

**Московский Государственный
Технический Университет
имени Н.Э.Баумана**

Специализированный Учебно-научный центр

**ГОО Лицей № 1580 при МГТУ имени Н.Э.
Баумана**

**А.В. Афанасьева, Э.Н. Белянова, С.Н. Дарьина,
В.В. Кузнецов, Л.А. Шишкина**

Квадратный трехчлен

и

задачи с параметрами

Москва

2011 г.

В методическом пособии рассматриваются основные свойства квадратного трехчлена, вопросы расположения корней на числовой оси.

Приводятся методы решения задач с параметрами, основывающиеся на рассмотренных свойствах. Весь материал иллюстрируется большим количеством примеров.

Предназначено для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики, слушателей подготовительных курсов, абитуриентов, готовящихся к поступлению в технические университеты, а также для преподавателей математики.

Издается в соответствии с планом выпуска методической литературы кафедры «Математика» Специализированного учебно-научного центра МГТУ имени Н.Э.Баумана

Рецензент Воблый В.А.

*Афанасьева Анна Владимировна
Белянова Эльвира Николаевна
Дарьина Светлана Николаевна
Кузнецов Владимир Владимирович
Шишкина Людмила Алексеевна*

Квадратный трехчлен и задачи с параметрами.

Москва. МГТУ 2008г.

**Редактор Денежкина И.Е.
Корректор Белянова Э.Н.
Компьютерная верстка Рожина А.С.**

Содержание

Глава 1. Корни квадратного уравнения	4
Введение	4
§1. Алгоритм выделения полного квадрата.....	4
§2. График квадратного трехчлена	9
§3. Квадратичные неравенства	15
 Глава 2. Теорема Виета.....	22
§4. Соотношение между корнями и коэффициентами квадратного уравнения	22
§5. Квадратное уравнение с параметром	27
 Глава 3. Квадратные уравнения с ограничением на корни.....	35
§6. Расположение корней относительно числа.....	35
§7. Расположение корней относительно отрезка.....	62
§8. Взаимное расположение корней двух квадратных трехчленов.....	80
 Глава 4. Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена.....	98
§9. Квадратные неравенства с параметрами.....	98

Глава I. Корни квадратного трёхчлена

Введение

Функция, ставящая каждому действительному числу x в соответствие значение выражения $ax^2 + bx + c$, называется квадратичной функцией или **квадратным трёхчленом**. Здесь переменная x может принимать любые действительные значения. Что же касается коэффициентов a , b и c , то они обозначают наперед выбранные действительные числа, остающиеся неизменными при всех изменениях переменной. Буквы a , b называют соответственно квадратичным и линейным коэффициентами, а c – свободным членом, причем предполагается, что $a \neq 0$.

Значения переменной x , при которых квадратный трёхчлен обращается в нуль, называют его **корнями**. Для нахождения корней квадратного трёхчлена необходимо решить квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

Говорят, что уравнение (1) **неприведенное**, если $a \neq 1$, и **приведенное** в противоположном случае. Квадратные уравнения $ax^2 = 0$, $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ называют **неполными**.

§1. Алгоритм выделения полного квадрата

Рассмотрим алгоритм выполнения одного из важных преобразований, имеющий применение в ряде приложений.

Теорема 1. (Выделение полного квадрата). Любой квадратный трёхчлен $y = ax^2 + bx + c$ можно привести к каноническому виду $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

⊗ Выделим в выражении $ax^2 + bx + c$ полный квадрат относительно переменной x . Для этого вначале вынесем за скобки квадратичный коэффициент, поскольку $a \neq 0$. Затем прибавим и вычтем выражение $\frac{b^2}{4a^2}$ (квадрат половины вновь полученного линейного коэффициента). Далее, заменяя выражение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ на тождественно равное $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, приводим оставшиеся два члена к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \quad (2) \end{aligned}$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом** квадратного трёхчлена (квадратного уравнения). Обозначив $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, получим искомый канонический вид трёхчлена. $\oplus$

Покажем теперь, как алгоритм выделения полного квадрата позволяет проводить исследование квадратного трёхчлена на экстремум.

Теорема 2. Если $a > 0$ ($a < 0$), то функция $y = ax^2 + bx + c$ при $x_0 = -\frac{b}{2a}$

имеет наименьшее (наибольшее) значение, равное

$$y_0 = -\frac{D}{4a}.$$

$\otimes$ Для изучения возможного изменения значений квадратного трёхчлена применим алгоритм выделения полного квадрата. Тогда в соответствии с формулой (2) имеем

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Рассмотрим вначале случай, когда $a > 0$. Тогда в последней формуле первое слагаемое $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ неотрицательно, а, следовательно, при любом значении аргумента функция не может принимать значений меньших, чем $-\frac{D}{4a}$. При этом при $x_0 = -\frac{b}{2a}$ квадратный трёхчлен принимает **наименьшее значение**, равное $y_0 = -\frac{D}{4a}$. В этом случае квадратный трёхчлен не имеет наибольшего значения.

Пусть теперь $a < 0$. Тогда, дословно аналогично, первое слагаемое неположительно, а значение функции не может быть большим, чем $-\frac{D}{4a}$.

Следовательно, при $x_0 = -\frac{b}{2a}$ квадратный трёхчлен принимает **наибольшее значение** $y_0 = -\frac{D}{4a}$ и не имеет наименьшего. $\oplus$

Выясним теперь, когда, в зависимости от своих коэффициентов, квадратный трёхчлен имеет корни, сколько их и какие они.

Теорема 3. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с действительными коэффициентами всегда имеет два корня, причём корни

- действительны и различны, если $D > 0$,
- действительны и совпадают, если $D = 0$,
- комплексно сопряжены, если $D < 0$.

⊗ Согласно алгоритму выделения полного квадрата, заменим неприведённое квадратное уравнение равносильным ему неполным квадратным уравнением относительно $x + \frac{b}{2a}$, учитывая, что $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (3)$$

Левая часть неполного уравнения является квадратом, а потому его решение существенно зависит от знака правой части. Так как знаменатель правой части всегда положителен, то её знак определяется числителем, а, значит, дискриминантом квадратного уравнения. Здесь возможны три случая, каждый из которых рассмотрим в отдельности.

1) $b^2 - 4ac > 0$. Если $D > 0$, то $\frac{D}{4a^2} > 0$. А, значит, существуют арифметический и алгебраический корни, соответственно $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ и $-\frac{\sqrt{D}}{2a}$, квадрат каждого из которых равен левой части неполного уравнения.

Перенесём в уравнении (3) все слагаемые в левую часть и разложим на множители, как разность квадратов. Полученное таким образом уравнение равносильно совокупности двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0 \\ x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

Следовательно, при положительном дискриминанте квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, определяемых по формуле (4).

2) $b^2 - 4ac = 0$. Если $D = 0$, то уравнение (3) принимает вид $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, откуда это уравнение, а, следовательно, и исходное, будет иметь один двукратный действительный корень $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.

3) $b^2 - 4ac < 0$. Если $D < 0$, то $\frac{D}{4a^2} < 0$. Поскольку квадрат никакого действительного числа не может быть отрицательным, то при отрицательном дискриминанте квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Представим теперь правую часть уравнения (3) в виде $-\frac{D}{4a^2}i^2$, где i – мнимая единица ($i^2 = -1$). Тогда, поскольку $-D > 0$, имеем

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = i^2 \left(\frac{\sqrt{-D}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b+i\sqrt{-D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-i\sqrt{-D}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-D}}{2a} \end{cases}$$

Следовательно, при отрицательном дискриминанте квадратное уравнение имеет два комплексно–сопряжённых корня. $\oplus$

Следствие 1. Действительные корни неприведенного квадратного уравнения с чётным линейным коэффициентом $b=2k$, $k \in \mathbb{Z}$ определяются по формуле $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Следствие 2. Действительные корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ определяются по формуле $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Следствие 3. Квадратный трёхчлен можно разложить на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Пример 1. Решить квадратное уравнение $3x^2 - 11x - 20 = 0$ выделением полного квадрата.

Решение. Рассмотрим квадратный трёхчлен $3x^2 - 11x - 20$ и воспользуемся алгоритмом выделения полного квадрата

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 11x - 20 = \\ & \text{(вынесение за скобки квадратного коэффициента)} \\ & = 3\left(x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{20}{3}\right) = \\ & \text{(прибавление и вычитание квадрата половины} \\ & \text{полученного линейного коэффициента)} \\ & = 3\left(x^2 - \frac{11}{3}x + \left(\frac{11}{6}\right)^2 - \left(\frac{11}{6}\right)^2 - \frac{20}{3}\right) = \\ & \text{(выделение полного квадрата)} \\ & = 3\left(\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{121+240}{36}\right) = \\ & \text{(приведение к общему знаменателю)} \\ & = 3\left(\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{361}{36}\right) \end{aligned}$$

Решаем теперь равносильное неполное уравнение:

$$\begin{aligned} 3\left(\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{361}{36}\right) &= 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{361}{36} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{6}\right)^2 = \frac{361}{36} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x - \frac{11}{6} = \pm \frac{19}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 2. Провести выделение полного квадрата для функции $y = 2x^2 + 8x + 9$. Найти её наименьшее значение.

Решение: Вынесем за скобку 2 (квадратичный коэффициент), а затем прибавим и вычтем 4, тем самым дополняя выражение $x^2 + 4x$ до полного квадрата. Раскрывая скобки, получаем искомое:

$$\begin{aligned} y = 2x^2 + 8x + 9 &= 2\left(x^2 + 4x + \frac{9}{2}\right) = 2\left(x^2 + 4x + 4 - 4 + \frac{9}{2}\right) = \\ &= 2\left((x+2)^2 + \frac{1}{2}\right) = 2(x+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Следовательно, наименьшее значение равно 1 при $x = -2$.

Квадратный трёхчлен широко используется в многочисленных приложениях. Рассмотрим круг задач, где используется уравнение с двумя переменными, являющееся квадратным относительно каждой из переменных. Успех решения таких задач заключается в умении увидеть в сложном буквенном выражении квадратный трёхчлен и провести его преобразование.

Пример 3. Изобразить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $8x^2 - 6xy + y^2 = 0$.

Решение: левая часть уравнения в общем случае представляет собой кривую второго порядка. Воспользуемся алгоритмом выделения полного квадрата:

$$\begin{aligned} 8x^2 - 6xy + y^2 &= 8\left(x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{1}{8}y^2\right) = 8\left(x^2 - \frac{3}{4}xy + \left(\frac{3}{8}y\right)^2 - \left(\frac{3}{8}y\right)^2 + \frac{1}{8}y^2\right) = \\ &= 8\left(\left(x - \frac{3}{4}y\right)^2 - \frac{9}{64}y^2 + \frac{1}{8}y^2\right) = 8\left(\left(x - \frac{3}{4}y\right)^2 - \frac{1}{64}y^2\right) = \\ &= 8\left(x - \frac{3}{4}y - \frac{1}{8}y\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{8}y\right) = 8\left(x - \frac{1}{2}y\right) \cdot \left(x - \frac{1}{4}y\right) \end{aligned}$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух линейных:

$$8\left(x - \frac{1}{2}y\right) \cdot \left(x - \frac{1}{4}y\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 0 \\ x - \frac{1}{4}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 4x \end{cases}$$

Отсюда искомое множество точек представляет собой объединение двух прямых, пересекающихся в начале координат.

Пример 4. Изобразить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $4x^2 + 4y^2 + 8x - 24y + 39 = 0$.

Решение: вначале дополним до полного квадрата выражение $4x^2 + 8x$:

$$\begin{aligned} 0 &= 4(x^2 + 2x) + 4y^2 - 24y + 39 = 4(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4y^2 - 24y + 39 = \\ &= 4(x^2 + 2x + 1) - 4 + 4y^2 - 24y + 39 = 4(x+1)^2 + 4y^2 - 24y + 35 \end{aligned}$$

Затем дополним до полного квадрата члены, зависящие от переменной y :

$$\begin{aligned}
0 &= 4(x+1)^2 + 4(y^2 - 6y) + 35 = 4(x+1)^2 + 4(y^2 - 6y + 9 - 9) + 35 \\
&= 4(x+1)^2 + 4(y^2 - 6y + 9) - 36 + 35 = 4(x+1)^2 + 4(y-3)^2 - 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4(x+1)^2 + 4(y-3)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Отсюда искомое множество точек представляет собой окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке с координатами $(-1; 3)$.

Пример 5. Изобразить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Решение: рассмотрим наше уравнение как квадратное относительно переменной x

$$5x^2 - 2(y+1)x + 2y^2 - 2y + 1 = 0$$

Вычислим его дискриминант по формуле для уравнения с чётным линейным коэффициентом:

$$\begin{aligned}
D &= (y+1)^2 - 5(2y^2 - 2y + 1) = y^2 + 2y + 1 - 10y^2 + 10y - 5 = \\
&= -9y^2 + 12y - 4 = -(3y - 2)^2
\end{aligned}$$

Так как дискриминант неположителен, то единственное действительное значение x будет при нулевом дискриминанте, то есть при $y_0 = \frac{2}{3}$. Подставляя это значение в исходное уравнение, находим $x_0 = \frac{1}{3}$. Таким образом, искомое множество представляет собой точку с координатами $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.

§2. График квадратного трёхчлена

Прежде чем вести речь о графике квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ в общем случае, рассмотрим график функции $f(x) = ax^2$. Эта функция определена при всех значениях переменной, причём при $x = 0$ и $x = \pm 1$ принимает значения, равные, соответственно, нулю и a . Функция **чётная**, так как $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$, а поэтому её график симметричен относительно оси ординат. Поэтому изучение $f(x)$ будем проводить не на всём промежутке $(-\infty, +\infty)$, а только на положительной полуоси.

Пусть $a > 0$. Покажем, что в этом случае $y = ax^2$ принимает любое неотрицательное значение при произвольном $x \in [0, +\infty)$. Из равенства $y_0 = ax^2$ найдём $x_0 = \sqrt{\frac{y_0}{a}}$. Таким образом, $y = ax^2$ принимает все значения, принадлежащие промежутку $[0, +\infty)$ без каких-либо пропусков и только их, а, следовательно, указанный промежуток является областью изменения функции. Заметим, что если $y = ax^2$ принимает некоторое значение y_0 , то функция принимает и любое другое, как угодно мало отличающееся от не-

го значение. В дальнейшем будет доказано, что если в какой-либо точке x_0 значение функции есть ax_0^2 , то для значений x аргумента, достаточно близких к x_0 , соответствующее значение функции ax^2 будет как угодно близко к ax_0^2 . Это свойство называют **непрерывностью** функции. Именно это свойство позволяет при построении графика $f(x) = ax^2$ соединять близкие его точки плавной линией и даёт уверенность, что график есть сплошная линия (континуум), а не дискретный ряд точек. Покажем теперь, что $f(x)$ при $x > 0$ **монотонно возрастает**. Действительно, если x_1, x_2 — произвольные значения аргумента, такие, что $0 < x_1 < x_2$, то

$$\begin{cases} x_2 - x_1 > 0 \\ x_2 + x_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 > 0 \Leftrightarrow ax_1^2 < ax_2^2$$

Получено, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. И, наконец, для выяснения характера графика исследуем $f(x)$ на выпуклость. Если x_1, x_2 — произвольные, не равные между собой значения аргумента, то

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} &= \frac{ax_1^2 + ax_2^2}{2} = \frac{a}{4}(2x_1^2 + 2x_2^2) = \frac{a}{4}((x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2) > \\ &> \frac{a}{4}(x_1^2 + x_2^2) = a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Получено, что любая дуга графика функции лежит под стягивающей её хордой, то есть функция **выпуклая вниз**. Подведём итоги проведённых исследований для $f(x) = ax^2$, $a > 0$: график функции представляет собой непрерывную, всюду выпуклую вниз линию, расположенную в верхней полуплоскости и симметричную относительно оси ординат; функция монотонно убывает на отрицательной полуоси и монотонно возрастает на положительной, имеет минимум в начале координат (рис. 1).

Дословно аналогично доказывается, что график функции $y = ax^2$ в случае $a < 0$ представляет собой непрерывную, всюду выпуклую вверх линию, расположенную в нижней полуплоскости и симметричную относительно оси ординат, функция монотонно возрастает на отрицательной полуоси и монотонно убывает на положительной, имеет максимум в начале координат (рис. 2).

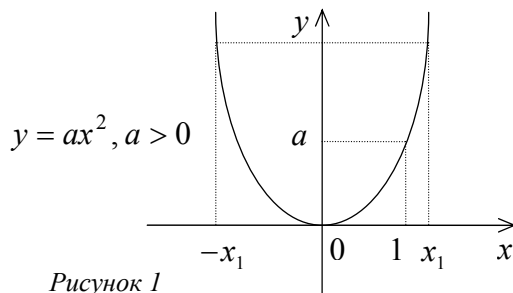


Рисунок 1

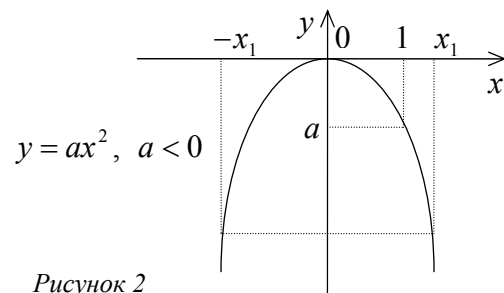


Рисунок 2

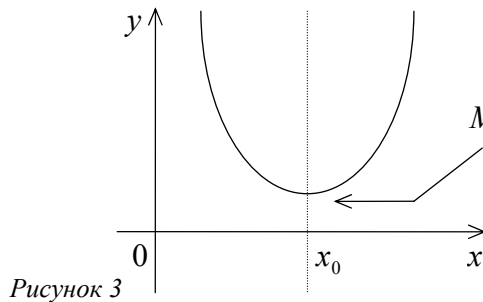


Рисунок 3

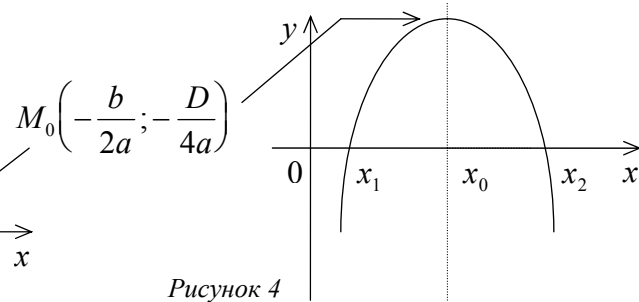


Рисунок 4

Построенные кривые называются **параболами**, при этом ось ординат является осью симметрии, а точку пересечения параболы с осью симметрии называют её **вершиной**.

Для построения графика квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ представим его в виде $y + \frac{D}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, воспользовавшись алгоритмом выделения полного квадрата. Чтобы получить график этой функции из графика $y = ax^2$, необходимо сдвинуть график $y = ax^2$ вдоль оси абсцисс на величину $-\frac{b}{2a}$, а вдоль оси ординат на величину $-\frac{D}{4a}$. Это означает, что графиком квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, симметричная относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$ с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$. При этом знак квадратичного коэффициента определяет направление ветвей параболы: при $a > 0$ они направлены вверх (рис. 3), при $a < 0$ — вниз (рис. 4).

Отметим также полезное для практики утверждение, что если парабола пересекает ось OX , то абсциссу вершины параболы можно определять по формуле $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (рис. 4).

Докажем теперь очень важное для приложений свойство квадратного трёхчлена — сохранять знак в интервалах между и вне его корней.

Теорема 4. Если дискриминант больше нуля, то квадратный трёхчлен в интервале между корнями имеет знак, противоположный знаку квадратичного коэффициента, а вне этого интервала — знак, совпадающий со знаком квадратичного коэффициента.

⊗ По условию теоремы, корни $y = ax^2 + bx + c$ действительны и различны, и пусть для определённости $x_1 < x_2$. Разложим квадратный трёхчлен на линейные множители:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (5)$$

Если $x > x_2$, то и подавно $x > x_1$. Откуда $x - x_1 > 0 \wedge x - x_2 > 0$, а это значит, что $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Поэтому из разложения (5) следует, что знак трёхчлена определяется знаком квадратичного коэффициента.

Если $x < x_1$, то и подавно $x < x_2$. Откуда $x - x_1 < 0 \wedge x - x_2 < 0$, а это значит, что $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Поэтому из разложения (5) следует, что знак трёхчлена определяется знаком квадратичного коэффициента.

Если $x_1 < x < x_2$, то $x - x_1 > 0 \wedge x - x_2 < 0$, а, значит, $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Поэтому из разложения (5) следует, что знак трёхчлена в интервале между корнями противоположен знаку коэффициента a .

Таким образом, в каждой из трёх рассмотренных областей квадратный трёхчлен имеет определённый знак, одинаковый для каждой точки рассматриваемой области. При переходе же из одной области в другую (то есть при переходе через корни x_1, x_2) знак его изменяется на противоположный. ⊕

Дословно аналогично доказывается двойственная теорема.

Теорема 5. Квадратный трёхчлен с комплексно-сопряжёнными корнями имеет постоянный знак, совпадающий со знаком старшего коэффициента.

В заключение покажем, как определить знаки коэффициентов a, b, c квадратного трёхчлена в зависимости от расположения его графика отно-

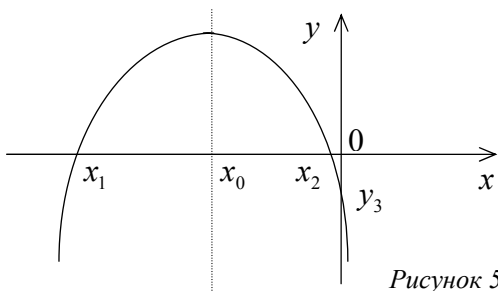


Рисунок 5

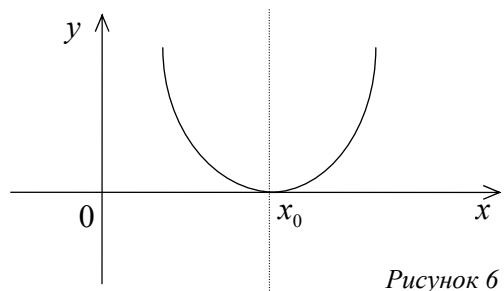


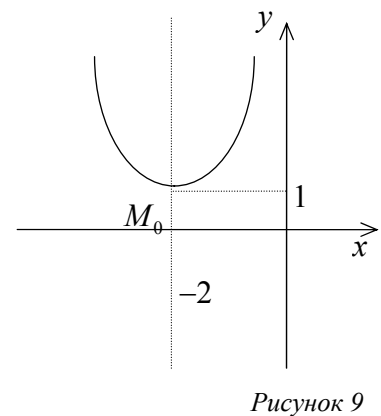
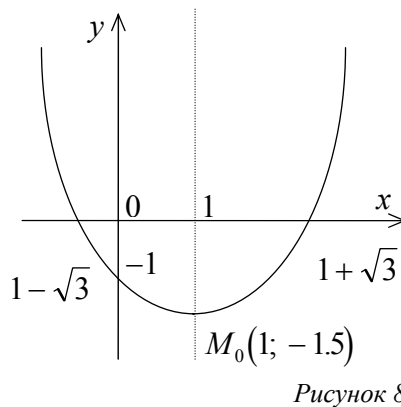
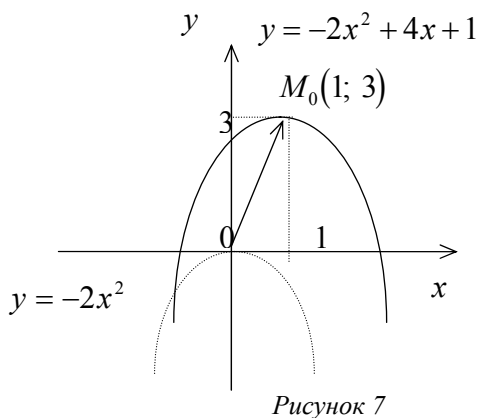
Рисунок 6

сительно координатных осей.

Пусть, к примеру, квадратный трёхчлен имеет график, изображённый на рис. 5. Поскольку ветви параболы направлены вниз, то квадратичный коэффициент $a < 0$. Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}$ меньше нуля, и, следовательно, $b < 0$. Ордината точки пересечения параболы с осью OY

равна значению функции при $x=0$, то есть $y_3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Следовательно, свободный член $c < 0$.

Пусть теперь квадратный трёхчлен имеет график, изображённый на рис.6. Тогда $a > 0$, так как ветви параболы направлены вверх. Линейный коэффициент $b < 0$, так как абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}$ положительна. Свободный член $c > 0$, так как график расположен в верхней полуплоскости и, следовательно, пересекает ось ординат в точке с положительной ординатой.



Подобные рассуждения позволяют определять знаки коэффициентов a, b, c для каждого конкретного расположения параболы.

Пример 6. По графику функции $y = -2x^2$ построить график квадратного трёхчлена $y = -2x^2 + 4x + 1$.

Решение: Вначале построим график функции $y = -2x^2$. Так как квадратичный коэффициент отрицателен, то ветви параболы направлены вниз. Ввиду чётности функции парабола симметрична относительно оси ординат. И, наконец, вершина совпадает с началом координат (рис. 7). Проведём процедуру выделения полного квадрата:

$$\begin{aligned} y &= -2\left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right) = -2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 - \frac{1}{2}\right) = -2\left((x-1)^2 - \frac{3}{2}\right) = \\ &= -2(x-1)^2 + 3 \Leftrightarrow y-3 = -2(x-1)^2 \end{aligned}$$

Искомый график получается из графика функции $y = -2x^2$ параллельным переносом на вектор $\overline{OM_0} = (1; 3)$. Поэтому вершина искомой параболы будет находиться в точке M_0 , а её ось симметрии – прямая $x = 1$.

Пример 7. Построить график функции $y = 0.5x^2 - x - 1$.

Решение: Так как дискриминант рассматриваемого квадратного трёхчлена положителен, то функция имеет два действительных корня $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Поэтому абсциссу вершины параболы легко определить по формуле $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1$. Подставляя x_0 в квадратный трёхчлен, определяем ординату вершины: $y_0 = -1.5$. Окончательно, парабола (рис. 8) проходит через три характерные точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$, имеет ось симметрии $x = 1$, и её ветви направлены вверх.

Пример 8. Построить график функции $y = 2x^2 + 8x + 9$.

Решение: В отличие от предыдущего примера, вычислить действительные корни здесь невозможно, так как дискриминант отрицателен, и парабола не пересекает ось абсцисс. Поэтому воспользуемся алгоритмом выделения полного квадрата. Эта процедура уже выполнена в примере 2, а поэтому имеем:

$$y = 2x^2 + 8x + 9 \Leftrightarrow y - 1 = 2(x + 2)^2$$

Отсюда следует, что парабола (рис. 9) имеет вершину в точке $M_0(-2; 1)$, ось симметрии $x = -2$, а её ветви направлены вверх, и она может быть построена путём параллельного переноса графика $y = 2x^2$.

Пример 9. Найти наибольшее значение функции $y = -2x^2 + 4x - 5$.

Решение: Так как квадратичный коэффициент отрицателен, то ветви параболы направлены вниз. Найдём координаты её вершины с помощью алгоритма выделения полного квадрата:

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4x - 5 = -2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right) = -2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{5}{2}\right) = \\ &= -2\left((x^2 - 2x + 1) + \frac{3}{2}\right) = -2(x - 1)^2 - 3 \Leftrightarrow y + 3 = -2(x - 1)^2 \end{aligned}$$

Отсюда наибольшее значение функции равно -3 и достигается при $x = 1$.

Пример 10. Представить положительное число m в виде двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение: Обозначим первое из искомых слагаемых за x , тогда второе будет $m - x$. Найдём наибольшее значение квадратного трёхчлена $y = x(m - x)$, то есть произведения слагаемых. Ветви параболы направлены вниз, так как

квадратичный коэффициент равен -1 , корни же равны $x_1 = 0, x_2 = m$. Следовательно, абсцисса вершины параболы, где квадратичный трёхчлен принимает наибольшее значение, равна $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + m}{2} = \frac{m}{2}$. Так как $x_0 = \frac{m}{2}$, то $m - x_0 = \frac{m}{2}$. Окончательно, произведение двух чисел, сумма которых равна данному положительному числу, является наибольшим, если искомые числа равны между собой.

§3. Квадратичные неравенства

Квадратичным неравенством называется выражение вида

$$f(x) > g(x) \quad (6)$$

где $f(x), g(x)$ – квадратные трёхчлены.

Как и всякий предикат, это неравенство для одних значений переменной является истинным, для других – ложным. Число называется **решением** квадратичного неравенства, если при подстановке его вместо переменной мы получаем истинное высказывание. Как и всякий предикат, рассматриваемое неравенство имеет **область определения** и **множество истинности**. Областью определения (6) является множество всех действительных чисел, так как оба квадратных трёхчлена определены на всей числовой оси; его множеством истинности будет множество всех его решений. Ограничимся рассмотрением строгих неравенств, так как решение нестрогих приводит к несущественным усложнениям. Для практического решения неравенства (6) его равносильными преобразованиями приводят к одному из

видов, которые в дальнейшем будем называть стандартными:

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad a > 0 \quad (7)$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a > 0 \quad (8)$$

Так как квадратный трёхчлен сохраняет знак в интервале между и вне своих корней (теоремы 4, 5), то решение стандартных неравенств сводится к отысканию всех значений переменной, для которых точки графика квадратного трёхчлена лежат выше (ниже) оси абсцисс. Проведённые в предыдущем параграфе исследования позволяют утверждать, что

1) Если $D < 0$, то неравенство (7) тождественно истинно, а неравенство (8) тождественно ложно.

2) Если $D = 0$, то неравенство (7) истинно для $\forall x \in R \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$, а неравенство (8) не имеет решений.

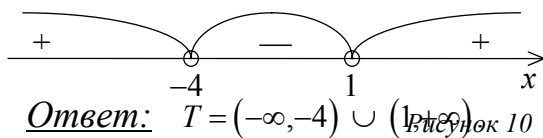
3) Если $D > 0$, то неравенство (7) истинно для $\forall x \in R \setminus [x_1, x_2]$, а неравенство (8) истинно для $\forall x \in (x_1, x_2)$.

Пример 11. Решить неравенство $x(2x-1) > (x-2)^2$.

Решение: Элементарными преобразованиями приводим исходное неравенство к стандартному виду. Дискриминант полученного приведённого квадратного трёхчлена левой части положителен, его корни есть числа $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Разлагая левую часть на линейные множители, имеем:

$$\begin{aligned} x(2x-1) > (x-2)^2 &\Leftrightarrow 2x^2 - x > x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) > 0 \end{aligned}$$

Воспользуемся свойством квадратного трёхчлена сохранять знак в интервалах между и вне своих корней (рис. 10). Очевидно, что $f(x) = x^2 + 3x - 4$ положителен (каждый линейный множитель положителен) при всех значениях аргумента, которые больше большего корня, то есть при $x > 1$. При переходе через корень $x_2 = 1$ $f(x)$ меняет знак на противоположный, то есть становится отрицательным при $-4 < x < 1$. Затем при переходе через меньший корень $x_1 = -4$ вновь меняет знак, то есть вновь принимает положительные значения при $x < -4$.



Ответ: $T = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

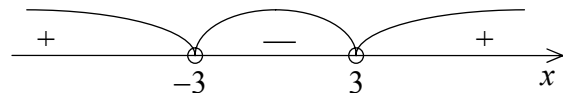


Рисунок 11

Пример 12. Решить неравенство $x(2x-1) \geq x^2 - x + 9$.

Решение: Элементарными преобразованиями приводим исходное неравенство к стандартному виду, а затем раскладываем квадратный трёхчлен на линейные множители:

$$\begin{aligned} x(2x-1) &\geq x^2 - x + 9 \Leftrightarrow 2x^2 - x \geq x^2 - x + 9 \Leftrightarrow \\ &x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) \geq 0 \end{aligned}$$

Дословно аналогично рассуждениям примера 11, изображаем интервалы знакопостоянства функции $f(x) = x^2 - 9$ (рис. 11). Следовательно, трёхчлен принимает положительные значения вне интервала между своими корнями. Так как неравенство нестрогое, в решение необходимо включить ещё и нули функции $f(x)$.

Ответ: $T = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

* Найдите ошибку в рассуждениях: $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \pm 3$

Пример 13. Решить неравенство $2x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

Решение: Так как дискриминант квадратного трёхчлена левой части отрицателен: $D = 16 - 24 < 0$, а квадратичный коэффициент положителен, то $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ принимает только положительные значения. Следовательно, исследуемое неравенство не имеет решений.

Пример 14. Решить систему и совокупность неравенств $x(x+2) < 12+x$ и $x^2 - 1 \geq 4(x+1)$.

Решение: Рассмотрим вначале решение системы квадратичных неравенств. Элементарными преобразованиями приведём неравенства к стандартному виду, найдём корни трёхчленов левой части и разложим на линейные множители, выписывая в порядке возрастания корней:

$$\begin{cases} x(x+2) < 12+x \\ x^2 - 1 \geq 4(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 < 0 \\ x^2 - 4x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-3) < 0 \\ (x+1)(x-5) \geq 0 \end{cases}$$

Отметим на числовой прямой найденные корни (рис. 12) и изобразим интервалы знакопостоянства для $f(x) = x^2 + x - 12$ в верхней полуплоскости, а для $g(x) = x^2 - 4x - 5$ — в нижней. Решением неравенства $f(x) < 0$ будет $T_1 = (-4; 3)$.

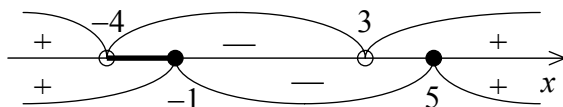


Рисунок 12

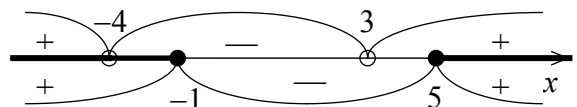


Рисунок 13

Это значения переменной, при которых точки графика $f(x)$ лежат ниже оси абсцисс. Заметим, что конечные точки интервала не входят в решение, так как неравенство строгое.

Решением неравенства $g(x) \geq 0$ будет $T_2 = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

Это значения переменной, при которых точки графика лежат выше оси абсцисс.

В отличие от первого неравенства, здесь точки $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ входят в решение, так как рассматриваемое неравенство нестрогое. Решением же системы будет **пересечение** решений обоих неравенств $T_3 = T_1 \cap T_2 = (-4; 1]$ (заштриховано на рис. 12). Это значения переменной, при которых одновременно первый трёхчлен имеет отрицательное значение, а второй — положительное.

Найдём теперь решение совокупности квадратичных неравенств. Рассуждая дословно аналогично решению системы, получаем решения

$$\begin{cases} x(x+2) < 12+x \\ x^2-1 \geq 4(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-12 < 0 \\ x^2-4x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-3) < 0 \\ (x+1)(x-5) \geq 0 \end{cases}$$

T_1, T_2 каждого квадратичного неравенства, входящего в совокупность (рис. 13). Решением же совокупности будет **объединение** полученных решений $T_4 = T_1 \cup T_2 = (-\infty; 3) \cup [5; +\infty)$ (заштриховано на рис.13). Это те значения переменной, при которых либо первый трёхчлен будет отрицательным, либо второй – неотрицательным.

Ответ: $T_3 = (-4; -1], T_4 = (-\infty; 3) \cup [5; +\infty)$.



Рисунок 14

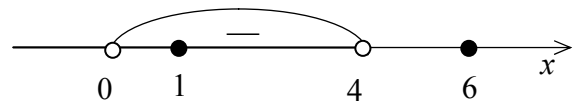


Рисунок 15

Пример 15. Решить уравнение $|x^2 - 4x| = 6 - 3x$.

Решение: Заменяем уравнение с модулем равносильной совокупностью двух смешанных систем, содержащих стандартные квадратные неравенства:

$$|x^2 - 4x| = 6 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ x^2 - 4x = 6 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ -x^2 + 4x = 6 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases}$$

Вычислим корни всех квадратных трёхчленов, разложим их на линейные множители, а затем заменим совокупность новой, ей равносильной:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) \geq 0 \\ (x+2)(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) < 0 \\ (x-1)(x-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 6 \end{cases} \end{cases}$$

Найдём решение первой смешанной системы. Для этого изобразим на числовой прямой промежутки $(-\infty; 0], [4; +\infty)$, где трёхчлен $f(x) = x^2 - 4x$ при-

нимает неотрицательные значения (рис. 14), и отметим на прямой корни уравнения $x^2 - x - 6 = 0$. Корень $x_1 = -2$ попадает в полученный интервал отрицательных значений $f(x)$, а корень $x_2 = 3$ туда не попадает. Отсюда решение первой системы $T_1 = \{-2\}$.

Аналогично находим решение второй смешанной системы. Для этого изобразим на числовой прямой интервал $(0; 4)$, где трёхчлен $f(x) = x^2 - 4x$ принимает только отрицательные значения (рис. 15), и отметим на прямой корни уравнения $x^2 - 7x + 6 = 0$. Корень $x_3 = 1$ попадает в интервал отрицательных значений $f(x)$, а корень $x_4 = 6$ не попадает. Отсюда решение второй системы есть $T_2 = \{1\}$.

Объединяя решения T_1, T_2 , получаем решение совокупности, а, следовательно, и исходного уравнения.

Ответ: $T = \{-2; 1\}$.

Пример 16. Решить неравенство $|x^2 - 6x + 5| < x - 1$.

Решение: Сведём неравенство с модулем к системам стандартных квадратичных неравенств. Для этого заменим исходное неравенство равносильной совокупностью двух систем:

$$|x^2 - 6x + 5| < x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 5 < x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 6 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0 \\ -x^2 + 6x - 5 < x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$$

Для решения первой системы найдём корни трёхчленов, разложим их на линейные множители, а затем заменим систему новой, ей равносильной:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5) \geq 0 \\ (x-1)(x-6) < 0 \end{cases}$$

Изображая на числовой прямой интервалы знакопостоянства обоих трёхчленов (рис. 16) соответственно в верхней и в нижней полуплоскостях, получаем решение первой системы $T_1 = [5; 6)$. Это значения переменной, при которых одновременно первый трёхчлен неотрицателен, а второй — отрицателен.

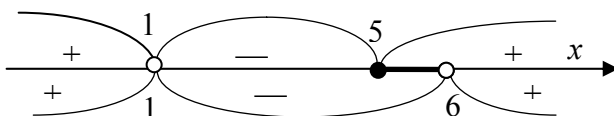


Рис. 16

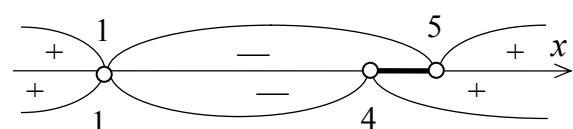


Рис. 17

Аналогично, для нахождения решения второй системы находим корни обоих трёхчленов, разлагаем их на линейные множители, а затем заменяем систему на новую, ей равносильную.

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5) < 0 \\ (x-1)(x-4) > 0 \end{cases}$$

Изображая на числовой прямой интервалы знакопостоянства обоих трёхчленов (рис. 17), соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, получаем решение второй системы $T_2 = (4; 5)$. Это значения переменной, при которых одновременно первый трёхчлен отрицателен, а второй положителен.

Объединяя решения T_1, T_2 , получаем решение совокупности, а, следовательно, и исходного неравенства с модулем.

Ответ: $T = (4; 6)$.

В заключение рассмотрим дробно-рациональные неравенства вида

$$\frac{ax^2 + bx + c}{rx^2 + px + q} > 0 \quad (9)$$

Их решение сводится к уже рассмотренным методам решения квадратных неравенств. Как уже отмечалось, эти методы основаны на свойствах квадратного трёхчлена менять знак только при переходе через корень. На практике, обычно, вычисляют корни уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $rx^2 + px + q = 0$ и разбивают этими точками числовую прямую на ряд интервалов, исследуют знаки этих квадратных трёхчленов на каждом из интервалов, а затем отбирают те из них, где дробно-рациональная функция принимает нужный знак.

Пример 17. Решить неравенство $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - x - 2} < 0$.

Решение: Вычислим корни квадратных трёхчленов числителя и знаменателя, а затем разложим их на линейные множители, выписывая в порядке возрастания корней:

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - x - 2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

Отмечая на числовой прямой корни трёхчлена числителя (рис. 18), изображаем в верхней полуплоскости интервалы его знакопостоянства. Затем отмечаем корни трёхчлена знаменателя и изображаем в нижней полуплоскости его интервалы знакопостоянства. Штрихуем интервалы $(-3; -1), (2; 4)$, на которых числитель и знаменатель принимают разные знаки. Эти интервалы и составляют решение дробно-рационального неравенства.

Ответ: $T = (-3; -1) \cup (2; 4)$.

Пример 18. Решить неравенство $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} \geq -3$.

Решение: Перенесём число -3 в левую часть неравенства и приведём к общему знаменателю. Вычислим корни квадратных трёхчленов нового числителя и знаменателя, а затем разложим их на линейные множители, выписывая в порядке возрастания корней:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 14x + 12}{x^2 - 4x + 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - \frac{3}{2})(x - 2)}{(x - 1)(x - 3)} \geq 0$$

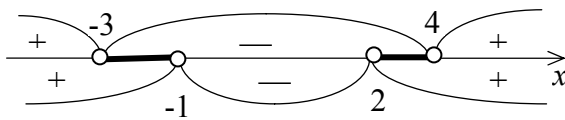


Рис. 18

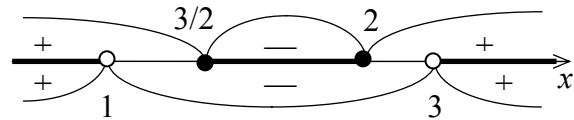


Рис. 19

Отмечая на числовой прямой (рис. 19) корни трёхчлена, изображаем в верхней полуплоскости его интервалы знакопостоянства и его нули (неравенство ведь нестрогое). Затем отмечаем корни трёхчлена знаменателя и в нижней полуплоскости изображаем его интервалы знакопостоянства. Штрихуем те интервалы, где числитель и знаменатель принимают одинаковые знаки, включая нули числителя. Эти числовые промежутки и являются решением дробно-рационального неравенства.

Ответ: $T = (-\infty; 1) \cup [\frac{3}{2}; 2] \cup (3; +\infty)$.

Замечание: Предостерегаем против грубой ошибки. Некоторые учащиеся не переносят число 3 в левую часть, а умножают его на знаменатель левой части. Этого категорически нельзя делать, так как при этом неизвестен смысл (знак) нового неравенства, кроме того, происходит расширение области определения неравенства.

Глава 2. Теорема Виета

Докажем теорему, имеющую очень большое практическое значение и часто используемую при решении различных задач, в том числе и задач с параметрами. С помощью этой теоремы легко устанавливать знаки корней квадратного трехчлена, находить по корням квадратного уравнения некоторые выражения, зависящие от них, не вычисляя самих корней, решать системы уравнений и неравенств, в которые входят комбинации выражений $x+y=a$ и $x*y=b$ и т.п. Во многих других теоремах и достаточно сложных задачах эта теорема используется как один из главных методов решения. Настоятельно рекомендуем обратить внимание на технику использования теоремы Виета в примерах, которые будут разобраны ниже.

§4. Соотношение между корнями и коэффициентами квадратного уравнения.

Теорема 6 (Виета). Сумма корней неприведенного квадратного уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$ равна $-B/A$, а их произведение равно C/A .

Ранее были выведены формулы (теорема 3) для корней квадратного уравнения. Найдем их сумму и произведение:

$$x_1 + x_2 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A} + \frac{-B - \sqrt{D}}{2A} = \frac{-B + \sqrt{D} - B - \sqrt{D}}{2A} = \frac{-2B}{2A} = -\frac{B}{A}$$

$$x_1 * x_2 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A} * \frac{-B - \sqrt{D}}{2A} = \frac{(-B)^2 - (\sqrt{D})^2}{2A} = \frac{B^2 - (B^2 - 4AC)}{4A^2} = \frac{C}{A} \quad \otimes$$

Следствие 1. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна линейному коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней - свободному члену.

Следствие 2. Для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$ имеют место соотношения: $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ и $x_1^3 + x_2^3 = -p(p^2 - 3q)$

$\otimes$ Действительно, воспользовавшись теоремой Виета, имеем:

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1^2 - x_2^2) - x_1x_2) = -p((p^2 - 2q) - q) = -p(p^2 - 3q) \quad \otimes$$

Теорема 7 (обратная). Если числа x_1 и x_2 таковы, что их сумма равна $-B/A$, а их произведение равно C/A , то эти числа являются корнями квадратного уравнения. $Ax^2+Bx+C=0$.

⊗ Действительно, решим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\left(x_2 + \frac{B}{A}\right) \\ -\left(x_2 + \frac{B}{A}\right) \cdot x_2 = \frac{C}{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\left(x_2 + \frac{B}{A}\right) \\ -x_2^2 - \frac{B}{A}x_2 - \frac{C}{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\left(x_2 + \frac{B}{A}\right) \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C = 0 \end{cases}$$

Следовательно, x_2 является корнем квадратного уравнения с коэффициентами A, B, C . Выражая в первом уравнении системы x_2 через x_1 , аналогично доказывается, что x_1 также является корнем этого уравнения ⊗.

Дадим общую формулировку прямой и обратной теорем Виета.

Теорема 8. Для того, чтобы x_1 и x_2 были корнями квадратного уравнения $Ax^2+Bx+C=0$ необходимо и достаточно выполнение равенств $x_1+x_2 = -B/A$ и $x_1 \cdot x_2 = C/A$.

Пример 19. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $9x^2+18x+1=0$. Составить квадратное уравнение с корнями: а) $-x_1, -x_2$ в) $1/x_1, 1/x_2$.

Решение: а) По теореме Виета $x_1+x_2=2$ и $x_1 \cdot x_2=1/9$. Будем искать квадратное уравнение вида $A_1x^2+B_1x+C_1=0$, корнями которого являются числа $-x_1$ и $-x_2$. Воспользуемся теоремой Виета и выше приведенными равенствами:

$$\begin{cases} (-x_1) + (-x_2) = -\frac{B_1}{A_1} \\ (-x_1) \cdot (-x_2) = \frac{C_1}{A_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x_1 + x_2) = -\frac{B_1}{A_1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{C_1}{A_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{B_1}{A_1} \\ 1/9 = \frac{C_1}{A_1} \end{cases}$$

Полученная система двух уравнений с тремя неизвестными имеет, вообще говоря, бесконечно много решений. Одно из них $A_1=9, B_1=18, C_1=1$.

Ответ: $9x^2+18x+1=0$.

в) Будем искать квадратное уравнение вида $A_2x^2+B_2x+C_2=0$, корнями которого являются числа $1/x_1, 1/x_2$. Опять воспользовавшись теоремой Виета и выше приведенными равенствами, имеем:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{B_2}{A_2} \\ \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{C_2}{A_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{B_2}{A_2} \\ \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{C_2}{A_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1/9} = -\frac{B_2}{A_2} \\ \frac{1}{1/9} = \frac{C_2}{A_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 = \frac{B_2}{A_2} \\ 9 = \frac{C_2}{A_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_2 = -18A_2 \\ C_2 = 9A_2 \end{cases}$$

Полученная система также неопределена, при этом одно из решений имеет вид $A_2=1, B_2=-18, C_2=9$.

Ответ: $x^2 - 18x + 9 = 0$.

Пример 20. Составить квадратное уравнение, имеющее комплексно-сопряженные корни: $x_1 = 2 - 3i$, $x_2 = 2 + 3i$.

Решение: Если x_1, x_2 корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то применяя формулы Виета, имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 * x_2 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - 3i) + (2 + 3i) = -p \\ (2 - 3i) * (2 + 3i) = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -p \\ 4 - 9i^2 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -4 \\ q = 13 \end{cases}$$

Ответ: $x^2 - 4x + 13$.

Пример 21. Решить уравнение $1996x^2 - 1997x + 1 = 0$.

Решение: Традиционный путь вычисления корней связан с громоздкими вычислениями. Поэтому, воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1997}{1996} \\ x_1 * x_2 = \frac{1}{1996} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + \frac{1}{1996} \\ x_1 * x_2 = 1 * \frac{1}{1996} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{1996} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{1, 1/1996\}$.

Пример 22. При каком значении параметра a разность корней уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ равна 1?

Решение По условию задачи корни трехчлена связаны $x_1 - x_2 = 1$ соотношением. Добавив к нему формулы Виета, связывающие эти корни с коэффициентами трехчлена,

получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными a, x_1, x_2 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = a \\ x_1 * x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = a + 1 \\ 2x_2 = a - 1 \\ x_1 * x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a+1}{2} \\ x_2 = \frac{a-1}{2} \\ \frac{a^2 - 1}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a+1}{2} \\ x_2 = \frac{a-1}{2} \\ a^2 = 9 \end{cases}$$

Почленно складываем и вычитаем первые два уравнения системы, а затем подставляя полученные выражения для x_1 и x_2 в третье уравнение, получаем, что $a^2 = 9$. Отсюда $a = \pm 3$.

Ответ: $a \in \{-3; 3\}$.

Пример 23. При каких значениях параметра a разность квадратов корней уравнения $3x^2 - 5x + a = 0$ равна $5/9$?

Решение: По условию задачи корни трехчлена связаны соотношением $x_1^2 - x_2^2 = 5/9$. Добавляя к нему формулы Виета, связывающие эти корни с коэффициентами трехчлена, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными a, x_1, x_2 :

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 5/9 \\ x_1 + x_2 = 5/3 \\ x_1 * x_2 = a/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2) * (x_1 + x_2) = 5/9 \\ x_1 + x_2 = 5/3 \\ x_1 * x_2 = a/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1/3 \\ x_1 + x_2 = 5/3 \\ x_1 * x_2 = a/3 \end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы находим x_1, x_2 . Подставляя их значения в третье уравнение, получаем единственное решение для параметра $a=2$.

Ответ: $a=2$.

Пример 24. Найти все значения параметров p и q , для которых числа a и q являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Решение Если p и q – корни приведенного квадратного уравнения, причем $p \neq q$, то они связаны формулами Виета :

$$\begin{cases} p + q = -p \\ p * q = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -q/2 \\ q^2 + 2q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -q/2 \\ q(q + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 1 \\ q_1 = -2 \end{cases}$$

Необходимо также рассмотреть случай, когда $p=q$. Подставляя $x=q, p=q$ в исходное уравнение, имеем: $2q^2 + q = 0 \Leftrightarrow q(2q + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q_2 = 0 \\ q_3 = -1/2 \end{cases}$

Таким образом получены еще две пары чисел $q_2=p_2=0, q_3=p_3=-1/2$, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: $(p, q) \in \{[0,0], [-1/2; -1/2], [1, -2]\}$.

Теорема 9. (о разложении трехчлена на линейные множители).

Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения, то квадратный трехчлен разлагается на линейные множители вида $Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2)$.

⊗ Вынося за скобки квадратичный коэффициент и применяя теорему Виета, перегруппируем получившееся выражение и получаем: $Ax^2 + Bx + C = A(x^2 + (B/A)x + C/A) = A(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 * x_2) = A(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = A(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = A(x - x_1)(x - x_2)$ ⊗

Пример 25. Разложить на множители выражение

$$4(x^2z + y^2x + z^2y) - 2(xz^2 + zy^2 + yx^2) - 7xyz.$$

Решение : Вообще говоря, исследуемое выражение можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно каждой из переменных x, y, z . Как уже отмечалось ранее, успех в решении такого рода задач заключается в удачном выборе переменной. В данном случае все переменные равноправны, поэтому можно рассматривать исходное выражение как квадратное относительно x . Раскрывая скобки и перегруппировывая члены, приводим трехчлен к виду: $P(x) = 2(2z - y)x^2 + (4y^2 - 7yz - 2z^2)x + (4z^2y - 2y^2z)$.

В свою очередь линейный коэффициент и свободный член $P(x)$ сами являются квадратными трехчленами относительно y (вообще говоря и относительно z).

Находя корни линейного коэффициента $Q(y) = 4y^2 - 7yz - 2z^2$, разлагаем его в соответствии с теоремой на линейные множители:

$$\begin{aligned} Q(y)=0; D=49z^2+32z^2=81z^2; y_1=-(1/4)z \vee y_2=2z; \\ Q(y)=4y^2-7zy-2z^2=4(y+(1/4)z)(y-2z)=(4y+z)(y-2z) \end{aligned} \quad (*)$$

Для свободного члена $R(y) = -2zy^2 + 4z^2y$ нет необходимости искать корни, так как он раскладывается в произведение линейных множителей непосредственно вынесением общего множителя за скобку. Поэтому имеем:

$$R(y) = -2zy^2 + 4z^2y = 2zy(2z - y) \quad (**)$$

Анализируя выражения (*) и (**), замечаем, что все коэффициенты трехчлена $P(x)$ содержат общий множитель $(2z - y)$. Вынося его за скобку, заключаем, что второй сомножитель представляет собой новый квадратный трехчлен относительно переменной x :

$$P(x) = (2z - y)(2x^2 - (4y + z)x + 2zy) = (2z - y) * P_1(x).$$

Аналогично предыдущему находим корни и раскладываем его на линейные множители:

$$\begin{aligned} P_1(x)=0; D=(4y+z)^2-16zy=16y^2+8yz+z^2-16zy=(4y-z)^2; \\ x_{1,2} = \frac{(4y+z) \pm (4y-z)}{4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}z \vee x_2 = 2y; \end{aligned}$$

$$P_1(x) = 2x^2 - (4y + z)x + 2zy = 2(x - (1/2)z)(x - 2y) = (2x - z)(x - 2y)$$

Подставляя последнее разложение $P_1(x)$ в выражение для $P(x)$, окончательно имеем:

$$P(x) = (2z - y) P_1(x) = (2z - y)(2x - z)(x - 2y).$$

$$\text{Ответ: } P(x) = (x - 2y)(y - 2z)(z - 2x).$$

В заключение рассмотрим обобщение теоремы Виета на уравнении третьей степени.

Если x_1, x_2, x_3 - действительные корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, то разлагая многочлен третьей степени на линейные множители, раскрывая скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + r &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x - x_3) = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной в левой и правой частях последнего равенства, находим искомые формулы (*):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \end{cases} \quad (*) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -B/A \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = C/A \\ x_1x_2x_3 = -D/A \end{cases} \quad (**)$$

Аналогично, в случае неприведенного кубического уравнения $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ формулы Виета будут иметь вид (**).

На самом деле полученные соотношения являются частным случаем теоремы Виета, связывающей корни и коэффициенты многочлена любой степени.

Пример 26. Ребра a, b, c прямоугольного параллелепипеда являются корнями кубического уравнения $x^3 - 10x^2 + 23x - 15 = 0$. Найти объем и полную площадь поверхности параллелепипеда.

Решение: Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин трех его ребер $V = a \cdot b \cdot c$, а полная площадь поверхности - удвоенной сумме попарных произведений этих длин $S = 2(ab + ac + bc)$. Учитывая, что a, b, c - корни кубического уравнения, воспользуемся обобщенными формулами Виета (*):

$$V = a \cdot b \cdot c = 15; S = 2(ab + ac + bc) = 2 \cdot 23 = 46.$$

Ответ: $V = 15; S = 46$.

§ 5. Квадратное уравнение с параметром.

Рассмотрим квадратное уравнение $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$ (10), где A, B, C - некоторые числа или выражения, зависящие от параметра. Уравнение (10) - это по существу краткая запись целого **семейства** квадратных уравнений, при этом для каждого конкретного значения параметра из него можно получить любое уравнение семейства.

Решить квадратное уравнение в зависимости от параметра - значит найти количество решений и их вид при каждом допустимом значении параметра (здесь и далее имеем в виду действительные решения). Часто требуется найти все значения параметра, при которых уравнение (10) имеет определенное количество корней, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Рассмотрим постановку таких задач и наметим пути их решения. Итак, требуется найти все значения параметра, при которых уравнение (10):

а) "имеет два различных решения, удовлетворяющих условию ...". В этом случае уравнение должно всегда оставаться квадратным (старший коэффициент отличен от нуля) и иметь положительный дискриминант, при этом каждое решение должно удовлетворять заданным ограничениям.

б) "имеет одно решение, удовлетворяющее...". При такой постановке, во-первых, необходимо решить уравнение при значении параметра, обращающем в ноль старший коэффициент уравнения, то есть квадратное уравнение **вырождается** в линейное. Затем проверить удовлетворяет ли полученное решение заданным ограничениям. Во-вторых, рассмотреть случай кратных корней (дискриминант равен нулю), удовлетворяющих ограничениям. В-третьих, рассмотреть случай, когда существуют два различных корня, один из них удовлетворяет ограничениям, а другой - нет.

с) "имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее...". Такая постановка задачи подразумевает, что уравнение имеет одно решение или два. Поэтому, следует рассмотреть случаи а) и б), а затем объединить их решения.

д) "не имеет решений, удовлетворяющих...". Данная формулировка

предполагает: во-первых, квадратное уравнение не имеет действительных решений (дискриминант меньше нуля); во-вторых, все существующие решения (например, вырожденного линейного уравнения) не удовлетворяют заданным ограничениям.

Обычно область изменения параметра, если не введены ограничения на корни, является множеством всех действительных чисел. Ограничения сужают множество изменений параметра. Очевидно, что выписывать уравнения для каждого значения параметра громоздко. Да и просто невозможно. Поэтому целесообразно разбить множество всех значений параметра на некоторые подмножества и затем решать исходное уравнение (10) на каждом из этих подмножеств (как мы это делаем, например, при решении уравнений с модулем). Для разбиения множества значений параметра на указанные подмножества, выбираются те значения параметра, при переходе через которые происходят **качественные** изменения уравнения (10). Конечно, это связано с рассмотренной ранее постановкой задач и ограничениями на корни:

1) обращение в ноль старшего коэффициента трехчлена, когда квадратное уравнение вырождается в линейное;

2) перемена знака (обращение в ноль) дискриминанта, когда изменяется число действительных корней уравнения;

3) знакопостоянство (противоположность знаков) корней уравнения (10); 4) взаимное расположение корней квадратного уравнения.

4) взаимное расположение корней квадратного уравнения.

Значения параметра, при которых происходят эти качественные изменения уравнения, будем называть **граничными**, так как они разделяют указанные подмножества на множестве всех значений параметра. На практике поиск этих подмножеств (вернее граничных значений параметра), выливается в перебор различных **случаев** количества и расположения корней уравнения (10) на оси. Однако прежде чем подробно рассматривать примеры, остановимся на условиях знакопостоянства (противоположности знаков) корней квадратного трехчлена.

Теорема 10. (о положительности корней). *Корни x_1, x_2 квадратного трехчлена $Ax^2+Bx+C=0$ действительны и положительны тогда и только тогда, когда выполняются условия: $D \geq 0$, $-B/A > 0$, $C/A > 0$.*

⊗ ⇒ Пусть $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$. Докажем, что выполняются неравенства теоремы. Если корни положительны, то их сумма и произведение тоже положительны, и в силу формул Виета $-B/A > 0$, $C/A > 0$. Кроме того, $D > 0$, ибо при отрицательном дискриминанте действительных корней нет.

⇐ Пусть выполняются неравенства теоремы. Покажем, что $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$. Так как дискриминант неотрицателен, то корни трехчлена действительны. По формулам Виета их сумма и произведение положительны: $x_1 + x_2 > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 > 0$. Из второго неравенства вытекает, что числа x_1, x_2 имеют одинако-

вые знаки (оба положительны или оба отрицательны), а из первого неравенства вытекает, что эти числа положительны. $\otimes$

Замечание. Требование $D \geq 0$ в условии этой теоремы существенно: корни квадратного трехчлена $x^2 - 2x + 2$ равны $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$. Их сумма и произведение положительны, тогда как дискриминант $D = -4$ отрицателен.

Дословно аналогично, доказываются двойственные теоремы.

Теорема 11. (об отрицательности корней). Корни квадратного уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$ действительны и отрицательны тогда и только тогда, когда выполняются условия: $D \geq 0$, $-B/A < 0$, $C/A > 0$.

Теорема 12. (о корнях разного знака). Корни x_1 , x_2 квадратного уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$ действительны, и имеют разные знаки тогда и только тогда, когда выполняются условия: $D > 0$, $C/A < 0$.

Заметим, что теоремы 10, 11, 12, вообще говоря, дают необходимые и достаточные условия расположения корней квадратного уравнения относительно числа ноль. Действительно, ведь теорему 10 (II) можно перефразировать так: "Оба корня квадратного уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$ больше (меньше) нуля тогда и только тогда, когда ...". Пусть требуется сравнить корни квадратного уравнения не с нулем, а с произвольным числом a . Для этого произведем линейный сдвиг по оси абсцисс на число a , то есть введем новую переменную $z = x - a$, как разность между исходной переменной и сравниваемым числом. Если теперь корни нового квадратного трехчлена (относительно переменной z) сравнивать с нулем, то корни исходного уравнения уже сравниваются с числом a , при этом оба уравнения будут иметь одинаковое количество решений при одном и том же значении параметра.

Из выше сказанного теперь достаточно ясна общая схема решения задач на расположение корней квадратного уравнения относительно данного числа a :

1) если $a \neq 0$, то введением новой переменной $z = x - a$, задача сводится к расположению корней квадратного уравнения относительно нуля;

2) в соответствии с теоремами 10, 11, 12 рассматриваются случаи положительности, отрицательности и противоположности знаков корней. Как правило, анализ каждого случая сводится к системе рациональных неравенств, которые легко решаются методом интервалов.

3) Объединяя решения всех случаев (подмножеств), получаем искомое множество всех значений параметра.

Пример 27. Не решая уравнения $ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0$ определить знаки его корней в зависимости от параметра.

Решение: При всех значениях параметра уравнение должно оставаться квадратным, следовательно старший коэффициент должен быть от-

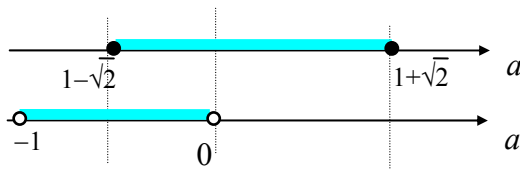
личным от нуля, т.е. $a \neq 0$. Воспользуемся теоремами о знаках корней квадратного уравнения. Для этого найдем выражения для дискриминанта, произведения и суммы корней:

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 2a^2 = -a^2 + 2a + 1 = -(a - (1 - \sqrt{2}))(a - (1 + \sqrt{2})); \quad \frac{C}{A} = 2;$$

$$-\frac{B}{A} = \frac{-2(a+1)}{a}$$

Первый случай. Если уравнение имеет положительные корни, то по теореме 10 имеем:

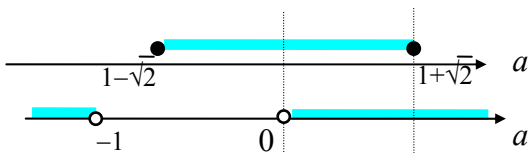
$$\begin{cases} -4(a - (1 - \sqrt{2}))(a - (1 + \sqrt{2})) \geq 0 \\ -\frac{2(a+1)}{a} > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}] \\ a \in (-1, 0) \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow a \in [1 - \sqrt{2}, 0[$$



Следовательно, при $1 - \sqrt{2} \leq a < 0$ уравнение имеет только положительные решения.

Второй случай. Если уравнение имеет отрицательные корни, то по теореме 11 имеем:

$$\begin{cases} -4(a - (1 - \sqrt{2}))(a - (1 + \sqrt{2})) \geq 0 \\ -\frac{2(a+1)}{a} < 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}] \\ a \in]-\infty, -1[\cup]0, \infty[\\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow a \in]0, 1 + \sqrt{2}]$$



Следовательно, при $0 < a \leq 1 + \sqrt{2}$ данное квадратное уравнение имеет отрицательные корни.

Третий случай. Если уравнение имеет корни разных знаков, то по теореме 12 произведение корней C/A будет отрицательным. Однако, свободный член приведенного уравнения - величина постоянная и положительная, равна 2, независимо от параметра. Следовательно, заданное уравнение не может иметь корни разных знаков ни при каких значениях параметра a .

Ответ: при $1 - \sqrt{2} \leq a < 0$, $x_1 \geq x_2 > 0$; при $0 < a \leq 1 + \sqrt{2}$, $x_1 \leq x_2 < 0$; при $a \in \emptyset$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$.

Пример 28. При каких значениях параметра уравнение $(a-1)x^2 - (8a-4)x + 16a-5 = 0$ имеет два различных корня больших или равных 2?

Решение: В данной постановке мы не сможем напрямую воспользоваться теоремой Виета и теоремами о знаках корней, так как корни сравниваются с числом 2, а не с нулем. Сделаем замену переменных: $x-2=z \geq 0$

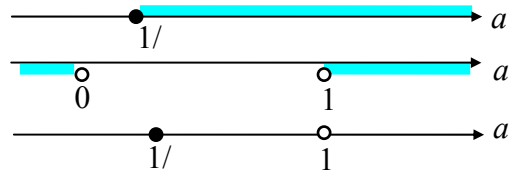
$\Leftrightarrow x = z+2$. В новых переменных уравнение принимает вид:
 $(a-1)(z+2)^2 - (8a-4)(z+2) + 16a-5 = 0 \Leftrightarrow (a-1)z^2 - 4az + 4a-1 = 0$.

Найдем значение параметра a , при которых данное уравнение будет иметь два различных неотрицательных корня $z_1 > z_2 \geq 0$. Для этого воспользуемся теоремой о положительных корнях квадратного уравнения. Вычислим значение дискриминанта и отношение коэффициентов при переменных:

$$D/4 = 4a^2 - 4a^2 + 5a - 1 = 5a - 1; \quad -B/A = 4a/(a-1); \quad C/A = (4a-1)/(a-1)$$

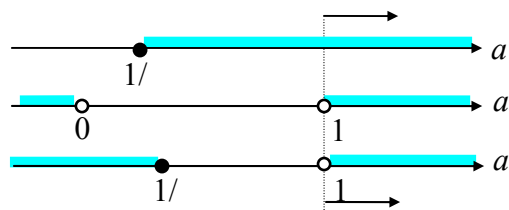
Первый случай. Пусть один из корней равен нулю, а второй положителен, тогда их сумма положительна, а произведение равно нулю:

$$\begin{cases} 4(5a-1) > 0 \\ \frac{4a}{a-1} > 0 \\ \frac{4a-1}{a-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$$



Второй случай. Если оба корня уравнения положительны, то их сумма и произведение также положительны:

$$\begin{cases} 4(5a-1) > 0 \\ \frac{4a}{a-1} > 0 \\ \frac{4a-1}{a-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in]1, +\infty[$$



Объединяя оба случая, получим, что уравнение имеет два различных корня больше или равных 2 при значениях параметра $a > 1$.

Ответ : $a > 1$.

Пример 29. При каких значениях параметра a уравнение $(a+1)x^2 - (6a+10)x + 9a+16 = 0$ имеет два различных решения, одно из которых больше 2, а другое меньше 2?

Решение: Чтобы воспользоваться теоремой 12 о корнях квадратного уравнения разных знаков, сделаем замену переменных $x-2 = z \Leftrightarrow x = z+2$ и преобразуем уравнение:

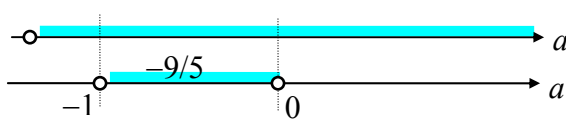
$$(a+1)(z+2)^2 - (6a+10)(z+2) + 9a+16 = 0 \Leftrightarrow (a+1)z^2 - 2(a+3)z + a = 0$$

Вычислим дискриминант и отношение свободного члена к старшему коэффициенту:

$$D/4 = (a+3)^2 - a(a+1) = a^2 + 6a + 9 - a^2 - a = 5a + 9; \quad C/A = a/(a+1).$$

Чтобы полученное уравнение имело корни разных знаков, нужно, чтобы их произведение было отрицательным:

$$\begin{cases} 4(5a+9) > 0 \\ \frac{a}{a+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in]-1, 0[$$



Ответ : $a \in]-1, 0[$.

Пример 30. При каких значениях параметра a данное уравнение $(a-1)x^2 - (8a-4)x + 16a-5 = 0$ имеет хотя бы одно решение большее или равное 2?

Решение: В соответствии с классификацией постановочных задач, слова "уравнение имеет хотя бы одно решение" следует понимать как "уравнение имеет одно или два решения". Граничное значение параметра $a=1$ разбивает множество всех значений параметра на два подмножества. При этом исходное уравнение распадается на линейное уравнение и семейство квадратных уравнений, получающихся из него при $a=1$ и $a \neq 1$.

1) При $a=1$ исходное уравнение вырождается в линейное и принимает вид:

$$\begin{cases} -(8a-4)x + 16a - 5 = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow -4x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = 11/4 \geq 2.$$

Таким образом при $a=1$, исходное уравнение имеет единственный корень, удовлетворяющий заданному ограничению (больше или равен 2).

2) При $a \neq 1$ исходное уравнение относится к семейству квадратных, а потому возможно применение алгоритма, рассмотренного в предыдущих примерах.

Вводя новую переменную $x-2 = z \geq 0 \Leftrightarrow x = z+2$ имеем:

$$(a-1)(z+2)^2 - (8a-4)(z+2) + 16a-5 = 0 \Leftrightarrow (a-1)z^2 - 4az + 4a-1 = 0$$

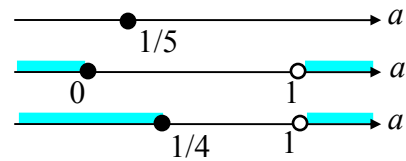
Вычислим дискриминант и отношение коэффициентов:

$$D/4 = 4a^2 - (a-1)(4a-1) = 4a^2 - 4a^2 + 5a - 1 = 5a - 1;$$

$$-B/A = 4a/(a-1); \quad C/A = (4a-1)/(a-1)$$

Первый случай. Дискриминант равен 0. Оба корня уравнения равны между собой и неотрицательны ($z_1 = z_2 \geq 0$). Тогда их сумма и произведение также будут неотрицательными:

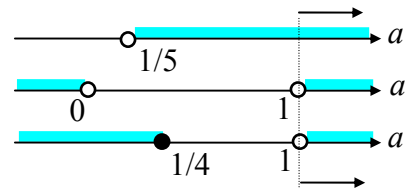
$$\begin{cases} 4(5a-1) = 0 \\ \frac{4a}{a-1} \geq 0 \\ \frac{4a-1}{a-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/5 \\ a \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\\ a \in]-\infty, 1/4] \cup]1, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$$



Далее исследуем варианты, когда корни уравнения различны.

Второй случай. Пусть один из корней положителен, а другой - неотрицателен, тогда их сумма положительна, произведение неотрицательно:

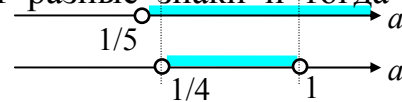
$$\begin{cases} 4(5a-1) > 0 \\ \frac{4a}{a-1} > 0 \\ \frac{4a-1}{a-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1/5 \\ a \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\\ a \in]-\infty, 1/4] \cup]1, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow a \in]1, +\infty[$$



Полученное решение $]1, +\infty[$ удовлетворяет ограничением на корни.

Третий случай. Корни уравнения имеют разные знаки и тогда их произведение отрицательно:

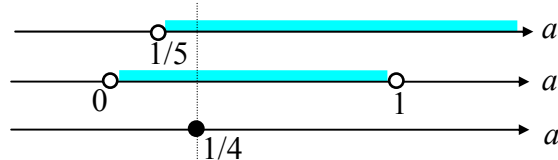
$$\begin{cases} 4(5a-1) > 0 \\ \frac{4a-1}{a-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1/5 \\ a \in]1/4, 1[\end{cases} \Leftrightarrow a \in]1/4, 1[$$



Полученное решение $]1/4, 1[$ удовлетворяет ограничениям на корни.

Четвертый случай. Один из корней равен 0, а другой - отрицательный. Тогда их сумма отрицательна, а произведение равно нулю:

$$\begin{cases} 4(5a-1) > 0 \\ \frac{4a}{a-1} < 0 \\ \frac{a-1}{4a-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1/5 \\ a \in]0, 1[\Leftrightarrow a = 1/4 \\ a = 1/4 \end{cases}$$



Полученное решение удовлетворяет ограничениям на корни. Объединяя полученные результаты имеем: $a = \{1\} \cup \emptyset \cup]1; +\infty[\cup]1/4; 1[\cup \{1/4\} = [1/4; +\infty[$

Ответ: $a \in [1/4, +\infty[$

Пример 31. При каких значениях параметра уравнение $x^2 + 2x - 8 = a(x - 4)$ имеет два различных корня? Определите знаки этих корней в зависимости от a .

Решение : Преобразуем уравнение к виду $x^2 + (2-a)x - 4(2-a) = 0$. Условием наличия двух различных корней является $D > 0$.

Первый случай. Уравнение имеет два различных положительных корня, когда их сумма и произведение положительны. Получаем систему:

$$\begin{cases} D > 0 \\ -4(2-a) > 0 \\ -(2-a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a-18) > 0 \\ a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow a > 18$$

Второй случай. Оба корня отрицательны, тогда их произведение положительно, а сумма отрицательна: $\begin{cases} D > 0 \\ -4(2-a) > 0 \\ -(2-a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$

Третий случай. Уравнение будет иметь корни разных знаков, если произведение корней отрицательно (их сумма при этом может быть как отрицательной, так и положительной). Имеем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ -4(2-a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a-18) > 0 \\ a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow a < 2$$

Если $a=2$, то $x_1 x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, то есть $x_1 = x_2 = 0$.

Ответ: При $a < 2$ - корни разных знаков, при $a > 18$ - оба корня положительные.

Пример 32. При каких значениях параметра уравнение $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a-6 = 0$ имеет два различных корня? Определите знаки этих корней в зависимости от a .

Решение Сначала рассмотрим случай $a-3=0$. Тогда уравнение вырождается в линейное и, следовательно, не может иметь двух различных корней. При $a \neq 3$ уравнение является квадратным. Вычислим его дискриминант и решим неравенство $D > 0$:

$$D/4 = (3a-4)^2 - (7a-6)(a-3) = 2a^2 + 3a - 2 = 2(a+2)(a-1/2);$$

$$2(a+2)(a-1/2) > 0 \Leftrightarrow a \in]-\infty, -2[\cup]1/2, +\infty[.$$

Пользуясь формулами Виета, запишем: $x_1 + x_2 = \frac{2(3a-4)}{a-3}$; $x_1 x_2 = \frac{7a-6}{a-3}$

Первый случай. Оба корня положительны:

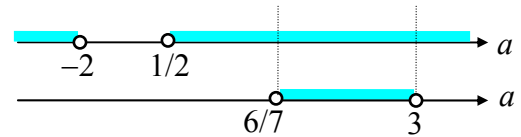
$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ \frac{7a-6}{a-3} > 0 \\ \frac{2(3a-4)}{a-3} > 0 \end{cases}$$

Получаем: $a \in]-\infty, -2[\cup]1/2, 6/7[\cup]3, +\infty[$.

Второй случай. Корни разных знаков:

ков:

$$\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ \frac{7a-6}{a-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (6/7, 3)$$



Третий случай. Оба корня отрицательны:

$$\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ \frac{7a-6}{a-3} > 0 \\ \frac{2(3a-4)}{a-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$$

Четвертый случай. Один из корней равен нулю:

$$x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6}{7} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2\left(3\frac{6}{7} - 4\right)}{\frac{6}{7} - 3} = \frac{3}{4} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4} > 0$$

Ответ: корни положительны при $a \in (-\infty, -2) \cup (1/2, 6/7) \cup (3, +\infty)$;

корни разных знаков при $a \in (6/7, 3)$;

один из корней обращается в ноль при $a = 6/7$.

Глава 3. Квадратные уравнения с ограничениями на корни.

Выделим два наиболее распространенных класса задач связанных с расположением корней квадратного трехчлена. Это задачи, в которых изучается расположение корней относительно некоторого числа α , и задачи, в которых исследуется расположение корней относительно заданного отрезка $[\alpha, \beta]$. Для решения задач обоих классов полезны графические методы исследования.

Прежде чем доказывать теоремы, лежащие в основе этих методов, рассмотрим геометрический смысл основных неравенств, которые будут фигурировать в условиях этих теорем:

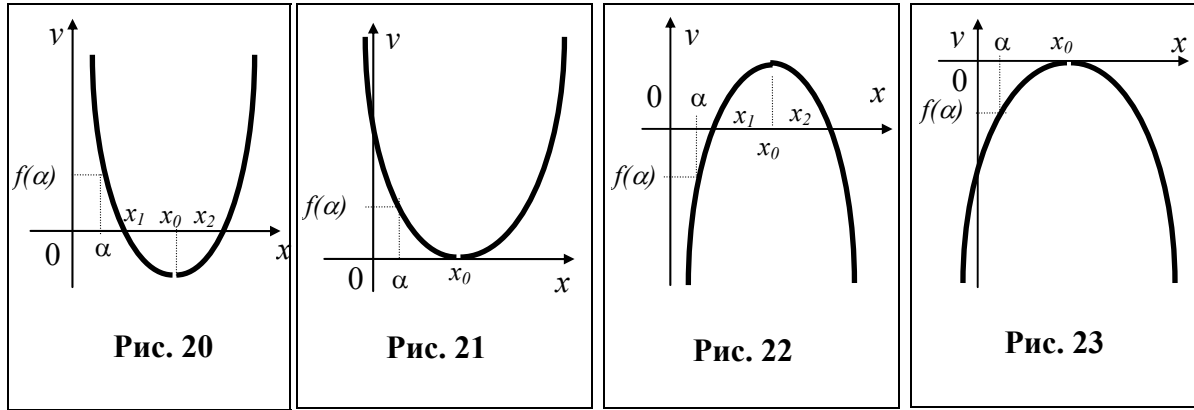
- 1) знак дискриминанта $D > 0$ ($D < 0$) указывает на число точек пересечения параболы $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ с осью абсцисс.
- 2) знак старшего коэффициента $A > 0$ ($A < 0$) определяет направление ветвей параболы.
- 3) В точке α знак трехчлена $f(\alpha) > 0$ ($f(\alpha) < 0$) показывает как, выше или ниже оси абсцисс, проходит парабола $f(x)$ в этой точке.
- 4) неравенство $x_0 > \alpha$ ($x_0 < \alpha$) определяет расположение вершины параболы с абсциссой $x_0 = -B/2A$ относительно исследуемой точки.

Эти неравенства в дальнейшем будем называть **опорными**. Рассматривая наборы опорных неравенств можно задавать определенное расположение параболы $y = f(x)$ относительно оси абсцисс и фиксированной точки α , при котором достигается нужное расположение корней квадратного трехчлена на числовой оси. Можно доказать ряд теорем, каждая из которых соответствует некоторой “картинке” и может быть достаточно просто истолкована геометрически.

§ 6. Расположение корней относительно числа.

Вначале подробно разберем задачу, в которой оба корня квадратного трехчлена больше некоторого числа α . Геометрически это означает, что точки пересечения (касания) параболы с осью абсцисс лежат правее точки α . В этом случае возможны четыре **качественно** различные “картинки” взаимного расположения параболы относительно оси абсцисс и точки α (рис.20–23)

В соответствии с геометрическим смыслом опорных неравенств, каждая “картинка” может быть описана, соответственно, следующими четырьмя системами:



$$\begin{cases} A > 0 \\ D > 0 \\ x_0 > \alpha \\ f(\alpha) > 0 \end{cases} \quad (11) \quad \begin{cases} A > 0 \\ D = 0 \\ x_0 > \alpha \\ f(\alpha) > 0 \end{cases} \quad (12) \quad \begin{cases} A < 0 \\ D > 0 \\ x_0 > \alpha \\ f(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (13) \quad \begin{cases} A < 0 \\ D = 0 \\ x_0 > \alpha \\ f(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (14)$$

а)
 б)
 в)
 г)

В частности, система неравенств (14), соответствующая рис. 23. утверждает:

- а) ветви параболы направлены вниз,
- б) корни действительные и равные,
- в) вершина параболы расположена правее точки α ,
- г) в точке α парабола проходит ниже оси абсцисс.

Этот набор условий является достаточным для того, чтобы парабола занимала по отношению к оси абсцисс и точке α положение, соответствующее рис. 23. Очевидно, что рассмотренные четыре “картинки” исчерпывают все возможные расположения параболы, при которых все корни квадратного трехчлена действительны и больше α . Объединяя системы (11), (12), (13), (14) в одну равносильную систему приходим к следующему утверждению.

Теорема 13. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ были действительны и больше некоторого фиксированного числа α , необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > \alpha \end{cases}$$

Предоставляя строгое доказательство теоремы читателю, так как этот случай расположения корней был проанализирован достаточно подробно, докажем двойственное утверждение (оба корня квадратного трехчлена меньше числа α). Проводя аналогичные рассуждения, опять получая

четыре “картинки”, где точки пересечения параболы с осью абсцисс лежат уже левее точки α , приходим к двойственной теореме.

Теорема 14. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ были действительны и меньше некоторого фиксированного числа α , необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 < \alpha \end{cases} \quad (15)$$

⊗ Обозначим корни уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$ через x_1, x_2 . В дальнейшем для определенности будем предполагать, что $x_1 \leq x_2$.

⇒ Пусть оба корня меньше α (рис. 24). Докажем истинность системы (15).

По условию $x_1 < \alpha \wedge x_2 < \alpha$, а значит $x_1 - \alpha < 0 \wedge x_2 - \alpha < 0$. Учитывая, что сумма двух отрицательных выражений отрицательна, а их произведение положительно, и применяя затем теорему Виета, имеем

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0 \\ (x_1 - \alpha) \cdot (x_2 - \alpha) > 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2\alpha \\ x_1 x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{B}{A} < 2\alpha \\ \frac{C}{A} + \alpha \frac{B}{A} + \alpha^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -\frac{B}{2A} < \alpha \\ \frac{C + \alpha B + \alpha^2 A}{A} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 < \alpha \\ A \cdot (A\alpha^2 + B\alpha + C) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 < \alpha \\ A \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Присоединяя к полученной системе условие $D \geq 0$ (по условию корни трехчлена действительные), приходим к искомой системе.

⇐ Пусть истинна система (15). Докажем, что $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

Так как по условию $D \geq 0$, то корни трехчлена действительны. Воспользовавшись свойствами числовых неравенств и теоремой Виета имеем

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_0 < \alpha \\ A \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_0 < \alpha \\ A \cdot (A\alpha^2 + B\alpha + C) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{B}{2A} < \alpha \\ \frac{C + \alpha B + \alpha^2 A}{A} > 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -\frac{B}{A} < 2\alpha \\ \frac{C}{A} + \alpha \frac{B}{A} + \alpha^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2\alpha \\ x_1 x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0 \\ (x_1 - \alpha) \cdot (x_2 - \alpha) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Получено, что сумма двух величин отрицательна, а их произведение положительно. Следовательно обе величины отрицательны т.е. $x_1 - \alpha < 0 \wedge x_2 - \alpha < 0$. Откуда окончательно имеем $x_1 \leq x_2 < \alpha$. ⊗

Перейдем теперь к случаю, когда фиксированное число α лежит между точками пересечения параболы с осью абсцисс. Здесь возможны два расположения параболы (рис. 25, 26), которые описываются совокупностью двух систем опорных неравенств.

$$\left[\begin{cases} A > 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ A < 0 \\ f(\alpha) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot f(\alpha) < 0 \quad (16)$$

Найденную совокупность можно заменить одним равносильным неравенством:

Теорема 15. Для того, чтобы заданное число α было заключено между корнями квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, необходимо и достаточно выполнение неравенства: $A \cdot f(\alpha) < 0$ (16).

⊗ Рассмотрим в начале случай, когда $A > 0$ (ветви параболы направлены вверх (рис. 25)).

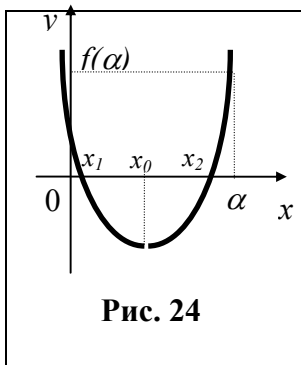


Рис. 24

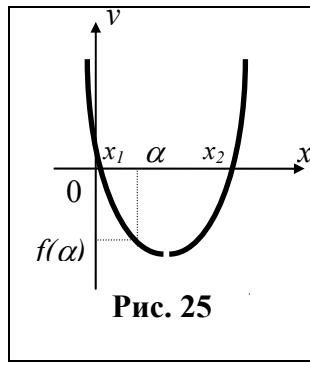


Рис. 25

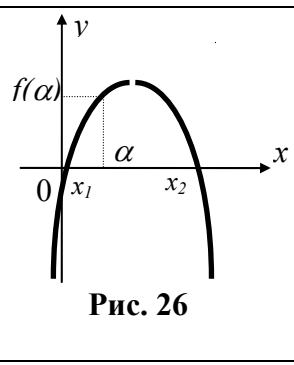


Рис. 26

⇒ Пусть $x_1 < a < x_2$. Докажем истинность (16).

Если $x_1 < a < x_2$, то квадратный трехчлен имеет два действительных различных корня и на интервале $]x_1; x_2[$ принимает только отрицательные значения. Отсюда $f(a) < 0$, а значит $A \cdot f(a) < 0$.

⇐ Пусть $A \cdot f(a) < 0$. Докажем, что $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 < a < x_2$.

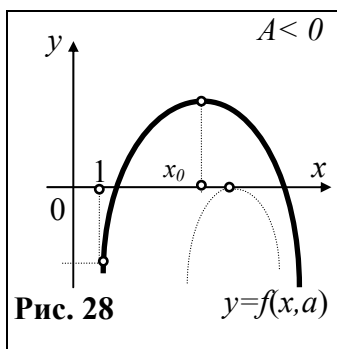
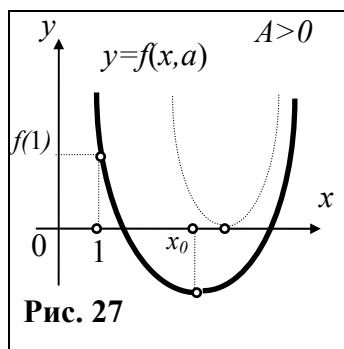
Если $A \cdot f(a) < 0$, то $f(a) < 0$ ибо рассматривается случай $A > 0$. Если бы квадратный трехчлен не имел действительные корни, то для $\forall x \in \mathbb{R}$ мы имели бы $f(x) > 0$. Если бы эти корни были действительными и равными, то опять $f(x) \geq 0$ при всех значениях аргумента. Значит остается только случай действительных и различных корней, притом квадратный трехчлен принимает только отрицательные значения для $\forall a \in]x_1, x_2[$.

Случай, когда $A < 0$ доказывается аналогично. ⊗

Приведенное доказательство основывается на свойствах квадратного трехчлена. Рекомендуем читателю самостоятельно провести доказательство, опирающееся на теорему Виета.

Пример 33. Найти все значения параметра, при которых все корни уравнения $(1+a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше 1.

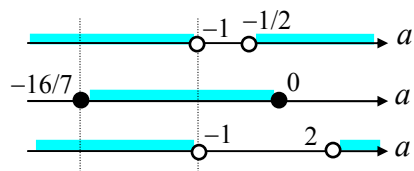
Решение: В начале определим граничные значения параметра. При переходе через $a = -1$ с исходным уравнением происходит качественное изменение. Оно распадается на два семейства: линейное и семейство квадратных уравнений.



1. При $a = -1$ старший коэффициент обращается в ноль и исходное уравнение вырождается в линейное $3x - 4 = 0$, при этом его корень $x_1 = 3/4$ удовлетворяет ограничению на корни. Следовательно $a = -1$ удовлетворяет условию задачи.

2. При $a \neq -1$ исходное уравнение $f(x, a) = (1+a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ всегда является квадратным. График квадратного трехчлена $f(x, a)$, удовлетворяющий требуемым ограничениям на корни, изображен на рис. 27, 28. Пунктиром показано предельное положение параболы отвечающее совпадению корней трехчлена $f(x, a)$. Вычислим дискриминант и абсциссу параболы $D = (-3a)^2 - 4(1+a)4a = -7a^2 - 16a$; $x_0 = (3a)/(2(a+1))$. Для того, чтобы корни трехчлена $f(x, a)$ были действительны и больше 1, в соответствии с теоремой 13, необходимо и достаточно выполнение системы трех опорных неравенств, которые решаем методом интервалов.

$$\begin{cases} A \cdot f(1) > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+a)(2a+1) > 0 \\ a(7a+16) \leq 0 \\ \frac{3a}{2(a+1)} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-16/7; -1].$$



Объединяя результаты обоих случаев получаем искомое решение:

$$\{-1\} \cup [-16/7; -1] = [-16/7; -1]$$

Ответ: $a \in [-16/7; -1]$

Пример 34. При каких значениях параметра квадратный трехчлен $f(x, a) = 3ax^2 + (4-6a)x + 3(a-1)$ имеет корни только меньше или равные 2.

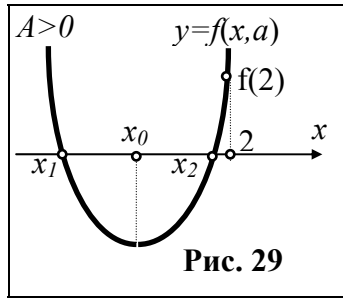


Рис. 29

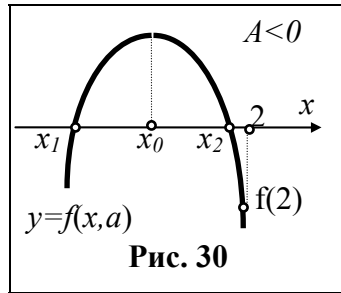


Рис. 30

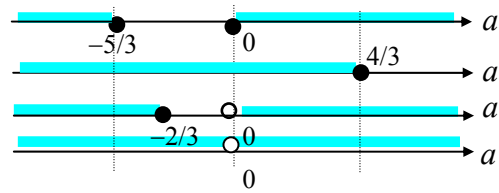
Решение: В отличие от предыдущего примера, в условии задачи четко оговорено, что функция $f(x,a)$ является квадратным трехчленом.

Следовательно, отпадает случай, когда $f(x,a)$ может выро-

ждаться в некоторую функцию, а потому $a \neq 0$. Для того, чтобы корни трехчлена были меньше (равны) 2, в соответствии с теоремой 14, необходимо и достаточно выполнение системы опорных неравенств:

$$\begin{cases} A * f(2) \geq 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 = -\frac{B}{2A} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a(3a+5) \geq 0 \\ -12a+16 \geq 0 \\ -\frac{4-6a}{6a} \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \in]-\infty; -5/3] \cup]0; 4/3]$$



Заметим, что по условию на корни, парабола может пересекать ось абсцисс в точке $x=2$. Следовательно, первое и последнее опорное неравенства в системе, в отличие от предыдущего случая, были заменены на нестрогие.

Ответ: $a \in]-\infty; -5/3] \cup]0; 4/3]$.

Пример 35. При каких значениях параметра корни уравнения $(1-2a)x^2 - 6ax - 1 = 0$ находятся по разные стороны от -2 .

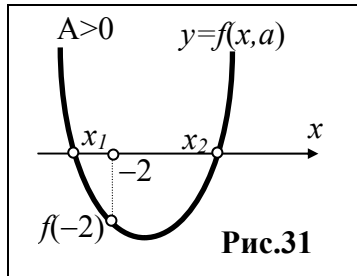


Рис.31

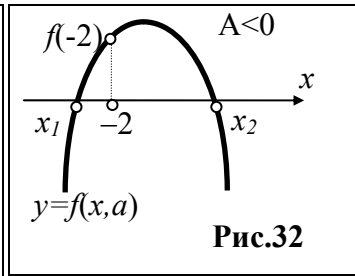


Рис.32

Решение: Графическая интерпретация задачи представлена на рис. 31 и 32. Для того, чтобы корни трехчлена $f(x,a) = (1-2a)x^2 - 6ax - 1$ расположились по раз-

ные стороны от числа -2 , в соответствии с теоремой 15, необходимо и достаточно выполнение следующего опорного неравенства:

$$A * f(-2) < 0 \Leftrightarrow (1-2a) * (4(1-2a) + 12a - 1) < 0 \Leftrightarrow (1-2a)(4a+3) < 0 \Leftrightarrow (a+3/4)(a-1/2) > 0$$

$$\Leftrightarrow a \in]-\infty; -3/4[\cup]1/2; +\infty[.$$

Ответ: $a \in]-\infty; -3/4[\cup]1/2; +\infty[.$

Пример 36. Найти все значения параметра, при которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a .

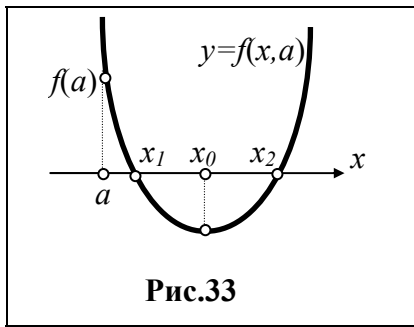
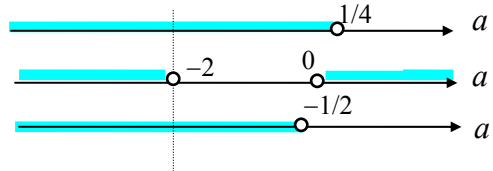


Рис.33

Решение : Представим графическую интерпретацию требуемого расположения корней квадратного трехчлена $f(x,a) = x^2 + x + a$ (рис.33). Заметим, что ветви всех парабол семейства $y = f(x,a)$ всегда направлены вверх. В соответствии с теоремой 13, исходное уравнение будет иметь два различных действительных

корня, которые одновременно больше a , тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(a) > 0 \\ x_0 > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a > 0 \\ a^2 + 2a > 0 \\ -\frac{1}{2} > a \end{cases}$$



Решая полученную систему методом интервалов получаем, что $a < -2$.

Ответ : $a \in]-\infty; -2[$.

Пример 37. Найти все значения параметра, при которых корни квадратного уравнения $ax^2 + 2(a+3)x + a+2 = 0$ неположительны.

Решение : Переформулируем задачу в терминах расположения корней квадратного трехчлена относительно некоторого числа. Найти все значения параметра, при которых корни квадратного уравнения $f(x) = ax^2 + 2(a+3)x + a+2 = 0$ меньше или равны 0. В условии четко оговорено, что исходное уравнение $f(x) = 0$ является квадратным, а потому не надо рассматривать случай вырождения исходного уравнения в нетипичное. Представим графическую интерпретацию поставленной задачи (рис.34,35). Пунктиром показано предельное положение параболы, отвечающее совпадению корней.

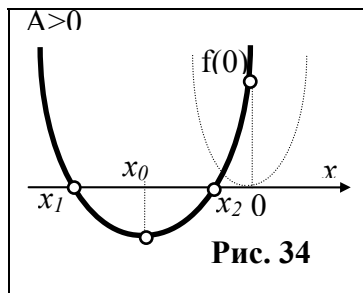


Рис. 34

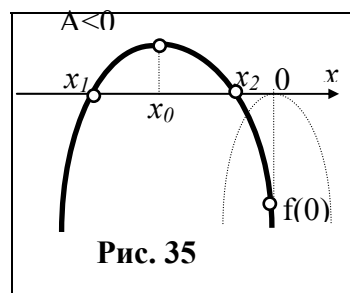
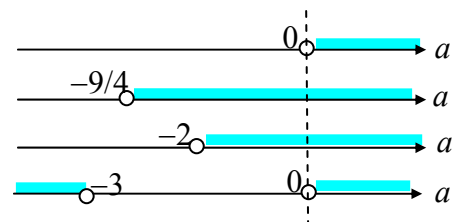


Рис. 35

1. Пусть $A > 0$ (рис.34). Для того чтобы исходное уравнение $f(x) = 0$ имело корни расположенные левее начала координат, в соответствии с теоремой 14, необходимо и достаточно выполнение системы четырех

опорных неравенств

$$\begin{cases} A > 0 \\ D \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \\ x_0 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a+3)^2 - a(a+2) \geq 0 \\ a+2 \geq 0 \\ -\frac{a+3}{a} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 4a+9 \geq 0 \\ a+2 \geq 0 \\ \frac{a+3}{a} \geq 0 \end{cases}$$



Решая полученную систему методом интервалов, получаем, что $a > 0$.

2. Пусть $A < 0$ (рис. 35). Расположение параболы определяется следующей системой опорных неравенств (в соответствии с теоремой 14.).

$$\begin{cases} A < 0 \\ D \geq 0 \\ f(0) \leq 0 \\ x_0 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ (a+3)^2 - a(a+2) \geq 0 \\ a+2 \leq 0 \\ -\frac{a+3}{a} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 4a+9 \geq 0 \\ a+2 \leq 0 \\ \frac{a+3}{a} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Ответ: $a \in]0; +\infty[$.

Пример 38. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(a-1)x^2 + (2a+3)x + a+2 = 0$ имеет корни одного знака.

Решение: Определим граничные значения параметра. Так как по условию анализируются знаки обоих корней, то исключается случай вырождения квадратного уравнения в линейное, а потому $a-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

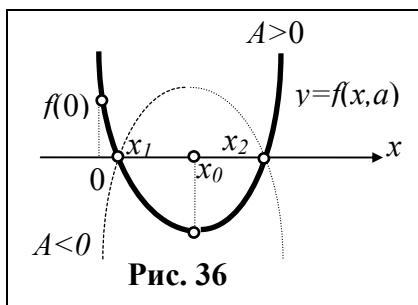


Рис. 36

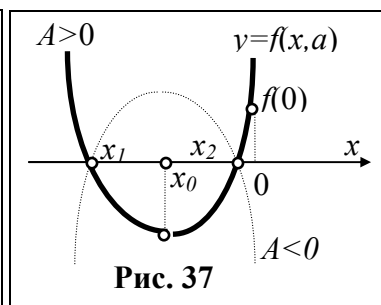
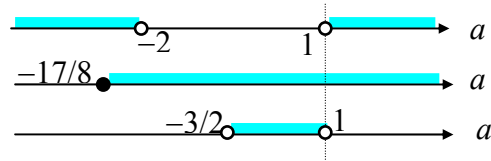


Рис. 37

1. Оба корня положительные (рис. 36). Пунктиром показано положение параболы, отвечающее отрицательному старшему коэффициенту. Для того,

чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x,a) = (a-1)x^2 + (2a+3)x + a+2 = 0$ были больше нуля, в соответствии с теоремой 13, необходимо и достаточно выполнение следующей системы опорных неравенств, которую решаем методом интервалов.

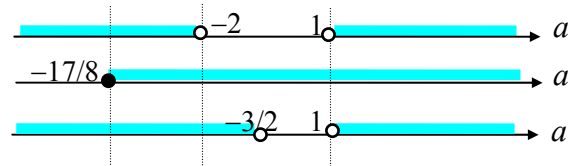
$$\begin{cases} A \cdot f(0) > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a+2) > 0 \\ 8a+17 \geq 0 \\ -\frac{2a+3}{2(a-1)} > 0 \end{cases}$$



Как видим, эта система не имеет решений.

2. Оба корня отрицательные (рис. 37). Пунктиром показано положение параболы, отвечающее отрицательному старшему коэффициенту. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x)$ были меньше нуля, в соответствии с теоремой 14, необходимо и достаточно выполнение уже другой системы опорных неравенств.

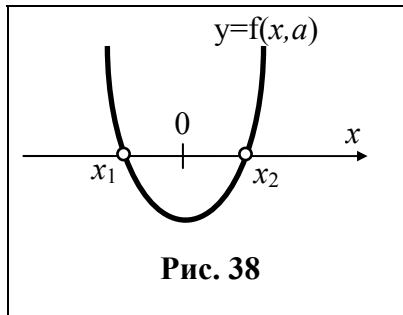
$$\begin{cases} A \cdot f(0) > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a+2) > 0 \\ 8a+17 \geq 0 \\ -\frac{2a+3}{2(a-1)} > 0 \end{cases}$$



Решая систему методом интервалов, получаем, что при $-17/8 \leq a < -2$ и $a > 1$ корни $f(x, a) = 0$ отрицательны.

Ответ: $a \in [-17/8; -2[\cup]1; +\infty[$.

Пример 39. Найти все значения параметра, при которых уравнение $2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ имеет корни разных знаков.



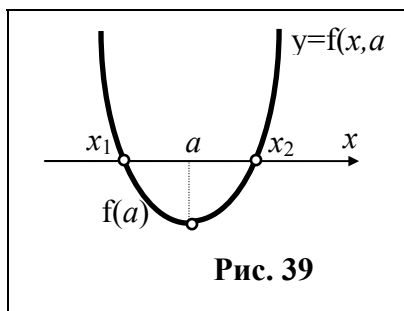
Решение: Переформулируем задачу в терминах расположения корней трехчлена $f(x, a) = 2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ относительно некоторого фиксированного числа. При каких “a” корни уравнения $f(x, a) = 0$ расположены по разные стороны от начала координат (рис. 38). Заметим что ветви всех парабол семейства всегда направлены вверх, так как

$A = 2$. Для того, чтобы точка $x = 0$ лежала между корнями квадратного уравнения $f(x, a) = 0$, в соответствии с теоремой 15, необходимо и достаточно выполнение следующего опорного неравенства

$$A \cdot f(0) < 0 \Leftrightarrow f(0) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2$$

Ответ: $a \in]-2; 2[$.

Пример 40. Найти все значения параметра, при которых корни уравнения $2x^2 - (2a+1)x + a(a-1) = 0$ подчиняются условию $x_1 < a < x_2$



Решение: Представим графическую интерпретацию расположения корней квадратного

трёхчлена $f(x) = 2x^2 - 2(2a+1)x + a(a-1)$ (рис.39). Очевидно, что ветви всех парабол семейства всегда направлены вверх, так как $A = 2$, а значение функции $f(x)$ в точке $x = a$ являются отрицательным. Для того, чтобы корни уравнения

$f(x) = 0$ располагались по разные стороны от точки $x = a$, в соответствии с теоремой 15, необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$f(a) < 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 2(2a+1)a + a(a-1) < 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a > 0 \Leftrightarrow a(a+3) > 0$$

Следовательно, решением неравенства будет внешность отрезка $[-3; 0]$.

Ответ: $a \in]-\infty; -3[\cup]0; +\infty[$

Пример 41. Найти все значения параметра, при которых только один корень уравнения $x^2 + 2(a-3)x + 9 - 2a = 0$ удовлетворяет неравенству $x < 2$.

Решение: Переформулируем задачу в терминах расположения корней квадратного трёхчлена относительно числа: найти все значения параметра при которых только один корень трёхчлена $f(x) = x^2 + 2(a-3)x + 9 - 2a$ лежит левее числа 2.

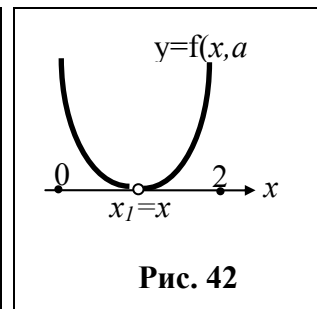
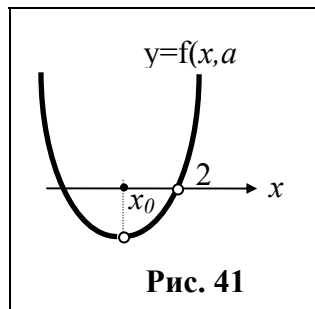
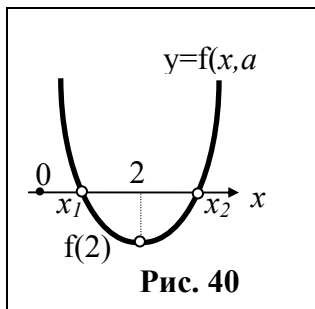
Заметим, что ветви всех парабол семейства $f(x, a)$ всегда направлены вверх, при этом возможны два случая.

1. Если $f(x)$ имеет два различных действительных корня, то условие задачи выполняется, когда число 2 лежит между корнями $f(x, a)$ (рис.40) или когда больший корень $f(x, a)$ в точности равен 2 (рис.41). В первом случае, в соответствии с теоремой 15, это будет при выполнении неравенства $f(2) < 0$, во втором - при выполнении системы;

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ x_0 < 2 \end{cases}$$

Таким образом, переходим к совокупности:

$$\left[\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(2) = 0 \\ x_0 < 2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2a + 1 < 0 \\ 2a + 1 = 0 \\ a > 1 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a < -1/2 \\ \emptyset \end{cases} \right] \Leftrightarrow a < -1/2$$



2. Если $f(x, a) = 0$ имеет один, вернее два совпадающих корня, то условие задачи выполняется, когда этот корень лежит левее числа 2 (рис.42). Найдем значения параметра, когда корни совпадают, т.е. дискриминант $f(x, a) = 0$ обращается в ноль

$$D = 0 \Leftrightarrow (a-3)^2 + 2a - 9 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$$

Таким образом, при $a = 0$ имеем $x_1 = x_2 = 3$, корень не удовлетворяет условию задачи. При $a = 4$ имеем $x_1 = x_2 = -1$ корень расположенный левее числа 2.

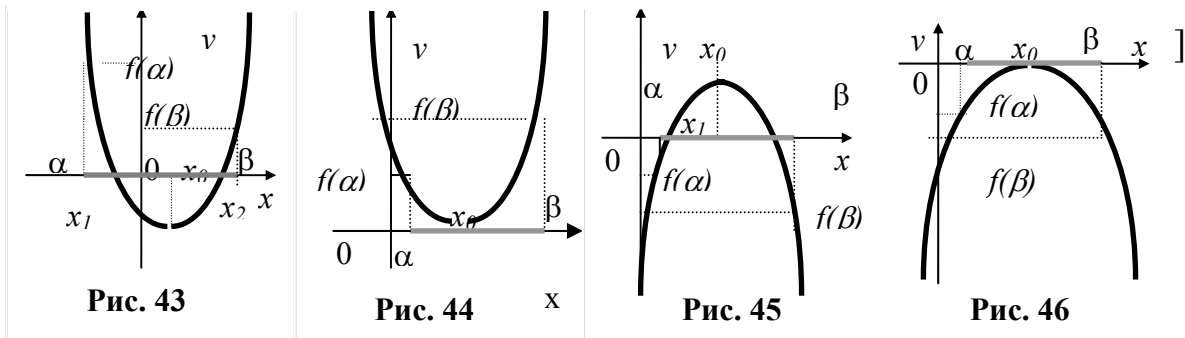
Ответ: $a \in]-\infty; -1/2[\cup \{4\}$.

§ 7. Расположение корней относительно отрезка.

Перейдем к рассмотрению задач второго класса - расположению корней квадратного трехчлена относительно заданного отрезка $[\alpha; \beta]$. По-

кажем, что они сводятся к уже доказанным теоремам 13, 14, 15. Для этого снова обратимся к геометрическому смыслу опорных неравенств, приведенных в начале главы. Там было показано, что набором этих опорных неравенств можно задавать определенное расположение параболы относительно некоторой фиксированной точки α оси абсцисс. Совершенно очевидно, что проведенные исследования (теоремы 13, 14, 15) можно распространить и на две фиксированные точки α и β , соответственно началу и концу отрезка. Так утверждение, что оба корня квадратного трехчлена принадлежат отрезку $[\alpha; \beta]$ можно выразить следующим образом: оба корня уравнения больше числа α , но меньше числа β . А, например, утверждение что только больший корень трехчлена принадлежит отрезку, звучит как: начало отрезка лежит между корнями трехчлена и т.п. Однако обратимся к анализу конкретного расположения корней квадратного уравнения относительно отрезка.

Пусть оба корня квадратного уравнения принадлежат $] \alpha; \beta[$. Здесь возможны четыре разные “картинки” (рис. 43-46), соответственно каждая из которых описывается своей системой неравенств.



$$\begin{cases} A > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0 \\ D > 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} A < 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) < 0 \\ D > 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} A < 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) < 0 \\ D = 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases} \quad (20)$$

Объединяя данные системы в одну, приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ принадлежали заданному промежутку $] \alpha; \beta[$, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) > 0 \\ A \cdot f(\beta) > 0 \\ D \geq 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases} \quad (21)$$

⊗ Действительно, для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ были больше α , но меньше β , необходимо и достаточно в соответствии с теоремами 13, 14 выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) > 0 \\ A \cdot f(\beta) > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > \alpha \\ x_0 < \beta \end{cases} \quad \text{которая равносильна системе (21).}$$

⊗

Рассмотрим теперь случай, когда только один из корней квадратного уравнения принадлежит заданному промежутку $]\alpha; \beta[$.

Следствие 2. Для того, чтобы только меньший корень квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ принадлежал заданному промежутку $]\alpha; \beta[$, а больший лежал вне его необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) > 0 \\ A \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}.$$

⊗ $\Rightarrow$ Действительно, по условию меньший корень принадлежит $]\alpha; \beta[$. (рис. 47, 48), но это означает, что корни трехчлена находятся по разные стороны от конца отрезка β , причем меньший корень больше начала отрезка α , т.е. оба корня больше α .

Из теоремы 15 следует, что

$A \cdot f(\beta) < 0$, а из теоремы 13, что $A \cdot f(\alpha) > 0$.

$\Leftarrow$ Пусть $A \cdot f(\alpha) > 0 \wedge A \cdot f(\beta) < 0$. Докажем, что $\alpha < x_1 < \beta < x_2$.

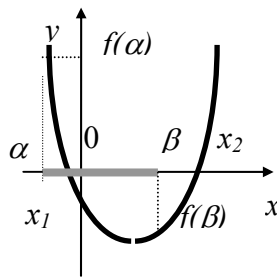


Рис. 47

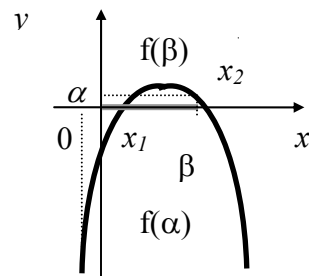


Рис. 48

Из условия $A \cdot f(\beta) < 0$ следует, что трехчлен $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ имеет два действительных корня, которые расположены по разные стороны от числа β , т.е. $x_1 < \beta < x_2$. Из неравенства $A \cdot f(\alpha) > 0$ получим

$$A \cdot f(\alpha) > 0 \Leftrightarrow A \cdot (A\alpha^2 + B\alpha + C) > 0 \Leftrightarrow \frac{(A\alpha^2 + B\alpha + C)}{A} > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{B}{A}\alpha + \frac{C}{A} > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - (x_1 + x_2)\alpha + x_1x_2 > 0 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0.$$

Учитывая, что $\alpha < \beta \wedge \beta < x_2$, имеем из последнего неравенства $x_2 > \alpha \Rightarrow x_1 - \alpha > 0 \Rightarrow x_1 > \alpha$. $\otimes$

Аналогично доказывается двойственное утверждение.

Следствие 3. Для того, чтобы только больший корень квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ принадлежал заданному промежутку $]\alpha; \beta[$, а меньший корень лежал вне отрезка $[\alpha, \beta]$ необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) < 0 \\ A \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}.$$

Геометрическая интерпретация следствия 3 представлена на рис.49,50.

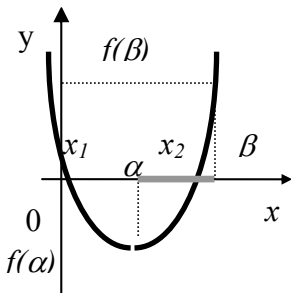


Рис. 49

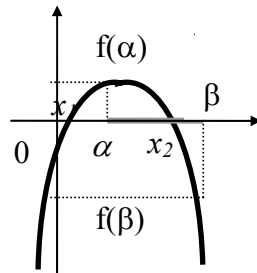


Рис. 50

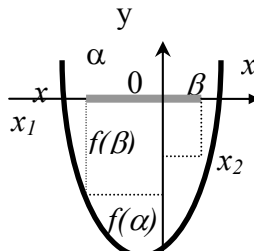


Рис. 51

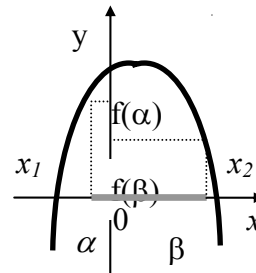


Рис. 52

Объединяя следствия 2, 3 имеем:

Следствие 4. Для того, чтобы только один из корней квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ принадлежал заданному интервалу $]\alpha; \beta[$, а другой лежал вне отрезка $[\alpha, \beta]$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

И, наконец, последний случай, когда корни трехчлена лежат вне отрезка $[\alpha, \beta]$ (рис.51, 52).

Следствие 5. Для того, чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ лежали по разные стороны концов отрезка $[\alpha, \beta]$, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

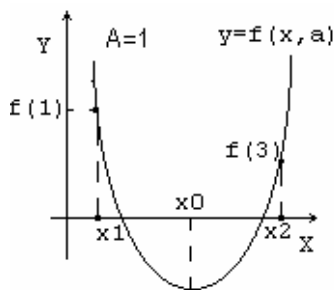
$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) < 0 \\ A \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}.$$

⊗ Так как корни трехчлена лежат вне отрезка $[\alpha, \beta]$ то, значит и по разные стороны от α и от β . Применяя теорему 15, получаем искомую систему. ⊗

Вообще говоря, нет никакой необходимости заучивать громоздкие формулировки доказанных утверждений. Требуется выработать навык умения мыслить одновременно на двух языках - алгебраическом и геометрическом. Это означает, что для получения необходимых и достаточных условий конкретного расположения корней трехчлена нужно уметь пользоваться геометрической интерпретацией опорных неравенств и наоборот. На практике для этого необходимо нарисовать график квадратного трехчлена, удовлетворяющего заданным ограничениям, определить знак $f(x)$ в точках α и β . Затем нужно установить, требуется ли накладывать какие-либо ограничения на знак дискриминанта, а также оговорить положение абсциссы вершины при перемещении параболы вдоль оси абсцисс.

Пример 42. Найти все значения параметра, при которых оба различных корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат интервалу $]1; 3[$.

Решение: Изобразим схематически (рис.53) график квадратного трехчлена $f(x, a) = x^2 - ax + 2$, оба корня которого принадлежат интервалу $]1; 3[$. Составим систему опорных неравенств (следствие 1.), которое соответственно утверждают, что имеется два действительных различных корня, в точках $x=1$ и $x=3$ парабола расположена выше оси абсцисс, и наконец,



$$\begin{cases} D > 0 \\ f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \\ 1 < x_0 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8 > 0 \\ 3 - a > 0 \\ 11 - 3a > 0 \\ 1 < \frac{a}{2} < 3 \end{cases}$$

Рис.53

что ее вершина расположена между этими точками. Решая полученную систему методом интервалов, получаем, что $2\sqrt{2} < a < 3$.

Ответ: $a \in]2\sqrt{2}; 3[$.

Пример 43. Найти все значения параметра, при которых корни уравнения $(a-2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ удовлетворяют условию $1 < x < 3$.

Решение: Определим граничное значение параметра. При $a=2$ исходное квадратное уравнение вырождается в линейное $-4x + 5 = 0$, корень которого $x = \frac{5}{4}$ больше 1, но меньше 3. Следовательно, $a=2$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a \neq 2$, то рассмотрим функцию $f(x, a) = x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2}$.

Геометрическая интерпретация представлена на рис.54. В отличие от

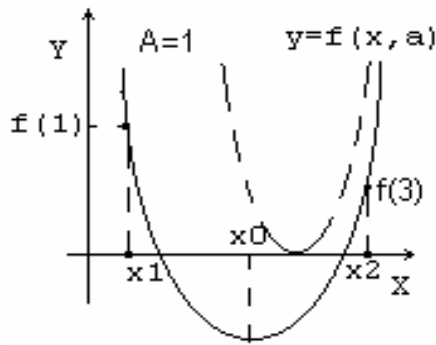
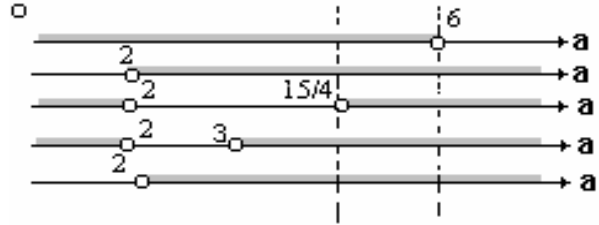


Рис 54

предыдущего примера, где четко оговорено наличие 2-х корней, здесь необходимо рассматривать еще и случай совпадения корней. Пунктиром показано предельное положение параболы, отвечающее этому случаю, т.е. когда дискриминант обращается в ноль. Поэтому система опорных неравенств будет такая же как и в предыдущем примере, кроме первого неравенства, которое будет нестрогое.

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \\ 1 < x_0 < 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6-a \geq 0 \\ \frac{1}{a-2} > 0 \\ \frac{4a-15}{a-2} > 0 \\ 1 < \frac{a}{a-2} < 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-6 \leq 0 \\ \frac{1}{a-2} > 0 \\ \frac{a-15/4}{a-2} > 0 \\ \frac{a-3}{a-2} > 0 \\ \frac{2}{a-2} > 0 \end{array} \right.$$



Решая полученную систему методом интервалов, получаем, что $15/4 < a \leq 6$.

Ответ: $a \in] 15/4; 6] \cup \{ 2 \}$.

Пример 44. Найти все значения параметра, при которых уравнение $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ имеет два корня, один из которых меньше 2, а другой меньше 5.

Решение: Представим графическую интерпретацию поставленной задачи, при этом возникает два качественно различных случая. На рис.55 схематично изображен график квадратного трехчлена $f(x, a) = (a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a$, если его старший коэффициент положителен, а корни лежат вне отрезка $[2; 5]$. На рис.56 ветви параболы направлены вниз,

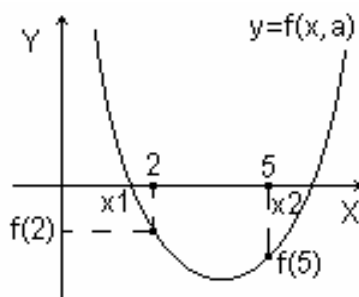


Рис.55

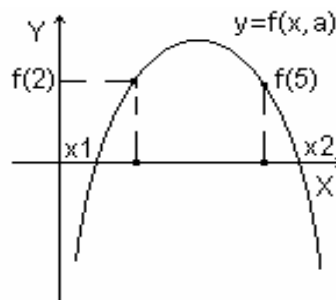


Рис.56

что соответствует отрицательному квадратичному коэффициенту $f(x, a)$ с корнями нахождения вне отрезка $[2; 5]$.

В обоих случаях $f(x, a)$ на концах $[2; 5]$ принимает значения одного знака (в первом случае отрицательные, во втором - положительные), однако их произведение на квадратичный коэффициент всегда отрицательно. Поэтому имеем следующую систему из двух опорных неравенств, что вполне согласуется со следствием 5.

$$\begin{cases} A \cdot f(2) < 0 \\ A \cdot f(5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(4a-20) < 0 \\ (a-2)(19a-80) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a-5) < 0 \\ (a-2)(a-\frac{80}{19}) < 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему методом интервалов, получаем что $2 < a < 80/19$

Ответ: $a \in] 2; 80/19 [$.

Пример 45. Найти все значения параметра, при которых все корни уравнения $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a-6 = 0$ по абсолютной величине не превосходят 2.

Решение: Переформулируем задачу в терминах расположения корней относительно отрезка. При каких a корни уравнения $f(x, a) = (a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a-6 = 0$ принадлежат отрезку $[-2; 2]$. Из условия задачи вытекает, что рассматриваемое уравнение может быть не только квадратным. При переходе через граничное значение параметра $a=3$, распадается на линейное и семейство квадратных уравнений.

При $a=3$ исходное уравнение вырождается в линейное $-10x + 15 = 0$. Его решение $x = 1,5$ удовлетворяет ограничению на корни.

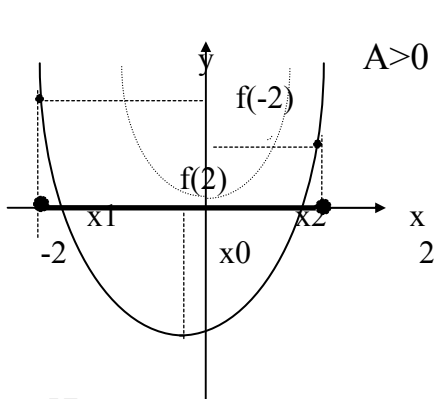


Рис. 57

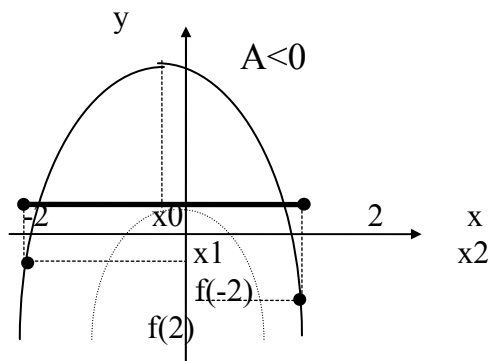


Рис.58

При $a \neq 3$ исходное уравнение всегда остается квадратным. Геометрическая интерпретация рассматриваемого случая представлена на рис.57, 58. Пунктиром показаны предельные положения параболы, отвечающие совпадению корней трёхчлена.

Для того чтобы оба корня $f(x, a)$ принадлежали отрезку $[-2; 2]$, необходимо и достаточно, в соответствии со следствием 1, выполнение четырёх опорных неравенств, которое затем решаем методом интервалов:

$$\begin{cases} A \cdot f(-2) \geq 0 \\ A \cdot f(2) \geq 0 \\ D \geq 0 \\ -2 < x_0 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(23a-34) \geq 0 \\ (a-3)(-a-2) \geq 0 \\ 2a^2+3a-2 \geq 0 \\ -2 < \frac{3a-4}{a-3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{34}{23} \right]$$

Ответ: $a \in \{3\} \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{34}{23} \right]$

Пример 46. Найти все значения параметра, при которых меньший корень уравнения $ax^2 - (4a+1)x + a+2 = 0$ принадлежит полуотрезку $[0; 1]$, а больший корень больше или равен 3.

Решение: Представим графическую интерпретацию задачи. В зависимости от знака старшего коэффициента квадратного трёхчлена $f(x, a) = ax^2 - (4a+1)x + a+2$ возможны два качественно различных случая расположения парабол. На рис.59 ветви параболы направлены вверх, что отвечает положительному квадратичному коэффициенту, при этом меньший корень принадлежит полуотрезку $[0; 1]$, а больший лежит правее (или совпадает) точки $x=3$.

Пунктиром показаны предельные положения параболы, когда она проходит через точки $x=0$ или $x=3$. На рис.60 ветви параболы направлены вниз, меньший корень также принадлежит полуотрезку $[0; 1]$, а больший корень также лежит правее (или совпадает) точки $x=3$. Аналогично показаны пунктиром предельные положения параболы проходящие через точки $x=0$ или $x=3$.

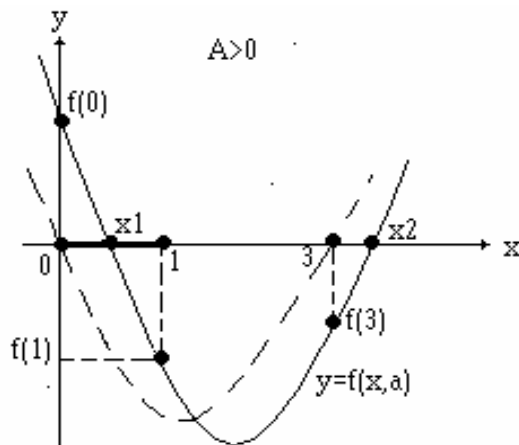


Рис. 59

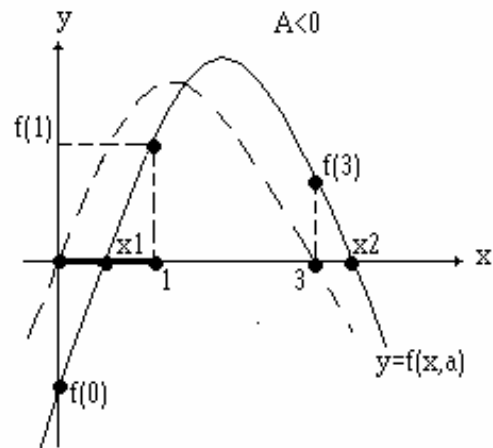
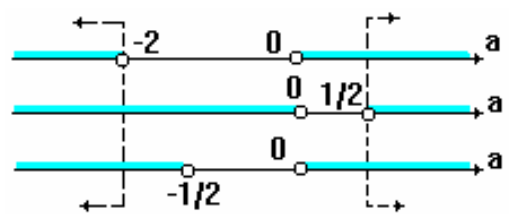


Рис. 60

Заметим, что в обоих случаях парабола в точности один раз пересекает ось абсцисс на полуотрезке $[0; 1]$. Это означает, что на концах полуотрезка $[0; 1]$ $f(x, a)$ принимает разные по знаку значения. Однако в обоих случаях произведения старшего коэффициента a на $f(0)$ и $f(1)$ знакопостоянны, а именно

$$a \cdot f(0) \geq 0 \cap a \cdot f(1) < 0$$

Дословно аналогично, в обоих случаях произведение $a \cdot f(3) \leq 0$. Отсюда, получаем систему из трёх опорных неравенств, которая даёт необходимые и достаточные условия данного расположения корней $f(x)$.

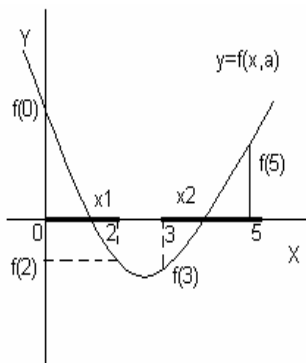
$$\begin{cases} a \cdot f(0) \geq 0 \\ a \cdot f(1) < 0 \\ a \cdot f(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2) \geq 0 \\ a(1-2a) < 0 \\ a(-2a-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2) \cdot a \geq 0 \\ a(a-\frac{1}{2}) > 0 \\ (a+\frac{1}{2}) \cdot a \geq 0 \end{cases}$$


Решая полученную систему методом интервалов, получаем, что $-\infty < \alpha \leq -2$ или $1/2 < \alpha < +\infty$.

Ответ: $\alpha \in]-\infty; -2] \cup]1/2; +\infty[$.

Пример 47. Найти все значения параметра при которых уравнение $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2 = 0$ имеет один корень на интервале $]0; 2[$, а другой на интервале $]3; 5[$.

Решение: Представим графическую интерпретацию задачи. На рис. 61

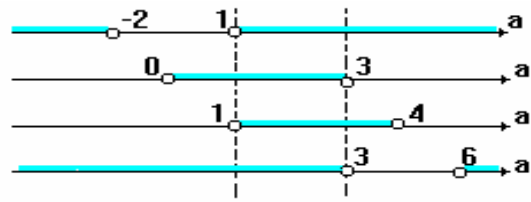


схематически изображен график квадратного трехчлена

$f(x, a) = x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2$, который один раз пересекает ось абсцисс на интервале $]0; 2[$ (корень x_1) и один раз на интервале $]3; 5[$ (корень x_2). На геометрическом языке, это означает, что на концах указанных интервалов $f(x, a)$ принимает разные по знаку значения.

Рис.61 А на алгебраическом языке, выполнение четырех-опорных неравенств $f(0) > 0$, $f(2) < 0$, $f(3) < 0$, $f(5) > 0$. из этих опорных неравенств 4 является необходимыми и достаточными условиями для искомых значений параметра.

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(2) < 0 \\ f(3) < 0 \\ f(5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 2 > 0 \\ a^2 - 3a < 0 \\ a^2 - 5a + 4 < 0 \\ a^2 - 9a + 18 > 0 \end{cases}$$

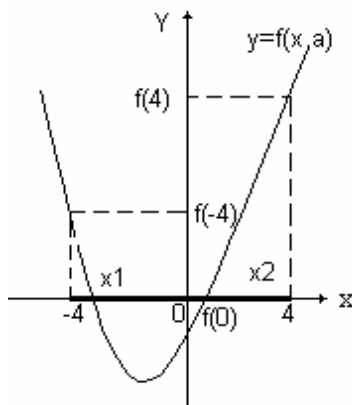


Решая эту систему методом интервалов получаем, что $1 < a < 3$.

Ответ: $a \in]-1; 3[$.

Пример 48. Найти все значения параметра, при которых корни уравнения $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ имеют разные знаки и каждый по модулю меньше 4. Решение: Переформируем задачу в терминах расположения корней относительно интервала. Найти все значения параметра при которых меньший корень $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1$ принадлежит интервалу $]-4; 0[$, а больший интервалу $]0; 4[$.

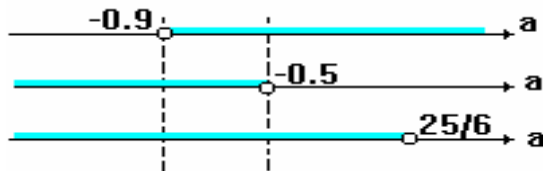
На рис.62 изображена парабола $f(x, a)$, ветви которой направлены вверх, которая один раз пересекает ось абсцисс на интервале $]-4; 0[$ (корень x_1) и один раз на интервале $]0; 4[$ (корень x_2). На геометрическом языке это означает, что на концах интервалов $]-4; 0[$ и $]0; 4[$ $f(x)$ принимает значения равных знаков.



А на алгебраическом языке выполнение трех опорных неравенств $f(-4) > 0$, $f(0) < 0$, $f(4) > 0$. Поэтому система из этих опорных неравенств и является необходимыми и достаточными условиями для искомых значений параметра.

Рис.62

$$\begin{cases} f(-4) > 0 \\ f(0) < 0 \\ f(4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + 9 > 0 \\ 2a + 1 < 0 \\ -6a + 25 > 0 \end{cases}$$



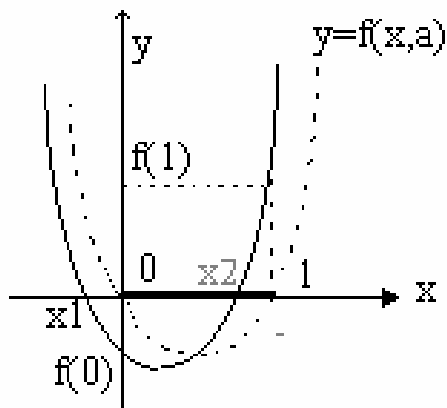
Решая эту систему методом интервалов получаем, что $9/10 < a < -1/2$.

Ответ: $a \in]-9/10; -1/2[$.

Пример 49. Найти все значения параметров, при которых больший корень уравнения $x^2 + 4x - (a-1)(a-5) = 0$ принадлежит полуотрезку $[0; 1[$.

Решение. Представим графическую интерпретацию задачи.

На рис. 63 изображена парабола $f(x, a) = x^2 + 4x - (a-1)(a-5)$, ветви которой направлены вверх, при этом только ее ветвь пересекает ось абсцисс на полуотрезке $[0; 1[$ пунктиром показано предельное



положение параболы проходящей через начало координат, больший корень x_2 на геометрическом языке, это означает, что на концах этого полуотрезка квадратный трехчлен $f(x, a)$ принимает значения разных знаков в предельном положении $f(0) = 0$ на алгебраическом языке это означает выполнение двух опорных неравенств $f(0) \leq 0$, $f(1) > 0$

Рис.63

Поэтому система из этих опорных неравенств и является необходимым и достаточным условием для искомых значений параметра.

$$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(a-1)(a-5) \leq 0 \\ 5 - (a-1)(a-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-5) \geq 0 \\ a(a-6) < 0 \end{cases}$$

Решая эту систему методом интервалов получаем, что $0 > a \leq$ или $5 \leq a < 6$

Ответ: $a] 0; 1[\cup [5; 6[$

Пример 50. Найти все значения параметра, при которых только меньший корень уравнения $(a+2)x^2 - 2ax - a = 0$ принадлежит интервалу $] -2; 3[$.

Решение : Представим геометрическую интерпретацию задачи. В зависимости от знака старшего коэффициента квадратного трехчлена $f(x, a) = (a+2)x^2 - 2ax - a$ возможны два качественно различных случая расположения параболы. На рис 64 ветви параболы направлены вверх, что позволяет положительному квадратному коэффициенту, при этом только левая ветвь пересекает ось абсцисс на интервале $] -2; 3[$. На рис.65 ветви параболы направлены вниз, что отвечает отрицательному квадратному коэффициенту, при этом аналогично только левая ветвь пересекает ось абсцисс на интервале $] -2; 3[$. Это означает, что в обоих случаях $f(x, a)$ принимает на концах этого интервала значения разных знаков. Однако в обоих случаях произведения квадратного коэффициента $a+2$ на значение квадратного трехчлена на концах интервала $f(-2)$ и $f(3)$ знакопостоянны, а именно $(a+2) f(-2) > 0$ и $(a+2) f(3) < 0$. Отсюда получаем систему из двух опорных

неравенств, которая дает необходимые и достаточные условия для искомых значений параметра, отвечающих нужному расположению корней.

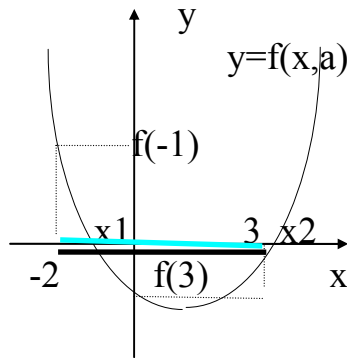


Рис.64

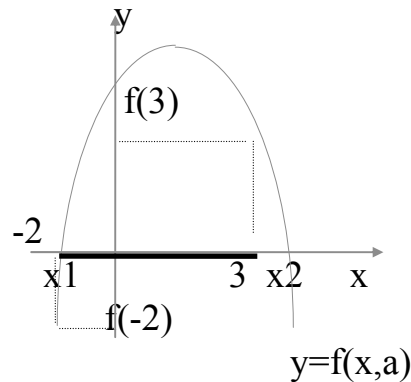


Рис.65

Полученный результат вполне согласуется со следствием 2. (О меньшем корне квадратного трехчлена на отрезке).

Решая систему

$$\begin{cases} A \cdot f(-2) > 0 \\ A \cdot f(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)(7a+8) > 0 \\ (a+2)(a+9) < 0 \end{cases}$$

методом интервалов получаем, что $-9 < a < 2$.

Ответ: $a \in]-9; -2[$.

Пример 51. Найти все значения параметра, при которых существует единственный корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$, удовлетворяющий условию $1 < x < 3$.

Решение: По условию не обязательно существование только двух различных корней уравнения. Поэтому вначале необходимо исследовать значения параметра, при которых корни совпадают.

$$D=0 \Leftrightarrow a^2 - 8=0 \Leftrightarrow (a-2\sqrt{2})(a+2\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ a = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Значению параметра $a=2\sqrt{2}$ соответствует корень $x_{1,2}=\sqrt{2}$, который удовлетворяет условиям задачи: Значению параметра $a=-2\sqrt{2}$ соответствует корень $x_{1,2}=-\sqrt{2}$, который не удовлетворяет условиям задачи ($-\sqrt{2} \notin]1;3[$).

Теперь представим графическую интерпретацию поставленной задачи, в случае существования двух различных действительных корней. Ветви всех парабол семейства всегда направлены вверх при этом возникают два качественно различных случая. На рис. 66 только меньший корень квадратного трехчлена $f(x,a)=x^2-ax+2$ принадлежит интервалу $]1;3[$, т.е. только левая ветвь параболы пересекает ось абсцисс на

этом интервале. На рис. 67 только больший корень квадратного трехчлена x_2 принадлежит интервалу $]1;3[$, т.е. только правая ветвь параболы пересекает ось абсцисс на

этом интервале. Это означает, что в общих случаях $f(x,a)$ принимает на концах исследуемого интервала $]1;3[$ значения разных знаков $f(1) \cdot f(3) < 0$, что вполне согласуется со следствием 4 (об одном корне квадратного трехчлена на отрезке). Решая неравенство методом интервалов, имеем $f(1) \cdot f(3) < 0 \Leftrightarrow (3-a)(11-3a) < 0 \Leftrightarrow 3 < a < 11/3$

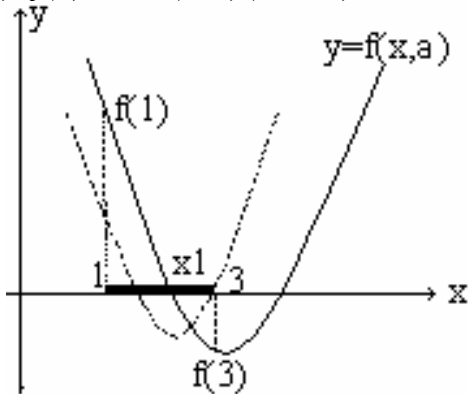


Рис.66

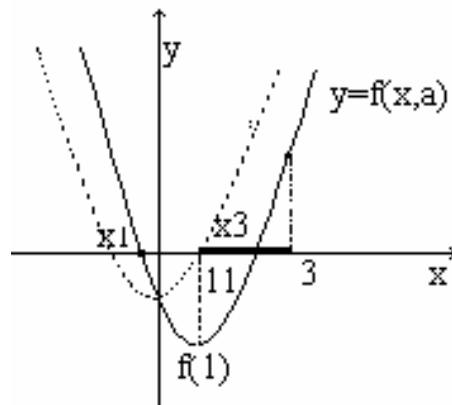


Рис. 67

Однако конечный результат не учитывает еще одной возможности, когда одна ветвь параболы пересекает отрезок, а вторая проходит через конец интервала $]1;3[$. На рис 66 пунктиром показано правое предельное положение параболы, когда $x_2=3 \Leftrightarrow f(3)=0$, а на рис 67 ее левое предельное положение, когда $x_1=1 \Leftrightarrow f(1)=0$

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-a=0 \\ 11-3a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=11/3 \end{cases}$$

Значению параметра $a=11/3$ соответствуют корни $x_1=2/3$, $x_2=3$, которые не удовлетворяют условию задачи. Значению параметра $a=3$ соответствуют корни $x_1=1$, $x_2=2$, которые наоборот удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a \in \{2\sqrt{2}\} \cup]3, 11/3[$.

До сих пор мы рассматривали частные задачи, в которых требуется найти те значения параметра, при которых корни квадратного трехчлена отвечают определенному расположению относительно заданного числового промежутка. Перейдем теперь к комплексной задаче, где требуется проанализировать расположение корней квадратного уравнения относительно некоторого числового промежутка ПРИ ВСЕХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА.

Для этого применим метод очень похожий на метод интервалов, однако будем разбивать на интервалы не множество определения функции, а множество значений параметра.

Пример 52. Исследовать в зависимости от параметра расположение корней уравнения $ax^2 - 3(a+1)x + 2a + 7 = 0$ относительно отрезка $[-1; 4]$.

Решение: Определим граничные значения параметра, при переходе через которые происходят косвенные изменения корней квадратного трехчлена $f(x, a) = ax^2 - 3(a+1)x + 2a + 7$. Это прежде всего $a_1 = 0$, когда исходное уравнение вырождается в линейное и при переходе через которое меняется направление ветвей параболы. Затем, эти значения параметра, при которых дискриминант $f(x, a)$ обращается в ноль и при переходе через которые изменяется число корней уравнения.

$$D = 0 \Leftrightarrow 9(a+1)^2 - 4a(2a+7) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_3 = 9 \end{cases}$$

И, наконец, значения параметра соответствующие значениям $f(x, a)$ на концах заданного отрезка $[-1; 4]$, при переходе через которые $f(-1)$ или $f(4)$ меняет знак.

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 10 = 0 \\ 6a - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = -\frac{5}{3} \\ a_5 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Таким образом множество значений параметра a разбивается точками $-5/3, 0, 5/6, 1, 9$ (Рис. 68) на шесть подмножеств (четыре интервала и две полупрямые). Проведем анализ расположения корней $f(x)$ относительно отрезка $[-1; 4]$ на каждом из указанных подмножеств.

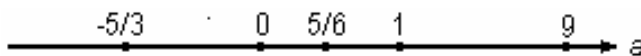


Рис. 68

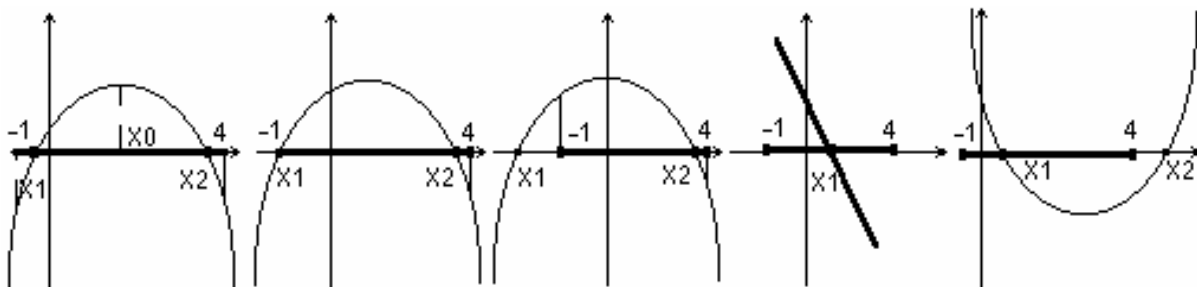


Рис. 69

Рис. 70

Рис. 71

Рис. 72

Рис. 73

1. При $-\infty < a < -5/3$ имеем $A < 0$, $D > 0$, $f(-1) < 0$, $f(4) < 0$, $-1 < x_0 < 4$. Это означает, что ветви параболы направлены вниз, значения $f(x)$ на концах $[-1; 4]$ отрицательны, а вершина расположена между прямыми $x = -1$ и $x = 4$ рис. 69. Следовательно, в этом случае $f(x)$ имеет два различных корня, которые принадлежат заданному отрезку.

2. При $a = -5/3$ исходное уравнение принимает вид $5x^2 - 6x - 11$, корни которого $x_1 = -1$, $x_2 = 11/5$ рис.70. Парабола проходит через новый конец отрезка, т.е. оба корня принадлежат заданному отрезку.

3. При $-5/3 < a < 0$ имеем $A < 0$, $D > 0$, $f(-1) > 0$, $f(4) < 0$. Это означает, что ветви параболы направлены вниз, а значения $f(x, a)$ на концах $[-1; 4]$ разных знаков рис. 71. Следовательно меньший корень расположен левее -1 , а больший между -1 и 4 .

4. При $a = 0$ исходное уравнение вырождается в линейное $-3x + 7 = 0$ рис. 72 корень которого $x_1 = 7/3$ принадлежит заданному отрезку.

5. При $0 < a < 5/6$ имеем $A > 0$, $D > 0$, $f(-1) > 0$, $f(4) < 0$. Это означает, что ветви параболы направлены вверх, а значения $f(x, a)$ на концах $[-1; 4]$ разных знаков рис.73. Следовательно меньший корень принадлежит заданному отрезку, а больший лежит правее 4 .

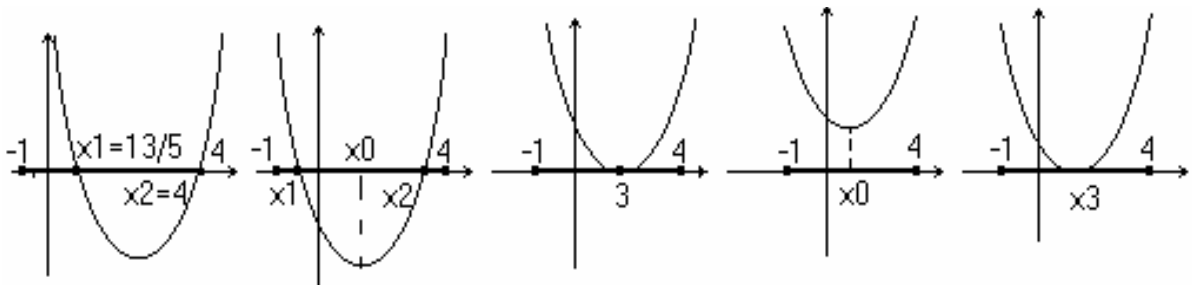


Рис. 74

Рис. 75

Рис. 76

Рис. 77

Рис. 78

6. При $a = 5/6$ исходное уравнение принимает вид $5x^2 - 3x + 52 = 0$, корни которого $x_1 = 13/5$, $x_2 = 4$ принадлежат заданному отрезку рис.74. Парабола проходит через правый конец $[-1; 4]$.

7. При $5/6 < a < 1$ имеем $A > 0$, $D > 0$, $f(-1) > 0$, $f(4) > 0$, $-1 < x_0 < 4$. Это означает, что все ветви параболы направлены вверх, а значения $f(x, a)$ на концах $[-1; 4]$ одного знака рис. 75. Следовательно оба корня принадлежат заданному отрезку.

8. При $a = 1$ Исходное уравнение принимает вид $x^2 - 6x + 9 = 0$, корни которого совпадают $x_1 = x_2 = 3$ и принадлежат заданному отрезку(рис. 76).

9. При $1 < a < 9$ исходное уравнение корней не имеет (рис. 77).

10. При $a = 9$ исходное уравнение принимает вид $9x^2 - 30x + 25 = 0$, корни которого совпадают $x_1 = x_2 = 5/3$ и принадлежат заданному отрезку и принадлежат заданному отрезку (рис.78).

11. При $9 < a < +\infty$ имеем $A > 0$, $D > 0$, $f(-1) > 0$, $f(4) > 0$, $-1 < x_0 < 4$. Это означает, что ветви параболы направлены вверх, а значения $f(x)$ одного знака (рис. 79). Следовательно, оба корня принадлежат одному отрезку.

Ответ: Если $a \in]-\infty; -5/3[\cup]5/6; 1[\cup]9; +\infty[$, то $-1 < x_1 < x_2 < 4$; если $a \in]-5/3; 0[$, то $x_1 < -1 < x_2 < 4$; если $a \in]1; 9[$, то 0 ; если $a = -5/3$, то $x_1 = -1 \wedge x_2 = 11/5$; если $a = 0$, то $x_1 = x_2 = 7/3$; если $a = 5/6$, то если $x_1 = 13/5 \wedge x_2 = 4$; если $a = 1$, то $x_1 = x_2 = 3$; если $a = 9$, то $x_1 = x_2 = 5/3$.

Пример 53. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, a) = 2 - ax - 3x^2$ на отрезке $[-1; 1]$.

Решение: Прежде чем говорить об экстремальных значениях $f(x, a)$, исследуем расположение корней этого квадратного трехчлена относительно отрезка $[-1; 1]$. В отличие от предыдущего примера здесь только два граничных значения параметра, а дискриминант всегда положителен. Это означает, что при любом значении параметра ветви параболы направлены вниз и пересекают ось абсцисс в двух точках. Определим указанные граничные значения параметра, соответствующие значениям $f(x, a)$ на концах отрезка $[-1; 1]$, при переходе через которые $f(-1)$ или $f(1)$ меняет знак

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Отсюда множество значений параметра разбивается точками $-1, 1$ на три подмножества (один интервал и две полупрямые), притом:

1. Если $-\infty < a < -1$, то $f(-1) < 0 \wedge f(1) > 0$. Отсюда меньший корень принадлежит интервалу $] -1; 1 [$, а больший нет (рис.84), т.е. $-1 < x_1 < 1 < x_2$.

2. Если $a = 1$, то $f(-1) < 0 \wedge f(1) = 0$. Отсюда оба корня принадлежат интервалу $] -1; 1 [$, при этом больший совпадает с его правым концом (рис.83), т.е. $1 < x_1 < x_2 = 1$.

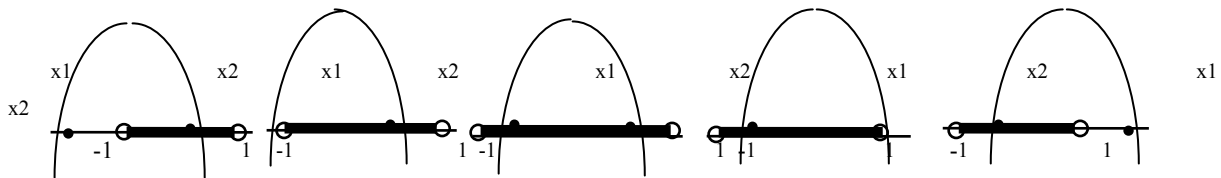


Рис. 80

Рис. 81

Рис. 82

Рис. 83

Рис. 84

3. Если $-1 < a < 1$, то $f(-1) < 0 \wedge f(1) < 0$. Отсюда оба корня лежат внутри отрезка $[-1; 1]$ (рис. 82), т.е. $-1 < x_1 < x_2 < 1$.

4. Если $a=1$, то $f(-1)<0 \wedge f(1)<0$. Отсюда оба корня принадлежат интервалу $] -1; 1 [$, причем меньший совпадает с его левым концом (рис. 81), т.е. $x_1=-1<x_2<1$.

5. Если $1<a<+\infty$, то $f(-1)>0 \wedge f(1)<0$. Отсюда больший корень принадлежит $] -1; 1 [$, а меньший нет (рис. 80), т.е. $x_1<-1<x_2<1$.

Таким образом из анализа расположения параболы во всех пяти случаях следует важный вывод. При любом значении параметра, хотя бы один корень $f(x,a)$ принадлежит отрезку $[-1;1]$.

Перейдем теперь к отысканию экстремальных значений $f(x)$. Для любой параболы с отрицательным квадратичным коэффициентом точкой максимума будет вершина, а участками монотонного возрастания и убывания будут соответственно интервалы $] -\infty; x_0[u]$ $x_0; +\infty[$. Учитывая по-

лученный результат об обязательной принадлежности отрезку $[-1;1]$. Хотя бы одного корня $f(x)$, можно не привлекать средства математического анализа, а свести задачу о наибольшем и наименьшем значении квадратного трехчлена на $[-1;1]$. К взаимному расположению абсциссы вершины параболы $x_0 = -\frac{B}{2A} = -\frac{a}{6}$ относительно этого отрезка. Определим граничные значения параметра, при которых абсцисса вершин совпадает с концами заданного отрезка $[-1;1]$ и его серединой.

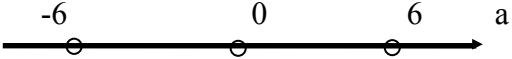
$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a/6 = -1 \\ -a/6 = 1 \\ -a/6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -6 \\ 6 = 0 \end{cases}$$


Рис. 85

Поперечные точки $-6, 0, 6$ разбивают множество значений параметра (рис. 85) на четыре подмножества (два интервала и две полупрямые). Исследуем поведение квадратного трехчлена $f(x,a)$ на отрезке $[-1;1]$, для значений параметра на каждом из этих подмножеств:

1. При $-\infty < a < -6$ имеем $x_0 > 1$, $-1 < x_1 < 1 < x_2$ (рис. 92). Это означает, что $f(x,a)$ принимает наибольшее значение на правом конце $f(1)=-a-1$, а наименьшее на левом $f(-1)=a-1$.

2. При $a=-6$ Имеем $x_0=1$, $-1 < x_1 < 1 < x_2$, $x_1 = 1 - \sqrt{5/3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{5/3}$ (рис. 91). Это означает, что наибольшее значение $f(x,a)$ достигается в вершине $f(x_0)=5$, а наименьшее на левом конце $f(-1) = -7$.

3. При $-6 < a < 0$ имеем $0 < x_0 < 1$ (рис. 90). Наибольшее значение $f(x,a)$ достигается в вершине $f(x_0)=2+a^2/12$, а наименьшее на левом конце $f(-1)=a-1$.

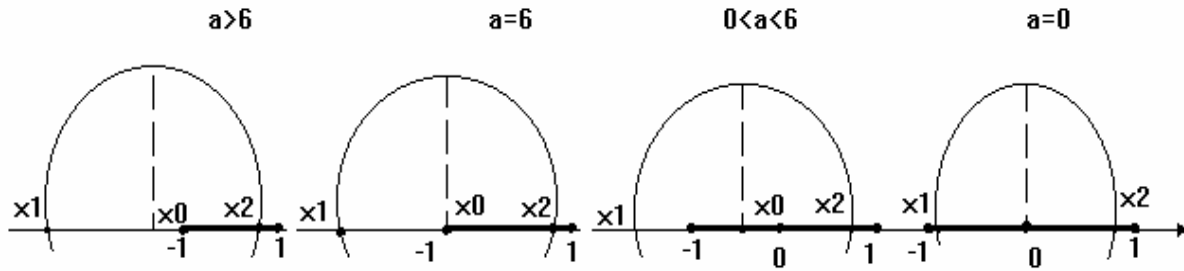


Рис. 86

Рис. 87

Рис. 88

Рис. 89

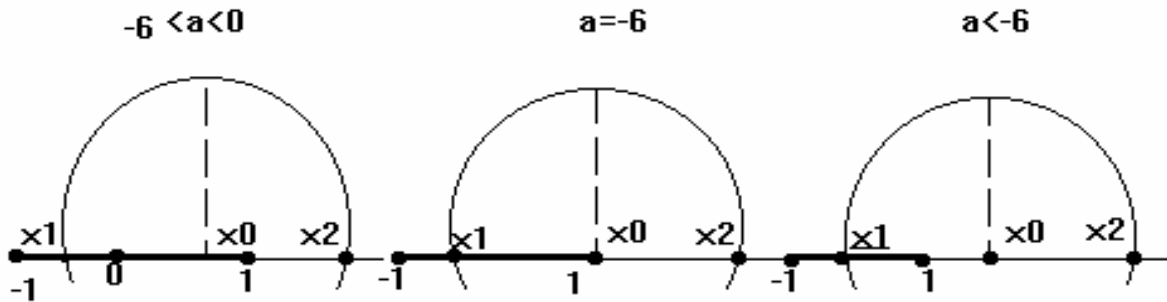


Рис. 90

Рис. 91

Рис. 92

4. При $a=0$ имеем $x_0=0$, $-1 < x_1 < x_2 < 1$, $x_1 = -\sqrt{2/3}$, $x_2 = \sqrt{2/3}$ (рис. 89). Это означает, что наибольшее значение $f(x)$ достигается в вершине $f(x_0)=2$, а наименьшее на обоих концах $f(-1)=f(1)=-1$.

5. При $0 < a < 6$ имеем $-1 < x_0 < 0$ (рис. 88). Наибольшее значение $f(x)$ достигается в вершине $f(x_0)=2+a^2/12$, а наименьшее на правом конце $f(1)=-a-1$.

6. При $a=6$ имеем $x_0=-1$, $x_1 < -1 < x_2 < 1$, $x_1 = -1-\sqrt{5/3}$, $x_2 = -1+\sqrt{5/3}$ (рис. 87). Это означает, что наибольшее значение $f(x)$ достигается в вершине $f(x_0)=5$, а наименьшее на правом конце $f(1)=-7$.

7. При $6 < a < +\infty$ имеем $x_0 < -1$, $x_1 < -1 < x_2 < 1$ (рис. 86). Это означает что наибольшее значение $f(x)$ достигается на левом конце $f(-1)=a-1$, а наибольшее на правом $f(1)=-a-1$.

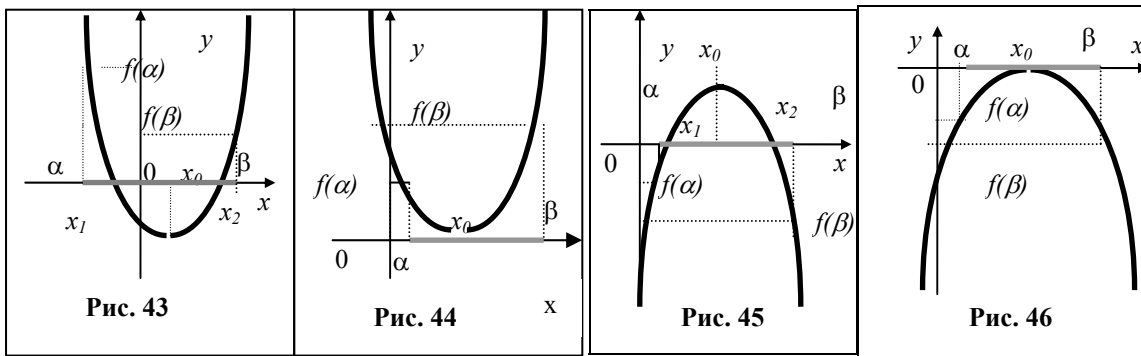
Ответ:

	$\max f(x)$ [$-1; 1$]	$\min f(x)$ [$-1; 1$]
$a \in]-\infty; -6[$	$f(1) = -a-1$	$f(-1) = a-1$
$a \in [-6; 0[$	$f(x_0) = 2+a^2/12$	$f(-1) = a-1$
$a \in [0; 6[$	$f(x_0) = 2+a^2/12$	$f(1) = -a-1$
$a \in [6; +\infty[$	$f(-1) = a-1$	$f(1) = -a-1$

§ 7. Расположение корней относительно отрезка.

Перейдем к рассмотрению задач второго класса - расположению корней квадратного трехчлена относительно заданного отрезка $[\alpha; \beta]$. Покажем, что они сводятся к уже доказанным теоремам 13, 14, 15. Для этого снова обратимся к геометрическому смыслу опорных неравенств, приведенных в начале главы. Там было показано, что набором этих опорных неравенств можно задавать определенное расположение параболы относительно некоторой фиксированной точки α оси абсцисс. Совершенно очевидно, что проведенные исследования (теоремы 13, 14, 15) можно распространить и на две фиксированные точки α и β , соответственно началу и концу отрезка. Так утверждение, что оба корня квадратного трехчлена принадлежат отрезку $[\alpha; \beta]$ можно выразить следующим образом: оба корня уравнения больше числа α , но меньше числа β . А, например, утверждение что только больший корень трехчлена принадлежит отрезку, звучит как: начало отрезка лежит между корнями трехчлена и т.п. Однако обратимся к анализу конкретного расположения корней квадратного уравнения относительно отрезка.

Пусть оба корня квадратного уравнения принадлежат $] \alpha; \beta [$. Здесь возможны четыре разные “картинки” (рис. 43-46), соответственно каждая из которых описывается своей системой неравенств.



$$\begin{cases} A > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0 \\ D > 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} A > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0 \\ D = 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} A < 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) < 0 \\ D > 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} A < 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) < 0 \\ D = 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases} \quad (20)$$

Объединяя данные системы в одну, приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ принадлежали заданному промежутку $]\alpha; \beta[$, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) > 0 \\ A \cdot f(\beta) > 0 \\ D \geq 0 \\ \alpha < x_0 < \beta \end{cases} \quad (21)$$

⊗ Действительно, для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ были больше α , но меньше β , необходимо и достаточно в соответствии с теоремами 13, 14 выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) > 0 \\ A \cdot f(\beta) > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > \alpha \\ x_0 < \beta \end{cases} \quad \text{которая равносильна системе (21).}$$

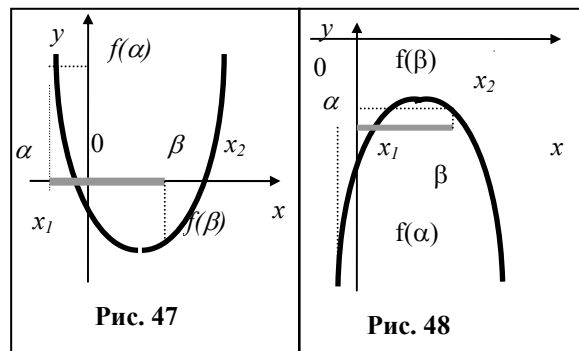
⊗

Рассмотрим теперь случай, когда только один из корней квадратного уравнения принадлежит заданному промежутку $]\alpha; \beta[$.

Следствие 2. Для того, чтобы только меньший корень квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ принадлежал заданному промежутку $]\alpha; \beta[$, а больший лежал вне его необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) > 0 \\ A \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$

⊗ $\Rightarrow$ Действительно, по условию меньший корень принадлежит $]\alpha; \beta[$. (рис. 47, 48), но это означает, что корни трехчлена находятся по разные стороны от конца отрезка β , причем меньший корень больше начала отрезка α , т.е. оба корня больше α .



Из теоремы 15 следует, что $A \cdot f(\beta) < 0$, а из теоремы 13, что $A \cdot f(\alpha) > 0$.

$\Leftrightarrow$ Пусть $A \cdot f(\alpha) > 0 \wedge A \cdot f(\beta) < 0$. Докажем, что $\alpha < x_1 < \beta < x_2$.

Из условия $A \cdot f(\beta) < 0$ следует, что трехчлен $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ имеет два действительных корня, которые расположены по разные стороны от числа β , т.е. $x_1 < \beta < x_2$. Из неравенства $A \cdot f(\alpha) > 0$ получим

$$A \cdot f(\alpha) > 0 \Leftrightarrow A \cdot (A\alpha^2 + B\alpha + C) > 0 \Leftrightarrow \frac{(A\alpha^2 + B\alpha + C)}{A} > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{B}{A}\alpha + \frac{C}{A} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - (x_1 + x_2)\alpha + x_1x_2 > 0 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0.$$

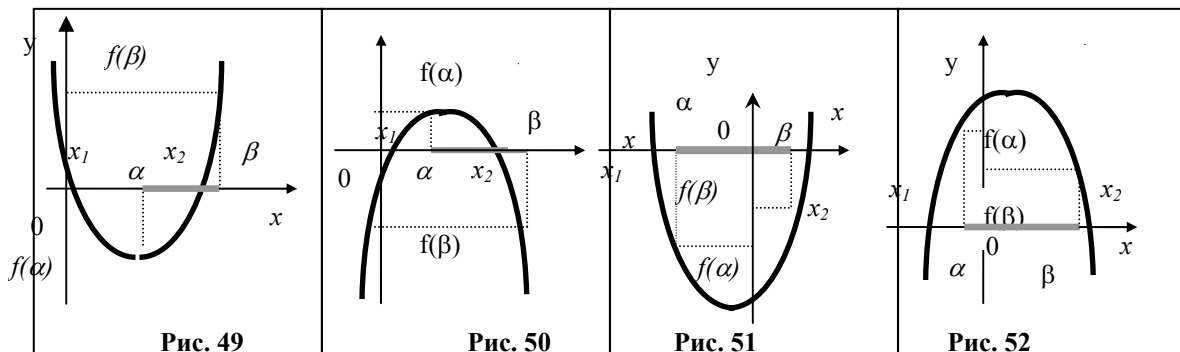
Учитывая, что $\alpha < \beta \wedge \beta < x_2$, имеем из последнего неравенства $x_2 > \alpha \Rightarrow x_1 - \alpha > 0 \Rightarrow x_1 > \alpha$. $\otimes$

Аналогично доказывается двойственное утверждение.

Следствие 3. Для того, чтобы только больший корень квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ принадлежал заданному промежутку $]\alpha; \beta[$, а меньший корень лежал вне отрезка $[\alpha, \beta]$ необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) < 0 \\ A \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}.$$

Геометрическая интерпретация следствия 3 представлена на рис.49,50.



Объединяя следствия 2, 3 имеем:

Следствие 4. Для того, чтобы только один из корней квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ принадлежал заданному интервалу $]\alpha; \beta[$, а другой лежал вне отрезка $[\alpha, \beta]$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

И, наконец, последний случай, когда корни трехчлена лежат вне отрезка $[\alpha, \beta]$ (рис.51, 52).

Следствие 5. Для того, чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ лежали по разные стороны концов отрезка $[\alpha, \beta]$, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} A \cdot f(\alpha) < 0 \\ A \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}.$$

⊗ Так как корни трехчлена лежат вне отрезка $[\alpha, \beta]$ то, значит и по разные стороны от α и от β . Применяя теорему 15, получаем искомую систему. ⊗

Вообще говоря, нет никакой необходимости заучивать громоздкие формулировки доказанных утверждений. Требуется выработать навык умения мыслить одновременно на двух языках - алгебраическом и геометрическом. Это означает, что для получения необходимых и достаточных условий конкретного расположения корней трехчлена нужно уметь пользоваться геометрической интерпретацией опорных неравенств и наоборот. На практике для этого необходимо нарисовать график квадратного трехчлена, удовлетворяющего заданным ограничениям, определить знак $f(x)$ в точках α и β . Затем нужно установить, требуется ли накладывать какие-либо ограничения на знак дискриминанта, а также оговорить положение абсциссы вершины при перемещении параболы вдоль оси абсцисс.

Пример 42. Найти все значения параметра, при которых оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат интервалу $]1; 3[$.

Решение: Изобразим схематически (рис.53) график квадратного трехчлена $f(x, a) = x^2 - ax + 2$, оба корня которого принадлежат интервалу $]1; 3[$. Составим систему опорных неравенств (следствие 1.), которое соответственно утверждают, что имеется два действительных различных корня, в точках $x=1$ и $x=3$ параболы

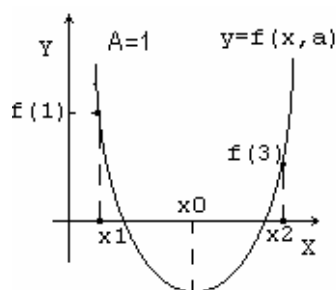


Рис.53

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \\ 1 < x_0 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8 > 0 \\ 3 - a > 0 \\ 11 - 3a > 0 \\ 1 < \frac{a}{2} < 3 \end{cases}$$

расположена выше оси абсцисс, и наконец, что ее вершина расположена между этими точками. Решая полученную систему методом интервалов, получаем, что $2\sqrt{2} < a < 3$.

Ответ: $a \in]2\sqrt{2}; 3[$.

Пример 43. Найти все значения параметра, при которых корни уравнения $(a-2)x^2 - 2ax + a+3 = 0$ удовлетворяют условию $1 < x < 3$.

Решение: Определим граничное значение параметра. При $a=2$ исходное квадратное уравнение вырождается в линейное $-4x+5=0$, корень которого $x = \frac{5}{4}$ больше 1, но меньше 3. Следовательно, $a=2$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a \neq 2$, то рассмотрим функцию $f(x, a) = x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2}$.

Геометрическая интерпретация представлена на рис.54. В отличие от предыдущего примера, где четко оговорено наличие 2-х корней, здесь обходимо рассматривать еще и случай совпадения корней. Пунктиром показано предельное положение параболы, отвечающее этому случаю, т.е.

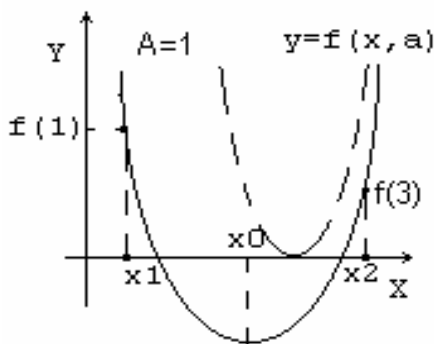


Рис 54

когда дискриминант обращается в ноль. Поэтому система опорных неравенств будет такая же как и в предыдущем примере, кроме первого неравенства, которое будет нестрогое.

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \\ 1 < x_0 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-a \geq 0 \\ \frac{1}{a-2} > 0 \\ \frac{4a-15}{a-2} > 0 \\ 1 < \frac{a}{a-2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6 \leq 0 \\ \frac{1}{a-2} > 0 \\ a-15/4 > 0 \\ \frac{a-2}{a-3} > 0 \\ \frac{2}{a-2} > 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему методом интервалов, получаем, что $15/4 < a \leq 6$.

Ответ: $a \in]15/4; 6] \cup \{2\}$.

Пример 44. Найти все значения параметра, при которых уравнение $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ имеет два корня, один из которых меньше 2, а другой меньше 5.

Решение: Представим графическую интерпретацию поставленной задачи, при этом возникает два качественно различных случая. На рис.55 схематично изображен график квадратного трехчлена $f(x,a)=(a-2)x^2-2(a+3)x+4$, если его старший коэффициент положителен, а корни лежат вне отрезка $[2;5]$. На рис.56 ветви параболы направлены вниз, что соответствует

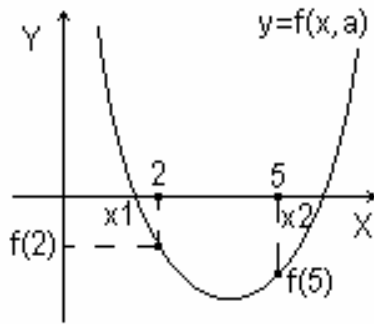


Рис.55

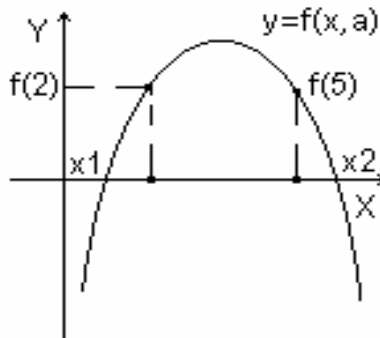


Рис.56

отрицательному квадратичному коэффициенту $f(x,a)$ с корнями нахождения вне отрезка $[2;5]$.

В обоих случаях $f(x,a)$ на концах $[2;5]$ принимает значения одного знака (в первом случае отрицательные, во втором - положительные), однако их произведение на квадратичный коэффициент всегда отрицательно. Поэтому имеем следующую систему из двух опорных неравенств, что вполне согласуется со следствием 5.

$$\begin{cases} A \cdot f(2) < 0 \\ A \cdot f(5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(4a-20) < 0 \\ (a-2)(7a-36) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a-5) < 0 \\ (a-2)(a-\frac{36}{7}) < 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему методом интервалов, получаем что $2 < a < 5$.

Ответ: $a \in] 2; 5 [$.

Пример 45. Найти все значения параметра, при которых уравнение $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$ имеет корни, по абсолютной величине не превосходящие 2.

Решение: Переформулируем задачу в терминах расположения корней относительно отрезка. При каких a корни уравнения $f(x,a)=(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$ принадлежат отрезку $[-2;2]$. Из условия задачи вытекает, что рассматриваемое уравнение может быть не только квадратным. При переходе через граничное значение

параметра $a=3$, распадается на линейное и семейство квадратных уравнений.

При $a=3$ исходное уравнение вырождается в линейное $-10x+15=0$. Его решение $x=1,5$ удовлетворяет ограничению на корни.

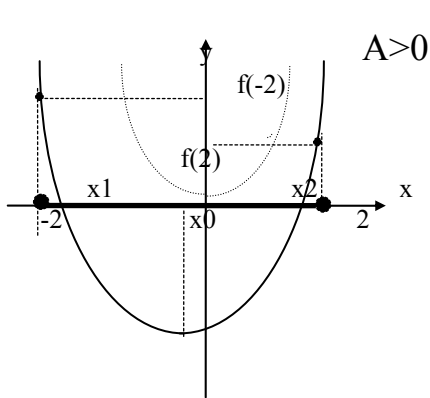


Рис. 57

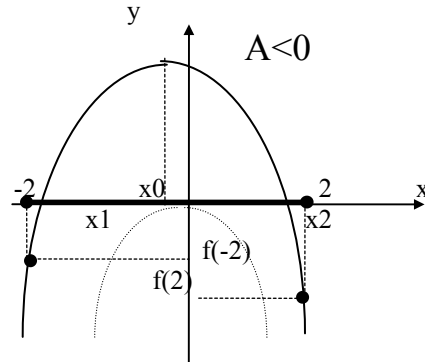


Рис. 58

При $a \neq 3$ исходное уравнение всегда остается квадратным. Геометрическая интерпретация рассматриваемого случая представлена на рис. 57, 58. Пунктиром показаны предельные положения параболы, отвечающие совпадению корней трёхчлена. Для того чтобы оба корня $f(x, a)$ принадлежали отрезку $[-2; 2]$, необходимо и достаточно, в соответствии со следствием 1, выполнение четырёх опорных неравенств, которое затем решаем методом интервалов:

$$\begin{cases} A \cdot f(-2) \geq 0 \\ A \cdot f(2) \geq 0 \\ D \geq 0 \\ -2 < x_0 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(23a-34) \geq 0 \\ (a-3)(-a-2) \geq 0 \\ 2a^2+3a-2 \geq 0 \\ -2 < \frac{3a-4}{a-3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{34}{23} \right]$$

$$\text{Ответ: } a \in \{3\} \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{34}{23} \right]$$

Пример 46. Найти все значения параметра, при которых меньший корень уравнения $ax^2-(4a+1)x+a+2=0$ принадлежит полуотрезку $[0; 1[$, а больший корень больше или равен 3.

Решение: Представим графическую интерпретацию задачи. В зависимости от знака старшего коэффициента квадратного трёхчлена $f(x, a) = ax^2 - (4a+1)x + a+2$ возможны два качественно различных случая расположения парабол. На рис. 59 ветви ветви

параболы направлены вверх, что отвечает положительному квадратичному коэффициенту, при этом меньший корень принадлежит полуотрезку $[0; 1[$, а больший лежит правее (или совпадает) точки $x=3$.

Пунктиром показаны предельные положения параболы, когда она проходит через точки $x=0$ или $x=3$. На рис.60 ветви параболы направлены вниз, меньший корень также принадлежит полуотрезку $[0; 1[$, а больший корень также лежит правее (или совпадает) точки $x=3$. Аналогично показаны пунктиром предельные положения параболы проходящие через точки $x=0$ или $x=3$.

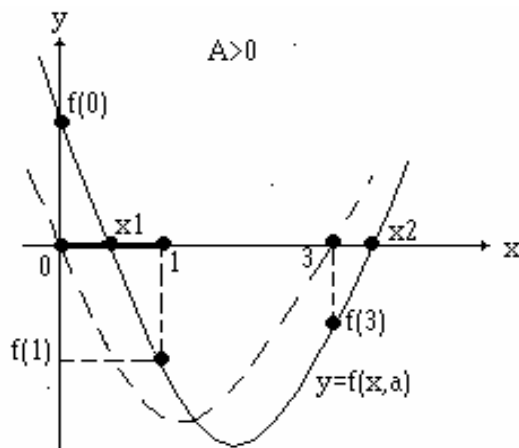


Рис. 59

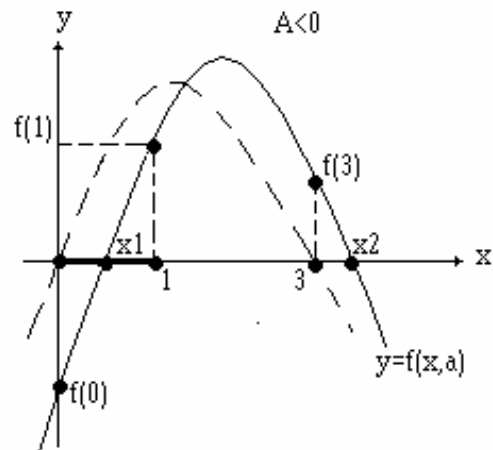


Рис. 60

Заметим, что в обоих случаях парабола в точности один раз пересекает ось абсцисс на полуотрезке $[0; 1[$. Это означает, что на концах полуотрезка $[0; 1[$ $f(x,a)$ принимает разные по знаку значения. Однако в обоих случаях произведения старшего коэффициента a на $f(0)$ и $f(1)$ знакопостоянны, а именно

$$a \cdot f(0) \geq 0 \cap a \cdot f(1) < 0$$

Дословно аналогично, в обоих случаях произведение $a \cdot f(3) \leq 0$. Отсюда, получаем систему из трёх опорных неравенств, которая даёт необходимые и достаточные условия данного расположения корней $f(x)$.

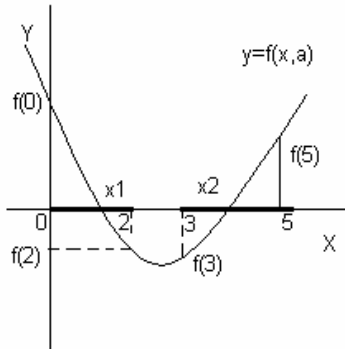
$$\begin{cases} a \cdot f(0) \geq 0 \\ a \cdot f(1) < 0 \\ a \cdot f(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2) \geq 0 \\ a(1-2a) < 0 \\ a(-2a-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2) \cdot a \geq 0 \\ a(a-\frac{1}{2}) > 0 \\ (a+\frac{1}{2}) \cdot a \geq 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему методом интервалов, получаем, что $-\infty < \alpha \leq -2$ или $1/2 < \alpha < +\infty$.

Ответ: $\alpha \in]-\infty; -2] \cup]1/2; +\infty[$.

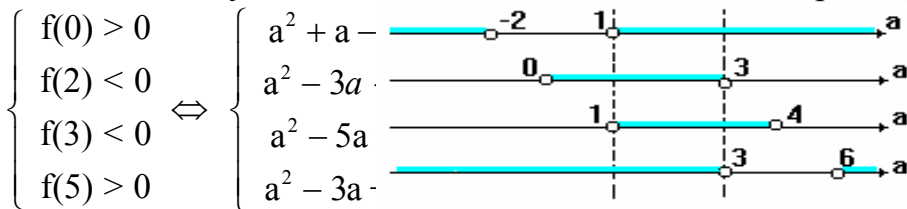
Пример 47. Найти все значения параметра при которых уравнение $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2 = 0$ имеет один корень на интервале $]0; 2[$, а другой на интервале $]3; 5[$.

Решение: Представим графическую интерпретацию задачи. На



схематически изображен график квадратного трехчлена $f(x,a) = x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2$, который один раз пересекает ось абсцисс на интервале $]0; 2[$ (корень x_1) и один раз на интервале $]3; 5[$ (корень x_2). На геометрическом языке, это означает, что на концах указанных интервалов $f(x,a)$ принимает разные по знаку значения. А на алгебраическом языке, выполнение четырех опорных неравенств

Рис.61 $f(0) > 0, f(2) < 0, f(3) < 0, f(5) > 0$. Поэтому система из этих опорных неравенств 4 является необходимыми и достаточными условиями для искомых значений параметра.



Решая эту систему методом интервалов получаем, что $1 < a < 3$.

Ответ: $a \in]1; 3[$.

Пример 48. Найти все значения параметра, при которых корни уравнения $x^2 - 2(a-1)x + 2a+1 = 0$ имеют разные знаки и каждый по модулю меньше 4.

Решение: Переформируем задачу в терминах расположения корней относительно интервала. Найти все значения параметра при которых меньший корень $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a+1$ принадлежит интервалу $] -4; 0[$, а больший интервалу $]0; 4[$.

На рис.62 изображена парабола $f(x,a)$, ветви которой направлены вверх, которая один раз пересекает ось абсцисс на интервале $] -4; 0[$ (корень x_1) и один раз на интервале $]0; 4[$ (корень x_2). На

геометрическом языке это означает, что на концах интервалов $] -4; 0[$ и $] 0; 4[f(x)$ принимает значения равных знаков.

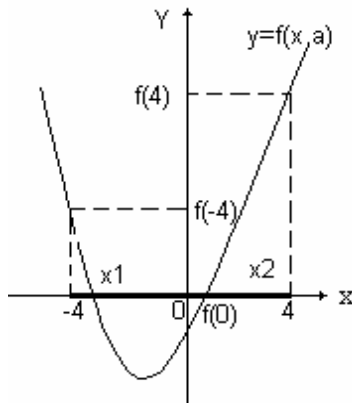
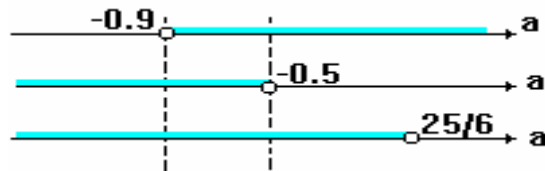


Рис.62

А на алгебраическом языке выполнение трех опорных неравенств $f(-4) > 0$, $f(0) < 0$, $f(4) > 0$. Поэтому система из этих опорных неравенств и является необходимыми и достаточными условиями для искомых значений параметра.

$$\begin{cases} f(-4) > 0 \\ f(0) < 0 \\ f(4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + 9 > 0 \\ 2a + 1 < 0 \\ -6a + 25 > 0 \end{cases}$$



Решая эту систему методом интервалов получаем, что $-9/10 < a < -5/10$.

Ответ: $a \in] -9/10; -5/10 [$.

Пример 49. Найти все значения параметра, при которых больший корень уравнения $x^2 + 4x - (a-1)(a-5) = 0$ принадлежит полуотрезку $] 0; 1[$.

Решение:. Представим графическую интерпретацию задачи.

На рис. 63 изображена парабола $f(x,a) = x^2 + 4x - (a-1)(a-5)$, ветви которые направлены вверх, при этом только ее ветвь пересекает ось абсцисс на полуотрезке $\{0; 1[$ пунктиром показано предельное

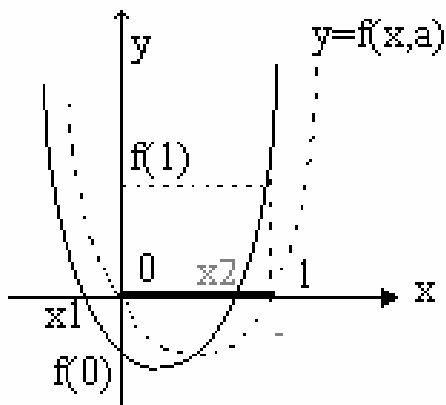


Рис.63

положение параболы проходящей через начало координат, больший корень x_2 на геометрическом языке, это означает, что на концах этого полуотрезка квадратный трехчлен $f(x,a)$ принимает значения разных знаков в предельном положении $f(0) = 0$ на алгебраическом языке это означает выполнение двух опорных неравенств $f(0) \leq 0$, $f(1) > 0$

Поэтому система из этих опорных неравенств и является необходимым и достаточным условием для искомых значений параметра .

$$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(a-1)(a-5) \leq 0 \\ 5-(a-1)(a-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-5) \geq 0 \\ a(a-6) < 0 \end{cases}$$

Решая эту систему методом интервалов получаем , что $0 > a \leq$ или $5 \leq a < 6$

Ответ: $a] 0; 1] \cup [5; 6[$

Пример 50. Найти все значения параметра, при которых только меньший корень уравнения $(a+2)x^2-2ax-a=0$ принадлежит интервалу $] -2 ; 3]$.

Решение : Представим геометрическую интерпретацию задачи . В зависимости от знака старшего коэффициента квадратного трехчлена $f(x,a)=(a+2)x^2-2ax-a$ возможны два качественно различных случая расположения параболы . На рис 64 ветви параболы направлены вверх , что позволяет положительному квадратному коэффициенту, при этом только левая ветвь пересекает ось абсцисс на интервале $] -2; 3[$. На рис.65 ветви параболы направлены вниз, что отвечает отрицательному квадратному коэффициенту, при этом аналогично только левая ветвь пересекает ось абсцисс на интервале $] -2; 3[$. Это означает, что в обоих случаях $f(x,a)$ принимает на концах этого интервала значения разных знаков. Однако в обоих случаях произведения квадратного коэффициента $a+2$ на значение квадратного трехчлена на концах интервала $f(-2)$ и $f(3)$ знакопостоянны , а именно $(a+2) f(-2)>0$ и $(a+2) f(3)<0$. Отсюда получаем систему из двух опорных неравенств , которая дает необходимые и достаточные условия для искомых значений параметра , отвечающих нужному расположению корней .

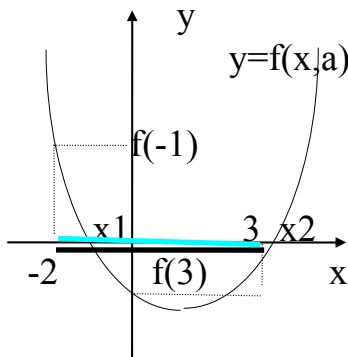


Рис.64

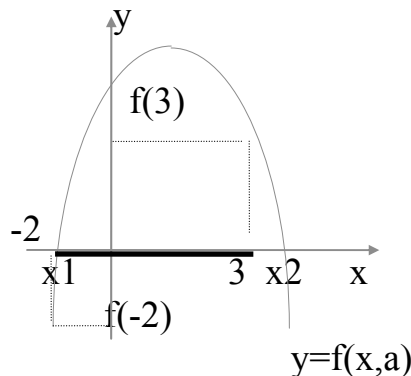


Рис.65

Полученный результат вполне согласуется со следствием 2. (О меньшем корне квадратного трехчлена на отрезке).

$$\text{Решая систему } \begin{cases} A \cdot f(-2) > 0 \\ A \cdot f(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)(7a+8) > 0 \\ (a+2)(a+9) < 0 \end{cases}$$

методом интервалов получаем, что $-9 < a < 2$.

Ответ: $a \in]-9; -2[$.

Пример 51. Найти все значения параметра, при которых существует единственный корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$, удовлетворяющий условию $1 < x < 3$.

Решение: По условию не обязательно существование только двух различных корней уравнения. Поэтому вначале необходимо исследовать значения параметра, при которых корни совпадают.

$$D=0 \Leftrightarrow a^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (a - 2\sqrt{2})(a + 2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ a = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Значению параметра $a = 2\sqrt{2}$ соответствует корень $x_{1,2} = \sqrt{2}$, который удовлетворяет условиям задачи. Значению параметра $a = -2\sqrt{2}$ соответствует корень $x_{1,2} = -\sqrt{2}$, который не удовлетворяет условиям задачи ($-\sqrt{2} \notin]1; 3[$).

Теперь представим графическую интерпретацию поставленной задачи, в случае существования двух различных действительных корней. Ветви всех парабол семейства всегда направлены вверх при этом возникают два качественно различных случая. На рис. 66 только меньший корень квадратного трехчлена $f(x, a) = x^2 - ax + 2$ принадлежит интервалу $]1; 3[$, т.е. только левая ветвь параболы пересекает ось абсцисс на этом интервале. На рис. 67 только больший корень квадратного трехчлена x_2 принадлежит интервалу $]1; 3[$, т.е. только правая ветвь параболы пересекает ось абсцисс на этом интервале. Это означает, что в общих случаях $f(x, a)$ принимает на концах исследуемого интервала $]1; 3[$ значения разных знаков $f(1) \cdot f(3) < 0$, что вполне согласуется со следствием 4 (об одном корне квадратного трехчлена на отрезке). Решая неравенство методом интервалов, имеем $f(1) \cdot f(3) < 0 \Leftrightarrow (3-a)(11-3a) < 0 \Leftrightarrow 3 < a < 11/3$

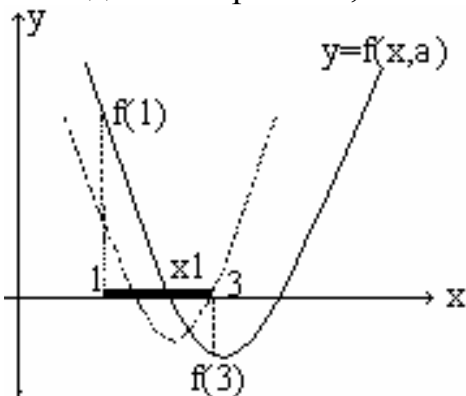


Рис.66

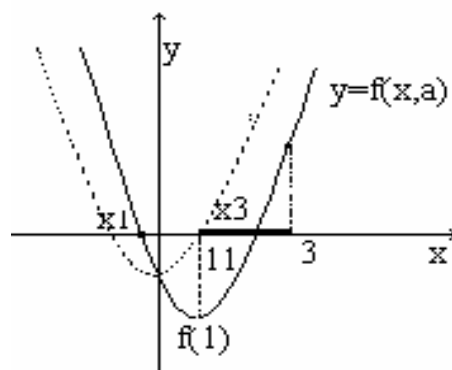


Рис. 67

Однако конечный результат не учитывает еще одной возможности, когда одна ветвь параболы пересекает отрезок, а вторая проходит через конец интервала $]1;3[$. На рис 66 пунктиром показано правое предельное положение параболы, когда $x_2=3 \Leftrightarrow f(3)=0$, а на рис 67 ее левое предельное положение, когда $x_1=1 \Leftrightarrow f(1)=0$

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-a=0 \\ 11-3a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=11/3 \end{cases}$$

Значению параметра $a=11/3$ соответствуют корни $x_1=2/3$, $x_2=3$, которые не удовлетворяют условию задачи. Значению параметра $a=3$ соответствуют корни $x_1=1$, $x_2=2$, которые наоборот удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a \in \{2\sqrt{2}\} \cup]3, 11/3[$.

До сих пор мы рассматривали частные задачи, в которых требуется найти те значения параметра, при которых корни квадратного трехчлена отвечают определенному расположению относительно заданного числового промежутка. Перейдем теперь к комплексной задаче, где требуется проанализировать расположение корней квадратного уравнения относительно некоторого числового промежутка ПРИ ВСЕХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА.

Для этого применим метод очень похожий на метод интервалов, однако будем разбивать на интервалы не множество определения функции, а множество значений параметра.

Пример 52. Исследовать в зависимости от параметра расположение корней уравнения $ax^2-3(a+1)x+2a+7=0$ относительно отрезка $[-1;4]$.

Решение: Определим граничные значения параметра, при переходе через которые происходят косвенные изменения корней квадратного трехчлена $f(x,a)=ax^2-3(a+1)x+2a+7$. Это прежде всего $a_1=0$, когда исходное уравнение вырождается в линейное и при переходе через которое меняется направление ветвей параболы. Затем, эти значение параметра, при которых дискриминант $f(x,a)$ обращается в ноль и при переходе через которые изменяется число корней уравнения.

$$D=0 \Leftrightarrow 9(a+1)^2-4a(2a+7)=0 \Leftrightarrow a^2-10a+9=0 \Rightarrow \begin{cases} a_2=1 \\ a_3=9 \end{cases}$$

И, наконец, значения параметра соответствующие значениям $f(x,a)$ на концах заданного отрезка $[-1;4]$, при переходе через которые $f(-1)$ или $f(4)$ меняет знак.

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 10 = 0 \\ 6a - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = -\frac{5}{3} \\ a_5 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Таким образом множество значений параметра a разбивается точками $-5/3, 0, 5/6, 1, 9$ (Рис. 68) на шесть подмножеств (четыре интервала и две полупрямые). Проведем анализ расположения корней $f(x)$ относительно отрезка $[-1; 4]$ на каждом из указанных подмножеств.

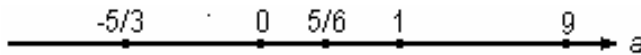


Рис. 68

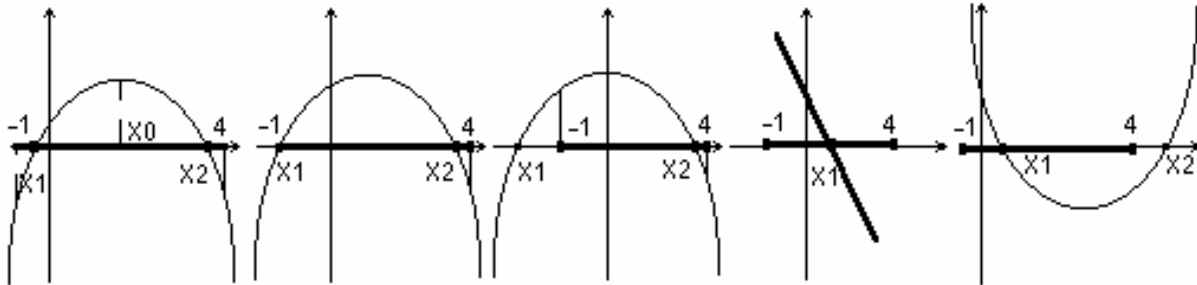


Рис. 69

Рис. 70

Рис. 71

Рис. 72

Рис. 73

1. При $-\infty < a < -5/3$ имеем $A < 0, D > 0, f(-1) < 0, f(4) < 0, -1 < x_0 < 4$. Это означает, что ветви параболы направлены вниз, значения $f(x)$ на концах $[-1; 4]$ отрицательны, а вершина расположена между прямыми $x = -1$ и $x = 4$ рис. 69. Следовательно, в этом случае $f(x)$ имеет два различных корня, которые принадлежат заданному отрезку.

2. При $a = -5/3$ исходное уравнение принимает вид $5x^2 - 6x - 11$, корни которого $x_1 = -1, x_2 = 11/5$ рис. 70. Парабола проходит через новый конец отрезка, т.е. оба корня принадлежат заданному отрезку.

3. При $-5/3 < a < 0$ имеем $A < 0, D > 0, f(-1) > 0, f(4) < 0$. Это означает, что ветви параболы направлены вниз, а значения $f(x, a)$ на концах $[-1; 4]$ разных знаков рис. 71. Следовательно меньший корень расположен левее -1 , а больший между -1 и 4 .

4. При $a = 0$ исходное уравнение вырождается в линейное $-3x + 7 = 0$ рис. 72 корень которого $x_1 = 7/3$ принадлежит заданному отрезку.

5. При $0 < a < 5/6$ имеем $A > 0, D > 0, f(-1) > 0, f(4) < 0$. Это означает, что ветви параболы направлены вверх, а значения $f(x, a)$ на концах $[-1; 4]$ разных знаков рис. 73. Следовательно меньший корень принадлежит заданному отрезку, а больший лежит правее 4 .

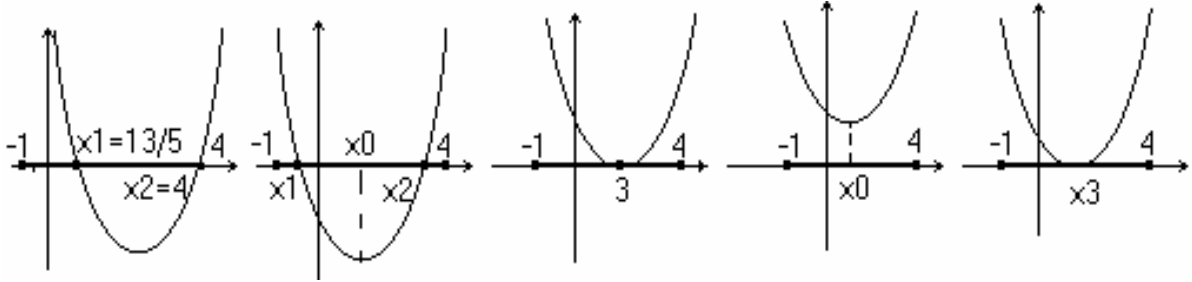


Рис. 74

Рис. 75

Рис. 76

Рис. 77

Рис. 78

6. При $a=5/6$ исходное уравнение принимает вид $5x^2-3x+52=0$, корни которого $x_1=13/5$, $x_2=4$ принадлежат заданному отрезку рис.74. Парабола проходит через правый конец $[-1; 4]$.

7. При $5/6 < a < 1$ имеем $A > 0$, $D > 0$, $f(-1) > 0$, $f(4) > 0$, $-1 < x_0 < 4$. Это означает, что все ветви параболы направлены вверх, а значения $f(x, a)$ на концах $[-1; 4]$ одного знака рис. 75. Следовательно оба корня принадлежат заданному отрезку.

8. При $a=1$ Исходное уравнение принимает вид $x^2-6x+9=0$, корни которого совпадают $x_1=x_2=3$ и принадлежат заданному отрезку(рис. 76).

9. При $1 < a < 9$ исходное уравнение корней не имеет (рис. 77).

10. При $a=9$ исходное уравнение принимает вид $9x^2-30x+25=0$, корни которого совпадают $x_1=x_2=5/3$ и принадлежат заданному отрезку и принадлежат заданному отрезку (рис.78).

11. При $9 < a < +\infty$ имеем $A > 0$, $D > 0$, $f(-1) > 0$, $f(4) > 0$, $-1 < x_0 < 4$. Это означает, что ветви параболы направлены вверх, а значения $f(x)$ одного знака (рис. 79). Следовательно, оба корня принадлежат одному отрезку.

Ответ: Если $a \in]-\infty; -5/3 [\cup] 5/6; 1 [\cup] 9; +\infty [$, то $-1 < x_1 < x_2 < 4$; если $a \in]-5/3; 0 [$, то $x_1 < -1 < x_2 < 4$; если $a \in]1; 9[$, то 0 ; если $a=-5/3$, то $x_1=-1 \wedge x_2=11/5$; если $a=0$, то $x_1=x_2=7/3$; если $a=5/6$, то $x_1=13/5 \wedge x_2=4$; если $a=1$, то $x_1=x_2=3$; если $a=9$, то $x_1=x_2=10/3$.

Пример 53. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, a)=2-ax-3x^2$ на отрезке $[-1; 1]$.

Решение: Прежде чем говорить об экстремальных значениях $f(x, a)$, исследуем расположение корней этого квадратного трехчлена относительно отрезка $[-1; 1]$. В отличие от предыдущего примера здесь только два граничных значения параметра, а дискриминант всегда положителен. Это означает, что при любом значении параметра ветви параболы направлены вниз и пересекают ось абсцисс в двух точках. Определим указанные граничные значения

параметра, соответствующие значениям $f(x, a)$ на концах отрезка $[-1; 1]$, при переходе через которые $f(-1)$ или $f(1)$ меняет знак

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Отсюда множество значений параметра разбивается точками $-1, 1$ на три подмножества (один интервал и две полупрямые), притом:

1. Если $-\infty < a < -1$, то $f(-1) < 0 \wedge f(1) > 0$. Отсюда меньший корень принадлежит интервалу $] -1; 1 [$, а больший нет (рис.84), т.е. $-1 < x_1 < 1 < x_2$.

2. Если $a = 1$, то $f(-1) < 0 \wedge f(1) = 0$. Отсюда оба корня принадлежат интервалу $] -1; 1 [$, при этом больший совпадает с его правым концом (рис.83), т.е. $-1 < x_1 < x_2 = 1$.

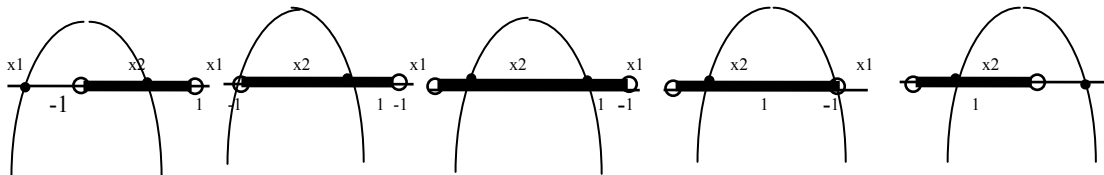


Рис. 80

Рис. 81

Рис. 82

Рис. 83

Рис. 84

3. Если $-1 < a < 1$, то $f(-1) < 0 \wedge f(1) < 0$. Отсюда оба корня лежат внутри отрезка $[-1; 1]$ (рис. 82), т.е. $-1 < x_1 < x_2 < 1$.

4. Если $a = 1$, то $f(-1) < 0 \wedge f(1) = 0$. Отсюда оба корня принадлежат интервалу $] -1; 1 [$, причем меньший совпадает с его левым концом (рис. 81), т.е. $x_1 = -1 < x_2 < 1$.

5. Если $1 < a < +\infty$, то $f(-1) > 0 \wedge f(1) < 0$. Отсюда больший корень принадлежит $] -1; 1 [$, а меньший нет (рис. 80), т.е. $x_1 < -1 < x_2 < 1$.

Таким образом из анализа расположения параболы во всех пяти случаях следует важный вывод. При любом значении параметра, хотя бы один корень $f(x, a)$ принадлежит отрезку $[-1; 1]$.

Перейдем теперь к отысканию экстремальных значений $f(x)$. Для любой параболы с отрицательным квадратичным коэффициентом точкой максимума будет вершина, а участками монотонного возрастания и убывания будут соответственно интервалы $] -\infty; x_0[u]$ и $x_0; +\infty[$. Учитывая полученный результат об обязательной принадлежности отрезку $[-1; 1]$. Хотя бы одного корня $f(x)$, можно не привлекать средства математического анализа, а свести задачу о наибольшем и наименьшем значении квадратного трехчлена на $[-1; 1]$. К взаимному расположению абсциссы вершины

параболы $x_0 = -\frac{B}{2A} = -\frac{a}{6}$ относительно этого отрезка. Определим граничные значения параметра, при которых абсцисса вершин совпадает с концами заданного отрезка $[-1;1]$ и его серединой.

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a/6 = -1 \\ -a/6 = 1 \\ -a/6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -6 \\ 6 = 0 \end{cases}$$

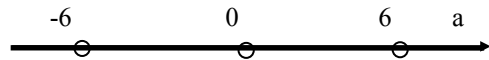


Рис. 85

Поперечные точки $-6, 0, 6$ разбивают множество значений параметра (рис. 85) на четыре подмножества (два интервала и две полупрямые). Исследуем поведение квадратного трехчлена $f(x, a)$ на отрезке $[-1;1]$, для значений параметра на каждом из этих подмножеств:

1. При $-\infty < a < -6$ имеем $x_0 > 1$, $-1 < x_1 < 1 < x_2$ (рис. 92). Это означает, что $f(x, a)$ принимает наибольшее значение на правом конце $f(1) = -a - 1$, а наименьшее на левом $f(-1) = a - 1$.

2. При $a = -6$ Имеем $x_0 = 1$, $-1 < x_1 < 1 < x_2$, $x_1 = 1 - \sqrt{5/3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{5/3}$ (рис. 91). Это означает, что наибольшее значение $f(x, a)$ достигается в вершине $f(x_0) = 5$, а наименьшее на левом конце $f(-1) = -7$.

3. При $-6 < a < 0$ имеем $0 < x_0 < 1$ (рис. 90). Наибольшее значение $f(x, a)$ достигается в вершине $f(x_0) = 2 + a^2/12$, а наименьшее на левом конце $f(-1) = a - 1$.

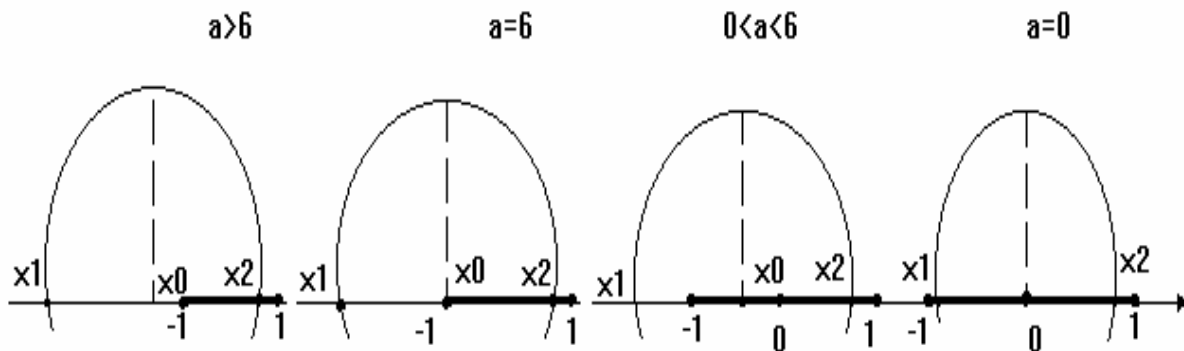


Рис. 86

Рис. 87

Рис. 88

Рис. 89

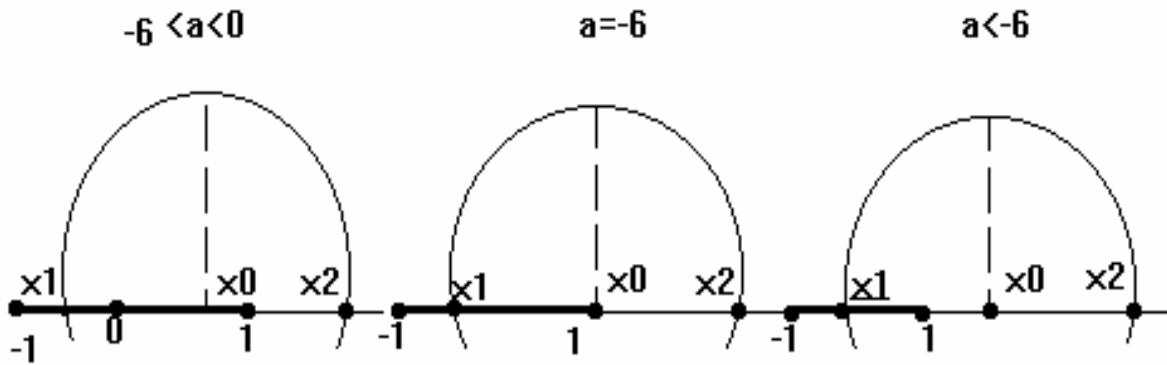


Рис. 90

Рис. 91

Рис. 92

4. При $a=0$ имеем $x_0=0$, $-1 < x_1 < x_2 < 1$, $x_1 = -\sqrt{2/3}$, $x_2 = \sqrt{2/3}$ (рис. 89). Это означает, что наибольшее значение $f(x)$ достигается в вершине $f(x_0)=2$, а наименьшее на обоих концах $f(-1)=f(1)=-1$.

5. При $0 < a < 6$ имеем $-1 < x_0 < 0$ (рис. 88). Наибольшее значение $f(x)$ достигается в вершине $f(x_0)=2+a^2/12$, а наименьшее на правом конце $f(1)=-a-1$.

6. При $a=6$ имеем $x_0=-1$, $x_1 < -1 < x_2 < 1$, $x_1 = -1-\sqrt{5/3}$, $x_2 = -1+\sqrt{5/3}$ (рис. 87). Это означает, что наибольшее значение $f(x)$ достигается в вершине $f(x_0)=5$, а наименьшее на правом конце $f(1)=-7$.

7. При $6 < a < +\infty$ имеем $x_0 < -1$, $x_1 < -1 < x_2 < 1$ (рис. 86). Это означает что наибольшее значение $f(x)$ достигается на левом конце $f(-1)=a-1$, а наибольшее на правом $f(1)=-a-1$.

Ответ:

	$\max f(x)$ $[-1; 1]$	$\min f(x)$ $[-1; 1]$
$a \in]-\infty; -6[$	$f(1) = -a-1$	$f(-1) = a-1$
$a \in [-6; 0[$	$f(x_0) = 2+a^2/12$	$f(-1) = a-1$
$a \in [0; 6[$	$f(x_0) = 2+a^2/12$	$f(1) = -a-1$
$a \in [6; +\infty[$	$f(-1) = a-1$	$f(1) = -a-1$

§ 8. Взаимное расположение корней двух квадратных трехчленов.

Этот параграф посвящен решению задач, в которых так или иначе ставится вопрос о взаимном расположении корней двух квадратных трехчленов. Вообще говоря, выписывание корней указанных трехчленов требует кропотливого сравнения их друг с другом при различных значениях параметра. Поэтому систематизируем возможные случаи расположения корней (основных будет всего три) и разработаем для каждого соответствующие критерии.

Для этого рассмотрим два приведенных квадратных трехчлена $f(x,a)=x^2+p_1(a)x+q_1(a)$ и $g(x,a)=x^2+p_2(a)x+q_2(a)$, каждый с двумя различными действительными корнями каждый $x_1 < x_2$ и $x_3 < x_4$ соответственно. В противном случае задача лишается смысла. Если предположить отсутствие у $f(x,a)$ и $g(x,a)$ общих корней, то существуют следующие 6 вариантов взаимного расположения их пар корней :

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| I. $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ | IV. $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$ |
| II. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ | V. $x_3 < x_4 < x_1 < x_2$ |
| III. $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ | VI. $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ |

Будем говорить, что в случаях I, IV корни трехчленов **ЧЕРЕДУЮТСЯ** (перемежаются) , т.е. когда между корнями одного расположен ровно один корень другого; в случаях II, V корни расположены **ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО** (между корнями одного нет корней другого) и, наконец, в случаях III, VI оба корня одного расположены между корнями другого. Докажем теоремы для критериев I-III взаимного расположения корней трехчлена $g(x,a)$ относительно корней $f(x,a)$, так как остальные получаются из них переменой мест $g(x,a)$ и $f(x,a)$.

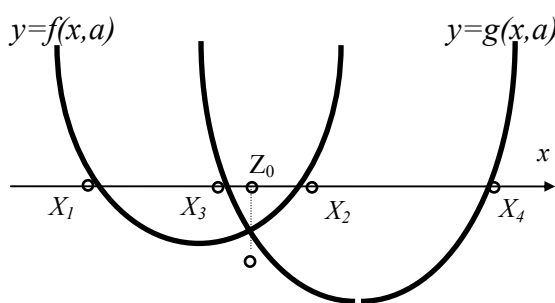


Рис. 93

Рассмотрим постановку задачи в случае, когда корни квадратных трехчленов $f(x,a)$ и $g(x,a)$ перемежаются, т.е. между двумя корнями одного находится только один корень другого (рис.93). Обозначим абсциссы вершин парабол $f(x,a)$ и $g(x,a)$ через x_{01} и x_{02} соответственно, а корень уравнения $f(x)=g(x)$ через z_0 . Анализируя рис. 93 приходим к выводу, что в случае чередования корней точка пересечения парабол $f(x,a)$ и $g(x,a)$

находится ниже оси абсцисс. На алгебраическом языке это означает, что

общее значение функций $f(x,a)$ и $g(x,a)$ отрицательно. Введем вспомогательную функцию $h(x) = f(x,a) - g(x,a) = (p_1 - p_2)x + (q_1 - q_2)$. Так как $h(x)$ - линейная функция, отличная от константы ($p_1 \neq p_2$), то она монотонно возрастает если $p_1 - p_2 > 0$ и монотонно убывает если $p_1 - p_2 < 0$. Поэтому, если существуют некоторые числа $m < n$, для которых выполняется неравенство $h(m) < h(n)$ ($h(m) > h(n)$), то и для любых других значений аргумента $x^I < x^II$ истинно неравенство $h(x^I) < h(x^II)$ ($h(x^I) > h(x^II)$). Заметим также, что неравенство $p_1 - p_2 > 0$ ($p_1 > p_2$) равносильно неравенству $x_{02} - x_{01} > 0$ ($x_{02} > x_{01}$), так как $x_{02} = -\frac{p_2}{2}$ и $x_{01} = -\frac{p_1}{2}$. Отсюда следует геометрический смысл неравенства $p_1 - p_2 > 0$ ($x_{02} - x_{01} > 0$): вершина параболы $y = f(x,a)$ расположена левее вершины параболы $y = g(x,a)$. С учетом этого замечания проведем теперь строгое доказательство критерия чередования корней двух квадратных трехчленов.

Теорема 16. Для чередования (перемежения) корней приведенных квадратных трехчленов $y = f(x,a)$ и $y = g(x,a)$ необходимо и достаточно выполнение системы

$$\begin{cases} f(z_0) < 0 \\ x_{02} - x_{01} > 0 \end{cases}$$

⊗ ⇒ Пусть $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ (рис. 93). Докажем, что

$$\begin{cases} f(z_0) < 0 \\ x_{02} - x_{01} > 0 \end{cases}$$

Действительно по условию $x_1 < x_3 < x_2$. Для того, чтобы число x_3 было заключено между различными корнями x_1, x_2 квадратного трехчлена $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x_3) < 0$ (теорема 15). Учитывая, что $h(x_3) = f(x_3) - g(x_3) = f(x_3) - 0 = f(x_3)$, имеем $h(x_3) < 0$. Аналогично из условия теоремы $x_3 < x_2 < x_4$ получаем $g(x_2) < 0$, а учитывая, что $h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = 0 - g(x_2) = -g(x_2)$, имеем $h(x_2) > 0$. Сравнивая со знаком $h(x_3)$, получаем неравенство $h(x_3) < h(x_2)$ для условия $x_3 < x_2$. Получено, что $h(x)$ - монотонно возрастает, откуда $p_1 - p_2 > 0$, или что тоже самое $x_{02} - x_{01} > 0$.

Трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные значения в точке z_0 . Следовательно $h(z_0) = 0$ и в силу монотонности $h(x)$ имеем $x_3 < z_0 < x_2$ или усиливая неравенство $x_1 < z_0 < x_2$. Вторично, применяя теорему 15 о расположении корней x_1, x_2 квадратного трехчлена $f(x)$ по разные стороны от числа z_0 , получаем недостающее условие $f(z_0) < 0$ искомой системы.

⇐ Пусть теперь $\begin{cases} f(z_0) < 0 \\ p_2 - p_1 > 0 \end{cases}$. Докажем, что $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$.

По условию, $x_{02} - x_{01} > 0$, а значит $p_1 - p_2 > 0$. Следовательно $h(x)$ - монотонно возрастающая функция. Из условия $f(z_0) < 0$, в соответствии с теоремой 15 о разделении корней x_1, x_2 трехчлена $f(x)$ числом z_0 , следует двойное неравенство $x_1 < z_0 < x_2$. Отсюда, в силу монотонного возрастания $h(x)$ имеем $0 = h(z_0) < h(x_2) \Leftrightarrow h(x_2) > 0$. Учитывая, что $g(x_2) = f(x_2) - h(x_2) = 0 - h(x_2) = -h(x_2)$ имеем $g(x_2) < 0$. Вторично применяя теорему 15 о разделении корней x_3, x_4 трехчлена $g(x,a)$ числом x_2 , окончательно получаем $x_3 < x_2 < x_4$ (22).

Аналогично из условия $g(z_0)=f(z_0)<0$ вначале по [теореме 15](#) имеем двойное неравенство $x_3<z_0<x_4$, затем в силу монотонного возрастания $h(x)$ получаем $h(x)<h(z)=0\Leftrightarrow h(x)<0$ наконец, учитывая $f(x_3)=h(x_3)-g(x_2)=h(x_3)-0=h(x_3)<0$ и, применяя повторно [теорему 15](#), получаем $x_1<x_3<x_2$ (23). Сравнивая полученные двойные неравенства с (22) и (23) приходим к искомому $x_1<x_3<x_2<x_4$, $\otimes$

Доказанный критерий охватывает, в некотором смысле промежуточный случай, когда внутри корневые отрезки $[x_1;x_2]$, $[x_3;x_4]$ между корнями обоих трехчленов пересекаются (рис. 93). Перейдем теперь к рассмотрению крайних случаев: указанные отрезки или не пересекаются (рис. 94) или $[x_3;x_4]\subset[x_1;x_2]$ (рис. 95, 96). Учитывая тщательную проработку промежуточного случая и стандартность рассуждений, доказательства оставшихся случаев проведем конспективно.

Теорема 17. Если приведенные квадратные трехчлены $f(x,a)$ и $g(x,a)$ имеют различные действительные корни, то для последовательного расположения пар их корней необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} f(z_0) > 0 \\ x_{01} < z_0 < x_{02} \end{cases}.$$

$\otimes \Rightarrow$ Пусть $x_1<x_3<x_2<x_4$ (рис. 94). Докажем, что $f(z_0)>0 \wedge x_{01}<z_0<x_{02}$.

$$1) \left. \begin{aligned} x_1 < x_2 < x_3 &\Rightarrow f(x_3) > 0 \Rightarrow h(x_3) = f(x_3) - g(x_3) = f(x_3) > 0 \\ x_2 < x_3 < x_4 &\Rightarrow g(x_2) > 0 \Rightarrow h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = -g(x_2) < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(x_2) < h(x_3)$$

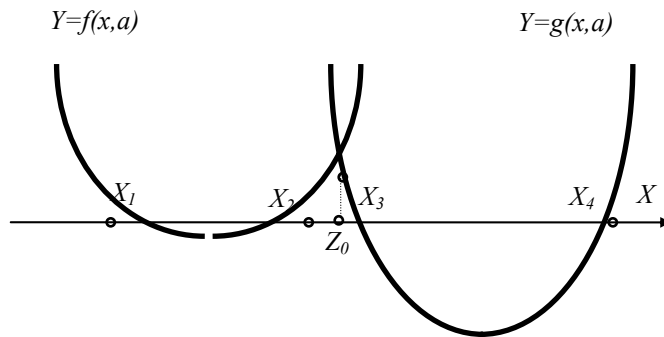


Рис.94

2) $x_2<x_3 \Rightarrow h(x_2)<h(x_3) \Leftrightarrow h(x)$ - монотонно возрастает

3) $h(z_0)=0 \Rightarrow h(x_2)<h(z_0)<h(x_3) \Rightarrow x_2<z_0<x_3$

$$4) \left. \begin{aligned} x_1 < x_2 < z_0 &\Rightarrow \begin{cases} f(z_0) > 0 \\ x_{01} < z_0 \end{cases} \\ z_0 < x_3 < x_4 &\Rightarrow \begin{cases} f(z_0) > 0 \\ z_0 < x_{02} \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f(z_0) > 0 \\ x_{01} < z_0 < x_{02} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ Пусть $f(z_0)>0 \wedge x_{01}<z_0<x_{02}$. Докажем, что $x_1<x_2<x_3<x_4$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z_0) > 0 \\ x_{01} < z_0 \\ f(z_0) > 0 \\ z_0 < x_{02} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 < x_2 < z_0 \\ z_0 < x_3 < x_4 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \quad \otimes$$

В отличие от предыдущих критериев, где имелась единственная геометрическая интерпретация, для случая $[x_3; x_4] \subset [x_1; x_2]$ возможны две “картинки”: z_0 больше “большого” корня (рис. 95) и z_0 меньше “меньшего” корня (рис. 96). Для расположения корней соответствующих рис. 95 линейная функция $h(x)$ монотонно возрастает, а рис. 96 монотонно убывает. Тем не менее критерий для обоих расположений один и тот же.

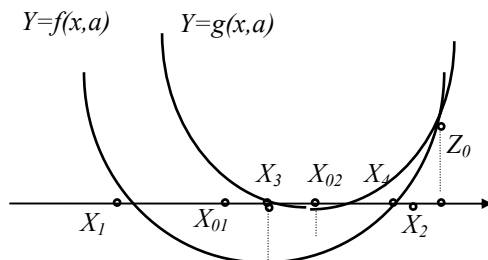


Рис. 95

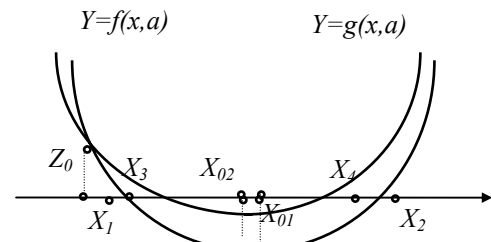


Рис. 96

Теорема 18. Если имеются действительные различные корни у приведенных квадратных трехчленов $f(x,a)$ и $g(x,a)$, то для того чтобы оба корня трехчлена $g(x,a)$ располагались между корнями трехчлена $f(x,a)$ необходимо и достаточно чтобы $\begin{cases} f(z_0) > 0 \\ (z_0 - x_{02})(x_{02} - x_{01}) > 0 \end{cases}$.

$\otimes \Rightarrow$ Пусть $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ (рис. 95, 96). Докажем, что $f(z_0) < 0 \wedge (z_0 - x_{20})(x_{02} - x_{01}) > 0$.

- 1) $\begin{cases} x_1 < x_3 < x_4 \Rightarrow g(x_1) > 0 \Rightarrow h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = -g(x_1) < 0 \\ x_3 < x_4 < x_2 \Rightarrow g(x_2) > 0 \Rightarrow h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = -g(x_2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 < z_0 \\ z_0 < x_3 < x_4 \end{cases}$
- 2) если $x_1 < x_2 < z_0$, то $x_3 > x_4 > z_0 \Rightarrow \begin{cases} g(z_0) > 0 \\ z_0 > x_{02} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(z_0) > 0 \\ z_0 - x_{02} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(z_0) > 0 \\ (z_0 - x_{02})(x_{02} - x_{01}) > 0 \end{cases}$
 $\left. \begin{array}{l} x_2 < z_0 \\ h(x_2) < 0 = h(z_0) \end{array} \right\} \Rightarrow h(z) - \text{монот. возрастает} \Rightarrow p_1 - p_2 > 0$
- 3) если $z_0 < x_1 < x_2$, то $z_0 < x_3 < x_4 \Rightarrow \begin{cases} g(z_0) > 0 \\ z_0 < x_{02} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(z_0) > 0 \\ z_0 - x_{02} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(z_0) > 0 \\ (z_0 - x_{02})(x_{02} - x_{01}) > 0 \end{cases}$
 $\left. \begin{array}{l} z_0 < x_1 \\ h(z_0) = 0 > h(x_1) \end{array} \right\} \Rightarrow h(z) - \text{монот. убывает} \Rightarrow p_1 - p_2 < 0$

$\Leftarrow$ Пусть $f(z_0) < 0 \wedge (z_0 - x_{20})(x_{02} - x_{01}) > 0$. Докажем, что $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$

$$1) (z_0 - x_{02})(x_{02} - x_{01}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 - x_{02} > 0 \\ x_{02} - x_{01} > 0 \\ z_0 - x_{02} < 0 \\ x_{02} - x_{01} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 - x_{02} > 0 \\ p_1 - p_2 > 0 \\ z_0 - x_{02} < 0 \\ p_1 - p_2 < 0 \end{cases}$$

2) Если $(p_1 - p_2) > 0$, то $h(x)$ - монотонно возрастает (рис. 95)

$$\begin{cases} f(z_0) > 0 \\ x_{02} < z_0 \end{cases} \Rightarrow x_3 < x_4 < z_0 \Rightarrow h(x_3) < h(x_4) < h(z_0) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f(x_3) = h(x_3) + g(x_3) = h(x_3) < 0 &\Rightarrow x_1 < x_3 < x_2 \\ f(x_4) = h(x_4) + g(x_4) = h(x_4) < 0 &\Rightarrow x_1 < x_4 < x_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 < x_3 < x_4 < x_2$$

3) Если $(p_1 - p_2) < 0$, то $h(x)$ - монотонно убывает (рис. 96)

$$\begin{cases} f(z_0) > 0 \\ x_{02} > z_0 \end{cases} \Rightarrow z_0 < x_3 < x_4 \Rightarrow h(z_0) = 0 > h(x_3) > h(x_4)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x_3) = h(x_3) + g(x_3) = h(x_3) < 0 &\Rightarrow x_1 < x_3 < x_2 \\ f(x_4) = h(x_4) + g(x_4) = h(x_4) < 0 &\Rightarrow x_1 < x_4 < x_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 < x_3 < x_4 < x_2 \otimes$$

Напомним, что в начале параграфа предполагалось наличие у $f(x, a)$ и $g(x, a)$ единственной общей точки z_0 , поэтому рассмотренные критерии не охватывают расположений, когда трехчлены имеют общие корни. Такие случаи (совпадение корней) рекомендуется выделить в отдельные и рассматривать особо.

Как и в предыдущих параграфах поясним геометрический смысл опорных неравенств, которые входят в критерии для исследования взаимного расположения двух квадратных трехчленов. Неравенство $f(z_0) > 0 (f(z_0) < 0)$ определяет положение точки пересечения графиков трехчленов над (под) осью абсцисс. Неравенство $x_{02} - x_{01} > 0 (x_{02} - x_{01} < 0)$ указывает на порядок расположения вершин парабол по оси абсцисс (какая из них правее или левее). И, наконец, неравенство $x_{01} < z_0 < x_{02}$ указывает на расположение по оси абсцисс вершин парабол относительно их точки пересечения.

Отметим одно важное применение установленных критериев. Пользуясь шестью вариантами взаимного расположения пар корней трехчленов, можно ответить на различные вопросы касающиеся систем совокупностей квадратичных неравенств. Например, если требуется решить систему $\begin{cases} f(x, a) > 0 \\ g(x, a) < 0 \end{cases}$, то не надо бросаться делать преобразования и про-

изводить вычисления. Давайте " пройдем " по всем шести указанным вариантам и увидим, что независимо то конкретного вида трехчленов, ее решениями являются:

в варианте I (рис. 97) – $x_2 < x < x_4$

в варианте II (рис. 98) – $x_3 < x < x_4$

в варианте III (рис. 99) – $\emptyset$

в варианте IV (рис. 100) – $x_2 < x < x_1$

в варианте V (рис. 101) – $x_3 < x < x_4$

в варианте VI (рис. 102) – $[x_3; x_1] \cup [x_2; x_4]$

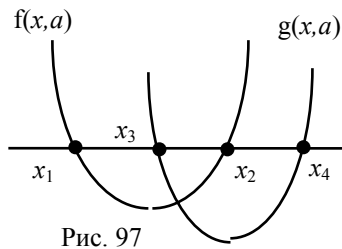


Рис. 97

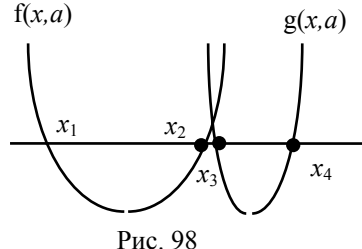


Рис. 98

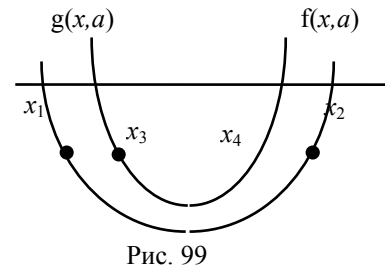


Рис. 99

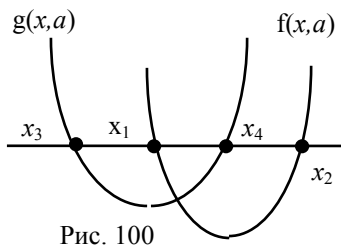


Рис. 100

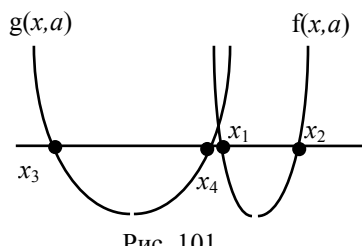


Рис. 101

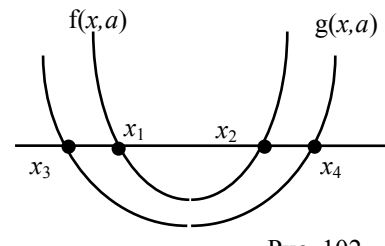


Рис. 102

Более того, в некотором смысле неожиданный практический результат: система с неравенствами противоположных знаков имеет решение в пяти вариантах взаимного расположения пар корней трехчленов и не имеет решений лишь при одном. Поэтому решать задачи "Найти все значения параметра, при которых система неравенств с противоположными знаками имеет решение" целесообразно через логическое отрицание. Еще раз подчеркнем, что все результаты получены для всех систем такого типа, независимо от конкретного вида трехчлена.

Пример 54. Найти все значения параметра, при которых корни уравнений $x^2 - 4ax - 5a^2 = 0$ и $x^2 - 2ax - 1 = 0$ различны и чередуются (перемежаются).

Решение: Сформулируем задачу на алгебраическом языке. При каких "a" между двумя корнями x_1, x_2 квадратного трехчлена $f(x, a) = x^2 - 4ax - 5a^2$ лежит ровно один из корней x_3, x_4 квадратного трехчлена $g(x, a) = x^2 - 2ax - 1$, и наоборот между корнями x_3, x_4 находится ровно один из корней x_1, x_2 . Найдем абсциссу z_0 точки пересечения этих трехчленов

$$f(z_0) = g(z_0) \Leftrightarrow z_0^2 - 4az_0 - 5a^2 = z_0^2 - 2az_0 - 1 \Rightarrow z_0 = \frac{1 - 5a^2}{2a}, a \neq 0$$

Учитывая, что ветви обеих семейств парабол $y=f(x,a)$ и $y=g(x,a)$ всегда

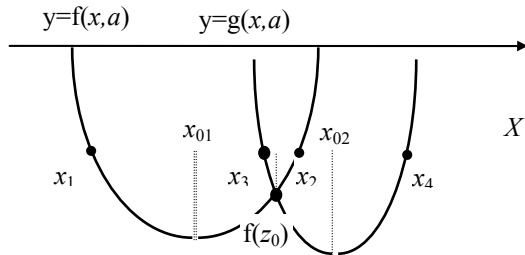


Рис. 103

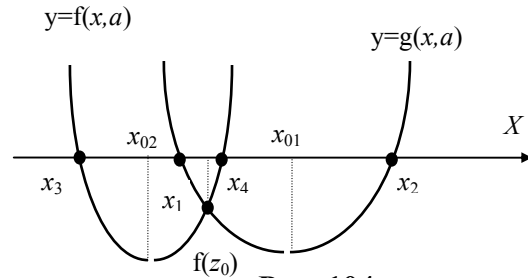


Рис. 104

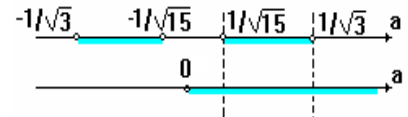
направлены вверх, переформулируем задачу на геометрическом языке. При каких "a" точка пересечения парабол лежит ниже оси абсцисс, учитывая две возможности взаимного расположения их вершин (рис.103, рис.104). Проведем подробный анализ обоих случаев: Пусть $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ (рис.103). Для такого чередования корней, в соответствии с теоремой 16, необходимо и достаточно выполнение следующей системы из двух опорных неравенств, которую решаем методом интервалов.

$$\begin{cases} f(z_0) < 0 \\ x_{01} < x_{02} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{45a^4 - 18a^2 + 1}{4a^2} < 0 \\ 2a < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 - 1/3)(a^2 - 1/15) < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < a < -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

Таким образом для $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ получаем $-1/\sqrt{3} < a < -1/\sqrt{15}$.

2. Пусть теперь $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$ (рис.104). В этом случае, в соответствии с Теоремой 16, знак второго неравенства ранее рассмотренной системы необходимо изменить на противоположный, так как теперь x_{02} - вершина трехчлена $g(x,a)$ находится левее x_{01} .

$$\begin{cases} f(z_0) < 0 \\ x_{01} < x_{02} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{45a^4 - 18a^2 + 1}{4a^2} < 0 \\ 2a > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 - 1/3)(a^2 - 1/15) < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$



Решая систему методом интервалов имеем $-1/\sqrt{15} < a < -1/\sqrt{3}$.

Ответ: При $a \in]-1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{15}[$ имеем $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$;

при $a \in]-1/\sqrt{15}; 1/\sqrt{3}[$ имеем $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$.

Из решенного примера может создаться впечатление, что при нахождении значений параметра, при которых корни двух трехчленов чередуются(перемежаются), **всегда** имеют место два случая расположения вершин трехчленов. Это не так. Наоборот, в большинстве случаев как правило реализуется только один случай.

Пример 55. Найти все значения параметра, при которых корни уравнений $x^2 + \frac{8}{a}x - 2a = 0$ и $x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$ различны и чередуются (перемежаются).

Решение. Сформулируем задачу на алгебраическом языке. При каких “ a ” между двумя корнями x_3, x_4 квадратного трехчлена $f(x, a) = x^2 + \frac{8}{a}x - 2a$ лежит ровно один из корней x_1, x_2 квадратного трехчлена $g(x, a) = x^2 + \frac{6}{a}x - a$, и наоборот между корнями x_1, x_2 (рис.103, рис.104).

Найдем абсциссу z_0 точки пересечения $y=f(x, a)$ и $y=g(x, a)$

$$f(z_0) = g(z_0) \Leftrightarrow z_0^2 + \frac{8}{a}z_0 - 2a = z_0^2 + \frac{6}{a}z_0 - a \Rightarrow z_0 = \frac{a^2}{2} \quad \text{Далее, действуя дословно}$$

аналогично предыдущему примеру, приходим к совокупности двух систем, каждая из которых соответствует расположению вершин парабол, схематически изображенных на рис.103, 104.

$$\left[\begin{array}{l} f(z_0) < 0 \\ x_{01} < x_{02} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^4 / 4 + 2a < 0 \\ 3/a > 6/a \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(a^3 + 8) < 0 \\ a > 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(a^3 + 8) < 0 \\ a < 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \emptyset \\ -2 < a < 0 \end{array} \right]$$

Таким образом реализуется только второй случай расположения вершин парабол, когда x_{01}, x_{02} .

Ответ. При $a \in] -2; 0 [$ имеем $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$

Пример 56. Найти все значения параметра, при которых различные корни уравнения $x^2 + 3x + 6a = 0$ располагаются между корнями уравнения $x^2 + 4x + 4a = 0$.

Решение. Сформулируем задачу на алгебраическом языке. При каких “ a ” корни x_3, x_4 квадратного трехчлена $g(x, a) = x^2 + 3x + 6a$ располагаются между корнями x_1, x_2 трехчлена $f(x, a) = x^2 + 4x + 4a$. Найдем абсциссу z_0 точки пересечения трехчленов.

$$f(z_0) = g(z_0) \Leftrightarrow z_0^2 + 4z_0 + 4a = z_0^2 + 3z_0 + 6a \Rightarrow z_0 = 2a$$

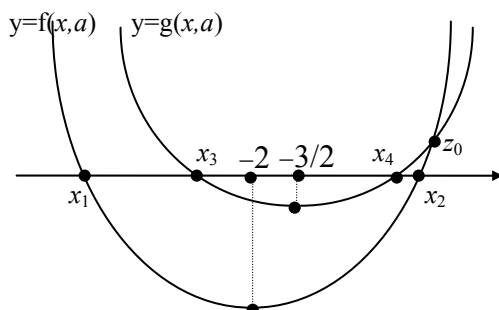


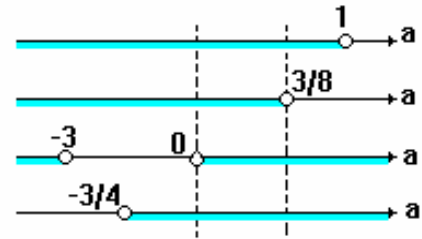
Рис. 105

Учитывая, что ветви обеих семейств парабол $y=f(x, a)$ и $y=g(x, a)$ всегда направлены вверх, а абсциссы их вершин фиксированы и равны $x_{01} = -2$, $x_{02} = -3/2$ соответственно, переформулируем задачу на геометрическом языке. При каких “ a ” точка пересечения парабол расположена выше оси абсцисс и правее обеих вершин. Опре-

делить условия необходимые для реализации указанного расположения пар корней (Рис.105). Выражения для D_1, D_2 -дискриминантов $f(x, a)$ и $g(x, a)$ положительные, общее значение трехчленов $f(z_0) = g(z_0)$ в точке их пересе-

чения положительно, выражение для произведения $(z_0 - x_{02})(x_{02} - x_{01})$ положительно. Последнее условие утверждает, что точка пересечения парабол расположена правее обеих вершин (Теорема 18). Отсюда имеем систему из четырех опорных неравенств, которую решаем методом интервалов

$$\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \\ f(z_0) > 0 \\ (z_0 - x_{02})(x_{02} - x_{01}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4a > 0 \\ 3/4 - 6a > 0 \\ 4a^2 + 12a > 0 \\ (2a + 3/2)(-3/2 + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a < 3/8 \\ a(a + 3) > 0 \\ a + 3/4 > 0 \end{cases}$$



Окончательно получаем $0 < a < 3/8$.

Ответ: если $a \in]0; 3/8[$, ∞ , то $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$.

Пример 57. Найти все значения параметра, при которых корни уравнения $x^2 + 4x + 4a = 0$ расположены между корнями уравнения $x^2 + 3x + 6a = 0$

Решение: В рассматриваемой задаче уравнения предыдущего примера переставлены местами. Кроме того, в отличие от предыдущего примера требуется расположить между корнями $g(x, a) = x^2 + 3x + 6a$ все действительные корни $f(x, a) = x^2 + 4x + 4a$, а не только различные. Сформулируем задачу на алгебраическом языке. При каких “ a ” корни x_1, x_2 квадратного трехчлена $f(x, a)$, причем не только различные, располагаются между корнями x_3, x_4 трёхчлена $g(x, a)$. Найдём абсциссу z_0 точки пересечения этих трёхчленов

$$f(z_0) = g(z_0) \Leftrightarrow z_0^2 + 4z_0 + 4a = z_0^2 + 3z_0 + 6a \Leftrightarrow z_0 = 2a$$

Учитывая, что ветви парабол обоих семейств $y = f(x, a)$ и $y = g(x, a)$ всегда направлены вверх, а абсциссы их вершин фиксированы (но не ординаты) и равны соответственно $x_{01} = -2$, $x_{02} = -3/2$, переформулируем задачу на геометрическом языке. При каких “ a ” точка пересечения парабол лежит выше оси абсцисс и левее обеих вершин (рис. 106).

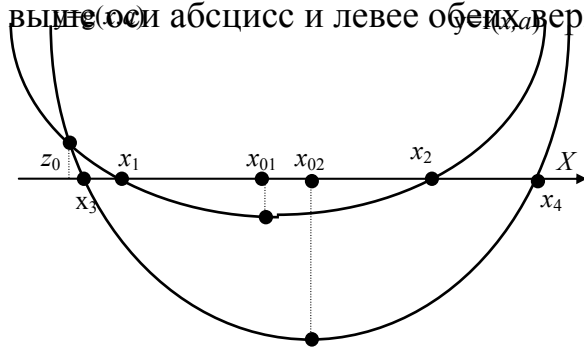
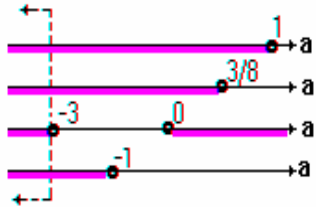


Рис. 92

В отличие от предыдущего примера будем учитывать случай, когда парабола $y = f(x, a)$ касается оси абсцисс. Определены условия необходимые для реализации указанного расположения пар координат.

Выражения для дискриминантов

D_1, D_2 соответственно неотрицательно и положительно, общее значение трехчленов $f(z_0)$ в точке их пересечения положительно, выражение для произведения $(z_0 - x_{01})(x_{01} - x_{02})$ положительно. Последнее условие утверждает, что точка пересечения парабол расположена левее обеих вершин (в соответствии с Теоремой 18). Отсюда имеем систему четырех опорных неравенств, которую решаем методом интервалов

$$\begin{cases} D_1 \geq 0 \\ D_2 > 0 \\ f(z_0) > 0 \\ (z_0 - x_{01})(x_{01} - x_{02}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4a \geq 0 \\ 3/4 - 6a > 0 \\ 4a^2 + 12a > 0 \\ (2a + 2)(-2 + 3/2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ a < 3/8 \\ a(a + 3) > 0 \\ a + 1 < 0 \end{cases}$$


Окончательно получаем $-\infty < a \leq -3$

Ответ : если $a \in]-\infty; -3]$, то $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$.

Пример 58. Найти все значения параметра , при которых корни уравнения $2x^2 + 4(a+2)x + a^2 + 1 = 0$ и $2x^2 + 2(2a+1)x + a^2 + a = 0$ расположены последовательно.

Решение: Сформулируем задачу на алгебраическом языке. При каких "a" между двумя различными корнями x_1, x_2 квадратного трехчлена $f(x, a) = 2x^2 + 4(a+2)x + a^2 + 1$ нет ни одного корня x_3, x_4 квадратного трехчлена $g(x, a) = 2x^2 + 2(2a+1)x + a^2 + a$ и наоборот. Задача имеет смысл только при тех значениях параметра , когда $f(x, a)$ и $g(x, a)$ имеют действительные различные корни т.е. их дискриминанты соответственно $D_1 = 4(a+2)^2 - 2(a^2 + 1) = 2(a^2 + 8a + 7)$ и $D_2 = (2a+1)^2 - 2(a^2 + a) = 2a^2 + 2a + 1$ положительные. Найдем теперь абсциссу z_0 пересечения этих трехчленов $f(z_0) = g(z_0) \Leftrightarrow 2z_0^2 + 4(a+2)z_0 + a^2 + 1 = 2z_0^2 + 3 = 2(2a+1)z_0 + a^2 + a \Rightarrow z_0 = (a-)/6$

Учитывая, что ветви парабол обоих семейств всегда направлены вверх , переформулируем задачу на геометрическом языке. При каких "a" точка пересечения парабол расположена выше оси ОХ, а её абсцисса ограничена значением абсцисс вершин x_{01}, x_{02} (рис.93,94). При этом ,как мы видим, возникает две возможности взаимного расположения вершин $x_{01} < x_{02}$ и $x_{01} > x_{02}$. Исследуем обе возможности.

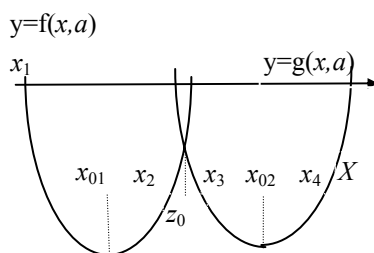


Рис. 107

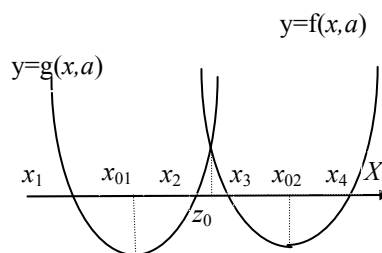
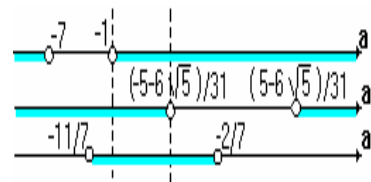


Рис. 108



1. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ (рис.107). Для реализации такого взаимного расположения пар корней трехчленов, в соответствии с Теоремой 17. необходимо и достаточно выполнение следующей системы из четырех опорных неравенств

$$\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \\ f(z_0) > 0 \\ x_{01} < z_0 < x_{02} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 8a + 7 > 0 \\ 2a^2 + 2a + 1 > 0 \\ \frac{1}{18}(31a^2 + 10a - 5) > 0 \\ -(a+2) < \frac{a-1}{6} < -\frac{2a+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+7)(a+1) > 0 \\ -\infty < a < +\infty \\ (a + \frac{5+6\sqrt{5}}{31})(a + \frac{5-6\sqrt{5}}{31}) > 0 \\ -11/7 < a < 2/7 \end{cases}$$

Решая систему методом интервалов, имеем $-1 < a < \frac{-5-6\sqrt{5}}{31}$

2. Пусть теперь $x_3 < x_4 < x_1 < x_2$ (рис.108). Для реализации такого взаимного расположения пар корней трехчленов необходимо в найденной ранее системе заменить двойное неравенство (последнее условие) на $x_{02} < z_0 < x_{01}$. Такая система не имеет решения.

Ответ: $a \in]-1; \frac{-5-6\sqrt{5}}{31}[$.

Пример 59. Найти все значения параметра, при которых корни уравнения $x^2 + 4x + 2a = 0$ и $x^2 + 3x + 3a = 0$ располагаются последовательно.

Решение: Сформулируем задачу на алгебраическом языке. При каких “a” между корнями x_1, x_2 квадратного трехчлена $f(x, a) = x^2 + 4x + 2a$ нет ни одного корня x_3, x_4 квадратного трехчлена $g(x, a) = x^2 + 3x + 3a$ и наоборот.

Задача имеет смысл только при наличии у трехчленов действительных и различных корней, т.е. когда их дискриминанты положительны. Найдем абсциссу z_0 точки пересечения трехчленов и их общее значение.

$$f(z_0) = g(z_0) \Leftrightarrow z_0^2 + 4z_0 + 2a = z_0^2 + 3z_0 + 3a \quad z_0 = a \Leftrightarrow f(z_0) = a^2 + 6a$$

Учитывая, что ветви парабол обоих семейств всегда направлены вверх, а их вершины фиксированы $x_{01} = -2$, $x_{02} = -3/2$, переформулируем задачу на геометрический язык. При каких “a” точка пересечения парабол расположена выше оси абсцисс, а ее абсцисса ограничена значениями абсцисс вершин $x_{01} = -2$ и $x_{02} = -3/2$ (рис. 110). Реализация указанного взаимного расположения пар корней, в соответствии с Теоремой 2, определяется условиями

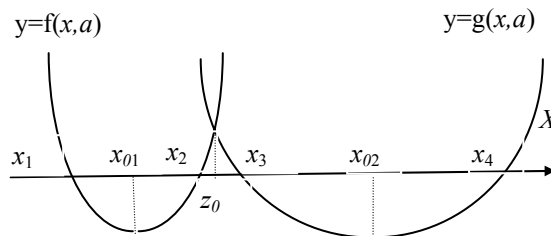
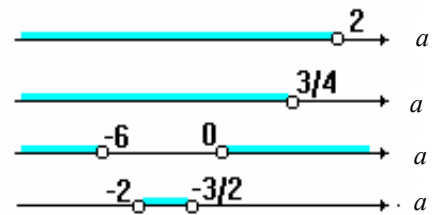


Рис. 110

$$\begin{cases} D_1 > 0, D_2 > 0 \\ f(z_0) > 0 \\ x_{01} < z_0 < x_{02} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2a > 0 \\ 9/4 - 3a > 0 \\ a^2 + 6a > 0 \\ -2 < a < -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2 \\ a < 3/4 \\ a(a+6) > 0 \\ -2 < a < -3/2 \end{cases}$$



Так как система не имеет решений, то не существует ни одного значения параметра, при которых корни исходных уравнений расположены последовательно.
Ответ: $\emptyset$

До сих пор мы анализировали задачи, в которых требовалось выяснить условия, при которых реализуется вполне определенное взаимное расположение пар корней двух квадратных трехчленов. Рассмотрим теперь комплексную задачу, где требуется, в зависимости от параметра, расположить на оси абсцисс корни двух квадратных трехчленов всеми возможными способами.

Пример 60. Найти все значения параметра, при которых корни уравнений $x^2+4x+2a=0$ и $x^2+3x+3a=0$ расположены в порядке возрастания.

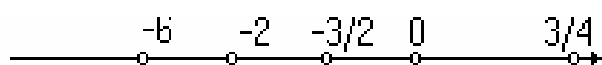
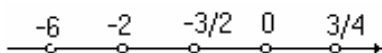
Решение: Сформулируем задачу на алгебраическом языке. Найти в зависимости от “ a ” все возможные порядки возрастания корней трехчленов $f(x,a)=x^2+4x+2a$ и $g(x,a)=x^2+3x+3a$, т.е. когда пары корней чередуются, расположены последовательно или одни в промежутке между другими.

Вначале определены граничные значения параметра. Задача имеет смысл только при наличии действительных корней трехчленов $f(x,a)$ и $g(x,a)$, а, значит, выражения для их дискриминантов соответственно $D_1=16-8a$ и $D_2=9-12a$ должны быть неотрицательными. Очевидно, что $D_1 \geq 0$ и $D_2 \geq 0$ при $a \geq 3/4$. Найдем значение аргумента z_0 , при котором трехчлены принимают равное значение, и определим его

$$f(z_0) = g(z_0) \Leftrightarrow z_0^2 + 4z_0 + 2a = z_0^2 + 3z_0 + 3a \Rightarrow z_0 = a, f(z_0) = g(z_0) = a^2 + 6a.$$

Выражение $f(z_0) = a^2 + 6a$ для общего значения трехчленов меняет знак при $a = -6$ и $a = 0$. Выражения $z_0 - x_{01} = a + 2$ и $z_0 - x_{02} = a + 3/2$, определяющие взаимное расположение точки пересечения графиков (точнее, ее абсцисса) и вершин парабол $y=f(x,a)$ и $y=g(x,a)$ соответственно, меняет знак при $a = -2$ и $a = -3/2$. Таким образом, определены пять граничных значений параметра $-6, -2, -3/2, 0, 3/4$.

Теперь разобьем множество значений параметра $]-\infty; 3/4[$ на пять интервалов $]-\infty; -6[$, $]-6; -2[$, $]-2; -3/2[$, $]-3/2; 0[$, $0; 3/4[$ и составим таблицы, в одну из которых внесем знаки опорных неравенств на каждом из указанных интервалов, а в другую - вытекающие из них геометрические особенности взаимного расположения парабол на этих промежутках.



$f(z_0)$	+	-	-	-	+
$z_0 - x_{01}$	-	-	+	+	+
$z_0 - x_{02}$	-	-	-	+	+

т.пересечения выше оси	т. пересечения ниже оси абс- цисс	т. пересече- ния выше оси
т.пересечения левее верши- ны $f(x,a)$	т.пересечения пра- вее вершины $f(x,a)$	
т.пересечения ле- вее вершины $g(x,a)$	т.пересечения пра- вее вершины	

И, наконец, рассмотрим взаимное расположение графиков трехчленов $y=f(x,a)$ и $y=g(x,a)$ с корнями x_1, x_2 и x_3, x_4 соответственно на каждом из десяти полученных подмножеств, на которые разбито множество значений параметра a : $-\infty; -6$ [, $\{-6\}$, -6 ; -2 [, $\{-2\}$, -2 ; $-3/2$ [, $\{-3/2\}$, $-3/2$; 0 [, $\{0\}$, 0 ; $3/4$ [, $\{3/4\}$.

При этом будем иметь ввиду, что ветви всех парабол всегда направлены вверх, a абсциссы их вершин фиксированы (но не ординаты) и равны $x_{01} = -2$, $x_{02} = -3/2$.

1. При $-\infty < a < -6$ точка пересечения параболы расположена выше оси абсцисс и левее обеих вершин (рис. 111). Следовательно, корни $f(x,a)$ расположены в промежутке между корнями $g(x,a)$, т.е. $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$.

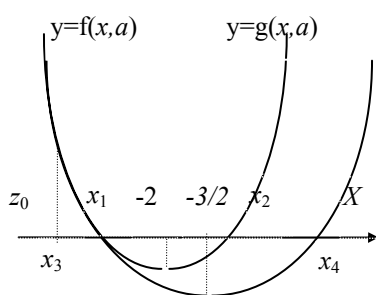


Рис. 111

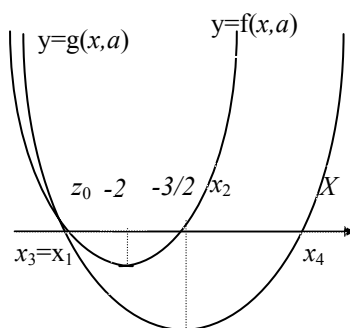


Рис.112

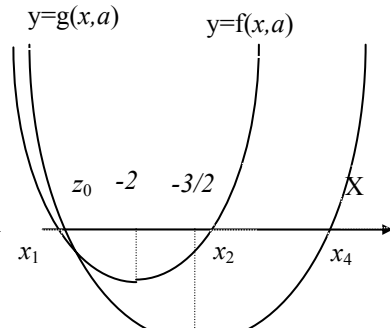


Рис.113

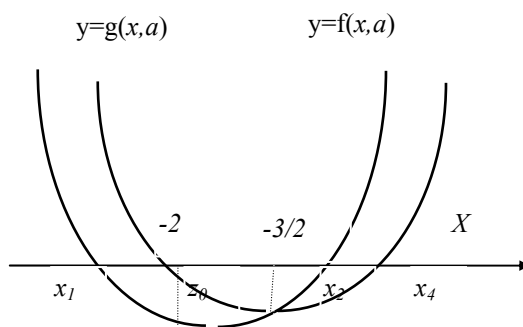


Рис.114

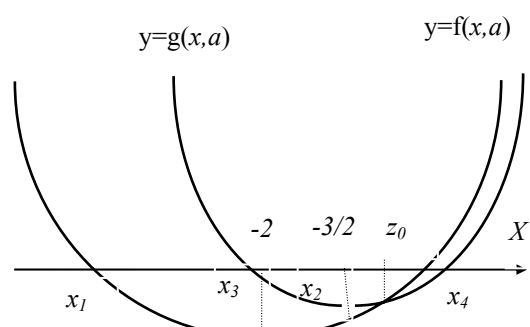


Рис.115

2. При $a = -6$ точка пересечения парабол попадает на ось абсцисс (рис.112), а значит одновременно является и корнем для обоих трехчленов т.е. $x_3 = x_1 < x_2 < x_4$.

3. При $-6 < a < 0$ точка пересечения расположена ниже оси абсцисс, а следовательно, в соответствии с теоремой 1, корни трехчленов чередуются (перемежаются), т.е. $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$. При этом, если на интервале $]-6; -2[$ точка пересечения находится левее обеих вершин (рис.113), если $a = -2$ имеем $z_0 = x_{01} = -2$ (рис.114), если $a \in]-2; -3/2 [$ имеем $x_{01} < z_0 < x_{02}$ (рис.115), при $a = -3/2$ имеем $z_0 = x_{02}$ (рис.116) и, наконец, если $a \in]-3/2; 0 [$ точка пересечения парабол расположена правее обеих вершин (рис.117).

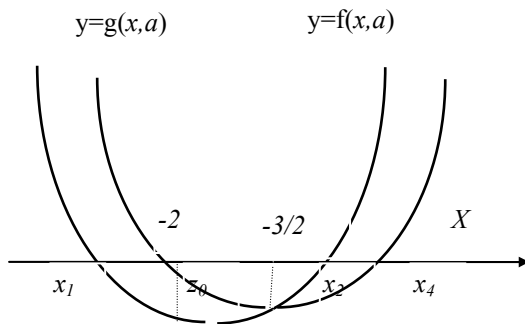


Рис. 116

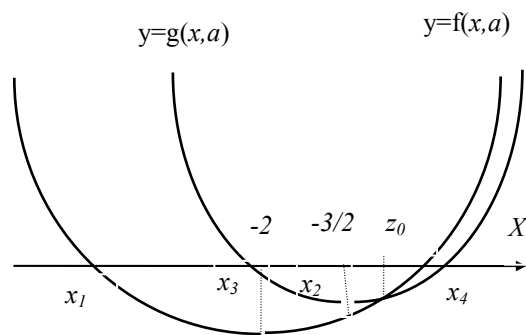


Рис. 117

При $a = 0$ точка пересечения парабол попадает на ось абсцисс (рис.104), а значит, одновременно является и корнем обоих трехчленов, т.е.

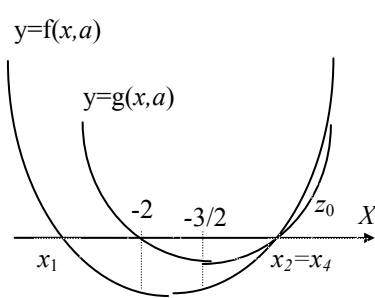


Рис.118

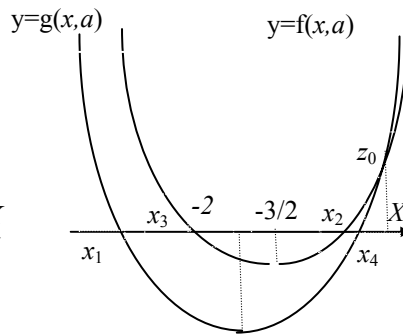


Рис.119

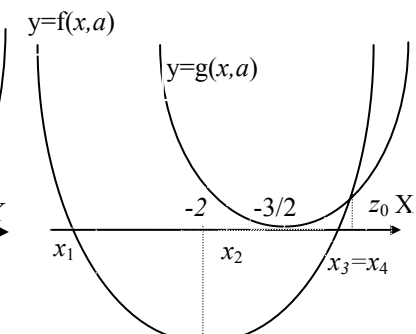


Рис.120

$$x_1 < x_3 < x_2 = x_4.$$

5. При $0 < a < 3/4$ точка пересечения парабол расположена выше оси абсцисс и правее обеих вершин (рис.105). Следовательно, корни $g(x,a)$ расположены в промежутке между корнями трехчлена $f(x,a)$, т.е. $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$.

6. При $a = 3/4$ точка пересечения парабол расположена выше оси абсцисс и правее обеих вершин, при этом $y = g(x,a)$ касается сверху оси абсцисс

(рис.106). Следовательно, равные действительные корни $g(x,a)$ расположены в промежутке между корнями трехчлена $f(x,a)$, т.е. $x_1 < x_3 = x_4 < x_2$.

Пример 62: Решить неравенство $(x^2 + 2x + 4 - a) \cdot (x^2 - 2x - a) < 0$.

Решение: В основу решения неравенства положен метод интервалов. Введем стандартные обозначения $f(x,a) = x^2 + 2x + 4 - a$ и $g(x,a) = x^2 - 2x - a$ с дискриминантами и корнями соответственно

$D_1 = a - 3, x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a - 3}$ и $D_2 = a + 1, x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{a + 1}$. Так как при $a_1 = -1$ и $a_2 = 3$ дискриминанты D_2, D_1 меняют знак, то эти значения параметра являются граничными и разбивают все множество значений (числовую прямую) на три интервала $]-\infty; -1[$, $]-1; 3[$, $]3; +\infty[$.

Корни многочлена, находящегося в левой части исходного неравенства $f(x,a) \cdot g(x,a) < 0$ определяются совокупностью корней уравнений $f(x,a) = 0$ и $g(x,a) = 0$. Оба эти уравнения квадратные и зависят от параметра. Поэтому для решения исходного неравенства необходимо рассмотреть решения этих квадратных уравнений на каждом из пяти полученных подмножеств значений параметра $]-\infty; -1[, \{1\},]-1; 3[, \{3\},]3; +\infty[$. При этом будем иметь в виду, что ветви парабол обоих сегментов всегда направлены вверх.

1. При $a < -1$ имеем $D_1 < 0$ и $D_2 < 0$. Параболы обоих сегментов расположены выше оси абсцисс (рис. 121), следовательно исходное неравенство $f(x,a) \cdot g(x,a) < 0$ не имеет решения.

2. При $a = -1$ имеем $D_1 < 0$ и $D_2 = 0$. Параболы первого семейства расположены выше оси абсцисс, второго семейства касаются ее сверху (рис. 122), поэтому исходное неравенство также не имеет решений.

3. При $-1 < a < 3$ имеем $D_1 < 0$ и $D_2 > 0$. Параболы первого семейства расположены выше оси абсцисс, второго семейства принимают отрицательные значения на внутрикорневом интервале $]x_3; x_4[$ (рис. 123). Следовательно исходное неравенство $f(x,a) \cdot g(x,a) < 0$ выполняется при $x \in]x_3; x_4[$.

4. При $a = 3$ имеем $D_1 = 0$ и $D_2 > 0$. Параболы первого семейства касаются сверху оси абсцисс, второго принимают отрицательные значения на внутрикорневом интервале $]x_3; x_4[$ (рис. 124). Следовательно, как и в предыдущем случае, исходное неравенство выполняется на внутрикорневом интервале $]x_3; x_4[$ второго сегмента.

5. При $3 < a < +\infty$ имеем $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$. Оба сегмента парабол имеют по два различных действительных корня (рис. 125), при этом $z_0 = -1$, $f(z_0) = g(z_0) < 0$, $x_{01} < x_{02}$. Следовательно, в соответствии с [теоремой 15](#), корни трехчленов чередуются (перемежаются), а решением исходного неравенства $f(x,a) \cdot g(x,a) < 0$ является объединение интервалов $]x_3; x_4[\cup]x_3; x_4[$.

Ответ: если $a \leq -1$, то $\emptyset$; если $-1 < a \leq 3$, то $x \in]1 - \sqrt{a+1}; 1 + \sqrt{a+1}[$; если $3 < a < +\infty$, то $x \in]-1 - \sqrt{a-3}; 1 - \sqrt{a+1}[\cup]-1 + \sqrt{a-3}; 1 + \sqrt{a+1}[$.

Пример 63. При каких значениях параметра система неравенств $2x^2 - 3ax - 9 \leq 0$ и $x^2 + ax - 2 \geq 0$ имеет решение?

Решение: Дискриминанты обоих трехчленов $f(x,a) = 2x^2 - 3ax - 9$ и $g(x,a) = x^2 + ax - 2$ положительны при всех значениях параметра, а значит трехчлены имеют по два действительных различных корня x_1, x_2 и x_3, x_4 соответственно. Отсюда первое неравенство системы $f(x,a) \leq 0$ выполняется на внутрикорневом отрезке $[x_1; x_2]$, а второе $g(x,a) \geq 0$ вне своего корневого интервалов $]x_3; x_4[$. Для того чтобы исходная система имела решение необходимо и достаточно, чтобы внутрикорневой отрезок $[x_1, x_2]$ имел хотя бы одну общую точку с одним из лучей $] - \infty; x_3$ или $x_4; + \infty [$. Оказывается, что это выполняется во всех случаях взаимного

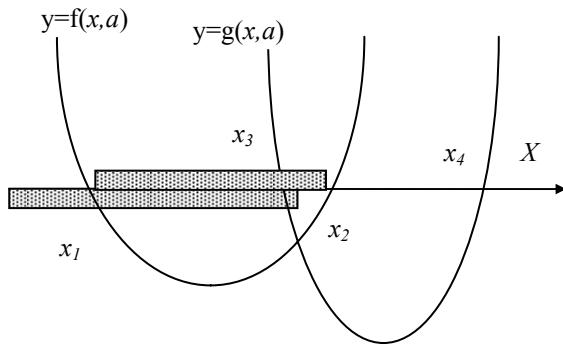


Рис. 126

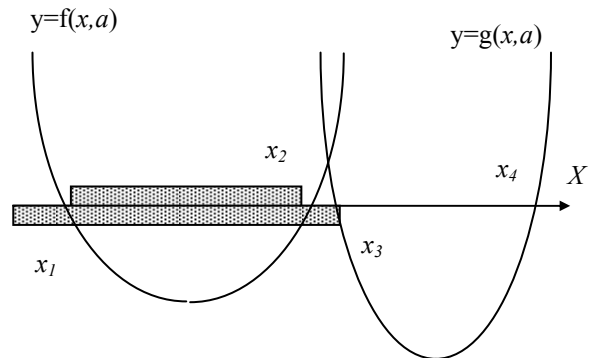


Рис. 127

расположения пар корней трехчленов $f(x,a)$ и $g(x,a)$ кроме одного. Действительно, множества решений неравенств $f(x,a) \leq 0$ и $g(x,a) \geq 0$ пересекаются, когда корни чередуются (перемежаются) (рис. 126), расположены последовательно (рис. 127), корни $g(x,a)$ расположены между корнями $f(x,a)$ (рис. 128).

В случае же $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ (рис. 129), т.е. когда корни $f(x,a)$ расположены между корнями $g(x,a)$ указанные множества решений не пересекаются. Определим значения параметра, соответствующие этому расположению пар корней (рис. 129). Для этого найдем абсциссу точки пересечения трехчленов и их общее значение

$$\begin{aligned} f(z_0) = g(z_0) &\Leftrightarrow 2z_0^2 - 3az_0 - 9 = 2z_0^2 + 2az_0 - 4 \Rightarrow z_0 = -1/a, a \neq 0 \Rightarrow \\ f(z_0) &= 2/a^2 - 6. \end{aligned}$$

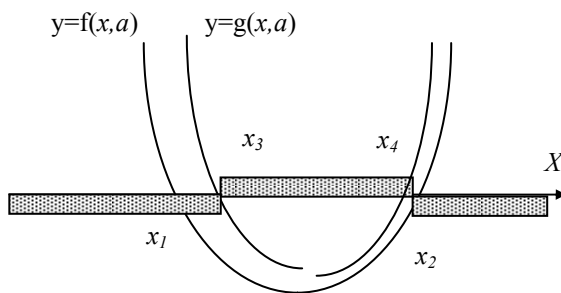


Рис. 128

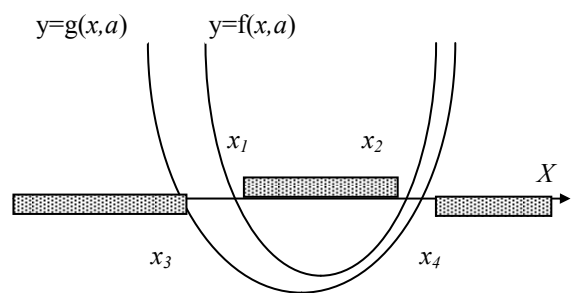


Рис. 129

В соответствии с Теоремой 18 реализация взаимного расположения пар корней, изображенных схематически на рис.129 определяется условиями :

$$\begin{cases} f(z_0) > 0 \\ (z_0 - x_{01})(x_{01} - x_{02}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a^2} - 6 > 0 \\ (-\frac{1}{a} - \frac{3a}{4}) \cdot (\frac{3a}{4} + \frac{a}{2}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 6a^2 > 0 \\ 3a^2 + 4 < 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Так как последняя система не имеет решения, то ни при одном значении параметра корни $f(x,a)$ не могут располагаться между корнями $g(x,a)$.

Следовательно, при любых значениях параметра ($a \neq 0$) исходная система имеет решение. Поскольку при $a=0$ исходная система также выполняется, ее решением будет вся искомая прямая.

Ответ: $a \in R$.

Пример 64. Найти все значения параметра, при которых уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

Решение: Переформулируем задачу на алгебраическом языке. При каких значениях “ a ” имеет решение следующая система двух квадратных уравнений с параметром

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0 \\ x^2 + x + a = 0 \end{cases}$$

Исключая из первого уравнения квадратный член а второе оставляя без изменения, приходим к равносильной системе

$$\begin{cases} ax + 1 - x - a = 0 \\ x^2 + x + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)x = a-1 \\ x^2 + x + a = 0 \end{cases}$$

При $a=1$ решением первого уравнения полученной системы получается действительное число, однако второе уравнение не имеет решений. Следовательно вся система также не имеет решений.

При $a \neq 1$ решением первого уравнения полученной системы будет единственный корень $x_1 = 1$. Система будет иметь решение тогда и только тогда, когда $x_1 = 1$ будет и корнем второго уравнения. Поэтому подставляя $x_1 = 1$ во второе получается, что $a_1 = -2$.

Таким образом, при $a = -2$ оба уравнения имеют общий корень $x_1 = 1$.

Ответ: $a = -2$.

Как видим решение задач такого рода, сводиться к замене заданной пары квадратных уравнений с параметром равносильной системой двух квадратных уравнений с неизвестными x и a , с последующим ее решением. Для упрощения выкладок при решении этой системы, рекомендуем заменить ее на равносильную линейную систему. Действительно, если два уравнения $f(x,a)=0$ и $g(x,a)=0$ имеют общий корень, то любая линейная комбинация этих уравнений $k_1 f(x,a) + k_2 g(x,a) = 0$, $k_1, k_2 \in R$ имеют тот же корень. Это позволяет избавляться от квадратичных коэффициентов и свободных членов. Проиллюстрируем предлагаемый прием.

Пример 65. Найти все значения параметра, при которых уравнения $(1-2a)x^2 - 6ax - 1 = 0$ и $ax^2 - x + 1 = 0$ имеют общие корни.

Решение: Переформулируем задачу на алгебраическом языке. При каких значениях “ a ” имеет решение следующая система двух квадратных уравнений с параметром

$$\begin{cases} (1-2a)x^2 - 6ax - 1 = 0 \\ ax^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Вначале подберем k_1, k_2 так, чтобы исключить квадратный член. Для этого умножая первое уравнение на $k_1 = -a$, второе на $1-2a$ и складывая оба уравнения почленно имеем

$$\begin{array}{r|l} (1-2a)x^2 - 6ax - 1 = 0 & -a \\ + & \\ ax^2 - x - 1 = 0 & 1-2a \\ \hline \end{array}$$

$$(6a^2 + 2a - 1)x + a + 1 - 2a = 0 \Rightarrow (6a^2 + 2a - 1)x - a + 1 = 0$$

Затем выберем k_1, k_2 так, чтобы исключить свободный член. Для этого сложим почленно уравнения системы ($k_1 = k_2 = 1$)

$$\begin{array}{r|l} (1-2a)x^2 - 6ax - 1 = 0 & 1 \\ + & \\ ax^2 - x - 1 = 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$(1-2a)x^2 - (6a+1)x = 0 \Leftrightarrow x(x(1-a) - (6a+1)) = 0.$$

Так как $x \neq 0$, то $(1-a)x = 1+6a$.

Таким образом получена следующая линейная система, равносильная первоначальной, решая которую имеем

$$\begin{cases} (6a^2 + 2a - 1)x - a + 1 = 0 \\ (1-a)x = 1+6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6a^2 + 2a - 1)x - a + 1 = 0 \\ x = \frac{1+6a}{1-a}; a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(6a^2 + 2a - 1)(1+6a)}{1-a} - a + 1 = 0 \\ x = \frac{1+6a}{1-a}; a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36a^3 + 19a^2 - 6a = 0 \\ x = \frac{1+6a}{1-a}; a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+3/4)(a-2/9) = 0 \\ x = \frac{1+6a}{1-a}; a \neq 1 \end{cases}$$

Получено, что для значений параметра $a_1 = -3/4$; $a_2 = 0$; $a_3 = 2/9$ исходные уравнения имеют общие корни. Подставляя эти значения параметра в формулу $x = (1+6a)/(1-a)$ находим численные значения общих корней исходных уравнений $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Ответ: если $a = -3/4$, то $x_1 = -2$; если $a = 0$, то $x_2 = 1$; если $a = 2/9$, то $x_3 = 3$.

Глава IV. Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трёхчлена.

§ 9. Квадратные неравенства с параметрами

Вернёмся вновь к квадратным неравенствам $f(x, a) < 0$, $f(x, a) > 0$. Однако, в отличие от §3 теперь коэффициенты квадратного трёхчлена $y = f(x, a)$ зависят от параметра. Решить квадратное неравенство в зависимости от параметра — значит найти все его решения (или доказать, что их нет) при каждом допустимом значении параметра.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения неравенства с параметром на примере $f(x, a) > 0$. Как уже отмечалось, неравенство с параметром представляет собой целое семейство неравенств вида $f(x) > 0$, при этом среди них могут быть даже линейные. Неравенство $f(x) > 0$ удовлетворяется при тех значениях переменной, при которых график трёхчлена $y = f(x)$ расположен выше оси абсцисс. В этом случае изображением решений неравенства $f(x) > 0$ являются точки тех интервалов оси абсцисс, в пределах которых парабола (прямая) проходит выше этой оси. Так как каждому значению параметра на координатной плоскости соответствует одна из парабол семейства, то изображением решений параметрического неравенства $f(x, a) > 0$ является *совокупность* всех интервалов оси абсцисс (*частных решений*), где каждая парабола (прямая) семейства проходит выше этой оси.

Вначале разберём несколько примеров на исследование однопараметрического семейства парабол.

Пример 66 Изобразить несколько представителей из однопараметрического семейства $y = x^2 + (2a + 3)x + a^2 + 1$. Доказать, что их вершины образуют прямую.

Решение: Функция $f(x, a) = x^2 + (2a + 3)x + a^2 + 1$ является квадратным трёхчленом относительно переменной x , коэффициенты зависят от параметра “ a ”. Следовательно, графиком $y = f(x, a)$ будет семейство парабол, ветви каждой из которых направлены вверх, а их расположение зависит от соответствующего значения параметра. Придавая параметру a , например, значения -1 , 0 , 1 , получим соответственно три квадратных трёхчлена: $y = x^2 + x + 2$, $y = x^2 + 3x + 1$ и $y = x^2 + 5x + 2$, графики которых изображены на рисунке 130.

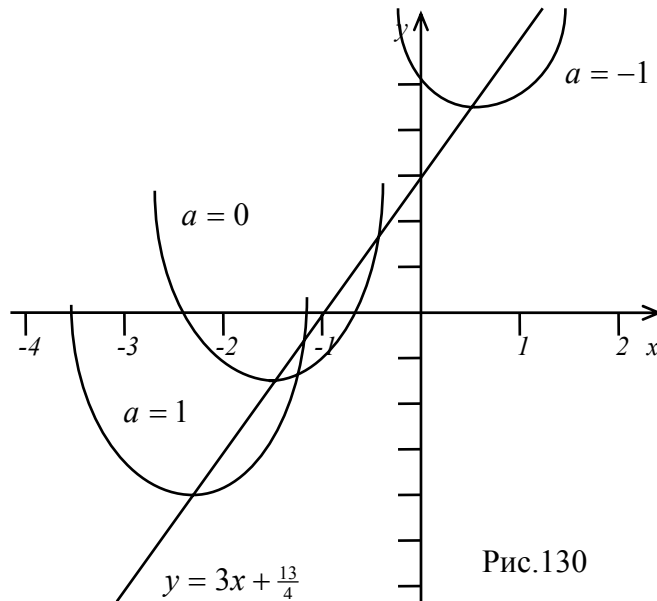


Рис.130

Решение: Для определения координат вершины выделим в $f(x, a)$ полный квадрат:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (2a + 3)x + a^2 + 1 = \\ &= x^2 + (2a + 3)x + \left(\frac{2a + 3}{2}\right)^2 - \\ &\quad - \left(\frac{2a + 3}{2}\right)^2 + a^2 + 1 = \\ &= \left(x + \frac{2a + 3}{2}\right)^2 - 3a - \frac{5}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y + \left(3a + \frac{5}{4}\right) = \left(x + \frac{2a + 3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Отсюда координаты вершины равны $x_0 = -\frac{2a + 3}{2}$; $y_0 = -3a - \frac{5}{4}$. Выражая a из соотношения для x_0 и подставляя его в выражение для y_0 , имеем:

$$y_0 = -3\left(\frac{-3 - 2x_0}{2}\right) - \frac{5}{4} = 3x_0 + \frac{13}{4}.$$

Получено, что ордината вершины параболы y_0 линейно зависит от абсциссы x_0 , а это значит, что вершина $(x_0; y_0)$ описывает при изменении параметра прямую линию. Таким образом, $f(x, a) = x^2 + (2a + 3)x + a^2 + 1$ представляет собой семейство парабол, полученных друг из друга параллельным переносом вдоль прямой $y = 3x + \frac{13}{4}$.

Пример 67 Определить вид однопараметрического семейства линий $y = -x^2 + 4ax + 2 - 3a - 4a^2$. Для значений параметра -1, 0, 2 изобразить:

- соответствующие линии семейства;
- области, точки которых удовлетворяют неравенству $y < -x^2 + 4ax + 2 - 3a - 4a^2$ (*);
- интервалы, являющиеся решением неравенства $-x^2 + 4ax + 2 - 3a - 4a^2 > 0$ (**).

Решение: Выделив в исходном квадратном трехчлене полный квадрат, $y = -x^2 + 4ax + 2 - 3a - 4a^2 = -(x^2 - 4ax + 4a^2) + 2 - 3a = -(x - 2a)^2 + 2 - 3a$, получим семейство парабол, ветви которых направлены вниз, а вершины имеют координаты $\begin{cases} x_0 = 2a \\ y_0 = 2 - 3a \end{cases}$ (***).

Для определения вида линии, на которой лежат вершины парабол семейства, исключим параметр из системы (**). Получим $y_0 = 2 - \frac{3}{2}x_0$, то есть вершины лежат на прямой $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

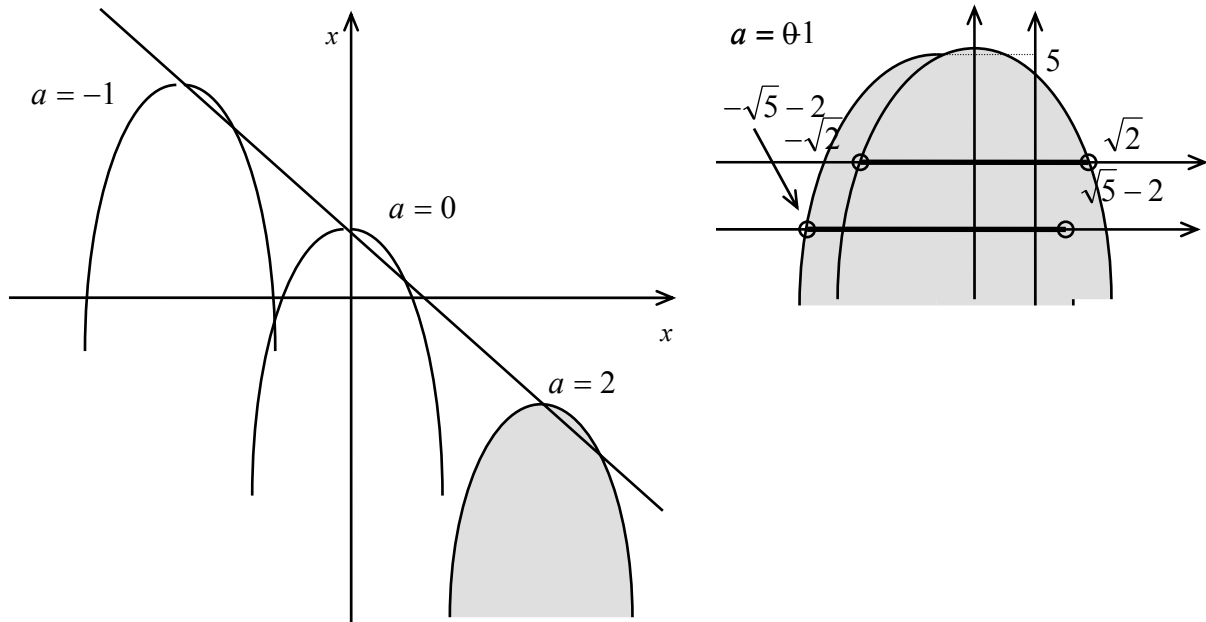


Рис 131

Поскольку коэффициенты при старшем члене одинаковы ($A = -1$), то все параболы семейства имеют одинаковую форму и размеры, то есть получаются друг из друга параллельным переносом. На рисунке изображены кривые семейства при требуемых значениях параметра, вершины которых лежат на прямой $y = -\frac{3}{2}x + 2$. На рисунке заштрихована область, ограниченная параболой, отвечающей значению параметра $a = -1$, с вершиной $(-2; 5)$ и пересекающей ось абсцисс в точках $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$. Точки этой области удовлетворяют неравенству (*), а интервал $(-2 - \sqrt{5}; \sqrt{5} - 2)$ является частным решением неравенства (**). На рисунке заштрихована область, ограниченная параболой, отвечающей значению параметра $a = 0$, с вершиной $(0; 2)$ и пересекающей ось абсцисс в точках $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Точки этой области удовлетворяют неравенству (*), а интервал $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ является частным решением неравенства (**). Квадратный трехчлен, отвечающий значению параметра $a = 2$, принимает только отрицательные значения. Поэтому неравенство (**) не имеет решения, а неравенству (*) удовлетворяют точки области, заштрихованной на рисунке.

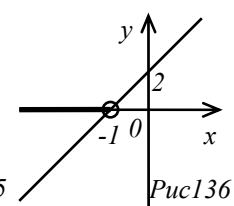
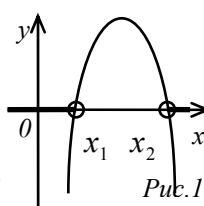
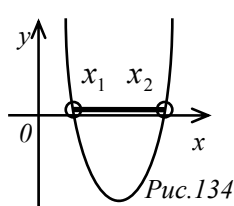
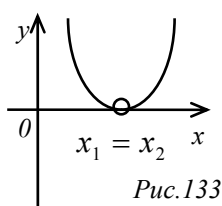
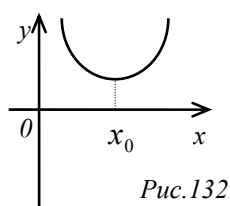
Процесс нахождения решений квадратных неравенств с параметром такой же, как и для обычных неравенств, при этом с буквенными коэффициентами операции производятся так же, как и с числовыми. Существует

достаточно много методов нахождения решений, однако практически все они сводятся к двум.

Первый метод решения квадратных неравенств основан на применении свойств квадратного трехчлена, которые допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Решения $f(x, a) < 0$, $f(x, a) > 0$ зависят от знаков двух величин: дискриминанта $D(a)$ и старшего коэффициента. Если знак $D(a)$ влияет только на количество точек пересечения параболы с осью абсцисс, то знак $A(a)$ показывает не только направление её ветвей, но и порядок расположения корней. Если $x_1 = \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}$, $x_2 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A}$, то $x_1 < x_2$ при $A(a) > 0$, и $x_1 > x_2$ при $A(a) < 0$. Метод заключается в переборе всех возможных случаев сочетания знаков старшего коэффициента $A(a)$ и дискриминанта $D(a)$ квадратного трехчлена, которые определяют расположение параболы относительно оси абсцисс (как это было выполнено в таблице 1 второго параграфа). Объединяя решения, полученные в отдельных случаях, получаем решение исходного неравенства. Проиллюстрируем первый метод несколькими примерами.

Пример 68 Решить неравенство $ax^2 - 2(a-1)x + a + 2 < 0$.

Решение: Рассмотрим все возможные случаи расположения «плавающей параболы» $f(x) = ax^2 - 2(a-1)x + a + 2$ в зависимости от знаков квадратичного коэффициента a и дискриминанта $D = 4(1-4a)$ в соответствии с **таблицей 1 (§2)**. Заметим, что действительные корни $f(x)$, если они существуют, имеют вид $x_1 = \frac{a-1-\sqrt{1-4a}}{a}$; $x_2 = \frac{a-1+\sqrt{1-4a}}{a}$.



1. Пусть $a > 0$, $D < 0$, что соответствует значениям параметра $\frac{1}{4} < a < +\infty$. Это означает (Рис.132) парабола лежит выше оси абсцисс, а потому исходное неравенство не имеет решений.

2. Пусть $a > 0$, $D = 0$, что соответствует $a = \frac{1}{4}$. Это означает (Рис.133), что парабола касается оси абсцисс, а потому, как и в предыдущем случае, решений нет.

3. Пусть $a > 0, D > 0$, что соответствует $0 < a < \frac{1}{4}$. Это означает (Рис. 134), что исходному неравенству удовлетворяют те значения переменной, которые лежат в промежутке между корнями, то есть в интервале $(x_1; x_2)$.

4. Пусть $a < 0, D \leq 0$, что соответствует $\begin{cases} a < 0 \\ a \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$. Это означает,

что данный случай не реализуется.

5. Пусть $a < 0, D > 0$, что соответствует $-\infty < a < 0$. Это означает (Рис. 135), что исходному неравенству удовлетворяют значения переменной, лежащие вне отрезка $[x_2; x_1]$. Заметим, что в этом случае $x_2 < x_1$, то есть решением является объединение двух полупрямых $(-\infty; x_2)$ и $(x_1; +\infty)$.

6. Так как в условии задачи явно не указано, что исходное неравенство является обязательно квадратным, то необходимо рассмотреть и случай вырождения квадратного неравенства в линейное. Это происходит при $a = 0$, а исходное неравенство принимает вид $2x + 2 < 0$, решение которого $x < -1$. Графическая интерпретация этого случая изображена на рисунке 6.

Ответ: если $-\infty < a < 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{a-1+\sqrt{1-4a}}{a}\right) \cup \left(\frac{a-1-\sqrt{1-4a}}{a}; +\infty\right)$;

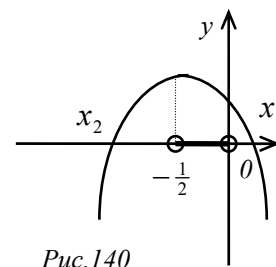
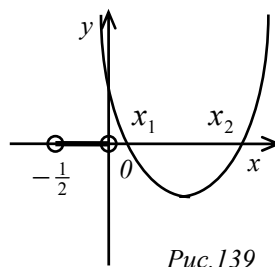
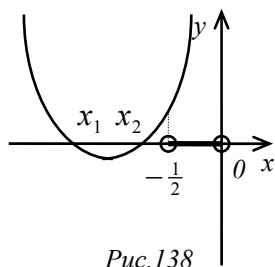
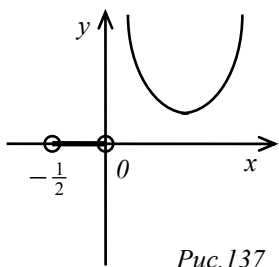
если $a = 0$, то $x \in (-\infty; -1)$;

если $0 < a < \frac{1}{4}$, то $x \in \left(\frac{a-1-\sqrt{1-4a}}{a}; \frac{a-1+\sqrt{1-4a}}{a}\right)$;

если $\frac{1}{4} \leq a < +\infty$, то $x \in \emptyset$.

Пример 69 Найти все значения параметра a , при которых все числа интервала $(-\frac{1}{2}; 0)$ находятся среди решений квадратного неравенства $ax^2 - 2(a-3)x + a-1 > 0$.

Решение: Рассмотрим все возможные случаи расположения “плавающей” параболы $f(x, a) = ax^2 - 2(a-3)x + a-1$ относительно интервала $(-\frac{1}{2}; 0)$ в зависимости от знаков квадратичного коэффициента a и дискриминанта $D = 4(a-3)^2 - 4a(a-1) = 4(9-5a)$.



1. Пусть $a > 0, D < 0$, что соответствует $\frac{9}{5} < a < +\infty$. Это означает (Рис.137), что ветви параболы направлены вверх и вся парабола лежит выше оси абсцисс, а, значит, решением исходного неравенства будет всё множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Поэтому, естественно, и интервал $(-\frac{1}{2}; 0)$ находится среди решений исходного неравенства.

2. Пусть $a > 0, D \geq 0$. Это означает, что внешняя часть параболы лежит выше оси абсцисс, а в этом случае решением исходного неравенства будет объединение двух полупрямых $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$ (Рис.138, Рис.139). Для того чтобы интервал $(-\frac{1}{2}; 0)$ полностью принадлежал одной из этих полупрямых, необходимо рассмотреть две возможности расположения корней $f(x)$ относительно этого интервала:

а) Оба корня одновременно меньше $-\frac{1}{2}$ (Рис. 138).

б) Оба корня одновременно больше 0 (Рис. 139).

2а) Для того, чтобы оба корня $f(x)$ были меньше $-\frac{1}{2}$, в соответствии с теоремой, необходимо и достаточно выполнение следующей системы опорных неравенств:

$$\begin{cases} A > 0 \\ D \geq 0 \\ f(-\frac{1}{2}) > 0 \\ x_0 < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 9 - 5a \geq 0 \\ \frac{9}{4}a - 4 > 0 \\ \frac{a-3}{a} < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \leq \frac{9}{5} \\ a > \frac{16}{9} \\ a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{16}{9} < a \leq \frac{9}{5}.$$

2б) Для того, чтобы оба корня $f(x)$ были положительными, в соответствии с теоремой необходимо и достаточно выполнение следующей системы опорных неравенств:

$$\begin{cases} A > 0 \\ D \geq 0 \\ f(0) > 0 \\ x_0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \leq \frac{9}{5} \\ a > 1 \\ \frac{a-3}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

3) Пусть $a < 0, D > 0$. Это означает, что ветви параболы направлены вниз и в промежутке между корнями парабола лежит выше оси абсцисс (Рис. 140), а, значит, решением исходного неравенства будет внутрикорневой интервал $(x_1; x_2)$. Для того, чтобы интервал $(-\frac{1}{2}; 0)$ находился в промежутке между корнями, необходимо и достаточно выполнение следующей системы опорных неравенств:

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(-\frac{1}{2}) > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > \frac{16}{9} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

4) Пусть $a < 0$, $D \leq 0$. В этом случае парабола лежит ниже оси абсцисс, множество решений исходного неравенства пусто и, следовательно, не может содержать данный интервал.

Объединяя решения случаев 1 и 2а, имеем $\frac{16}{9} < a < +\infty$.

Ответ: $a \in \left(\frac{16}{9}; +\infty\right)$.

Рассмотрим **Второй метод** решения квадратных неравенств, да и не только неравенств. Он основан на разбиении по некоторому целесообразному признаку множества значений параметра на ряд подмножеств, а затем решении исходного неравенства на каждом из этих подмножеств. Перечислим основные этапы этого метода.

На первом (подготовительном) этапе изучаются знаки величин, входящих в опорные неравенства. В результате определяются граничные значения параметра $a_1, a_2, \dots, a_n$.

На втором этапе производится разбиение множества значений параметра на интервалы $(-\infty; a_1)$, $(a_1; a_2)$, $\dots$, $(a_{n-1}; a_n)$, $(a_n; +\infty)$, а затем составляется таблица, в которую заносятся изменения знаков опорных неравенств при переходе от одного интервала к другому.

На третьем (заключительном) этапе, руководствуясь данными таблицы, изображается расположение параболы, определяемое знаками опорных неравенств внутри и на границах каждого из интервалов $-\infty < a < a_1$, $a = a_1$, $a_1 < a < a_2$, $a = a_2$, $\dots$, $a = a_n$, $a_n < a < +\infty$. Одновременно отбираются те значения параметра, которые удовлетворяют условиям задачи.

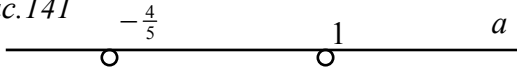
Безусловно, самым ответственным этапом метода является определение граничных значений параметра. К сожалению, невозможно дать исчерпывающие рекомендации по их определению, так как они зависят от постановки каждой конкретной задачи. Тем не менее, отметим некоторые типовые ситуации:

- * Обращение в нуль знаменателя, когда соответствующее значение параметра исключается из множества значений.
- * Обращение в нуль старшего коэффициента квадратного трехчлена, когда квадратное неравенство вырождается в линейное.
- * Обращение в нуль дискриминанта трёхчлена, когда меняется количество и вид корней.
- * Ограничения на корни трёхчлена.

Рассмотрим подробнее последний пункт. Для этого напомним геометрический смысл основных опорных неравенств, которые применяются при исследовании расположения квадратного трехчлена $f(x, a) = A(a)x^2 + B(a)x + C(a)$ относительно точки $x = \alpha$. Неравенство $A(a) > 0$ ($A(a) < 0$) указывает на направление ветвей параболы и порядок расположения действительных корней, если они существуют. Неравенство $D > 0$ ($D < 0$) определяет количество и вид корней. Неравенство $f(\alpha) > 0$ ($f(\alpha) < 0$) определяет знак ординаты параболы в точке $x = \alpha$. И, наконец, вместо ранее применявшегося неравенства $x_0 > \alpha$ ($x_0 < \alpha$) будем использовать знак разности $x_0 - \alpha$. При этом вершина параболы находится правее точки с абсциссой α при $x_0 - \alpha > 0$, и левее точки с абсциссой α при $x_0 - \alpha < 0$.

Пример 70. Решить неравенство $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a+3 \leq 0$.

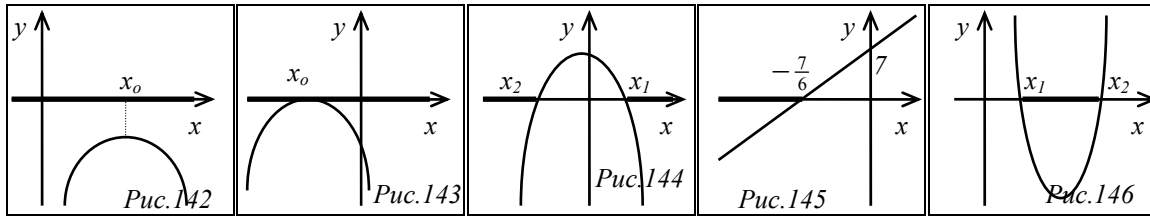
Решение: Вначале определим граничные значения параметра. При $a = 1$ старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x, a) = (a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a+3$ обращается в нуль, а, следовательно, исходное неравенство вырождается в линейное. При $a \neq 1$ исходное неравенство квадратное. Найдём значения параметра, при переходе через которые с неравенством происходят качественные изменения. Выражение для дискриминанта $D/4 = (2a+1)^2 - (a-1)(4a+3) = 5a+4$ меняет знак при $a = -\frac{4}{5}$, что

Рис. 141  приводит к изменению количества и вида корней квадратного трехчлена.

$D < 0$	$D > 0$	
Ветви вниз	ветви вверх	
Корней нет	$x_2 < x_1$	$x_1 < x_2$

При $D \geq 0$ корнями $f(x, a)$ являются числа $x_1 = \frac{-(2a+1) - \sqrt{5a+4}}{a-1}$ и $x_2 = \frac{-(2a+1) + \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Если старший коэффициент $a-1 > 0$, то ветви параболы направлены вверх и $x_1 < x_2$. Если же $a-1 < 0$, то ветви параболы направлены вниз и $x_2 < x_1$. Таким образом определены два граничных значения параметра: $a_1 = -\frac{4}{5}$ и $a_2 = 1$.



Теперь разбиваем числовую прямую множества значений параметра на интервал $\left(-\frac{4}{5}; 1\right)$ и две полупрямые $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$ и $(1; +\infty)$ и составляем таблицу, в которую заносим геометрические особенности расположения параболы на каждом из этих промежутков (Рис. 141). В заключение рассмотрим исходное неравенство $f(x, a) \leq 0$ на каждом из пяти полученных подмножеств из множества значений параметра: $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$, $\left\{-\frac{4}{5}\right\}$, $\left(-\frac{4}{5}; 1\right)$, $\{1\}$, $(1; +\infty)$.

1. При $-\infty < a < -\frac{4}{5}$ ветви параболы направлены вниз, действительные корни отсутствуют, то есть вся парабола расположена ниже оси абсцисс (Рис. 142). Исходное неравенство выполняется на всей числовой оси $\mathbb{R}$.

2. При $a = -\frac{4}{5}$ ветви параболы направлены вниз, при этом она касается снизу оси абсцисс в точке $x = -\frac{1}{3}$ (Рис. 143). Исходное неравенство (оно ведь нестрогое) также выполняется на всей числовой оси.

3. При $-\frac{4}{5} < a < 1$ ветви параболы направлены вниз, имеется два действительных корня, при этом $x_2 < x_1$ (Рис. 144). Исходное неравенство выполняется при всех значениях переменной, кроме внутрикорневого интервала, то есть на $(-\infty; x_2] \cup [x_1; +\infty)$.

Замечание: Если Вы забыли правило о связи знака старшего коэффициента и порядком корней, то взаимное расположение точек x_1, x_2 на числовой прямой можно определить непосредственно. Действительно, для этого разделим обе части истинного числового неравенства $-(2a+1) + \sqrt{5a+4} > -(2a+1) - \sqrt{5a+4}$ на отрицательное число $a-1$, тогда:

$$\frac{-(2a+1) + \sqrt{5a+4}}{a-1} < \frac{-(2a+1) - \sqrt{5a+4}}{a-1} \Leftrightarrow x_2 < x_1$$

4. Если $a = 1$, то исходное неравенство вырождается в линейное $6x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{6}$ (Рис. 145).

5. При $1 < a < +\infty$ ветви параболы направлены вверх, имеются два действительных корня, причём $x_1 < x_2$ (Рис. 146). Исходное неравенство выполняется на внутрикорневом отрезке $[x_1; x_2]$.

Ответ: Если $a \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right]$, то $x \in R$; если $a \in \left(-\frac{4}{5}; 1\right)$, то $x \in (-\infty; x_2] \cup [x_1; +\infty)$;

и $a = 1$, то $x \leq -\frac{7}{6}$; если $a \in (1; +\infty)$, то $x \in [x_1; x_2]$, где

$$x_1 = \frac{-(2a+1) - \sqrt{5a+4}}{a-1}, x_2 = \frac{-(2a+1) + \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Пример 71. Для любого значения параметра a решить неравенство $(a+1)x^2 - 3ax + 4a \geq 0$.

Решение: Вначале определим граничные значения параметра. При $a = -1$ старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x, a) = (a+1)x^2 - 3ax + 4a$ обращается в нуль, а, следовательно, квадратное неравенство вырождается в линейное. При $a \neq -1$ исходное неравенство квадратное. Найдём значения параметра, при переходе через которые происходят качественные изменения неравенства. Выражение для дискриминанта $D = 9a^2 - 16a(a+1) = -7a\left(a + \frac{16}{7}\right)$ меняет знак при $a = 0$ и $a = -\frac{16}{7}$, что приводит к изменению количества и вида корней трёхчлена. При $D \geq 0$ корнями $f(x, a)$ являются

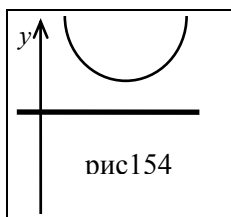
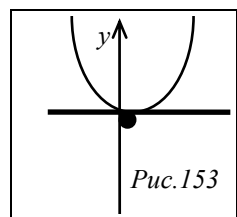
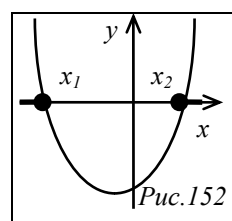
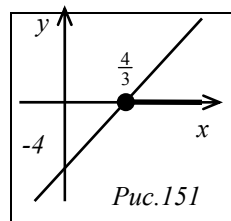
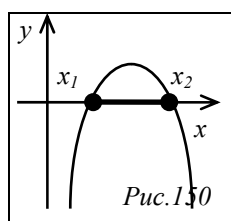
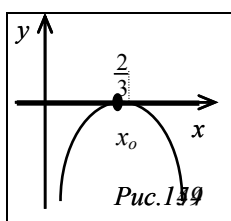
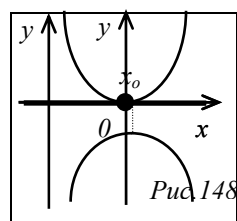
числа $x_1 = \frac{3a - \sqrt{D}}{2(a+1)}$ и

$D < 0$	$D > 0$	$D < 0$
ветви вниз	ветви вверх	
Корней нет	$x_2 < x_1$	$x_1 < x_2$
		корней нет

$x_2 = \frac{3a + \sqrt{D}}{2(a+1)}$. Если старший коэффициент $a+1 > 0$, то ветви параболы направлены вверх и

$x_1 < x_2$. Если же $a+1 < 0$, то ветви параболы направлены вниз и $x_2 < x_1$. Таким образом, определены три граничных значения параметра: $a_1 = -\frac{16}{7}$,

$a_2 = -1$, $a_3 = 0$.



Теперь разбиваем числовую прямую множества значений параметра на два интервала и две полупрямые: $\left(-\infty; -\frac{16}{7}\right)$, $\left(-\frac{16}{7}; -1\right)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$, и составляем таблицу, в которую заносим геометрические особенности расположения параболы на каждом из этих промежутков (Рис. 147). В заключение рассмотрим исходное неравенство $f(x, a) \geq 0$ на каждом из семи полученных подмножеств из множества значений параметра: $\left(-\infty; -\frac{16}{7}\right)$, $\left\{-\frac{16}{7}\right\}$, $\left(-\frac{16}{7}; -1\right)$, $\{-1\}$, $(-1; 0)$, $\{0\}$, $(0; +\infty)$.

1. При $-\infty < a < -\frac{16}{7}$ ветви параболы направлены вниз, а точки пересечения с осью абсцисс отсутствуют (Рис. 148). Исходное неравенство не выполняется ни при каких значениях x .

2. При $a = -\frac{16}{7}$ ветви параболы направлены вниз, при этом она касается снизу оси абсцисс в точке $x = \frac{8}{3}$ (Рис. 149). Исходное неравенство выполняется только в точке касания.

3. При $-\frac{16}{7} < a < -1$ ветви параболы направлены вниз, имеется два действительных корня, причём $x_2 < x_1$ (Рис. 150). Исходное неравенство выполняется на внутрикорневом отрезке $[x_2; x_1]$.

4. При $a = -1$ исходное неравенство вырождается в линейное $3x - 4 \geq 0$. Отсюда $x \geq \frac{4}{3}$ (Рис. 151).

5. При $-1 < a < 0$ ветви параболы направлены вверх, имеются два различных действительных корня, причём $x_1 < x_2$ (Рис. 152). Исходное неравенство выполняется на объединении двух полупрямых $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

6. При $a = 0$ ветви параболы направлены вверх, парабола касается оси абсцисс в начале координат (Рис. 153). Исходное неравенство выполняется на всей числовой оси.

7. При $0 < a < +\infty$ ветви параболы направлены вверх, действительные корни отсутствуют (Рис. 154). Исходное неравенство выполняется на всей числовой оси.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; -\frac{16}{7}\right)$ имеем $x \in \emptyset$; при $a = -\frac{16}{7}$ имеем $x = \frac{8}{3}$; при

$a \in \left(-\frac{16}{7}; -1\right)$ имеем $x \in [x_2; x_1]$; при $a = -1$ имеем $x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$; при

$a \in (-1; 0)$ имеем $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$, при $a \in [0; +\infty)$ имеем $x \in \mathbb{R}$,

где $x_1 = \frac{3a - \sqrt{-7a^2 - 16a}}{2(a+1)}$, $x_2 = \frac{3a + \sqrt{-7a^2 - 16a}}{2(a+1)}$.

Пример 72. Найти все значения параметра, при которых неравенство $(a-1)x^2 - 2(a+3)x - a - 3 > 0$ выполняется хотя бы для одного значения из интервала $(-1; 3)$.

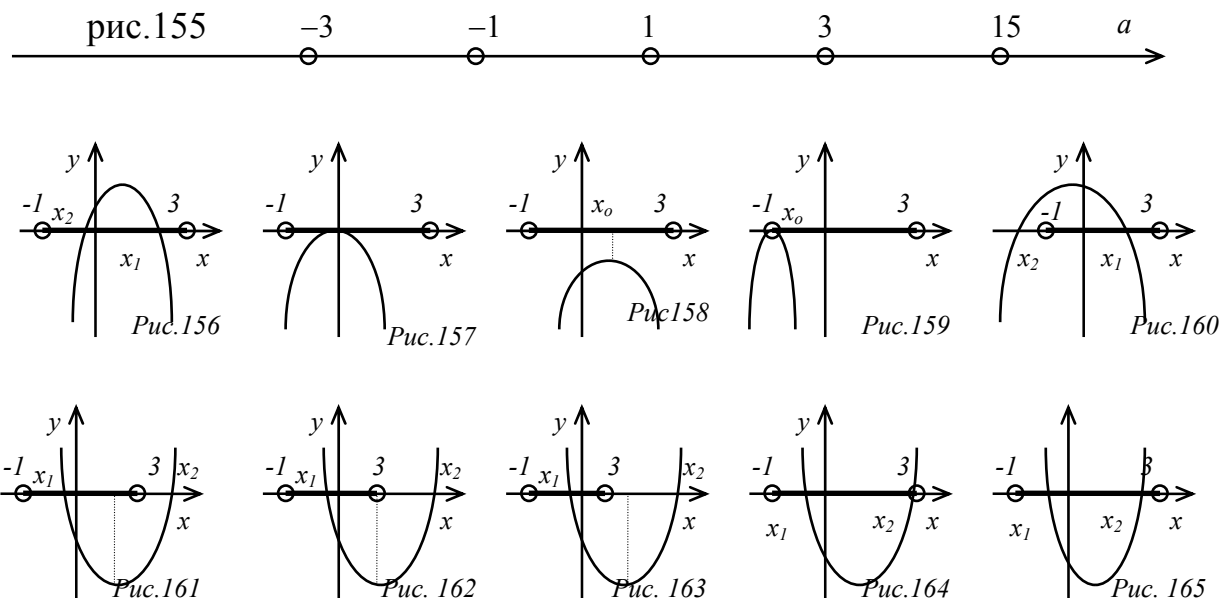
Решение: В начале определим граничные значения параметра. При $a = 1$ старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x, a) = (a-1)x^2 - 2(a+3)x - a - 3$ обращается в нуль, а, следовательно, исходное неравенство вырождается в линейное. При $a \neq 1$ исходное неравенство всегда квадратное. Найдём значения параметра, при переходе через которые опорные неравенства, определяющие расположение параболы $y = f(x, a)$ относительно исследуемого интервала $\Delta = (-1; 3)$ меняют знак. Старший коэффициент $A = a - 1$ меняет знак при $a = 1$, а выражение для дискриминанта $D = (a+3)^2 + (a+3)(a-1) = 2(a+3)(a+1)$ меняет знак при $a = -1$ и при $a = -3$, выражения $f(-1) = 2(a+1)$ и $f(3) = 2(a-15)$ для значений трёхчлена на границах интервала Δ меняют знак соответственно при $a = -1$ и $a = 15$. Выражения $x_0 + 1 = 2\frac{a+1}{a-1}$ и $x_0 - 3 = -2\frac{a-3}{a-1}$, определяющие положение вершины параболы $y = f(x, a)$ относительно концов интервала Δ меняют знак соответственно при $a = \pm 1$ и $a = 1, a = 3$. Таким образом, определены пять граничных значений параметра: $a_1 = -3, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 15$.

A	—	—	—	+	+	+
	ветви вниз			ветви вверх		
D	+	—	+	+	+	+
	два кор- ня	корней нет	два действительных корня			
$f(-1)$	—	—	+	+	+	+
	$f(-1) < 0$		$f(-1) > 0$			
$f(3)$	—	—	—	—	—	+
	$f(3) < 0$					$f(3) > 0$
X_0+1	+	+	—	+	+	+
	вершина правее $x = -1$		левее $x = -1$	вершина правее $x = 1$		
X_0-3	—	—	—	+	—	—
	вершина левее $x = -1$			правее $x = -1$	вершина левее $x = -1$	

Теперь разбиваем числовую прямую множества значений параметра (Рис. 155) на четыре интервала и две полупрямые: $(-\infty; -3)$, $(-3; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; 3)$, $(3; 15)$, $(15; +\infty)$ и составляем таблицы, в одну из которых заносим

знаки опорных неравенств на каждом из полученных промежутков, а в другую — следующие из них геометрические особенности расположения параболы $y = f(x, a)$ на этих промежутках

И, наконец, рассмотрим исходное неравенство $f(x, a) > 0$ на каждом из одиннадцати полученных подмножеств множества значений параметра: $(-\infty; -3)$, $\{-3\}$, $(-3; -1)$, $\{-1\}$, $(-1; 1)$, $\{1\}$, $(1; 3)$, $\{3\}$, $(3; 15)$, $\{15\}$,



1. При $-\infty < a < -3$ ветви параболы направлены вниз, она пересекает ось абсцисс в двух точках интервала Δ (рис.156.). Исходное неравенство выполняется для всех точек междукорневого интервала $(x_2; x_1)$.
2. При $a = -3$ ветви параболы направлены вниз, она касается снизу оси абсцисс в точке $x = 0$ (рис. 157). Исходное неравенство не выполняется ни в одной точке.
3. При $-3 < a < -1$ ветви параболы направлены вниз, не имеется действительных корней (рис. 158). Исходное неравенство не выполняется ни в одной точке.
4. При $a = -1$ ветви параболы направлены вниз, она касается снизу оси абсцисс в точке $x = -1$. (Рис.159) Исходное неравенство не выполняется ни в одной точке.
5. При $-1 < a < 1$ ветви параболы направлены вниз, меньший корень лежит левее $x = -1$, а больший является точкой интервала Δ (рис. 160). Исходное неравенство выполняется на интервале $(-1; x_1)$, который является подмножеством интервала Δ .
6. При $a = 1$ квадратное неравенство вырождается в линейное $-8x - 4 > 0$. Откуда $x < -\frac{1}{2}$, что удовлетворяет условию задачи.
7. При $1 < a < 3$ ветви параболы направлены вверх, меньший корень является точкой интервала Δ , а больший лежит правее точки $x = 3$ (рис.

161). Исходное неравенство выполняется на интервале $(-1; x_1)$, который является подмножеством интервала Δ .

8. При $a = 3$ ветви параболы направлены вверх, меньший корень является точкой интервала Δ , а больший лежит правее точки $x = 3$ (рис. 162). Исходное неравенство выполняется на интервале $(-1; x_1)$, который является подмножеством интервала Δ .

9. При $3 < a < 15$ ветви параболы направлены вверх, меньший корень является точкой интервала Δ , больший лежит правее точки $x = 3$, абсцисса вершины принадлежит интервалу Δ (Рис. 163). Исходное неравенство выполняется на интервале $(-1; x_1)$, который является подмножеством интервала Δ .

10. При $a = 15$ ветви параболы направлены вверх, меньший корень является точкой интервала Δ , а больший совпадает с его правым концом (рис. 164). Исходное неравенство выполняется на интервале $(-1; x_1)$, который является подмножеством интервала Δ .

11. При $15 < a < +\infty$ ветви параболы направлены вверх, оба корня являются точками интервала Δ . (Рис. 165) Исходное неравенство выполняется вне внутрикорневого интервала $(x_1; x_2)$.

Таким образом, условие задачи выполняется при всех значениях параметра, кроме $-3 \leq a \leq -1$ (случаи 2 — 4).

Ответ: $a \in \mathbb{R} \setminus [-3; -1]$.

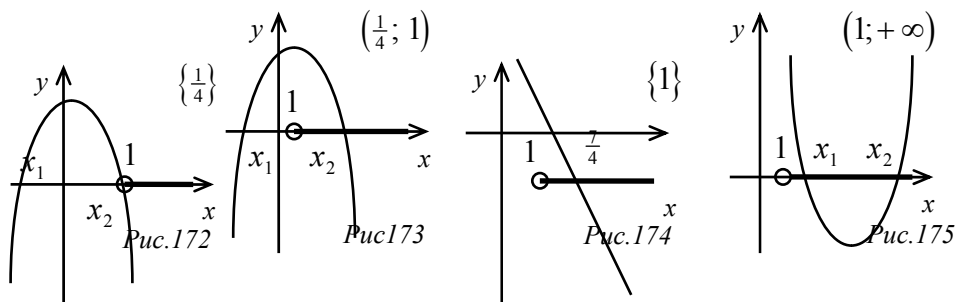
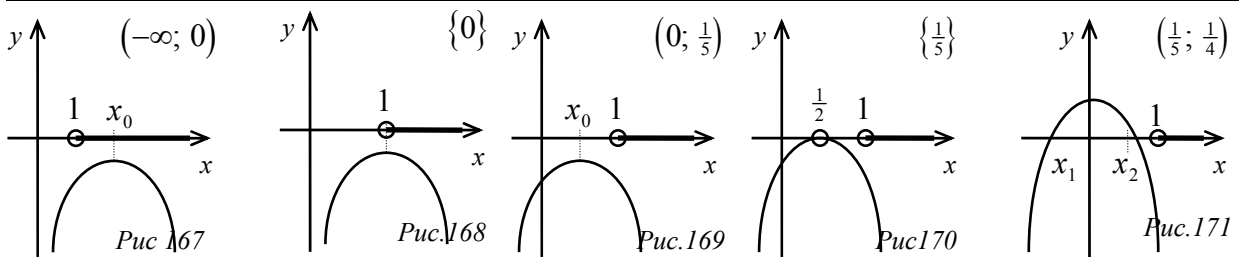
Пример 73 Найти все значения параметра a , при которых неравенство $(a-1)x^2 - 2(3a-1)x + 9a - 2 < 0$ выполняется при всех $x \geq 1$.

Решение: Вначале определим граничные значения параметра. При $a = 1$ старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x, a) = (a-1)x^2 - 2(3a-1)x + 9a - 2$ обращается в нуль, и, следовательно, исходное неравенство вырождается в линейное. При $a \neq 1$ исходное неравенство является квадратным. Найдем значения параметра, при переходе через которые опорные неравенства, определяющие расположение параболы $y = f(x, a)$ относительно $\Delta = [1; +\infty)$ меняют знак. Старший коэффициент $A = a - 1$ меняет знак при $a = 1$, а выражение для дискриминанта $D = (3a-1)^2 - (a-1)(9a-2) = 2(a-\frac{1}{5})$ меняет знак при $a = \frac{1}{5}$. Выражение $x_0 - 1 = \frac{2a}{a-1}$, определяющее положение вершины параболы относительно начала луча Δ меняет знак при $a = 0$ и $a = 1$. Выражение $f(1) = 4(a - \frac{1}{4})$ для значения трехчлена на границе луча меняет знак при $a = \frac{1}{4}$. Таким образом, определены четыре граничных значения параметра $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = 1$.

Теперь разобьем числовую прямую множества значений параметра (рисунок) на три интервала и две полупрямые $(-\infty; 0), (0; \frac{1}{5}), (\frac{1}{5}; \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}; 1), (1; +\infty)$

и составим таблицу, в которую занесем знаки опорных неравенств на каждом из указанных промежутков и следующие из них геометрические особенности расположение параболы (рис166).

	$(-\infty; 0)$	$(0; \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5}; \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4}; 1)$	$(1; +\infty)$
A	—	—	—	—	+
	ветви вниз				ветви вверх
D	—	—	+	+	+
	корней нет		два действительных корня		
$f(1)$	—	—	—	+	+
	$f(1) < 0$			$f(1) > 0$	
$x_0 - 1$	+	—	—	—	+
	правее $x = 1$	вершина левее $x = 1$			правее $x = 1$



Теперь изобразим положения параболы (прямой), соответствующие каждому из девяти полученных подмножеств множества значений параметра a : $(-\infty; 0)$, $\{0\}$, $(0; \frac{1}{5})$, $\{\frac{1}{5}\}$, $(\frac{1}{5}; \frac{1}{4})$, $\{\frac{1}{4}\}$, $(\frac{1}{4}; 1)$, $\{1\}$, $(1; +\infty)$ (рис. 167-175 соответственно). Множество решений исходного неравенства содержит луч $[1; +\infty)$ только в первых пяти случаях (при $a = \frac{1}{4}$ точка $x = 1$ не входит во множество решений данного нестрогого неравенства!). Следовательно, искомое множество значений параметра есть полупрямая $(-\infty; \frac{1}{4})$.

Ответ: $a \in (-\infty; \frac{1}{4})$.