2 - 3t$ и прямой $a = -0,5t$ из системы

$$\begin{cases} a = -0,5t, \\ a = t^2 - 3t, \\ t \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5t, \\ -0,5t = t^2 - 3t, \\ t \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5t, \\ 2t^2 - 5t = 0, \\ t \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1,25, \\ t = 2,5. \end{cases}$$



В области III парабола $a(t) = -1/3 \cdot (t^2 - t)$ проходит через точки: $(1; -2)$, $(2,5; -1,25)$, $(1,5; -2,25)$.

2. Из рисунка 21 следует: если $a \in (-2,25; -2]$, то уравнение (2), имеет два корня, которые не меньше единицы. Тогда исходное уравнение имеет два неотрицательных корня, если $a \in (-2,25; -2]$.

Ответ. $a \in (-2,25; -2]$.

40. Сколько решений в зависимости от значений параметра a имеет уравнение $(x^2 + x) \cdot (x^2 + 5x + 6) = a$?

Решение. Имеем $\left((x + 1/2)^2 - 1/4\right) \cdot \left((x + 5/2)^2 - 1/4\right) = a$

Сделаем замену $t = 0,5(x + 1/2 + x + 5/2) \Leftrightarrow t = x + 3/2$.

Исходное уравнение принимает вид

$$\left((t-1)^2 - 1/4\right) \cdot \left((t+1)^2 - 1/4\right) = a \quad (1)$$

Исходное уравнение и уравнение (1) имеют одинаковое число решений при одних и тех же значениях параметра a (так как $t = x + 3/2$, то для каждого значения t находится единственное значение x).

Рассмотрим функцию $a(t) = \left((t-1)^2 - 1/4\right) \cdot \left((t+1)^2 - 1/4\right)$.

Функция $a(t)$ является чётной, так как $a(-t) = a(t)$, где $t \in (-\infty; \infty)$.

На координатной плоскости $(t; a)$, при $t \geq 0$, построим график функции $a(t) = \left((t-1)^2 - 1/4\right) \cdot \left((t+1)^2 - 1/4\right)$.

1) Нули функции, при условии, что $t \geq 0$: $t = 1/2$, $t = 3/2$ (находим из уравнения $\left((t-1)^2 - 1/4\right) \cdot \left((t+1)^2 - 1/4\right) = 0$, где $t \geq 0$).

2) Найдём промежутки монотонности, точки экстремума функции $a(t)$, где $t \geq 0$.

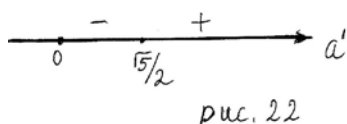
а) Найдём производную функции $a(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} a'(t) &= 2(t-1) \cdot \left((t+1)^2 - 1/4 \right) + 2(t+1) \cdot \left((t-1)^2 - 1/4 \right) = \\ &= 2 \left[(t-1) \cdot (t+1)^2 + (t-1)^2 \cdot (t+1) - 1/4((t-1) + (t+1)) \right] = 4t(t^2 - 5/4). \end{aligned}$$

Итак, $a'(t) = 4t(t^2 - 5/4)$.

б) Из уравнения $a'(t) = 0$, где $t \geq 0$, находим критическую точку $t = \sqrt{5}/2$. Критическая точка $t = \sqrt{5}/2$ разбивает промежуток $[0; \infty)$ на промежутки $[0; \sqrt{5}/2)$, $(\sqrt{5}/2; \infty)$, на каждом из которых $a'(t)$ сохраняет знак.

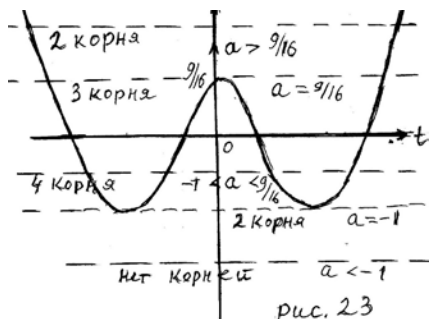
в) Определим знаки $a'(t)$. Знаки функции $a'(t)$ показаны на рисунке 22.



г) Из рисунка 22 делаем вывод.

Функция $a(t)$ убывает на отрезке $[0; \sqrt{5}/2]$ и возрастает на промежутке $[\sqrt{5}/2; \infty)$. В точке $t = \sqrt{5}/2$ функция $a(t)$ имеет минимум и

$$a_{\min}(\sqrt{5}/2) = \left((\sqrt{5}/2 - 1)^2 - 1/4 \right) \cdot \left((\sqrt{5}/2 + 1)^2 - 1/4 \right) = (2 - \sqrt{5}) \cdot (2 + \sqrt{5}) = -1.$$



Итак, $a_{\min}(\sqrt{5}/2) = -1$. Вычислим: $a(0) = 9/16$.

Построим график функции $a(t)$ с учётом, что функция $a(t)$ чётная.

Из рисунка 23 следует ответ.

Ответ. Если $a < -1$, то корней нет; если $a \in (9/16; \infty) \cup \{-1\}$, то два корня; если $a \in (-1; 9/16)$, то четыре корня; если $a = 9/16$, то три корня.

41. При каких значениях параметра a имеет два различных корня

$$\text{уравнение } (x-3)^2 + \left(\frac{|x|}{x} - 2 + a \right)^2 = 25?$$

Решение. Имеем

$$(x-3)^2 + \left(\frac{|x|}{x} - 2 + a \right)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (a-3)^2 = 25, \text{ где } x < 0, \\ (x-3)^2 + (a-1)^2 = 25, \text{ где } x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

На координатной плоскости $(x; a)$ построим множество точек,

удовлетворяющих совокупности (1).

1) Графиком уравнения $(x-3)^2 + (a-3)^2 = 25$, где $x < 0$, (2) является часть окружности с центром в точке (3; 3) и радиусом $R = 5$.

Точку пересечения графика уравнения (2) с осью Ox находим из системы

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (a-3)^2 = 25, \text{ где } x < 0, \\ a = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 = 16, \text{ где } x < 0, \\ a = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ a = 0. \end{cases}$$

Итак, точка пересечения графика уравнения (2) с осью Ox – это точка $(-1; 0)$.

Точки пересечения графика уравнения $(x-3)^2 + (a-3)^2 = 25$ с осью Oa находим из системы

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (a-3)^2 = 25, \\ x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 = 16, \\ x = 0. \end{cases}$$

Итак, точки пересечения графика уравнения $(x-3)^2 + (a-3)^2 = 25$ с осью Oa – это точки $(0; -1)$, $(0; 7)$. Отметим: точки $(0; -1)$, $(0; 7)$ не принадлежит части окружности $(x-3)^2 + (a-3)^2 = 25$, где $x < 0$.

Строим часть окружности $(x-3)^2 + (a-3)^2 = 25$, где $x < 0$, учитывая, что окружность проходит через точки $(-1; 0)$, $(0; -1)$, $(0; 7)$, $(-2; 3)$.

2) Графиком уравнения $(x-3)^2 + (a-1)^2 = 25$, где $x > 0$, (3) является часть окружности с центром в точке (3; 1) и радиусом $R = 5$.

Точку пересечения графика уравнения (3) с осью Ox находим из системы

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (a-1)^2 = 25, \text{ где } x > 0, \\ a = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 = 24, \text{ где } x > 0, \\ a = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{24}, \\ a = 0. \end{cases}$$

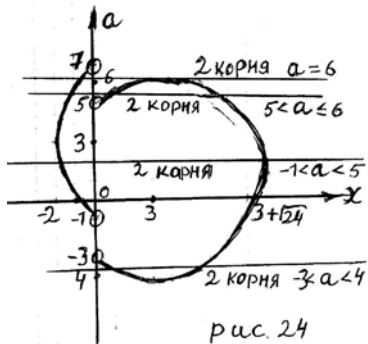
Итак, точка пересечения графика уравнения (3) с осью Ox – это точка $(3 + \sqrt{24}; 0)$.

Точки пересечения графика уравнения $(x-3)^2 + (a-1)^2 = 25$ с осью Oa находим из системы

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (a-1)^2 = 25, \\ x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 = 16, \\ x = 0. \end{cases}$$

Итак, точки пересечения графика уравнения $(x-3)^2 + (a-1)^2 = 25$

с осью $0a$ – это точки $(0; -3)$, $(0; 5)$. *Отметим:* точки $(0; -3)$, $(0; 5)$ не принадлежит части окружности $(x-3)^2 + (a-1)^2 = 25$, где $x > 0$.



Строим часть окружности $(x-3)^2 + (a-1)^2 = 25$, где $x > 0$, учитывая, что окружность проходит через точки: $(0; -3)$, $(0; 5)$, $(3 + \sqrt{24}; 0)$, $(3; 6)$, $(3; -4)$, $(8; 1)$.

Из рисунка 24 следует ответ.

Ответ. Уравнение имеет два различных корня, если $a \in (-3; 4) \cup (-1; 5] \cup \{6\}$.

42. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|6x - 2x^2 + a| = 3$ имеет 1) два решения; 2) четыре решения.

Решение. Имеем

$$|6x - 2x^2 - a| = 3 \Leftrightarrow |2(x^2 - 3x) + a| = 3 \Leftrightarrow |2(x - 1,5)^2 + (a - 4,5)| = 3.$$

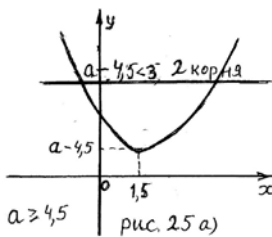
Построим график функции $y = 2 \left| (x-1,5)^2 + 0,5(a-4,5) \right|$.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $0,5(a-4,5) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 4,5$. Тогда

$$2(x-1,5)^2+(a-4,5)\geq 0\Leftrightarrow\left|2(x-1,5)^2+(a-4,5)\right|=2(x-1,5)^2+(a-4,5).$$

Из последнего равенства следует, что графиком функции



$y = \left| 2(x-1,5)^2 + (a-4,5) \right|$, где $a \geq 4,5$, является парабола

$y = 2(x - 1,5)^2 + (a - 4,5)$, с вершиной в точке $(1,5; a - 4,5)$,

которая расположена не ниже оси абсцисс, ветви параболы направлены вверх. График функции

$y = 2(x - 1,5)^2 + (a - 4,5)$, где $a \geq 4,5$, при некотором значе-

нии параметра a , изображён на рисунке 25 а). Из рисунка следует: графики функций $y = 2(x - 1,5)^2 + (a - 4,5)$, где $a \geq 4,5$, и $y = 3$ пересекаются в двух точках, если

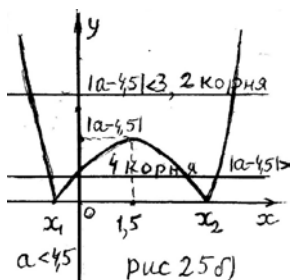
$$\begin{cases} a \geq 4,5, \\ a - 4,5 < 3; \end{cases} \Leftrightarrow 4,5 \leq a < 7,5.$$

Итак, если $4,5 \leq a < 7,5$, то исходное уравнение имеет два решения.

2) Пусть $0,5(a-4,5) < 0 \Leftrightarrow a < 4,5$.

Графиком функции $y = 2(x - 1,5)^2 + (a - 4,5)$, где $a < 4,5$, является парабола с вершиной в точке $(1,5; a - 4,5)$, которая расположена ниже оси абсцисс. Тогда парабола пересекает ось абсцисс в двух точках: x_1, x_2 .

График функции $y = |2(x - 1,5)^2 + (a - 4,5)|$, где $a < 4,5$, при некотором значении параметра a , изображён на рисунке 25 б). Из рисунка 25 б) следует: графики функций $y = |2(x - 1,5)^2 + (a - 4,5)|$, где $a < 4,5$, и $y = 3$ пересекаются в двух точках, если



$$\begin{cases} a < 4,5, \\ |a - 4,5| < 3; \end{cases} \Leftrightarrow 1,5 < a < 4,5.$$

Итак, если $1,5 < a < 4,5$, то исходное уравнение имеет два решения.

Из рисунка 25 б) следует: графики функций $y = |2(x - 1,5)^2 + (a - 4,5)|$, где $a < 4,5$, и $y = 3$ пересекаются в четырёх точках, если

$$\begin{cases} a < 4,5, \\ |a - 4,5| > 3; \end{cases} \Leftrightarrow a < 1,5.$$

Итак, если $a \in (-\infty; 1,5)$, то исходное уравнение имеет четыре решения.

Ответ. 1) Два решения, если $a \in (1,5; 4,5) \cup (4,5; 7,5)$; 2) четыре решения, если $a \in (-\infty; 1,5)$.

43. Найдите все значения параметра a , при которых имеет единственное решение уравнение $2x^2 - a \operatorname{tg} \cos x + a^2 = 0$ (1).

Решение. Пусть $f(x) = 2x^2 - a \operatorname{tg} \cos x + a^2$. Функция $f(x)$ чётная, так как $f(-x) = f(x)$ и $x \in (-\infty; \infty)$. Так как $f(x)$ чётная функция, то уравнение (1) может иметь единственное решение, если $x = 0$ является решением этого уравнения. Если $x = 0$ является решением уравнения (1), то

$$-a \operatorname{tg} 1 + a^2 = 0 \Leftrightarrow a(a - \operatorname{tg} 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = \operatorname{tg} 1. \end{cases}$$

Определим, при каких значениях $a \in \{0; \operatorname{tg} 1\}$ имеет единственное решение уравнение (1).

1) Если $a = 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение, так как в этом случае уравнение (1) принимает вид $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) Если $a = \operatorname{tg} 1$, то уравнение (1) принимает вид

$$2x^2 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} \cos x + \operatorname{tg}^2 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = \operatorname{tg} 1 \cdot (\operatorname{tg} \cos x - \operatorname{tg} 1).$$

Отметим: $\operatorname{tg} 1 > 0$. Оценим $\operatorname{tg} 1 \cdot (\operatorname{tg} \cos x - \operatorname{tg} 1)$. Так как $-1 \leq \cos x \leq 1$ и функция $\operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, то $-\operatorname{tg} 1 \leq \operatorname{tg} \cos x \leq \operatorname{tg} 1$. Тогда $\operatorname{tg} 1 \cdot (\operatorname{tg} \cos x - \operatorname{tg} 1) \leq 0$.

Так как $\operatorname{tg} 1 \cdot (\operatorname{tg} \cos x - \operatorname{tg} 1) \leq 0$, то уравнение $2x^2 = \operatorname{tg} 1 \cdot (\operatorname{tg} \cos x - \operatorname{tg} 1)$ (2) имеет решение только, если $\operatorname{tg} 1 \cdot (\operatorname{tg} \cos x - \operatorname{tg} 1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \cos x - \operatorname{tg} 1 = 0$. Тогда уравнение (2) принимает вид $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Итак, если $\underline{a = \operatorname{tg} 1}$, то уравнение (1) имеет единственное решение.

Ответ. $a \in \{0; \operatorname{tg} 1\}$.

44. Найдите все значения параметра a , для которых, если $x \in (4; \infty)$, то для всех $b < 0$ существует решение уравнения

$$a \log_{(1-2x^{-1})} 4 - \log_4 (1 - 2x^{-1}) - b = 0.$$

Решение. Отметим: так как $1 - 2x^{-1} \neq 1$, то $\log_4 (1 - 2x^{-1}) \neq 0$.

Пусть $\log_4 (1 - 2x^{-1}) = t$.

Отметим. Так как функции $u = 1 - 2x^{-1}$, где $x > 4$, $\log_4 u$ возрастают, то и функция $\log_4 (1 - 2x^{-1})$ возрастает.

Так как функция $\log_4 (1 - 2x^{-1})$ возрастает, то имеем

$$\begin{aligned} x > 4 &\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{2}{x} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \log_4 \left(1 - \frac{2}{x}\right) < 0 \stackrel{t = \log_4 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2} < t < 0. \end{aligned}$$

Итак, если $x > 4$, то $-0,5 < t < 0$.

Так как $\log_{(1-2x^{-1})} 4 = \log_4^{-1} (1 - 2x^{-1})$, то исходное уравнение принимает вид $a/t - t - b = 0 \stackrel{t \neq 0}{\Leftrightarrow} t^2 + bt - a = 0$.

Надо найти все значения параметра a , для которых для всех $b < 0$ существует решение уравнения $t^2 + bt - a = 0$, где $-0,5 < t < 0$. (1)

Пусть $f(t) = t^2 + bt - a$.

Графиком функции $f(t)$ является парабола, абсциссой вершины

которой является $t_g = -0,5b$. Так как $b < 0$, то $t_g > 0$.

1) Если $D = 0$, то уравнение $t^2 + bt - a = 0$, имеет положительный корень $t = t_g > 0$, который не принадлежит интервалу $(-0,5; 0)$.

2) Если $D > 0$, то уравнение $t^2 + bt - a = 0$ имеет два корня. Так как $t_g > 0$, то больший корень уравнения (1) положительный. Уравнение $t^2 + bt - a = 0$, где $-0,5 < t < 0$, имеет решение, если меньший корень уравнения принадлежит интервалу $(-0,5; 0)$. Тогда имеем

$$\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(-0,5) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a < 0, \\ 0,25 - 0,5b - a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 0,5b < 0,25 - a. \end{cases}$$

Второе неравенство системы с учётом, что $a > 0$, выполняется для всех $b < 0$, если $\begin{cases} a > 0, \\ 0,25 - a \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq 0,25$.

Ответ. $0 < a \leq 0,25$.

45. Найдите все значения параметра a , при которых имеет единственный корень уравнение $x^2 + (a + 4)^2 = |x - 4 - a| + |x + 4 + a|$ (1).

Решение. Так как x и $-x$ являются одновременно корнем уравнения (1) (так как $|-x - 4 - a| = |x + 4 + a|$ и $|-x + 4 + a| = |x - 4 - a|$), то уравнение (1) имеет нечётное число корней, если $x = 0$ является корнем уравнения (1).

Если $x = 0$ является корнем уравнения (1), то

$$0^2 + (a + 4)^2 = |0 - 4 - a| + |0 + 4 + a| \Leftrightarrow |a + 4|^2 - 2|a + 4| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |a + 4| = 0, \\ |a + 4| = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4, \\ a = -2, \\ a = -6. \end{cases}$$

Итак, если $a \in \{-6; -4; -2\}$, то уравнение (1) имеет нечётное число корней.

Рассмотрим уравнение (1), если $a \in \{-6; -4; -2\}$ и определим, при каких значениях a уравнение (1) имеет единственный корень.

а) Если $a = -6$, то уравнение (1) принимает вид

$$x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2| \quad (2)$$

Уравнение (2) равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 + 4 = -x - 2 - x + 2, \text{ если } x \leq -2, \\ x^2 + 4 = x + 2 - x + 2, \text{ если } -2 < x \leq 2, \\ x^2 + 4 = x + 2 + x - 2, \text{ если } x > 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 4 = 0, \text{ если } x \leq -2, \\ x^2 = 0, \text{ если } -2 < x \leq 2, \\ x^2 - 2x + 4 = 0, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Так как первое и третье уравнения совокупности не имеют корней, а второе уравнение имеет единственный корень $x = 0$, то $a = -6$ удовлетворяет условию задачи.

б) Если $a = -4$, то уравнение (1) принимает вид

$$x^2 = |x| + |x| \Leftrightarrow |x|(|x| - 2) = 0.$$

Последняя уравнение, а значит и уравнение (1), если $a = -4$, имеет три корня: $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$. Это означает, что $a = -4$ не удовлетворяет условию задачи.

в) Если $a = -2$, то уравнение (1) принимает вид

$$x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2| \quad (2)$$

Уравнение (2) решено в пункте а). Тогда $a = -2$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $a \in \{-6; -2\}$

Упражнения

1. Решите уравнение $\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x-1} = \frac{3}{x-a}$.

Ответ. $x \in \emptyset$, если $|a| > 2\sqrt{2}/3$; $x = -5/3$, если $a = -1$; $x = -(2\sqrt{2} + 1)/3$, если $a = -2\sqrt{2}/3$; $x = (2\sqrt{2} + 1)/3$, если $a = 2\sqrt{2}/3$; $x = 1/3$, если $a = 1$;
 $x_{1,2} = \frac{(3a-1) \pm \sqrt{9a^2 - 8}}{3}$, если $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; -2\sqrt{2}/3) \cup (2\sqrt{2}/3; 1) \cup (1; \infty)$.

2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $2x^2 - x + 2a = 0$ и $4a^2x^2 - ax + a = 0$ имеют общий корень.

Ответ. $a \in \{-0,25(2 + \sqrt{2}); 0; -0,25(2 - \sqrt{2})\}$.

3. При каких значениях параметра a равносильны уравнения $x^2 + 2(a-3)x + (a^2 - 7a + 12) = 0$ и $x^2 + (a^2 - 5a + 6)x = 0$?

Ответ. $a \in \{3; 4\}$.

4. Найдите все пары a и c , при которых уравнение $x^2 + cx - 8c = 0$ является следствием уравнения $x^2 - ax + a = 0$.

Ответ. $0 < a < 4$, c — любое; $a = 0$, $c = 0$; $a = 4$, $c = 2 \pm \sqrt{2}$; $a = -64$, $c = 8$.

5. При каких значениях параметра a из того, что x является корнем уравнения $4x^2 - 2(a-3)x + (a+2) \cdot (2a-1) = 0$ вытекает, что x не является корнем уравнения $|x - 2a| + |x + a| = 3|a|$?

Ответ. $a \in (-0,5; 0,25)$.

6. При каких значениях параметра a имеет более двух корней уравнение $(a^2 - 6a + 8)x^2 + (a^2 - 4)x + (10 - 3a - a^2) = 0$?

Ответ. $a = 2$.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два корня.

Ответ. $a \in (0; 1/\sqrt[3]{36})$.

8. Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a .

Ответ. $a < -2$.

9. Найдите наименьшее значения параметра a , при котором корни x_1, x_2 уравнения $x^2 + ax + 6 = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Ответ. $a = -5$.

10. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей?

Ответ. $a = -3$.

11. Найдите наименьшее целое a , при котором сумма кубов корней уравнения $x^2 + (a + 2)x + 3a + 1 = 0$ меньше, чем $5a - 2$.

Ответ. $a = 8$.

12. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $x^2 + 2(a^2 + 4a)x + 8a^3 + 18a^2 + 63 = 0$ является наибольшей?

Ответ. $a = -3$.

13. Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$ удовлетворяют условию $|x| < 1$.

Ответ. $a \in \{0\} \cup (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5})$.

14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $((x - a - 1)^2 - 2)(x - a - 1)^2 = a^2 - 1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

Ответ. $a \geq 0$.

15. Найдите все значения параметра a , при которых все решения уравнения $x^4 + (3a - 2)(x + 1)x^2 + (2a^2 - a - 3)(x + 1)^2 = 0$ (1) удовлетворяет условию $-3 \leq x \leq 0$.

Ответ. $a = 1,5$ или $3 \leq a \leq 3,5$.

16. Найдите все значения параметра a , при которых на промежутке $(-1; 1]$ имеет ровно три корня уравнение $4a^2x^4 + 2(a-4)x^2 + a + |a| = 0$.

Ответ. $a = 1$ или $a < -0,25(1 + \sqrt{33})$.

17. Найдите все значения параметра, при которых корни уравнения $(a-1)\log_3^2(x-2) - 2(a+1)\log_3(x-2) + a-3 = 0$ меньше 3.

Ответ. $1/3 \leq a \leq 1$.

18. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(a^2 + 1)\sin^2 x + 2a^2 \sin x + 0,5 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ. $|a| \geq 1$.

19. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x - (a+3) = 0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ. $-3 \leq a \leq 2$.

20. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x|x+2a| + 1 - a = 0$ имеет единственное решение.

Ответ. $a \in (-\infty; 0,5(\sqrt{5}-1)) \cup (1; \infty)$.

21. Найдите все значения a , для которых для всех $b > 0$ существует решение уравнения $a \log_{(1-x-x^2)} 2 + b = \log_2(1-x-x^2)$, если $x \in (0; 0,5)$.

Ответ. $a \in (0; 4]$.

22. Найдите все значения a , при которых имеет хотя бы один корень уравнение $a^2 + 11|x+2| + 3\sqrt{x^2 + 4x + 13} = 5a + 2|x-2a+2|$.

Ответ. $a \in [0,5(9-3\sqrt{5}); 0,5(9+3\sqrt{5})]$.

23. Найдите все значения a , при которых уравнение $x^2 + (a+4)^2 = |x-4-a| + |x+4+a|$ имеет единственный корень.

Ответ. $a \in \{-4; 0\}$.

24. Найдите все значения a , при которых уравнение $\sqrt{-35+12x-x^2} + 10a = ax + 1$ имеет единственное решение.

Ответ. $a \in [1/5; 1/3) \cup \{0\}$.

25. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|x^2 + 2x + a| = 2$ имеет четыре различных корня.

Ответ. $a \in (-\infty; -1)$.

26. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a - 5 = 0$ имеет два различных положительных корня.

Ответ. $a \in (7; \infty)$.

27. Найдите все значения параметра, при которых имеет единственный корень уравнение $\lg(x^2 + 2ax) - \lg(18x - 6a - 3) = 0$.

Указание. $\lg(x^2 + 2ax) - \lg(18x - 6a - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax = 18x - 6a - 3, \\ x^2 + ax > 0. \end{cases}$

Рассмотреть случаи $a = 0$; дискриминант уравнения системы равен нулю; если $a < 0$, то один корень меньше нуля, а другой принадлежит интервалу $(0; -2a)$; если $a > 0$, то один корень меньше $-2a$, а другой принадлежит интервалу $(-2a; 0)$.

Ответ. $a \in [-1/2; -3/22] \cup \{1\}$.

28. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{5a + \sqrt{5a - x - 0,25x^2}} + x + 0,25x^2 = 0$ имеет решение.

Указание. Пусть $t = -x - 0,25x^2$, где $t \leq 1$. Тогда уравнение принимает вид

$$\begin{cases} \sqrt{5a + \sqrt{5a + t}} = t, \\ t \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + t = (t^2 - 5a)^2, \\ t^2 \geq 5a, \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Уравнение системы равносильно относительно a квадратному уравнению $25a^2 - 5a(2t^2 + 1) + t^4 - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = t^2 + t + 1, \\ 5a = t^2 - t. \end{cases}$

Так как $t^2 \geq 5a$ и $0 \leq t \leq 1$, то $t^2 - 5a + t + 1 > 0$. Тогда последняя система равносильна системе $\begin{cases} t^2 - t - 5a = 0, \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$

Ответ. $a \in (-1/20; 0)$.

29. Число a подобрано таким образом, что имеет решение уравнение $\sqrt{x - \sqrt{a^{-1}}} + a^2x^2 + 2ax(\sqrt{2} - \sqrt{10}) = 4\sqrt{5} - 12$. Найдите это решение.

Указание. Уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x - \sqrt{a^{-1}}} + (ax + \sqrt{2} - \sqrt{10})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - \sqrt{a^{-1}}} = 0, \\ ax + \sqrt{2} - \sqrt{10} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } a = 4(3 - \sqrt{5}), x = (\sqrt{10} + \sqrt{2})/8.$$