

**Московский Государственный
технический Университет
имени Н.Э.Баумана**

Специализированный Учебно-научный центр

**Лицей № 1580 при
МГТУ имени Н.Э.Баумана**

И.В. Блудова,

М.И. Бугрова,

С.С. Граськин

**ЛЕКЦИИ
ПО
ГЕОМЕТРИИ
10-11 классы**

Москва

2011

Лекции по геометрии: Учебно-методическое пособие для 10-11 класса/ И.В. Блудова, М.И.Бугрова, С.С.Граськин.-М.: 100с.,ил.75. Издаётся в соответствии с планом выпуска учебно-методической литературы кафедры «Основы математики и информатики» СУНЦ МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Комментарий.

Этот курс лекций был прочитан авторами в физико-математическом лицее №1580 при МГТУ им. Н.Э.Баумана. Каждая лекция занимает два академических часа. Глава 4 предназначена для самостоятельного изучения с последующим разбором на практических занятиях. В приложении приведен полный список аксиом геометрии, а также еще один, несколько отличающийся, подход к введению векторного и смешанного произведения векторов.

Аннотация.

Данное учебное пособие является конспектом лекций по геометрии для учащихся 10 класса СУНЦ МГТУ им. Н.Э.Баумана.

Предлагаемое здесь изложение геометрии отталкивается от аксиоматики Евклида-Гильберта и является естественным продолжением школьного курса геометрии 7-9 классов. Это пособие адресовано, главным образом, школьникам старших классов, но также может быть полезным и для студентов первого курса.

©Лицей № 1580 при МГТУ им. Н. Э. Баумана
© МГТУ им. Н. Э. Баумана
© И.В. Блудова, М.И. Бугрова, С.С. Граськин.

Некоторые пояснения.

В основу построения школьного курса геометрии можно положить различные системы аксиом. Все нынешние школьные и подавляющее число вузовских учебников геометрии отталкиваются от аксиоматик, восходящих к книге Гильберта «Основания геометрии», вышедшей в 1899 г. Системы аксиом, принятые в действующих учебниках по геометрии, представляют собой различные варианты адаптированной для школы аксиоматики Гильберта. Как показывает многовековая история развития и преподавания геометрии, подход к геометрии, выработанный на пути Евклида – Гильберта, максимальным образом отвечает нашим геометрическим представлениям.

Ученики приходят в наш лицей в десятый класс. Таким образом, во-первых, фактически в течение девяти лет в головах наших учеников устанавливались связи между их геометрическими представлениями и объектами (основными и производными) аксиоматики Евклида – Гильберта. Во-вторых, установление этих связей (в рамках школьной программы) не доведено до конца. В частности, поступающие в лицей уже знакомы с геометрическими векторами на плоскости, но еще не знакомы с общим понятием геометрического вектора (векторами в пространстве). Казалось бы, естественно завершить формирование геометрических представлений школьников, используя то, уже довольно многое, что сделано, и обойдясь «малой кровью».

Однако, возможны и более радикальные пути. Изложение школьной геометрии можно основывать на аксиоматике Вейля, существенно отличающейся от гильбертовской аксиоматики. Однако при этом надо будет ввести понятия вещественного линейного (векторного) пространства, его размерности, точечно-векторного (аффинного) пространства, скалярного произведения как положительно определенного симметрического билинейного функционала на линейном пространстве (для измерения длин векторов и углов между векторами) и т.д. Кроме того, поскольку все это имеет совершенно абстрактный характер, надо будет объяснить школьникам, какое отношения имеют эти понятия к той геометрии, которую они ранее изучали, и как геометрически, а не алгебраически надо представлять себе вектор в пространстве. Фактически, надо будет что-то сказать об эквивалентности аксиоматик Вейля и Гильберта. Всё это просто невыполнимо из-за нехватки времени и из-

за неготовности школьников ко всему этому набору абстрактных понятий, совершенно не нужных пока для них и фактически не развивающих их геометрические представления. Для любителей решать геометрические задачи при помощи векторов вполне достаточно иметь в распоряжении геометрические векторы, вводимые без всяких линейных пространств вполне доступным для школьников образом.

Отметим, что в вузах аналитическая геометрия обычно рассказывается традиционным способом (т.е. на основе аксиоматики Гильберта), чтобы на *простом* и доступном материале подготовить студента к изучению линейной алгебры. Единственным известным нам учебным пособием для студентов вузов, обучающихся по специальности «математика», в котором изложение аналитической геометрии опирается на понятие вещественного линейного пространства, является «Аналитическая геометрия» М.М. Постникова (М., Наука, 1986). Но и в этой книге, вводя вещественное линейное пространство, автор отталкивается от свойств геометрических векторов, считая их известными из школьной программы. Прежде чем ввести каждую новую группу аксиом линейного, евклидова или аффинного пространства, автор сначала исследует вопрос на наглядно-интуитивном уровне и только после этого предлагает обратить точку зрения и принять известные из школы факты в качестве аксиом.

Книга для учителя В.Г.Болтянского «Элементарная геометрия» (М., Просвещение, 1985) построена на основе вейлевской аксиоматики геометрии. В предисловии автор говорит, что книга доступна школьникам старших классов в качестве *дополнительного чтения* для углубленного ознакомления с геометрией. При этом автор и для геометрической интерпретации доказанных по Вейлю результатов, и для формулирования новых теорем опирается на пространственную геометрическую интуицию школьников, уже развитую при изучении планиметрии и стереометрии традиционным способом.

Таким образом, мы считаем целесообразным в 10-11-х классах продолжить изучение геометрии на основе аксиоматики Гильберта.

Глава 1. Введение в стереометрию.

§1.1. Предмет стереометрии.

Школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В планиметрии изучаются свойства геометрических объектов на плоскости. **Стереометрия** – это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.

В планиметрии основными понятиями (простейшими фигурами) были **точки** и **прямые**. В стереометрии наряду с ними рассматривается ещё одна основная фигура – **плоскость**. Плоскости, также как точке и прямой, не дается определение. Представление о плоскости даёт, например, гладкая поверхность стола, неограниченно простирающаяся во все стороны. Свойства основных понятий выражаются в аксиомах. Напомним, что **аксиомами** называются те основные положения геометрии, которые принимаются в качестве исходных. Очевидность аксиом, в силу их наглядности, не вызывает сомнений. Поэтому аксиомы принимаются без доказательства.

Отметим, что для построения геометрии можно использовать различные системы аксиом. Но эти системы аксиом должны быть эквивалентными, т.е. они должны приводить к одним и тем же выводам.

В научной литературе к любой системе аксиом предъявляются некоторые требования, например, аксиомы должны быть независимы, т.е. ни одна из аксиом не должна быть следствием других аксиом. Любое доказательство в научной литературе должно основываться лишь на логических умозаключениях, без ссылок на наглядность и очевидность.

В школьном курсе геометрии такие задачи не ставятся, а наоборот, вполне допустимым считается упрощение изложения теории. Некоторые аксиомы фактически являются теоремами, так как могут быть доказаны на основе других аксиом. Но в силу очевидности и наглядности некоторых утверждений, с одной стороны, и громоздкости их доказательств, а также ограниченности времени, с другой стороны, такие утверждения принимаются в качестве аксиом, а не теорем. По тем же причинам многие факты в школьном курсе геометрии принимаются без доказательств.

Итак, при изучении геометрии, используя основные понятия и аксиомы, мы даем определения новых понятий, формулируем и

доказываем теоремы и таким образом изучаем свойства геометрических фигур. Кроме того, при изучении геометрии мы пользуемся понятиями, известными из других разделов математики: множество, величина, число и др.

С точки зрения теории множеств стереометрия изучает основное множество U (пространство), состоящее из всех рассматриваемых точек, а также его подмножества – геометрические фигуры. Прямые и плоскости также считаются множествами точек. Понятия принадлежности, пересечения и объединения используются в теоретико-множественном смысле. Так, говоря, что две плоскости пересекаются, мы имеем в виду их пересечение как множество точек. Наряду с теоретико-множественными понятиями используются аналогичные понятия «геометрического языка». Например, вместо *прямая a является подмножеством плоскости α* говорят: *прямая a лежит в плоскости α* или *плоскость α проходит через прямую a* .

Будем использовать следующие обозначения:

$A, B, C, \dots, X, Y, Z$ – точки,

$a, b, c, \dots, x, y, z$ – прямые,

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \phi, \psi, \omega$ – плоскости,

ABC – плоскость, проходящая через точки A , B и C ,

$\rho(\Phi_1, \Phi_2)$ – расстояние между фигурами Φ_1 и Φ_2 ,

$\angle(a, b)$ – угол между прямыми a и b как геометрическая фигура и величина этого угла,

$\angle(a, \alpha)$ – угол между прямой a и плоскостью α как геометрическая фигура и его величина,

$\angle(\alpha, \beta)$ – угол между плоскостями α, β как геометрическая фигура и величина этого угла,

$\parallel$ – параллельность,

$\perp$ – перпендикулярность,

$\in$ – принадлежность элемента множеству,

$\subset$ – включение одного множества в другое.

Перечеркнутый знак отношения означает, что данные объекты не связаны этим отношением. Например, $a \subset \alpha$ – прямая a лежит в плоскости α , $a \not\subset \alpha$ – прямая a не лежит в плоскости α .

Остальные обозначения будут введены по мере изложения материала.

§1.2. Аксиомы стереометрии.

Система аксиом стереометрии состоит из ряда аксиом, большая часть которых нам знакома по курсу планиметрии. Полный список аксиом и некоторые следствия из них приведены в приложении.

Здесь мы сформулируем лишь аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве.

Аксиома 1 (аксиома плоскости). Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну (рис. 1.2.1).

Аксиома 2 (аксиома прямой и плоскости). Прямая, проходящая через две точки плоскости, лежит в этой плоскости (рис. 1.2.2).

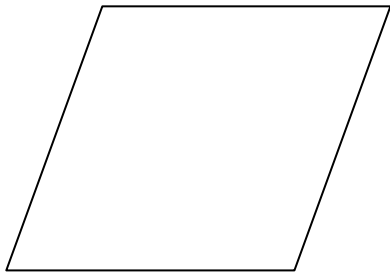


Рис. 1.2.1

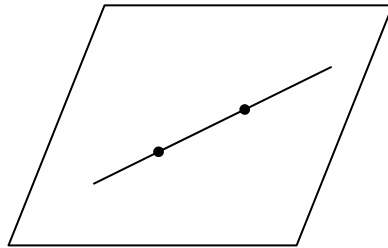


Рис. 1.2.2

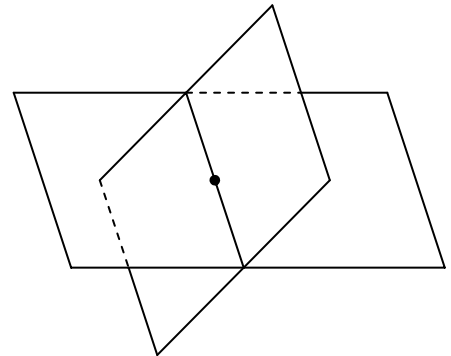


Рис. 1.2.3

Аксиома 3 (аксиома пересечения плоскостей). Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая (рис. 1.2.3).

Прежде чем перейти к первым следствиям из данных аксиом, отметим одно важное обстоятельство, которым будем пользоваться в дальнейшем. В пространстве существует бесконечно много плоскостей, и в каждой плоскости справедливы все аксиомы и теоремы планиметрии. Более того, признаки равенства и подобия треугольников, известные из курса планиметрии, справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях.

Простейшие следствия из аксиом.

Следствие 1. Через любую прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну. (рис. 1.2.4).

Доказательство. Пусть дана прямая a и точка M , не лежащая на ней. Нужно доказать, что плоскость, проходящая через a и M , существует и единственна.

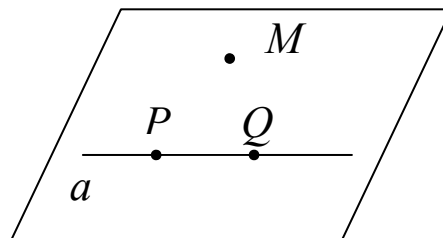


Рис. 1.2.4

Существование. Возьмем на прямой a две точки P и Q . По аксиоме плоскости

существует плоскость α , проходящая через точки M , P и Q . Так как $P \in \alpha$ и $Q \in \alpha$, то по аксиоме прямой и плоскости прямая PQ лежит в плоскости α . Существование доказано.

Единственность. Точки M , P и Q не лежат на одной прямой и принадлежат плоскости α . Следовательно, по аксиоме плоскости плоскость α единственна. Следствие доказано.

Определение 1. Две прямые в пространстве называются **пересекающимися**, если они имеют единственную общую точку.

Если прямые a и b пересекаются в точке M , это обозначается так: $a \cap b = M$.

Определение 2. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$.

Следствие 2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство. Пусть даны две прямые a и b и пусть они пересекаются в точке O . Докажем, что плоскость, проходящая через прямые a и b , существует и единственна.

Существование. Возьмем на прямой a точку A , не лежащую на прямой b , а на прямой b точку B , не лежащую на прямой a (рис. 1.2.5). В силу аксиомы плоскости существует плоскость α ,

проходящая через три точки A , B и O , а в силу аксиомы прямой и плоскости такая плоскость проходит через прямые a и b .

Единственность. Точки A , B и O принадлежат плоскости α и не лежат на одной прямой. По аксиоме плоскости плоскость α единственна. Следствие доказано.

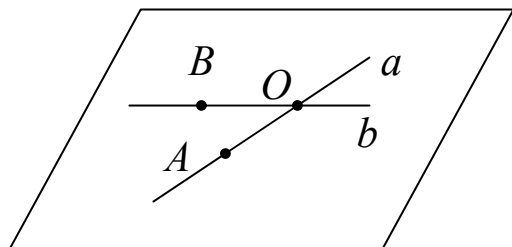


Рис. 1.2.5

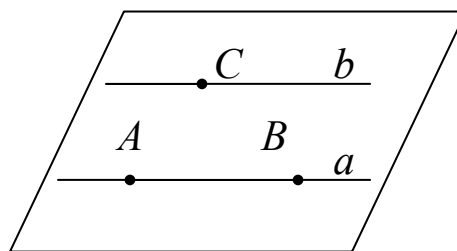


Рис. 1.2.6

Следствие 3. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство. Существование искомой плоскости следует из определения параллельных прямых. Единственность доказывается так же, как и в двух предыдущих случаях (рис. 1.2.6).

§1.3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые.

Пусть в пространстве даны две прямые, имеющие хотя бы одну общую точку. Тогда, как нетрудно доказать, они пересекаются ровно в одной точке. Если же две прямые не имеют общих точек, то возможны два случая: они либо лежат в одной плоскости (и, следовательно, параллельны), либо нет. Последний случай взаимного расположения двух прямых является специфическим для стереометрии.

Определение 1. Две прямые, которые не имеют общих точек и не параллельны, называются *скрещивающимися*.

Если прямые a и b скрещиваются, то пишут: $a \div b$.

Теорема 1 (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а вторая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

Доказательство. Пусть прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает плоскость α в точке M , не принадлежащей прямой a (рис.1.3.1).

Докажем, что $a \div b$. Предположим противное: прямые a и b не скрещиваются. Тогда они либо пересекаются, либо параллельны. В

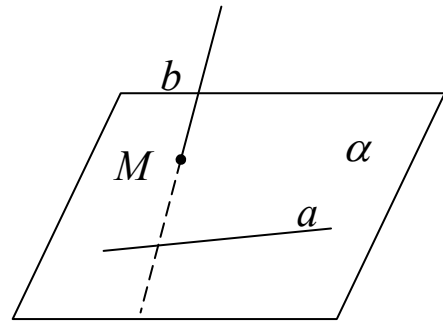


Рис. 1.3.1

обоих случаях через них можно провести плоскость β (следствия 2 и 3). Но через прямую a и точку M , не принадлежащую прямой a , можно провести единственную плоскость (следствие 1). Это означает, что прямая b лежит в плоскости α . Получили противоречие. Теорема доказана.

Глава 2. Параллельность в пространстве.

§2.1. Прямая и плоскость в пространстве. Признак параллельности.

Пусть в пространстве даны плоскость α и прямая a . Если они имеют по крайней мере две общие точки, то по аксиоме прямой и плоскости прямая a лежит в плоскости α ($a \subset \alpha$). Если общая точка одна, то $a \cap \alpha = A$ (прямая a пересекает плоскость α в точке A). Оказывается, возможен и третий случай, когда прямая и плоскость не имеют общих точек: $a \cap \alpha = \emptyset$.

Определение 1. Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Теорема 1 (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны.

Доказательство. Обозначим данные прямую и плоскость через b и α соответственно, $b \not\subset \alpha$. Пусть $b \parallel a$, где $a \subset \alpha$. Предположим, что прямая b и плоскость α не параллельны. Тогда они имеют общую точку, обозначим её через M (рис. 1.3.1). Следовательно, по признаку скрещивающихся прямых $b \nmid a$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2 (о линии пересечения). Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Доказательство. Пусть плоскость β пересекает плоскость α по прямой b и проходит через прямую a такую, что $a \parallel \alpha$ (рис. 2.1.1). Тогда прямые a и b лежат в плоскости β , причем $a \cap b = \emptyset$ (иначе точка их пересечения лежала бы в плоскости α , что противоречит параллельности прямой a и плоскости α). Следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана.

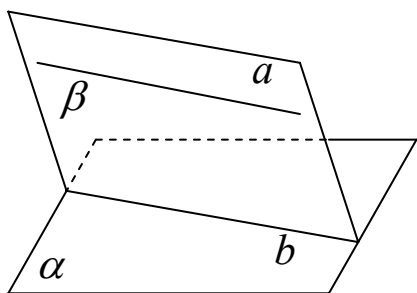


Рис. 2.1.1

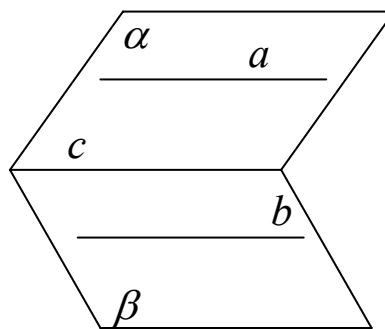


Рис. 2.1.2

Следствие 1. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

Доказательство. Пусть $a \parallel b$, где $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, причем $\alpha \cap \beta = c$ (рис.2.1.2). Докажем, что $c \parallel a$ и $c \parallel b$. Действительно, поскольку $b \subset \beta$ и $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$ по признаку параллельности прямой и плоскости. Далее, по теореме о линии пересечения получим, что $c \parallel a$. Аналогично доказывается, что $c \parallel b$. Следствие доказано.

Отношение параллельности прямых в пространстве так же, как и на плоскости, обладает свойством транзитивности.

Следствие 2. Если прямая a параллельна прямой b , а прямая b параллельна прямой c , то a параллельна c .

Следствие 3. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

§2.2. Параллельность плоскостей. Признак параллельности и свойства параллельных плоскостей.

Определение. Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Теорема 1 (признак параллельности плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть a и b – прямые в плоскости α , прямые a_1 и b_1 лежат в плоскости β , причем $a \cap b = M$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Предположим, что плоскости α и β не параллельны, тогда они пересекаются. Пусть $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 2.2.1). По следствию 1 из теоремы о линии пересечения имеем $c \parallel a$ и $c \parallel b$. Но тогда в силу транзитивности (следствие 2 из той же теоремы) $a \parallel b$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Заметим, что в условии теоремы не требуется, чтобы прямые a_1 и b_1 пересекались.

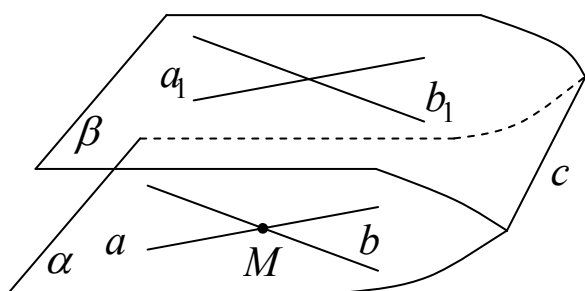


Рис. 2.2.1

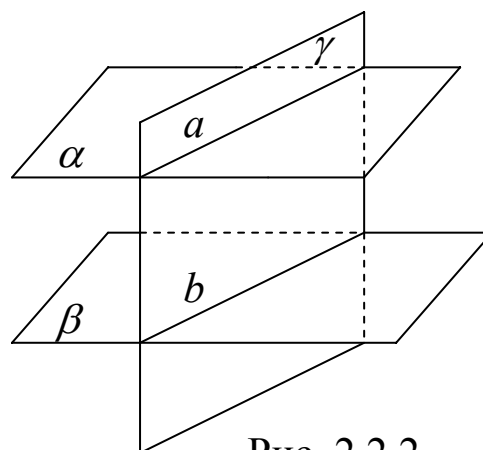


Рис. 2.2.2

Приведем *основные свойства параллельных плоскостей*.

Теорема 2. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

Доказательство. Обозначим данные параллельные плоскости через α и β . Пусть плоскость γ пересекает их по прямым a и b соответственно (рис. 2.2.2). Предположим противное: прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекаются (так как лежат в одной плоскости), пусть $a \cap b = M$. Так как $M \in a$, то $M \in \alpha$; аналогично $M \in \beta$. Таким образом, плоскости α и β имеют общую точку M , что противоречит условию. Теорема доказана.

Теорема 3. Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны по длине.

Доказательство. Пусть даны параллельные плоскости α и β , а параллельные прямые a и b пересекают эти плоскости в точках A и A_1 , B и B_1 соответственно (рис. 2.2.3). По следствию 3 из аксиом (§1.2) через a и b можно провести плоскость γ . Она пересечет плоскости α и β по прямым AB и A_1B_1 соответственно. В силу

теоремы 2 прямые AB и A_1B_1 параллельны. Кроме того, по условию прямые AA_1 и BB_1 параллельны. Значит, AA_1BB_1 – параллелограмм (в плоскости γ) и по свойству параллелограмма длины отрезков AA_1 и BB_1 равны. Теорема доказана.

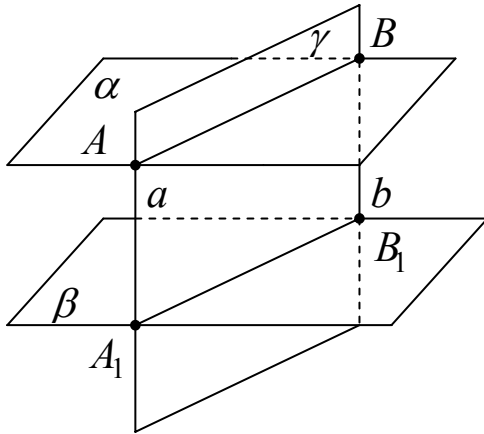


Рис. 2.2.3

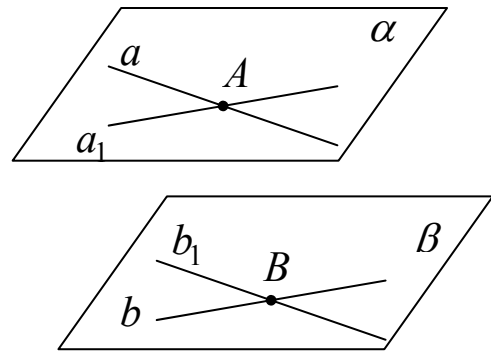


Рис. 2.2.4

Теорема 4. Через каждую точку пространства, не лежащую в данной плоскости, можно провести плоскость, параллельную этой плоскости, и притом только одну.

Теорема 5 (транзитивность параллельности плоскостей). Если плоскость α параллельна плоскости β , а плоскость β параллельна плоскости γ , то α параллельна γ .

Доказательство. Предположим противное: плоскости α и γ не параллельны. Тогда плоскости α и γ пересекаются; обозначим $m = \alpha \cap \gamma$. Возьмем на прямой m точку A . Получаем, что через точку A проведены две плоскости, α и γ , параллельные плоскости β , что противоречит предыдущей теореме. Теорема доказана.

Пример. Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.

Решение. Пусть $a \div b$. Возьмем на прямой a точку A и проведем через неё прямую a_1 , параллельную прямой b . Через прямые a и a_1 проведем плоскость α (следствие 2 из аксиом §1.2). Аналогично строим плоскость β (рис.2.2.4). По признаку параллельности плоскостей получим, что $\alpha \parallel \beta$.

Глава 3. Элементы векторной алгебры в пространстве.

Распространим понятие вектора на плоскости, которое известно вам из планиметрии, на случай пространства. При этом все известные вам определения и теоремы, касающиеся векторов на плоскости, будут иметь место и для векторов пространства. Естественно, что в пространственном случае появятся некоторые новые свойства.

§3.1. Определения направленного отрезка и вектора в пространстве.

Определение 1. Отрезок называется **направленным**, если принимается во внимание порядок, в котором заданы его концы.

На рисунке направленный отрезок отмечается стрелкой, обращенной к его концу (рис. 3.1.1). Обозначают направленный отрезок так: $\overline{AB}$. Точка A называется **началом**, а точка B – **концом** отрезка.

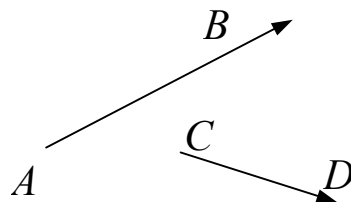


Рис. 3.1.1

Каждую точку рассматривают как частный случай направленного отрезка (начало и конец которого совпадают). Его называют **нулевым** направленным отрезком и обозначают так: $\overline{AA}$.

Длиной направленного отрезка $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB . Длина нулевого направленного отрезка считается равной нулю. Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ называются **противоположными** друг другу.

Ненулевые направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называют **одинаково (противоположно) направленными** (обозначается $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CD}$ в случае одинаково направленных отрезков и $\overline{AB} \uparrow \downarrow \overline{CD}$ в случае противоположно направленных), если одинаково (противоположно) направлены лучи AB и CD (рис. 3.1.2 и 3.1.3). Нулевой направленный отрезок считается одинаково направленным с любым направленным отрезком.

Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и направление (рис. 3.1.4), т.е. $(\overline{AB} = \overline{CD}) \Leftrightarrow (|\overline{AB}| = |\overline{CD}|, \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD})$.

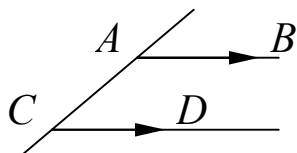


Рис. 3.1.2

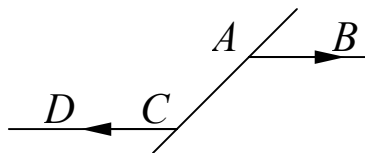


Рис. 3.1.3

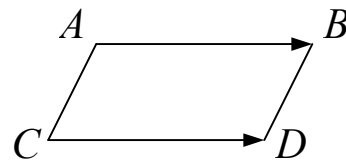


Рис. 3.1.4

Определение 2. Вектором называется множество всех равных между собой направленных отрезков.

Векторы обычно обозначают строчными латинскими буквами со стрелками вверху: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и т. д. Таким образом, вектор – это множество, состоящее из бесконечного числа элементов, каждый такой элемент называется **представителем** данного вектора.

Напомним одно важное соглашение, принятое в связи с понятием вектора: если $\overline{AB} \in \vec{a}$, то говорят, что направленный отрезок $\overline{AB}$ изображает вектор $\vec{a}$, при этом на чертеже рисуется именно направленный отрезок, а говорят про него «вектор». Когда говорят: «отложим вектор $\vec{a}$ от точки O », то имеют в виду, что строится направленный отрезок $\overline{OA}$, изображающий вектор $\vec{a}$.

Все понятия, связанные с направленными отрезками, переносятся на векторы следующим образом: говорят, что векторы обладают некоторым свойством, если этим свойством обладают изображающие их направленные отрезки.

Например, векторы называются **равными**, если равны изображающие их отрезки.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **одинаково (противоположно) направленными**, что обозначается, соответственно, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), если одинаково (противоположно) направлены отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, где $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{CD} \in \vec{b}$.

Длиной вектора называют длину любого представителя этого вектора. Длину вектора обозначают $|\vec{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

Вектор $\vec{a}$ называют **параллельным** прямой l (обозначают $\vec{a} \parallel l$), если любой его представитель параллелен l или лежит на ней.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **коллинеарными**, если существует прямая, которой они параллельны. Обозначают это так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Нулевой вектор по определению является коллинеарным любому вектору.

§3.2. Линейные операции над векторами в пространстве.

Под линейными операциями над векторами понимают сложение и вычитание векторов, а также умножение вектора на число. Эти операции определяются в пространстве так же, как и на плоскости.

Сложением векторов называют операцию, сопоставляющую двум векторам третий вектор – их сумму.

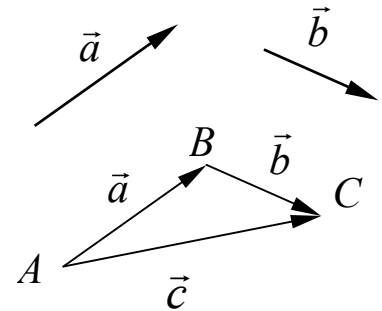


Рис. 3.2.1

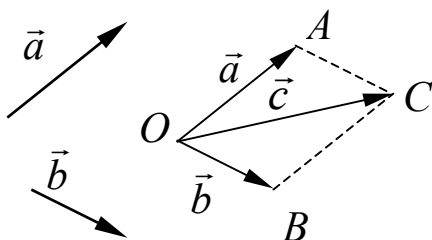


Рис. 3.2.2

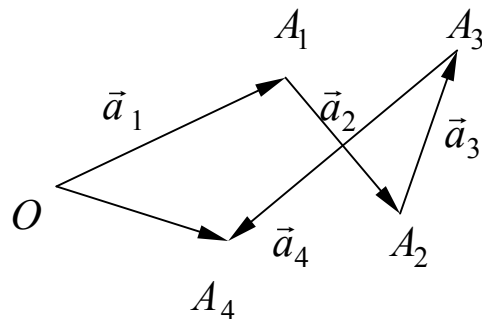


Рис. 3.2.3.

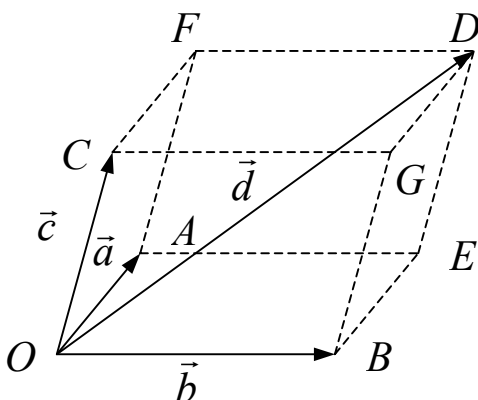


Рис. 3.2.4

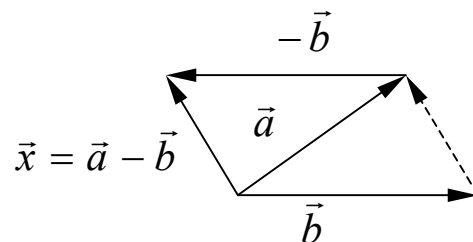


Рис. 3.2.5

Из планиметрии в пространство переносятся **правило треугольника** (рис. 3.2.1), **правило параллелограмма** (рис. 3.2.2) для нахождения суммы двух векторов.

Обобщением на случай суммы нескольких векторов является **правило ломаной**: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{OA_n}$ (на рис. 3.2.3 показано, как найти сумму четырех векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{OA_4}$). Правило ломаной справедливо для произвольных точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ пространства.

Кроме того, в пространстве справедливо **правило параллелепипеда**: если $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} \in \vec{c}$, то, построив на направленных отрезках $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ параллелепипед $OAEBFC$ (рис. 3.2.4), можно найти направленный отрезок $\overrightarrow{OD}$, изображающий вектор $\vec{d}$, который является суммой векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Вычитание – операция, обратная сложению, сопоставляющая двум векторам третий вектор – их **разность**. При этом под **разностью** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимают вектор $\vec{x}$ – сумму вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{b}$, т.е. $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (рис. 3.2.5).

Свойства сложения векторов в пространстве такие же, как и для векторов на плоскости:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения),
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (ассоциативность сложения),
3. $\forall \vec{a} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
4. $\forall \vec{a} : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Доказываются свойства так же, как и для плоскости.

Умножение вектора на число – это операция, сопоставляющая вектору и действительному числу некоторый новый вектор, который называют произведением вектора на это число. Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор, обозначаемый $\alpha\vec{a}$, длина которого равна $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, сонаправленный с $\vec{a}$, если $\alpha \geq 0$, и направленный противоположно $\vec{a}$, если $\alpha < 0$.

Свойства умножения вектора на число в точности повторяют свойства, известные из планиметрии:

1. $\forall \vec{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (ассоциативность),
2. $\forall \vec{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
(дистрибутивность относительно сложения чисел),
3. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
(дистрибутивность относительно сложения векторов),
4. $\forall \vec{a} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

§3.3. Коллинеарность и компланарность векторов.

Определение понятия коллинеарности в пространстве дословно повторяет аналогичное определение для плоскости.

Определение 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Обозначают коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

В пространстве точно так же, как и на плоскости, доказывается теорема о коллинеарных векторах.

Теорема 1. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует единственное число α такое, что $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

В пространстве возникает новое понятие – *компланарность* векторов.

Определение 2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называют *компланарными*, если изображающие их направленные отрезки параллельны некоторой плоскости (в частности, если хотя бы один из векторов – нулевой, т.к. нулевой вектор по определению считается параллельным любой плоскости).

Теорема 2. (признак компланарности векторов).

Если для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ существуют числа x и y такие, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда $\vec{b} = z\vec{a}$ для некоторого числа $z \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} = x\vec{a} + y(z\vec{a}) = (x + yz)\vec{a} = k\vec{a}$, где $k = x + yz$. По признаку коллинеанности векторов $\vec{c}$ коллинеарен $\vec{a}$. Аналогично, $\vec{c}$ коллинеарен $\vec{b}$. Тогда найдется прямая, параллельная векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Проведем через нее плоскость α . Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны α и, следовательно, компланарны.

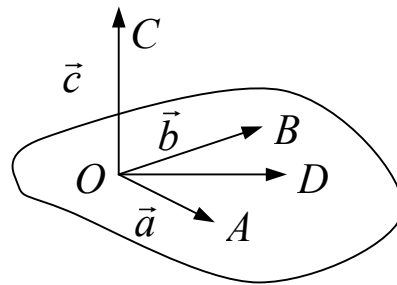


Рис. 3.3.1

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Отложим данные векторы от одной точки O : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (рис. 3.3.1). По условию теоремы $\overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Предположим, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны. Это означает, что точка C не принадлежит плоскости AOB . В плоскости AOB можно построить точку D , что $\overrightarrow{OD} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Следовательно, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$, поэтому C и D – одна и та же точка. Полученное противоречие означает, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Теорема доказана.

Замечание. Теорема, обратная признаку компланарности: если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то существуют числа x и y такие, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Эта теорема неверна (рис 3.3.2).

Однако, верно следующее утверждение.

Теорема 3. (о компланарных векторах)
Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарные векторы, причем $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Тогда существует единственная пара чисел x и y такая, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

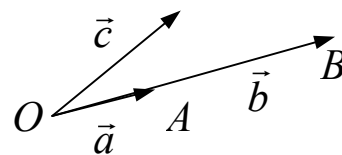


Рис. 3.3.2

Эта теорема сразу вытекает из теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам плоскости.

§3.4. Линейная зависимость векторов. Геометрический смысл линейной зависимости двух и трех векторов.

Рассмотрим систему векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ и зададим n действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Вектор $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией** данных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Говорят также, что вектор $\vec{b}$ разложен по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Определение. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и такие, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad (1)$$

Если же равенство (1) справедливо только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется **линейно независимой**.

Рассмотрим свойства системы линейно зависимых векторов.

Свойство 1. При $n > 1$ система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных векторов этой системы.

Доказательство. Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависима. Это значит, что имеет место равенство (1), где отлично от нуля по крайней мере одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Пусть $\alpha_k \neq 0$ (k — одно из чисел $1, 2, 3, \dots, n$). Равенство (1) перепишем в виде:

$$\vec{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \vec{a}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \vec{a}_{k+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \vec{a}_n.$$

Следовательно, вектор $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Обратно, пусть в системе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ вектор $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов: $\vec{a}_k = \beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_{k-1} \vec{a}_{k-1} + \beta_{k+1} \vec{a}_{k+1} + \dots + \beta_n \vec{a}_n$. Это равенство можно записать так: $\beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_{k-1} \vec{a}_{k-1} + (-1) \vec{a}_k + \beta_{k+1} \vec{a}_{k+1} + \dots + \beta_n \vec{a}_n = \vec{0}$.

Следовательно, система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависима (т.к. коэффициент при $\vec{a}_k$ отличен от нуля).

Свойство 2. Если часть данной системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Доказательство. Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, и известно, что система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_l$ ($l < n$) линейно зависима. Следовательно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля и такие, что $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_l \vec{a}_l = \vec{0}$. Это равенство можно переписать так:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_l \vec{a}_l + 0 \cdot \vec{a}_{l+1} + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Таким образом, система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ также линейно зависима.

Из предыдущего вытекает свойство 3.

Свойство 3. Система линейно независимых векторов не содержит нулевого вектора.

Свойство 4. Если система векторов линейно независима, то любая ее часть тоже линейно независима.

Докажите это утверждение самостоятельно, пользуясь методом «от противного».

Докажем две теоремы, которые раскрывают геометрический смысл линейной зависимости векторов.

Теорема 1. Система векторов $\vec{a}, \vec{b}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

Доказательство. Пусть система векторов $\vec{a}, \vec{b}$ линейно зависима. По свойству 1 хотя бы один из векторов линейно выражается через другой. Пусть, например, $\vec{b} = \alpha \vec{a}$. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Обратно, пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то по свойству 3 система векторов линейно зависима. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то по теореме о коллинеарных векторах $\vec{b} = \alpha \vec{a}$. Отсюда $\alpha \vec{a} + (-1) \vec{b} = \vec{0}$, т.е. система векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависима. Теорема доказана.

Теорема 2. Система векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

Доказательство. Пусть система векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависима: $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$, причем хотя бы один из коэффициентов α, β, γ отличен от нуля. Докажем, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны. Если хотя бы один из коэффициентов равен нулю, то

утверждение очевидно. Действительно, если, например, $\gamma = 0$, то $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ и по теореме 1 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$. Отложим от некоторой точки O вектор $\vec{OA} = \alpha\vec{a}$, затем от точки A вектор $\vec{AB} = \beta\vec{b}$. Так как $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$, то $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{OB}$. С другой стороны, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = -\gamma\vec{c}$, поэтому $\vec{OB} = -\gamma\vec{c}$. Через точки O, A и B проходит плоскость σ . Так как $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$, то из равенств $\vec{OA} = \alpha\vec{a}$, $\vec{AB} = \beta\vec{b}$ и $\vec{OB} = -\gamma\vec{c}$ следует, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ параллельны плоскости σ , поэтому они компланарны.

Обратно, пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то по теореме 1 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы и по свойству 2 система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависима. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то по теореме о компланарных векторах $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. По свойству 1 система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависима. Теорема доказана.

§3.5. Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Теорема 1. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны, то для любого вектора $\vec{p}$ существуют единственные числа α, β, γ такие, что

$$\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad (1)$$

Доказательство. Докажем сначала существование чисел α, β, γ , удовлетворяющих равенству (1). Отложим от некоторой точки O пространства векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OP} = \vec{p}$. Так как векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны, то точки O, A, B и C не лежат в одной плоскости. Если точка P лежит на прямой OC , то векторы $\vec{OC} = \vec{c}$ и $\vec{OP} = \vec{p}$ коллинеарны (рис. 3.5.1), поэтому по теореме о коллинеарных векторах $\vec{p} = \gamma\vec{c}$ или $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + \gamma\vec{c}$. Мы видим, что имеет место равенство (1).

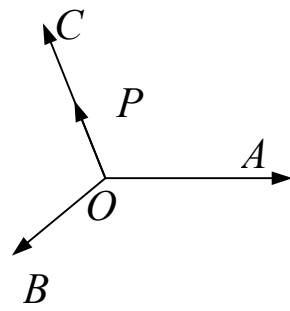
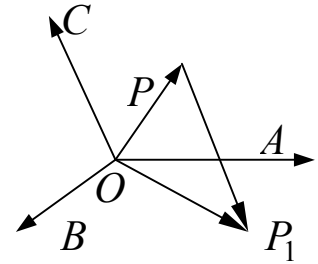


Рис. 3.5.1

Рассмотрим случай, когда точка P не лежит на прямой OC (рис. 3.5.2). Проведем через точку P прямую PP_1 параллельную прямой OC , где P_1 – точка пересечения этой прямой с плоскостью OAB . Так как векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\overrightarrow{OP_1}$ компланарны, то по теореме о компланарных векторах существуют числа α, β такие, что $\overrightarrow{OP_1} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. С другой стороны, векторы $\overrightarrow{PP_1}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, поэтому существует число γ такое, что $\overrightarrow{PP_1} = \gamma\vec{c}$. По правилу треугольника $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P}$, поэтому $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.



Докажем теперь, что числа α, β, γ , удовлетворяющие равенству (1), определяются однозначно. Предположим, что каким-то другим способом мы нашли числа $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ такие, что $\vec{p} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$. Отсюда и из равенства (1)

получаем $(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = \vec{0}$. Так Рис. 3.5.2

как векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны, то по теореме 2 из §3.4 они линейно независимы и поэтому $\alpha - \alpha_1 = 0, \beta - \beta_1 = 0, \gamma - \gamma_1 = 0$ или $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$. Теорема доказана.

Следствие. Любая система, состоящая более чем из трех векторов, линейно зависима.

Доказательство: Учитывая свойство 2 из §3.4 достаточно рассмотреть систему, состоящую из четырех векторов: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то они линейно зависимы, поэтому по свойству 2 из §3.4 вся система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ линейно зависима. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны, то по доказанной теореме вектор $\vec{d}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, поэтому по свойству 1 из §3.4 система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ линейно зависима.

§3.6. Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора в базисе. Система координат. Координаты точки в системе координат.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов. Любой вектор на плоскости может быть однозначно разложен по базисным векторам. Аналогично определяется базис в пространстве.

Определение 1. *Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некопланарных векторов.*

Базис из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначают $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Из теоремы 1 §3.5 вытекает, что любой вектор пространства можно разложить по базисным векторам.

Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – некоторый базис, $\vec{d}$ – произвольный вектор пространства.

Определение 2. Коэффициенты α, β, γ в разложении $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ называются *координатами вектора $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$* .

Пример. Рассмотрим параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – базис, где $\vec{e}_1 = \overrightarrow{DA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DC}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{DD_1}$. Точка E – середина ребра CC_1 (рис. 3.6.1). Нетрудно убедиться в том, что $\overrightarrow{DB}(1;1;0)$, $\overrightarrow{DE}(0;1;0,5)$, $\overrightarrow{A_1C_1}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{EA_1}(1;-1;0,5)$.

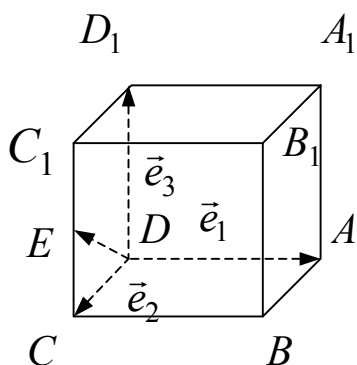


Рис. 3.6.1

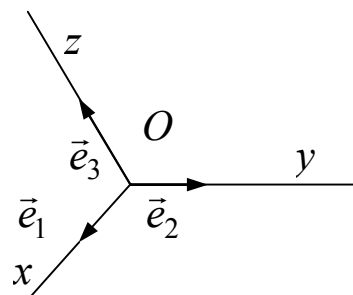


Рис. 3.6.2

Действительно, найдем, например, координаты вектора $\overrightarrow{EA_1}$. По правилу многоугольника $\overrightarrow{EA_1} = \overrightarrow{EC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1A_1}$. Значит, $\overrightarrow{EA_1} = 0,5\vec{e}_3 + (-\vec{e}_2) + \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + (-1)\vec{e}_2 + 0,5\vec{e}_3$. Отсюда получаем координаты вектора $\overrightarrow{EA_1}$. Отметим, что базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в этом базисе имеют координаты $\vec{e}_1(0;0;1)$, $\vec{e}_2(0;1;0)$, $\vec{e}_3(0;0;1)$, а нулевой вектор в этом базисе имеет координаты $(0;0;0)$.

Координатная система в пространстве вводится по аналогии с системой координат на плоскости. Возьмем какую-нибудь точку O и произвольный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ пространства. Система, состоящая из точки O и базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называется **аффинной системой координат в пространстве** и обозначается $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ или $(O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$ (рис. 3.6.2). Точка O называется **началом координат**, а векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – **координатными векторами**. Направленные прямые, проходящие через начало координат и параллельные координатным векторам, на которых положительные направления определяются этими векторами, называются **координатными осями**. Оси, параллельные векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, называются, соответственно, **осями абсцисс, ординат и аппликат** и обозначаются Ox, Oy, Oz . Плоскости, определяемые осями Ox и Oy , Ox и Oz , Oy и Oz , называются **координатными плоскостями** и обозначаются соответственно через Oxy, Oxz, Oyz . Иногда систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ обозначают $Oxyz$.

Пусть $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ – аффинная система координат, а M – произвольная точка пространства. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется **радиус-вектором точки M** . Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называются **координатами точки M** в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Число x называется **абсциссой**, число y – **ординатой**, а число z – **аппликатой** точки M . Пишут $M(x, y, z)$. Таким образом, запись $M(x, y, z)$ в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ означает, что

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \quad (1)$$

Справедливо утверждение: если в пространстве задана аффинная система координат, то устанавливается взаимно-однозначное соответствие между точками пространства и

упорядоченными тройками (x, y, z) действительных чисел, т.е. между точками пространства и элементами множества $\mathbf{R}^3$. Здесь $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ – декартов куб множества действительных чисел.

Если аппликата z точки равна нулю, то из равенства (1) получаем $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Векторы $\overrightarrow{OM}$, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ линейно зависимы, поэтому они компланарны. Это означает, что точка M лежит в плоскости Oxy . В системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ точка M имеет координаты (x, y) . Аналогично, если $y = 0$, то точка M лежит в плоскости Oxz . А если $x = 0$, то в плоскости Oyz . Отсюда следует, что для любой точки оси абсцисс $y = z = 0$, для любой точки оси ординат $x = z = 0$, а для любой точки оси аппликат $x = y = 0$. Начало координат имеет координаты $(0; 0; 0)$.

§3.7. Координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ даны векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Найти координаты вектора $\vec{p} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, где λ и μ – данные числа.

Решение. По определению координат вектора имеем

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3,$$

$$\text{поэтому } \lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 + \lambda a_3\vec{e}_3, \quad \mu\vec{b} = \mu b_1\vec{e}_1 + \mu b_2\vec{e}_2 + \mu b_3\vec{e}_3.$$

Сложив эти равенства и воспользовавшись свойствами сложения векторов и умножения вектора на число, получим $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = (\lambda a_1 + \mu b_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3 + \mu b_3)\vec{e}_3$.

Таким образом, вектор $\vec{p} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ имеет координаты $\vec{p}(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3)$.

Применив рассматриваемую задачу к векторам $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ и $\lambda\vec{c}$, мы убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

- 1. Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов.**
- 2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.**

3. При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

§3.8. Угол между прямыми. Угол между векторами. Понятие ортонормированного базиса и прямоугольной декартовой системы координат.

Здесь и далее под углом мы будем понимать не геометрическую фигуру, а величину. Соответствующую фигуру, образованную двумя лучами с общим началом и одной из плоских областей, ограниченных ими, будем называть *плоским углом*. Из планиметрии известны две единицы измерения углов – градус и радиан, которыми мы будем пользоваться и в дальнейшем. Из планиметрии известно, что *угол между параллельными прямыми* по определению полагается равным нулю, а *угол между пересекающимися прямыми* называется величиной наименьшего из плоских углов, образованных этими прямыми. Эти определения сохраняются и в пространстве. Нам остается только определить угол между скрещивающимися прямыми.

Определение 1. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

Угол между прямыми a и b обозначается $\angle(a, b)$. Если $\angle(a, b) = \pi/2$, то прямые a и b называются *перпендикулярными*.

Для того, чтобы определение 1 было корректным, необходимо доказать, что величина угла между двумя скрещивающимися прямыми не зависит от выбора пары пересекающихся прямых, параллельных им. Это следует из такой теоремы:

Теорема 1. *Величины двух выпуклых плоских углов с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны.*

Доказательство. Для развернутых углов теорема очевидна. Пусть AOB и $A_1O_1B_1$ – плоские углы, не являющиеся развернутыми (рис. 3.8.1).

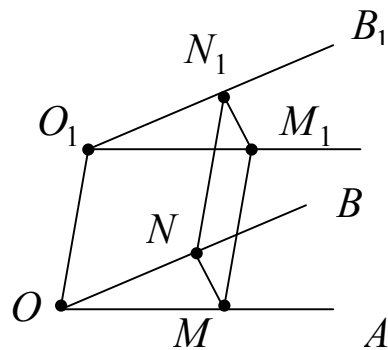


Рис. 3.8.1

Возьмем на сторонах плоского угла AOB точки M и N , а на сторонах угла $A_1O_1B_1$ – точки M_1 и N_1 так, что $O_1M_1 = OM$ и $O_1N_1 = ON$. Четырехугольник OMM_1O_1 – параллелограмм, так как его стороны OM и O_1M_1 равны и параллельны, следовательно, $OO_1 \parallel MM_1$ и $OO_1 = MM_1$. Аналогично доказывается, что $OO_1 \parallel NN_1$ и $OO_1 = NN_1$. Следовательно, $MM_1 = NN_1$. Поэтому четырехугольник NMM_1N_1 – параллелограмм, а, значит, $MN = M_1N_1$. Треугольники MON и $M_1O_1N_1$ равны по трем сторонам, следовательно, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Теорема доказана.

Определение 2. Углом между двумя векторами в пространстве называется угол между изображающими их направленными отрезками, отложенными из одной точки пространства.

Корректность этого определения следует из доказанной теоремы.

Обращаем ваше внимание на разницу между понятиями угла между прямыми и угла между векторами: угол между прямыми не может быть тупым, а угол между векторами – может.

В дальнейшем мы будем обозначать через $\angle(a, b)$ угол между прямыми, а $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если углы измерены в радианах, то $\angle(a, b) \in [0; \frac{\pi}{2}]$, а $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0; \pi]$.

Ненулевые векторы называются **ортогональными**, если угол между ними равен $\pi/2$. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору. Обращаем ваше внимание на то, что нулевой вектор – особенный: ранее (§ 3.1) нулевой вектор считался коллинеарным любому вектору.

При решении задач метрического характера, т.е. задач, связанных с вычислением длин отрезков (векторов) или величин углов, удобнее рассматривать так называемые ортонормированные векторы.

Базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется **ортонормированным**, если его векторы удовлетворяют двум условиям:

1. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, т.е. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы,
2. $\angle(\vec{i}, \vec{j}) = \pi/2$, $\angle(\vec{j}, \vec{k}) = \pi/2$, $\angle(\vec{i}, \vec{k}) = \pi/2$.

Система координат, состоящая из точки O и ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется **прямоугольной декартовой системой координат**. В дальнейшем будем использовать обозначение ПДСК.

§3.9. Длина вектора, заданного координатами в ортонормированном базисе. Расстояние между двумя точками, заданными своими координатами в прямоугольной декартовой системе координат.

Теорема 1. Длина вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (1)$$

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$. Отложим векторы $\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ от некоторой точки O пространства: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OE_1} = \vec{i}, \overrightarrow{OE_2} = \vec{j}, \overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$. Построим прямоугольный параллелепипед, как показано на рисунке 3.9.1.

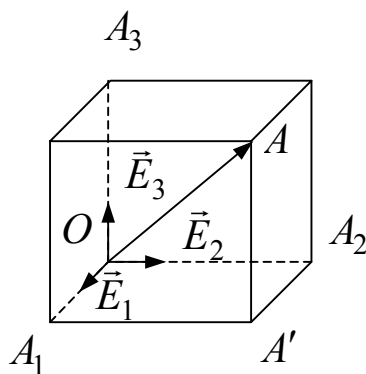


Рис. 3.9.1

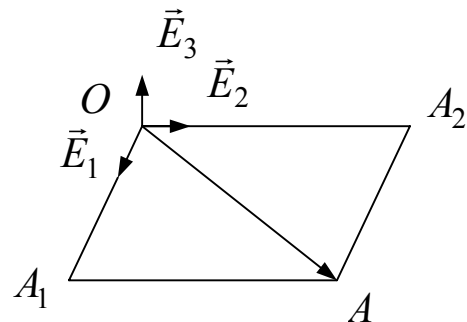


Рис. 3.9.2

По правилу многоугольника:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}.$$

Но $\overrightarrow{OA_1} \parallel \vec{i}, \overrightarrow{OA_2} \parallel \vec{j}, \overrightarrow{OA_3} \parallel \vec{k}$. Поэтому $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \vec{i}, \overrightarrow{OA_2} = \beta \vec{j}, \overrightarrow{OA_3} = \gamma \vec{k}$, следовательно, $\overrightarrow{OA} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ или $\vec{a} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$. Мы видим, что α, β, γ – координаты вектора $\vec{a}$, т.е.

$$\alpha = a_1, \beta = a_2, \gamma = a_3.$$

Таким образом, $\overrightarrow{OA_1} = a_1 \vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2 \vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = a_3 \vec{k}$ и поэтому $OA_1 = |a_1|$, $OA_2 = |a_2|$, $OA_3 = |a_3|$.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений: $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$. Отсюда получаем $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, т.е. формулу (1).

Формула (1) верна также и в том случае, когда некоторые координаты вектора $\vec{a}$ равны нулю.

Пусть, например, $a_2 = a_3 = 0$. Тогда $\vec{a} = a_1 \vec{i}$, $|\vec{a}| = |a_1| \cdot |\vec{i}| = |a_1|$ или $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + 0^2 + 0^2}$. Если одна из координат вектора $\vec{a}$ равна нулю, а две другие отличны от нуля, например, $a_3 = 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, то в предыдущем построении точки A и A' совпадают (рис. 3.9.2). Четырехугольник OA_1AA_2 является прямоугольником, поэтому $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2$. Отсюда $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ или $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 0^2}$. Теорема доказана.

Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими координатами в ПДСК $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$. Выведем формулу для вычисления расстояния $\rho(M_1, M_2)$ между этими точками. Так как $\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}|$, а $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, то по доказанной теореме

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2)$$

§3.10. Определение скалярного произведения векторов. Теорема о вычислении скалярного произведения двух векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.

Операция скалярного умножения двух векторов плоскости известна вам из планиметрии. В пространстве эта операция определяется аналогично.

Определение. *Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.*

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают как $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

Таким образом

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ где } \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1)$$

Из этой формулы мы заключаем, что $\vec{a}\vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$. Это утверждение справедливо и в том случае, когда хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ – нулевой, так как нулевой вектор мы считаем перпендикулярным любому вектору.

Из формулы (1) следует также, что $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$. Число $\vec{a}\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^2$. Таким образом,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (2)$$

Докажем следующую теорему, которая позволяет найти скалярное произведение двух векторов, зная их координаты.

Теорема 1. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданных в ортонормированном базисе, выражается формулой

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (3)$$

Доказательство. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ – нулевой, то справедливость формулы (3) очевидна, поэтому достаточно рассмотреть ситуацию, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Рассмотрим два возможных случая.

Первый случай. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. От какой-нибудь точки O отложим векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$ и рассмотрим треугольник AOB (рис 3.10.1). По теореме косинусов $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \alpha$, где $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Так как $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{a}\vec{b} = OA \cdot OB \cdot \cos \alpha$, то предыдущее равенство можно записать так:

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2). \quad (4)$$

Так как $(\vec{b} - \vec{a})(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, то согласно теореме §3.9 $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$. По той же теореме $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, $|\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$. Подставив эти значения в

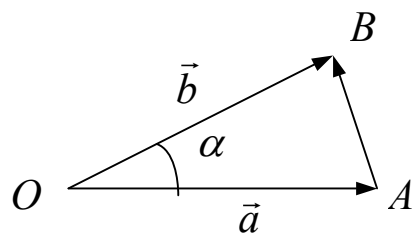


Рис. 3.10.1

формулу (4), после элементарных преобразований получим формулу (3).

Второй случай. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. По теореме о коллинеарных векторах существует такое число λ , что $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, следовательно,

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad a_3 = \lambda b_3 \quad (5)$$

По определению скалярного произведения $\vec{a}\vec{b} = (\lambda \vec{b})\vec{b} = |\lambda \vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\lambda \vec{b}, \vec{b})$. Отсюда следует, что при любом λ имеем: $\vec{a}\vec{b} = \lambda |\vec{b}|^2$. Но $|\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$, поэтому $\vec{a}\vec{b} = \lambda(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (\lambda b_1)b_1 + (\lambda b_2)b_2 + (\lambda b_3)b_3$. Используя равенства (5), получаем, что $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Теорема доказана.

Следствие 1. Векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданные в ортонормированном базисе, взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Следствие 2. Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданными в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (6)$$

§3.11. Свойства скалярного произведения векторов.

Основные свойства скалярного произведения векторов сформулированы в следующей теореме:

Теорема. Для произвольного числа α и произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы следующие равенства:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$,
2. $(\alpha \vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$ и $\vec{a}(\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$,
3. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Доказательство. Выберем ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и введем в рассмотрение координаты данных векторов: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$,

$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. Ограничимся доказательством одного из равенств, например, равенства 3, остальные равенства доказываются аналогично. Так как вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, то по формуле (3) §3.10

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 = \\&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.\end{aligned}$$

Следствие. Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ справедливо равенство:

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d}.$$

Некоторые свойства скалярного произведения векторов совпадают с соответствующими свойствами произведения чисел (например, свойства 1,2,3). Но скалярное произведение имеет и специфические свойства. Вот два из них:

1. Скалярное произведение двух векторов есть число, т.е. объект другой природы по сравнению с сомножителями, а произведение двух чисел является числом, т.е. объектом той же природы, что и сомножители.
2. Если α и β – числа, то из равенства $\alpha\beta = 0$ следует, что хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Аналогичного свойства для векторов нет (произведение ортогональных ненулевых векторов равно нулю).

§3.12. Проекция вектора на вектор.

Отложим два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной и той же точки A (рис. 3.12.1).

Определение. Проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется произведение длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла между этими векторами.

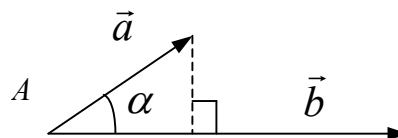


Рис. 3.12.1

Обозначается проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ так: $pr_{\vec{b}}\vec{a}$.

Таким образом, $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha$, где $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Так как $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, то $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Отсюда следует, что

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Аналогично получаем, что $np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$, тогда

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b}.$$

Теорема 1. Проекция суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ равна сумме их проекций:

$$np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{b}.$$

Доказательство. Используем свойство 3 скалярного произведения из §3.11:

$$np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c})}{|\vec{c}|} = \frac{(\vec{a}, \vec{c})}{|\vec{c}|} + \frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{c}|} = np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{b}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Проекция произведения вектора на число равна произведению числа на проекцию этого вектора:

$$np_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Доказательство. Здесь мы воспользуемся свойством 2 скалярного произведения из §3.11:

$$np_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \frac{(\lambda\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{\lambda(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \lambda \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Проекция вектора на ось не зависит от длины направляющего вектора оси.

Доказательство.

Пусть векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ являются направляющими векторами оси Ox (рис. 3.12.2). Тогда векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ сонаправлены.

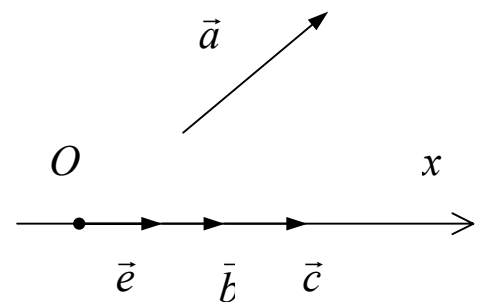


Рис. 3.12.2

Следовательно, существует число $\lambda > 0$, такое, что $\vec{c} = \lambda \vec{b}$. Тогда $pr_{\vec{c}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{c})}{|\vec{c}|} = \frac{(\vec{a}, \lambda \vec{b})}{|\lambda \vec{b}|} = \frac{\lambda(\vec{a}, \vec{b})}{|\lambda| \cdot |\vec{b}|} = pr_{\vec{b}} \vec{a}$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 естественным образом вытекает, что в качестве направляющего вектора оси удобнее всего выбирать единичный вектор $\vec{e}$ оси (рис.3.12.2):

$$pr_{Ox} \vec{a} = pr_{\vec{e}} \vec{a} = (\vec{a}, \vec{e}).$$

§3.13. Деление отрезка в данном отношении.

Пусть M_1 и M_2 – две точки пространства, а λ – некоторое действительное число, причем $\lambda \neq -1$. Говорят, что точка M делит (направленный) отрезок M_1M_2 в данном отношении λ , если

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2} \quad (1)$$

Из равенства (1) заключаем, что векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ коллинеарны. Следовательно, точка M лежит на прямой M_1M_2 . Более того, если $\lambda > 0$, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ одинаково направлены, и, значит, точка M лежит на отрезке M_1M_2 . Если же $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка M_1M_2 .

Число λ называют *простым отношением трех точек* M_1 , M_2 и M и обозначают так: $\lambda = (M_1M_2, M)$.

Зададим в пространстве аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и допустим, что концы направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеют координаты $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Поставим задачу: найти координаты точки $M(x, y, z)$, если она делит отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в данном отношении λ , где $\lambda \neq -1$.

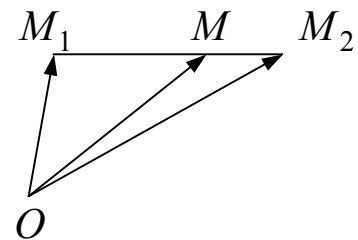


Рис. 3.13.1

Так как $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}$ (рис. 3.13.1), то равенство (1) можно переписать в виде: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM})$. Отсюда находим: $(1 + \lambda)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}$. Так как $\lambda + 1 \neq 0$, то

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}}{1 + \lambda} \quad (2)$$

Векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ являются радиус-векторами точек M , M_1 и M_2 , поэтому эти векторы в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеют координаты $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$, $\overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2, z_2)$, где (x, y, z) – искомые координаты точки M .

Пользуясь формулой (2), получаем, что

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (3)$$

В частности, *середина* отрезка M_1M_2 (поскольку в этом случае $\lambda = 1$) имеет координаты

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

§3.14. Признаки коллинерности и компланарности векторов, заданных своими координатами в некотором базисе.

Теорема 1. Для того, чтобы векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданные координатами в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны.

Доказательство. Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то утверждение очевидно. Поэтому рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. По теореме о коллинеарных векторах существует такое число λ , что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Тогда $b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2, b_3 = \lambda a_3$, т.е. координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны.

Обратно, пусть координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны: $b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2, b_3 = \lambda a_3$. Умножив эти равенства на $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и сложив, получаем: $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, отсюда следует, что $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Теорема доказана.

Теорема 1 есть распространение на случай пространства утверждения для двух векторов плоскости $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$, т.е.

$$(\vec{a}(a_1, a_2) \parallel \vec{b}(b_1, b_2)) \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \right).$$

В случае плоскости докажем еще один признак коллинеарности двух векторов, заданных координатами.

Теорема 2. Векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Замечание. Здесь $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ есть определитель второго порядка,

составленный из координат векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$. Числа a_1, b_1 образуют его первую строку, a_2, b_2 – вторую строку, a_1, a_2 – первый столбец, b_1, b_2 – второй столбец. Определение и свойства определителей второго, третьего и более высоких порядков будут

рассматриваться в 11 классе. А пока укажем, что определитель второго порядка вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Доказательство. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда координаты $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны, т.е. существует такое число λ , что $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$ (или $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$). Но тогда выполняется

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1(\lambda a_2) - a_2(\lambda a_1) = 0.$$

Допустим теперь, что $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, и докажем, что $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Если

$\vec{a} = \vec{0}$, то истинность утверждения очевидна, поэтому рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$. По крайней мере, одна из координат вектора $\vec{a}$ не равна нулю. Пусть $a_1 \neq 0$. Тогда из равенства $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ находим, что $b_2 = \frac{b_1}{a_1} a_2$ или $b_2 = \lambda a_2$, где $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$. Таким образом,

$b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2$, т.е. координаты $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны. Отсюда следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Теорема доказана.

Докажем теперь признак компланарности трех векторов, заданных своими координатами.

Теорема 3. Для того, чтобы векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, заданные координатами в некотором базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Замечание. В левой части (1) стоит определитель третьего порядка, первый столбец которого образован координатами вектора $\vec{a}$, второй столбец состоит из координат вектора $\vec{b}$, третий – координат $\vec{c}$. Вычисление определителя третьего порядка можно свести к вычислению трех определителей второго порядка с

помощью разложения по строке или столбцу. Для определителя из (1) разложение по первой строке дает:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

В этом выражении элемент первой строки (взятый с тем же знаком или с противоположным) умножается на определитель второго порядка, составленный из тех элементов определителя третьего порядка, которые остаются после вычеркивания из него строки и столбца, на пересечении которых этот элемент стоит. Для a_1 вычеркиваются первая строка и первый столбец, для b_1 – первая строка и второй столбец. Разложение по первому столбцу того же определителя имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Тогда они линейно зависимы (теорема 2 §3.4), т.е. существуют числа α , β и γ , не равные одновременно нулю и такие, что

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \quad (2)$$

Запишем это равенство в координатах:

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 &= 0 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 &= 0 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, столбцы определителя в левой части равенства (1) линейно зависимы. Из курса алгебры известно, что в случае, когда строки или столбцы определителя линейно зависимы, то он равен нулю.

Обратно, пусть выполняется равенство (1). Тогда столбцы определителя линейно зависимы, т.е. система (3) однородных линейных уравнений относительно α , β и γ имеет ненулевые решения. Умножив равенства (3) соответственно на $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и сложив, получим равенство (2). Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, поэтому они компланарны. Теорема доказана.

§3.15. Правые и левые тройки векторов. Понятие ориентации пространства. Положительные и отрицательные базисы.

В математике есть строгое определение понятия ориентации пространства, но мы не будем обсуждать его, так как для понимания дальнейшего материала достаточно пока привести лишь некоторые наглядные соображения.

Пусть в пространстве задан базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Предположим, что векторы базиса отложены от одной точки O . Если для наблюдателя, находящегося на конце вектора $\vec{c}$, кратчайший поворот вокруг точки O от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки, то базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется **правым**, если же этот поворот виден по часовой стрелке, то базис называется **левым** (рис. 3.15.1).

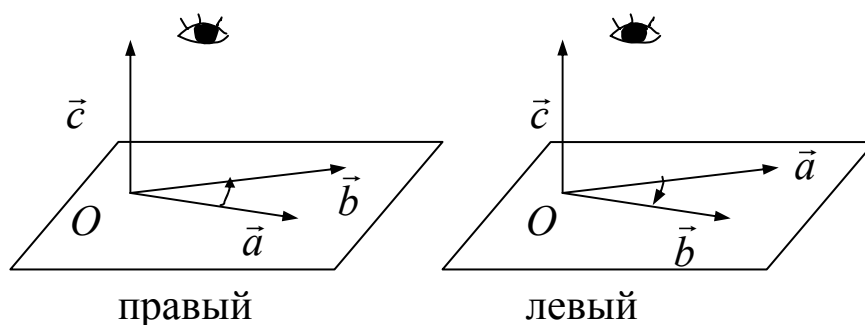


Рис. 3.15.1

Каждый базис является либо правым, либо левым. Один и тот же базис не может быть одновременно и правым, и левым. Таким образом, множество всех базисов разбивается на два непересекающихся класса – правых и левых базисов. Каждый из этих классов называется **ориентацией пространства**. **Ориентировать пространство** – означает выбрать одну из этих ориентаций и назвать ее **положительной** (а вторую – **отрицательной**). Все базисы положительной ориентации называются **положительными базисами**, все базисы отрицательной ориентации называются **отрицательными базисами**. Так как каждый базис содержится ровно в одной ориентации, то выбор базиса автоматически выбирает ориентацию пространства, содержащую этот базис, и, следовательно, ориентирует пространство. Таким образом, автоматически пространство с выбранным в нем базисом является ориентированным.

Под **тройкой** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будем понимать упорядоченную тройку некопланарных векторов. Если базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ положительный (отрицательный), то тройку $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ также будем называть **положительной** (**отрицательной**).

§3.16. Смешанное произведение векторов. Объем тетраэдра.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некопланарные векторы. От некоторой точки M пространства отложим вектора $\vec{MA} = \vec{a}$, $\vec{MB} = \vec{b}$, $\vec{MC} = \vec{c}$ и построим параллелепипед $MADBCA_1D_1B_1$ так, чтобы отрезки MA , MB и MC были ребрами этого параллелепипеда (рис. 3.16.1).

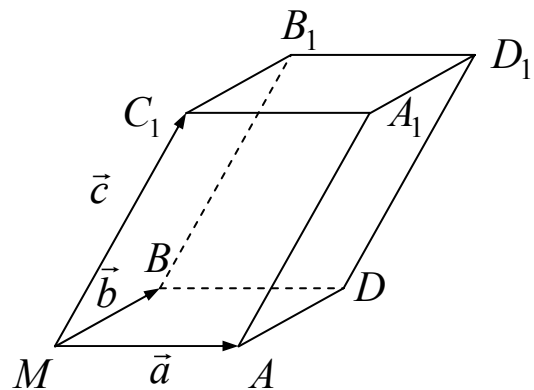


Рис. 3.16.1

Его назовем **параллелепипедом, построенным на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$** . Заметим, что в зависимости от выбора точки M на данных векторах можно построить бесконечное множество параллелепипедов, но все они равны друг другу, поэтому имеют один и тот же объем.

Рассмотрим ориентированное пространство.

Определение 1. **Смешанным (тройным) произведением некопланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$** , взятых в данном порядке, называется число, равное объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятое со знаком «+», если тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ положительная, и со знаком «-», если тройка отрицательная. Смешанное произведение компланарных векторов считается равным нулю.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ обозначается так: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

В курсе аналитической геометрии выводятся формулы для вычисления смешанного произведения векторов, заданных координатами. Нам потребуется следующий факт.

Теорема 1. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ имеют координаты $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

(Замечание. Как мы условились, выбор базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ориентирует пространство. Таким образом, знак определителя (1) указывает, в частности, на положительность или отрицательность тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если она некомпланарна.)

Основные свойства смешанного произведения сформулированы в следующей теореме.

Теорема 2. Для произвольных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ и произвольного числа α имеют место следующие равенства:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$,
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$,
3. $(\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\vec{a}\vec{b}(\alpha\vec{c}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$,
4. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$,
 $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$, $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$.

Доказательство. Выберем ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и зададим данные векторы координатами в данном базисе: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ и $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$. Воспользовавшись формулой (1) и соответствующими свойствами определителей третьего порядка, убеждаемся в справедливости всех равенств 1-4. Свойства определителей будут доказаны в курсе алгебры 11 класса.

1. Воспользуемся тем, что при круговой перестановке строк (столбцов) определитель не меняется, получим:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}.$$

2. Поскольку от перестановки двух строк (столбцов) определитель меняет знак, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}.$$

3. Воспользуемся тем, что общий множитель всех элементов некоторой строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя:

$$\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha b_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha b_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

4. Известно, что если элементы какой-либо строки (столбца) представлены в виде суммы двух чисел, то определитель равен сумме двух определителей. Значит,

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}.$$

Теорема доказана.

Используем смешанное произведение векторов для решения следующей задачи.

Задача. Найти объем тетраэдра $ABCD$, если в некоторой прямоугольной системе координат даны координаты его вершин: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$.

Решение. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ равен модулю смешанного произведения векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Отсюда следует, что объем тетраэдра $ABCD$ вычисляется по формуле $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|$.

Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ имеют координаты:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AD}(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1).$$

Поэтому по формуле (1) для объема тетраэдра получаем

$$V = |v|,$$

$$\text{где } v = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

§3.17. Векторное произведение двух векторов.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. От некоторой точки M пространства отложим векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$ и построим параллелограмм $MACB$ так, чтобы отрезки MA и MB были его смежными сторонами (рис. 3.17.1). Этот параллелограмм называют **параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$** . В зависимости от выбора точки M на данных векторах можно построить бесконечное множество параллелограммов, но все они равны друг другу, поэтому имеют одну и ту же площадь.

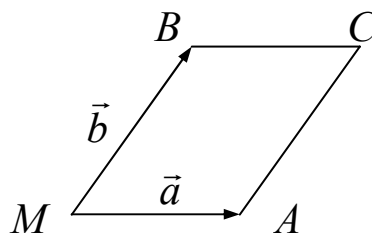


Рис. 3.17.1

Рассмотрим **ориентированное пространство**.

Определение. Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, взятых в данном порядке, называется вектор $\vec{p}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах; вектор $\vec{p}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен так, что тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}\}$ является положительной. Векторное произведение коллинеарных векторов считается равным нулю.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так:

$$[\vec{a}\vec{b}], [\vec{a}, \vec{b}] \text{ или } \vec{a} \times \vec{b}.$$

Докажем теорему, в которой устанавливается связь между смешанным, векторным и скалярным произведениями векторов.

Теорема 1. Каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c} \quad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, поэтому левая часть равенства (1) обращается в нуль. Но правая часть этого равенства также обращается в нуль, так как $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{0}$ и поэтому $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \vec{0}$. Таким образом, в этом случае равенство (1) верно.

Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, а $\vec{c}$ — единичный вектор, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен так, что тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ положительна. Тогда, очевидно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.17.2.).

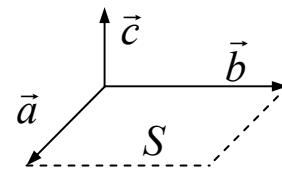


Рис. 3.17.2

С другой стороны, векторы $[\vec{a}\vec{b}]$ и $\vec{c}$ сонаправлены, поэтому $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = |[\vec{a}\vec{b}]| \cdot |\vec{c}| = S$. Итак, в этом случае равенство (1) также верно.

Рассмотрим, наконец, случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, а $\vec{c}$ — произвольный вектор. Пусть $\vec{k}$ — единичный вектор, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен так, что тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{k}\}$ положительна. Разложим вектор $\vec{c}$ по этому базису: $\vec{c} = c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{k}$. Тогда по теореме 2 §3.16 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{k}) = c_3(\vec{a}\vec{b}\vec{k})$. С другой стороны, по аналогичному свойству скалярного произведения векторов $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}](c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{k}) = c_1([\vec{a}\vec{b}]\vec{a}) + c_2([\vec{a}\vec{b}]\vec{b}) + c_3([\vec{a}\vec{b}]\vec{k}) = c_3(\vec{a}\vec{b}\vec{k})$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$. Теорема доказана.

Следствие. Каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,

$$[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \vec{a}[\vec{b}\vec{c}] \quad (2)$$

Доказательство. Действительно, $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$,
 $\vec{a}[\vec{b}\vec{c}] = [\vec{b}\vec{c}]\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$. По теореме 2 §16 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$. Поэтому
 равенство (2) верно. Следствие доказано.

Найдем координаты вектора $[\vec{a}\vec{b}]$ по координатам векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теорема 2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ имеют координаты $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, то вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ имеет координаты

$$[\vec{a}\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \quad (3)$$

Доказательство. Пусть x, y, z – координаты вектора $[\vec{a}\vec{b}]$. Тогда $[\vec{a}\vec{b}] = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, поэтому $[\vec{a}\vec{b}]\vec{i} = x\vec{i}\vec{i} = x$. По предыдущей теореме $[\vec{a}\vec{b}]\vec{i} = \vec{a}\vec{b}\vec{i}$, следовательно, $x = [\vec{a}\vec{b}]\vec{i}$. Аналогично получаем: $x = [\vec{a}\vec{b}]\vec{i}$ и $z = [\vec{a}\vec{b}]\vec{k}$. По формуле (1) §3.17 найдем x, y, z .

$$x = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

Формула (3) означает, что

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \quad (4)$$

Это равенство условно можно записать в следующем, удобном для запоминания, виде:

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \vec{i} \\ a_2 & b_2 & \vec{j} \\ a_3 & b_3 & \vec{k} \end{vmatrix}.$$

В правой части этого равенства записан «определитель», который, конечно, не является определителем в обычном смысле слова. Но если его разложить по элементам (векторным!) третьего столбца, то, пользуясь обычными правилами разложения определителя третьего порядка, получим формулу (4).

Основные свойства векторного произведения векторов сформулированы в следующей теореме.

Теорема 3. Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и произвольного числа α имеют место следующие равенства:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$,
2. $[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{a}, \alpha\vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$,
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$.

Доказательство. Выберем ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и зададим данные векторы в координатах: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. Воспользовавшись формулой (3) и соответствующими свойствами определителей, убедимся в справедливости равенств 1-3.

$$1. [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$[\vec{b}, \vec{a}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_3 & a_3 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -[\vec{a}, \vec{b}]$$

(Воспользовались тем, что при перестановке столбцов (строк) определитель меняет знак).

2. Т.к. общий множитель всех элементов некоторого столбца можно вынести за знак определителя, то

$$\begin{aligned} [\alpha\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha a_2 & b_2 \\ \alpha a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha a_3 & b_3 \\ \alpha a_1 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha a_1 & b_1 \\ \alpha a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \alpha \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} & \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \alpha \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \alpha[\vec{a}, \vec{b}] \end{aligned}$$

$$3. \text{Пусть } [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = (x, y, z), [\vec{a}, \vec{c}] = (x_1, y_1, z_1), [\vec{b}, \vec{c}] = (x_2, y_2, z_2).$$

По формуле (3) имеем

$$x = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x_1 + x_2.$$

(Здесь воспользовались соответствующим свойством определителя, у которого элементы одного столбца являются

суммой). Аналогично получаем $y = y_1 + y_2$, $z = z_1 + z_2$. Теорема доказана.

Замечание. Важно подчеркнуть, что векторное произведение двух векторов, в отличие от скалярного произведения, есть вектор (отсюда и термин «векторное произведение»). Кроме того, как видно из доказанной теоремы, векторное произведение зависит от порядка сомножителей, т.е., вообще говоря, $[\vec{a}, \vec{b}] \neq [\vec{b}, \vec{a}]$.

Применим векторное произведение для решения следующей задачи:

Задача. Найти площадь треугольника ABC , если в некоторой прямоугольной системе координат даны координаты его вершин: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{AB}, \vec{AC}$ численно равна модулю векторного произведения этих векторов: $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$. Отсюда следует, что $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$, где через S обозначена площадь треугольника. Векторы $\vec{AB}, \vec{AC}$ имеют координаты $\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, поэтому, используя формулу (3), получаем:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

В частности, если вершины треугольника лежат в плоскости Oxy , то $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, поэтому

$$S = \frac{1}{2} |s|, \text{ где } s = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Глава 4. Методы изображений.

В различных областях техники, изобразительном искусстве, архитектуре приходится пользоваться изображениями пространственных фигур на плоскости. При изучении стереометрии также пользуются изображениями пространственных фигур на плоскости. В этой главе мы познакомимся с основными вопросами теории изображений.

§4.1. Параллельное и центральное проектирование.

Возьмем в пространстве некоторую плоскость σ и какой-нибудь ненулевой вектор $\vec{p}$, не параллельный этой плоскости (рис. 4.1.1).

Пусть $\bar{A}$ – произвольная точка пространства. Проведем через эту точку прямую, параллельную вектору $\vec{p}$, и обозначим через A_0 точку, в которой эта прямая пересекает плоскость σ . Точка A_0 называется **проекцией точки $\bar{A}$ на**

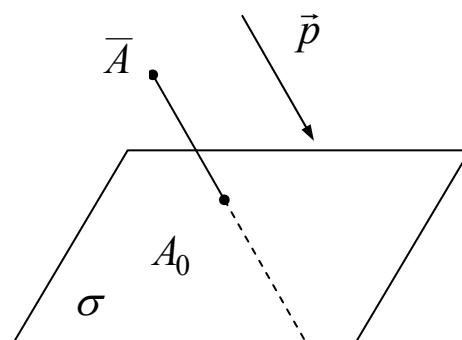


Рис. 4.1.1

плоскость σ при проектировании параллельно вектору $\vec{p}$. Обычно предполагается, что плоскость σ и вектор $\vec{p}$ заданы, поэтому точку A_0 кратко называют **параллельной проекцией точки $\bar{A}$.**

Если вектор $\vec{p}$ перпендикулярен к плоскости σ , то точка A_0 называется **ортогональной проекцией точки $\bar{A}$.**

Множество параллельных проекций всех точек данной фигуры $\bar{F}$ образует некоторую фигуру F_0 , которая называется **параллельной проекцией фигуры $\bar{F}$.** Если $\vec{p} \perp \sigma$, то F_0 называется **ортогональной проекцией фигуры $\bar{F}$.**

Отметим основные свойства параллельного проектирования отрезков и прямых. При этом предположим, что рассматриваемые прямые и отрезки **не параллельны** вектору $\vec{p}$, в направлении которого производится проектирование.

1. Проекция прямой есть прямая.
2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

3. Проекция отрезка $\overline{AB}$ есть отрезок A_0B_0 , где A_0 и B_0 – проекции точек $\overline{A}$ и $\overline{B}$.
4. При параллельном проектировании сохраняется простое отношение трех точек, в частности, проекция середины отрезка есть середина проекции отрезка.
5. Проекции параллельных отрезков параллельны или принадлежат одной прямой.
6. Проекции параллельных отрезков или отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам.

При построении сечений пирамид нам понадобится еще один вид проектирования – **центральное проектирование**.

Пусть в пространстве даны плоскость σ и точка $S \notin \sigma$ (рис. 4.1.2). Возьмем в пространстве произвольную точку $\overline{M}$, не лежащую в плоскости, проходящей через S параллельно плоскости σ , и проведем через точки S и $\overline{M}$ прямую t . Точку M_1 пересечения прямой t с плоскостью σ назовем **центральной проекцией точки $\overline{M}$** .

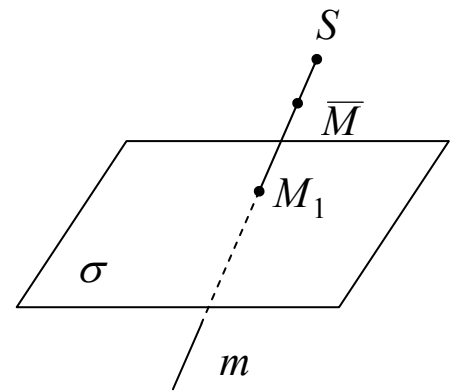


Рис. 4.1.2

При этом плоскость σ называется **плоскостью проектирования**, а точка S – **центром проектирования**. Пусть в пространстве задана фигура $\overline{\Phi}$. Отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\overline{M} \in \overline{\Phi}$ ее центральную проекцию M_1 на плоскость σ с центром S , называется **центральным проектированием**, а множество всех точек M_1 – **центральной проекцией** фигуры Φ на плоскость σ с центром S .

§4.2. Изображение плоских фигур в параллельной проекции.

Выберем некоторую плоскость σ и назовем ее **плоскостью изображений**. Затем возьмем ненулевой вектор $\vec{p}$, не параллельный плоскости σ . Направление этого вектора назовем **направлением проектирования**. Пусть $\overline{F}$ – произвольная фигура (плоская или пространственная), расположенная в пространстве, а F_0 – параллельная проекция этой фигуры на плоскость σ . Фигуру $\overline{F}$

называют **оригиналом**, а F_0 – **проекцией оригинала**. Любую фигуру F на плоскости σ , подобную фигуре F_0 , называют **изображением фигуры $\bar{F}$** . Таким образом, изображение фигуры зависит от выбора плоскости изображений σ , направления проектирования и выбранного подобия плоскости σ . Обычно берется такое изображение фигуры, которое является наиболее наглядным и удобным для выполнения на нем дополнительных построений.

Рассмотрим примеры построений изображений плоских фигур, изучаемых в школьном курсе геометрии. (При этом будем предполагать, что плоскости оригинала и изображения пересекаются, и что направление проектирования не параллельно ни одной из этих плоскостей).

Треугольник.

Любой треугольник ABC плоскости σ может служить изображением данного треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ на плоскости $\bar{\sigma}$, если плоскости σ и $\bar{\sigma}$ пересекаются. (Если $\sigma \parallel \bar{\sigma}$, то это утверждение неверно, так как в этом случае треугольники ABC и $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ подобны). В частности, изображением равностороннего треугольника может служить произвольный разносторонний треугольник.

Таким образом, параллельное проектирование, вообще говоря, не сохраняет величин углов и отношений длин непараллельных отрезков.

Трапеция.

Изображением трапеции является трапеция. При этом отношение оснований оригинала равно отношению оснований изображения.

Параллелограмм (включая ромб, прямоугольник, квадрат) изображается в виде параллелограмма. В частности, любой параллелограмм плоскости σ является изображением квадрата плоскости $\bar{\sigma}$.

§4.3. Первоначальное понятие о многогранниках.

Под многогранником понимается тело, ограниченное конечным числом плоскостей. (При этом мы пока не даем строгого определения понятия «тело», а опираемся на интуитивное представление о теле, поверхности тела). Эти плоскости, пересекаясь, образуют **грани** многогранника – многоугольники. Стороны этих многоугольников называются **ребрами** многогранника, а концы ребер – его **вершинами**. Отрезок, соединяющий вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.

В стереометрических задачах наиболее часто встречаются такие многогранники, как **призма** и **пирамида**.

Определение. Призма – это многогранник, две грани которого – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а все ребра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны между собой (рис. 4.4.3).

Два равных многоугольника, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** призмы. Остальные грани призмы (являющиеся параллелограммами), называются ее **боковыми гранями**, а их объединение – **боковой поверхностью призмы**. Ребра, не лежащие в основании призмы, называются **боковыми ребрами**. Если в основаниях призмы лежат n -угольники, то призма называется n -угольной. Так, на рисунке 4.4.3 изображена пятиугольная призма.

Частным случаем призмы является **параллелепипед** – призма, основаниями которой служат параллелограммы (рис. 4.4.2).

Укажем основные свойства параллелепипеда.

1. Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.
2. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Если все грани параллелепипеда являются прямоугольниками, то параллелепипед называется **прямоугольным**. Если все грани параллелепипеда – квадраты, то он называется **кубом**. Если все боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания, то параллелепипед называется **прямым**.

Определение. Пирамида – это многогранник, одна из граней которого – произвольный многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной (рис. 4.4.1 и 4.4.4).

Этот многоугольник называется **основанием** пирамиды, а остальные (треугольные) грани – **боковыми гранями**. Объединение боковых граней пирамиды называется ее **боковой поверхностью**. Ребра пирамиды, не принадлежащие основанию, называются ее **боковыми ребрами**. Общая вершина всех боковых граней называется **вершиной пирамиды**.

Пирамида называется **правильной**, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды ортогонально проектируется в центр этого многоугольника. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апотемой** этой пирамиды.

Если в основании пирамиды лежит n -угольник, то пирамида называется n -угольной. Изображенная на рисунке 4.4.4. пирамида является пятиугольной. Треугольная пирамида называется **тетраэдром** (рис. 4.4.1). Тетраэдр называется **правильным**, если все его ребра равны (таким образом, все грани правильного тетраэдра – равные правильные треугольники).

§4.4. Изображение многогранников в параллельной проекции.

В теории изображений учитывают, что многогранник полностью определяется своей поверхностью, составленной из многоугольников (граней многогранника). Эта поверхность ограничивает многогранник как геометрическое тело. Под **изображением многогранника** будем понимать фигуру, состоящую из изображений всех его граней (или, что, по существу, то же самое, всех его ребер). Для большей наглядности невидимые ребра многогранника изображают пунктирными линиями.

Тетраэдр.

Изображением тетраэдра может служить произвольный четырехугольник (выпуклый или невыпуклый) с проведенными в нем диагоналями (рис. 4.4.1).

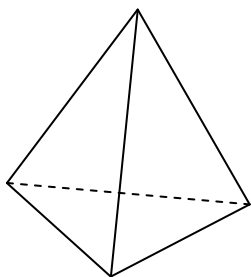


Рис. 4.4.1

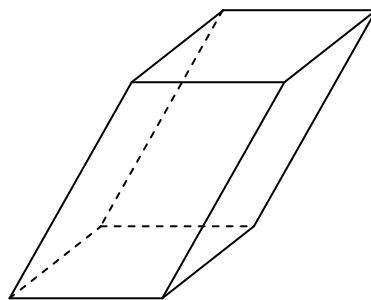
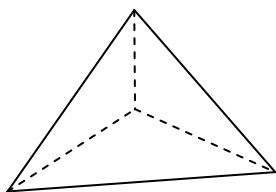


Рис. 4.4.2

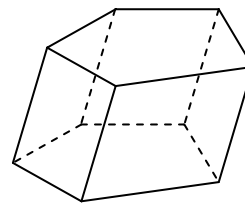


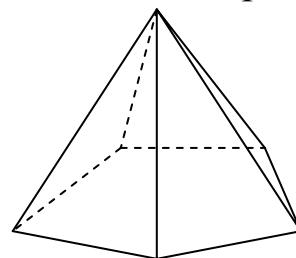
Рис. 4.4.3

Параллелепипед.

Изобразим сначала три ребра, выходящие из одной вершины (это можно сделать произвольно). Дальнейшее построение осуществляется уже однозначно: каждый из остальных отрезков параллелен и равен по длине одному из уже построенных отрезков (рис. 4.4.2).

Призма.

Изображением n -угольной призмы на плоскости σ является фигура, состоящая из двух равных n -угольников (один получается из другого параллельным переносом), изображающих основания призмы, и n параллелограммов, для каждого из которых противоположными сторонами являются изображения параллельных сторон оснований (рис. 4.4.3). Основания призмы изображаются на чертеже с учетом правил изображения плоских многоугольников.



Пирамида.

Рис. 4.4.4

Изображением пирамиды является фигура, состоящая из многоугольника, изображающего основание пирамиды, и нескольких треугольников с общей вершиной, изображающих боковые грани пирамиды (рис. 4.4.4).

Глава 5. Перпендикулярность в пространстве.

§5.1. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение. Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Если прямая a перпендикулярна плоскости α , то обозначается это так: $a \perp \alpha$.

Теорема 1 (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство. Пусть дана плоскость α и пусть $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, $b \cap c = O$, $a \perp b$, $a \perp c$ (рис. 5.1.1).

Возьмем в плоскости α произвольную прямую d , отличную от b и c , и покажем, что $a \perp d$.

Выберем произвольно точки A и A_1 на прямой a , B и B_1 на прямой b , C и C_1 на прямой c , D и D_1 на прямой d . Введем векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BB_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CC_1}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DD_1}$. Так как прямые b и c

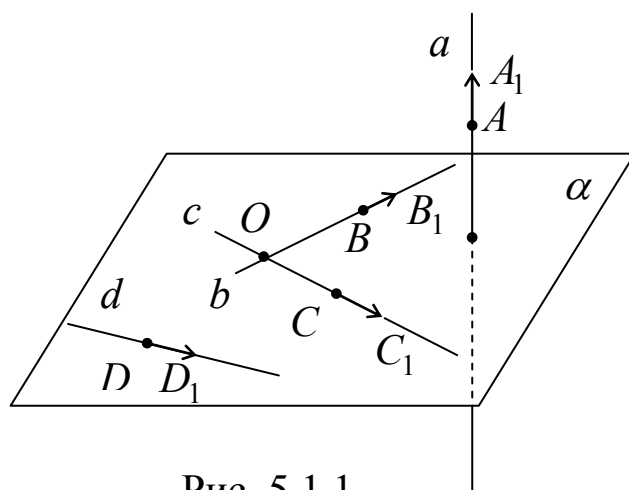


Рис. 5.1.1

пересекаются, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в плоскости α . По теореме о разложении вектора по базису найдутся числа x и y такие, что

$$\vec{d} = x\vec{b} + y\vec{c}.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\vec{a}$, получим: $\vec{a}\vec{d} = \vec{a}(x\vec{b} + y\vec{c}) = x\vec{a}\vec{b} + y\vec{a}\vec{c}$. Так как $a \perp b$ и $a \perp c$, то $\vec{a}\vec{b} = 0$, следовательно $\vec{a}\vec{d} = 0$, и, значит, $a \perp d$. Теорема доказана.

Определение. Прямая перпендикулярная плоскости, называется *перпендикуляром (нормалью)* к этой плоскости. Прямая, не перпендикулярная плоскости и пересекающая ее, называется *наклонной* к этой плоскости.

Теорема 2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна данной плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямые a_1 и a_2 параллельны и прямая a_1 перпендикулярна плоскости α (рис. 5.1.2). Возьмем в плоскости α две пересекающиеся прямые b_1 и b_2 . Так как $a_1 \perp \alpha$, то $a_1 \perp b_1$ и $a_1 \perp b_2$.

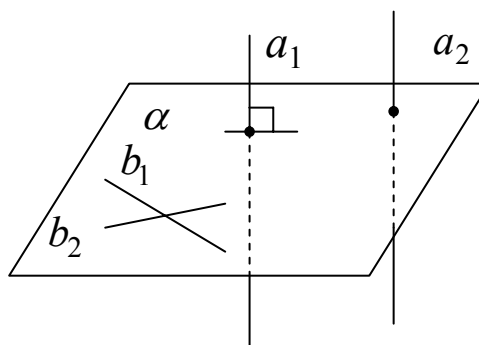


Рис. 5.1.2

Но так как $a_2 \parallel a_1$, то $\angle(a_2, b_1) = \angle(a_1, b_1) = 90^\circ$. Аналогично, $\angle(a_2, b_2) = \angle(a_1, b_2) = 90^\circ$. Значит,

$a_2 \perp b_1$ и $a_2 \perp b_2$, тогда в силу признака перпендикулярности прямой и плоскости, $a_2 \perp \alpha$. Теорема доказана.

Упражнение. Докажите, что если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

§5.2. Теорема о трех перпендикулярах.

Определение. Параллельное проектирование, при котором направление проектирования перпендикулярно плоскости проекции, называют *ортогональным проектированием*.

Теорема (о трех перпендикулярах).

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

Доказательство. Пусть $m \subset \alpha$, (рис. 5.2.1) прямая a — наклонная, a_1 — ортогональная проекция прямой a на плоскость α , $AA_1 \perp \alpha$, где $A \in a$, $A_1 \in a_1$. Так как $AA_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \perp m$. Проведем через прямые a и a_1 плоскость β .

1. Пусть $m \perp a_1$, тогда так как $m \perp AA_1$, то $m \perp \beta$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) и, следовательно, $m \perp a$.

2. Обратно, если $m \perp a$, то, поскольку $m \perp AA_1$, то $m \perp \beta$, следовательно, $m \perp a_1$.

Теорема доказана.

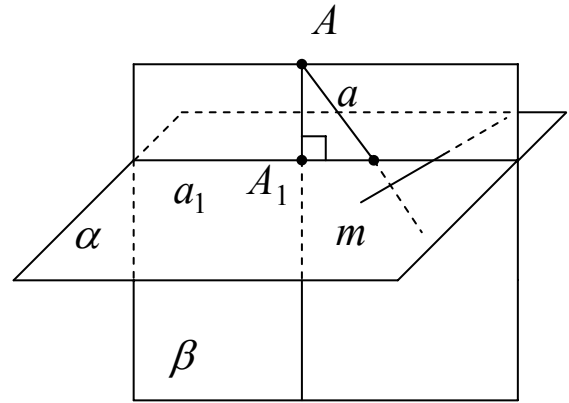


Рис. 5.2.1

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение. Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

§5.3. Расстояние между фигурами.

Определение. Если среди всех расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре Φ_1 , а другая фигуре – Φ_2 (рис. 5.3.1), существует наименьшее, то его называют *расстоянием между фигурами Φ_1 и Φ_2* .

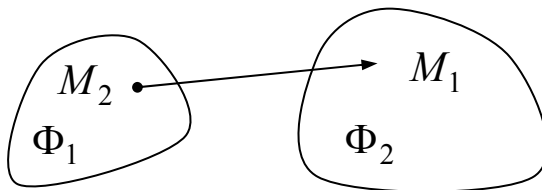


Рис. 5.3.1

Расстояние между фигурами Φ_1 и Φ_2 обозначается как $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$.

Согласно определению

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) = \min \{M_1 M_2 \mid M_1 \in \Phi_1, M_2 \in \Phi_2\}.$$

1. Расстояние от точки до плоскости.

Докажем, что **расстояние от точки до плоскости равно расстоянию от этой точки до ее ортогональной проекции на эту плоскость.**

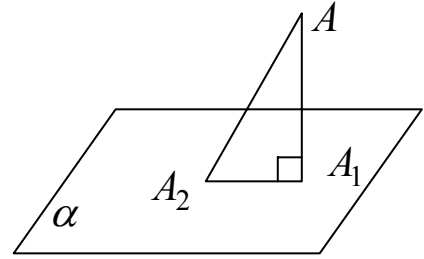


Рис. 5.3.2

Пусть $A_1 = pr_{\alpha} A$. Докажем, что $\rho(A, \alpha) = AA_1$ (рис. 5.3.2). Если $A \in \alpha$, то $\rho(A, \alpha) = 0$. Пусть $A \notin \alpha$ и пусть A_2 – произвольная точка плоскости α , отличная от точки A_1 . Так как в прямоугольном треугольнике AA_1A_2 гипотенуза AA_2 длиннее катета AA_1 , то AA_1 – искомое расстояние от A до α .

2. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Определение. **Общим перпендикуляром** двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на данных прямых, перпендикулярный к ним.

Теорема 1. **Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых существует и единственен.**

Доказательство.

Существование. Пусть $a \nparallel b$. Проведем через a и b параллельные

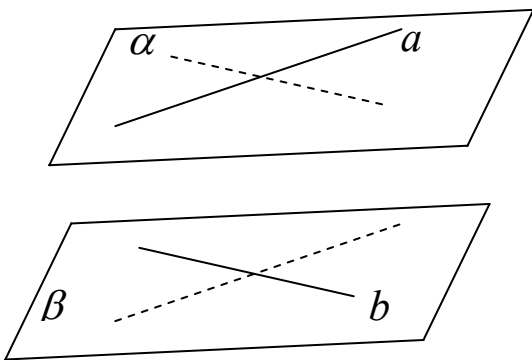


Рис. 5.3.3

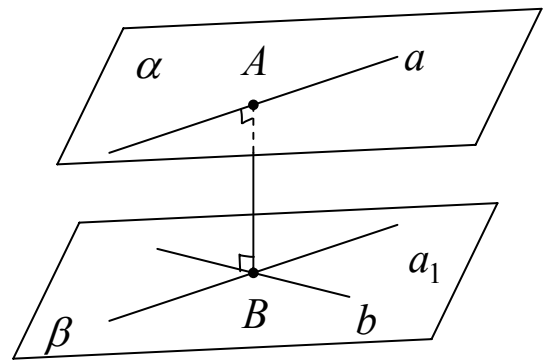


Рис. 5.3.4

плоскости α и β (рис. 5.3.3). Ортогональной проекцией прямой a на плоскость β является прямая a_1 , параллельная a ($a_1 = pr_{\beta} a$). Обозначим $B = b \cap a_1$ (рис. 5.3.4). Точка B является ортогональной проекцией некоторой точки A , принадлежащей прямой a . Так как

$AB \perp \beta$, $b \subset \beta$, $a_1 \subset \beta$, то $AB \perp b$ и $AB \perp a_1$. Так как $a \parallel a_1$, то $AB \perp a$. Следовательно, AB – общий перпендикуляр прямых a и b .

Единственность. Предположим, что прямая MN , где $M \in a$, $N \in b$, отличная от прямой AB , также перпендикулярна прямым a и b (рис. 5.3.5). Проведем в плоскости β через точку N прямую a_2 , параллельную a . Так как $MN \perp a$, $a_2 \parallel a$, то $MN \perp a_2$. Кроме того, $MN \perp b$. Значит, $MN \perp \beta$, следовательно, $MN \parallel AB$ (см. упражнение к §5.1). Через параллельные прямые MN и AB можно провести плоскость, в которой лежат прямые a и b . Но эти прямые по условию скрещиваются. Противоречие. Теорема доказана.

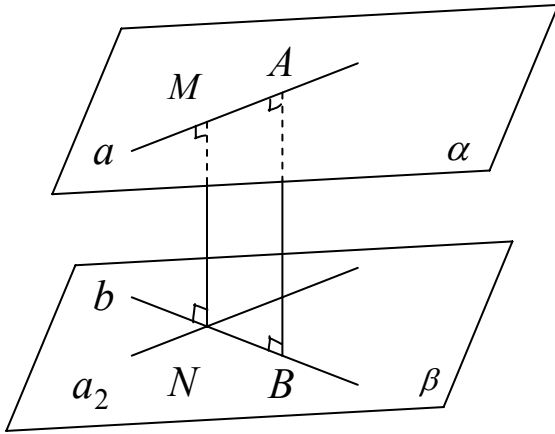


Рис. 5.3.5

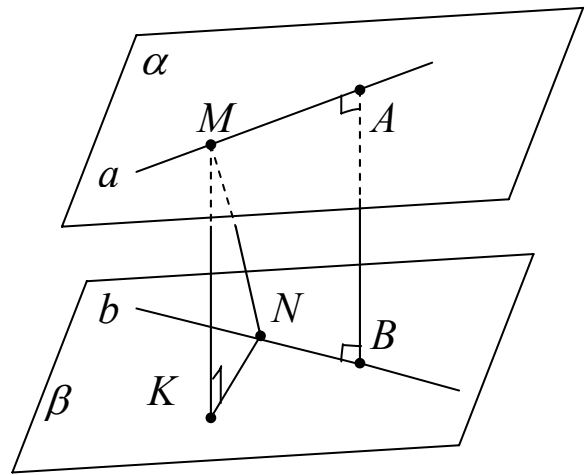


Рис. 5.3.6

Теорема 2. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Доказательство. Пусть $a \div b$, отрезок AB – их общий перпендикуляр, $A \in a$, $B \in b$, M и N – произвольные точки на a и b (рис. 5.3.6). Пусть $K = pr_\beta M$, следовательно, $MK = AB$. $MN > MK$, значит, $AB \leq MN$. Теорема доказана.

Упражнение.

Докажите самостоятельно, что:

1. Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от произвольной точки прямой до данной плоскости.

2. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине отрезка перпендикулярной к ним прямой, концы которого принадлежат этим плоскостям.

Задача 1.

Найти расстояние между скрещивающимися ребрами правильного тетраэдра с ребром длины a .

Решение. Пусть $ABCS$ – правильный тетраэдр, M – середина ребра AB , N – середина ребра SC (рис. 5.3.7). Докажем, что отрезок MN – общий перпендикуляр прямых AB и SC . Отрезки SM и CM равны (высоты равных треугольников), следовательно, треугольник SMC – равнобедренный, в нем медиана MN будет также и высотой, т.е. $MN \perp SC$. Аналогично, $MN \perp AB$. Таким образом, $\rho(AB, SC) = MN$.

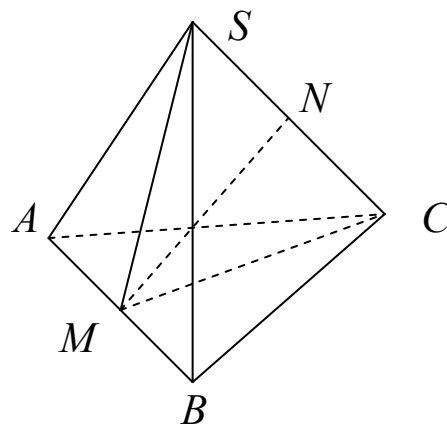


Рис. 5.3.7

Из треугольника MNC находим $MN = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $a/\sqrt{2}$.

Задача 2.

Доказать, что диагональ A_1C куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярна плоскости BDC_1 .

Решение. Пусть A_1C – наклонная к плоскости ABC , AC – ее ортогональная проекция на плоскость ABC (рис. 5.3.8). Так как $BD \perp AC$, то $BD \perp A_1C$ (по теореме о трех перпендикулярах). Рассматривая плоскость BCC_1 , аналогично доказываем, что $BC_1 \perp A_1C$. Итак, $BD \perp A_1C$ и $BC_1 \perp A_1C$, значит, $A_1C \perp BDC_1$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

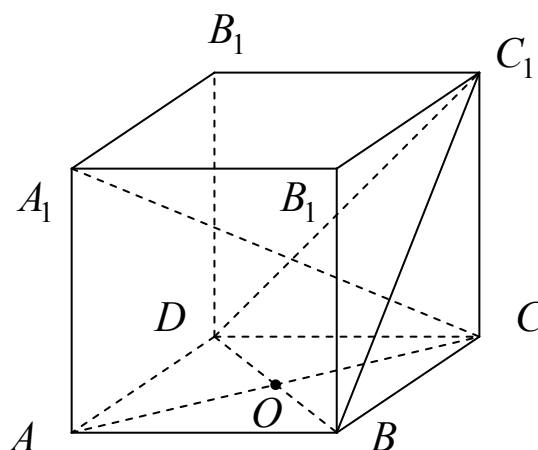


Рис. 5.3.8

§5.4. Двугранный угол и его измерение.

Определение 1. Две полуплоскости с общей ограничивающей их прямой разбивают пространство на две части, общей границей которых они являются. Объединение рассматриваемых полуплоскостей с одной из этих частей называется *двугранным углом*. Полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, а их общая прямая – его *ребром*.

Двугранный угол может быть как выпуклым (рис. 5.4.1), так и невыпуклым (рис. 5.4.2).

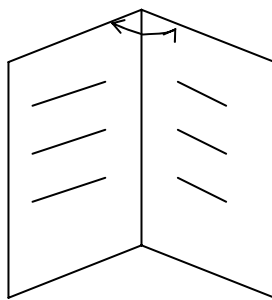


Рис. 5.4.1

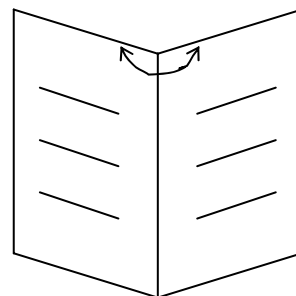


Рис. 5.4.2

Двугранный угол с гранями α и β и ребром l мы будем обозначать $\alpha l \beta$.

Определение 2. Пересечение двугранного угла и плоскости, перпендикулярной его ребру, называют *линейным углом* двугранного угла. *Величиной* двугранного угла называют величину его линейного угла.

Корректность данного определения вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Величина двугранного угла не зависит от выбора его линейного угла.

Доказательство. Пусть AOB и $A_1O_1B_1$ – два линейных угла данного двугранного угла (рис. 5.4.3). Так как плоскости AOB и $A_1O_1B_1$ перпендикулярны ребру двугранного угла, то эти плоскости параллельны. Значит, линии пересечения их третьей плоскостью параллельны (теорема 2 §2.2), поэтому $O_1B_1 \parallel OB$. Аналогично получаем, что $A_1O_1 \parallel AO$. Стороны углов

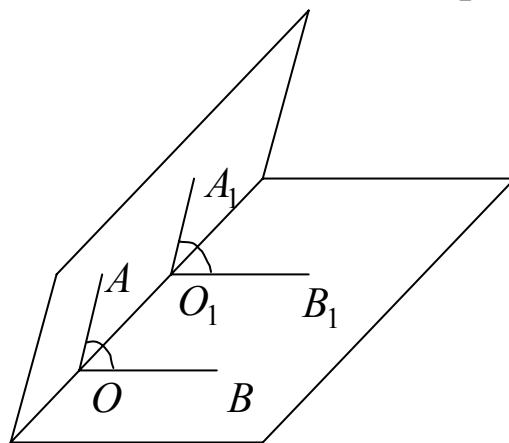


Рис. 5.4.3

AOB и $A_1O_1B_1$ параллельны и одинаково направлены, следовательно, эти углы равны (теорема 1 §3.8). Теорема доказана.

Величина двугранного угла (измеренная в градусах) принадлежит промежутку $(0^\circ, 360^\circ)$. Величина выпуклого двугранного угла принадлежит промежутку $(0^\circ, 180^\circ]$.

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые двугранные углы. Двугранный угол называется **острым**, **тупым**, **прямым** в зависимости от того, каков его линейный угол.

§5.5. Площадь ортогональной проекции многоугольника.

Теорема. Площадь ортогональной проекции выпуклого многоугольника равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостями многоугольника и его проекции.

Доказательство. Пусть M – выпуклый многоугольник, лежащий в плоскости α , а M_1 – его ортогональная проекция на плоскость β . Обозначим $\varphi = \angle(\alpha, \beta)$, $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$. Докажем, что

$$S_{np} = S \cos \varphi \quad (1)$$

где S – площадь многоугольника M , S_{np} – площадь M_1 . Поскольку $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$, то (1) можно представить в виде $S = S_{np} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$.

Если $\varphi = 0^\circ$, то $\alpha \parallel \beta$ и $M_1 = M$; если $\varphi = 90^\circ$, то $\alpha \perp \beta$, M_1 – отрезок и $S_{np} = 0$. Таким образом, в этих частных случаях теорема верна.

Пусть $0^\circ < \varphi < 90^\circ$. Докажем формулу (1) для частного случая, когда многоугольник M является треугольником ABC , причем $AB \parallel l$, где $l = \alpha \cap \beta$ (рис. 5.5.1).

Пусть CD – высота в треугольнике ABC . Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 –

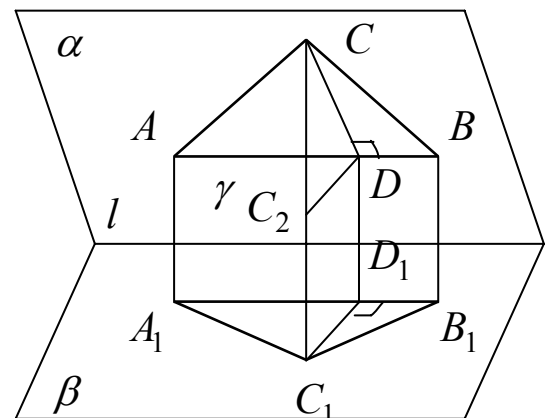


Рис. 5.5.1

ортогональные проекции точек A, B, C, D на плоскость β . Обозначим $\gamma = (ABB_1A_1)$. Применим теорему о линии пересечения: если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Так как $AB \parallel l, l \subset \beta$, то $AB \parallel \beta$; $AB \subset \gamma, \gamma \cap \beta = A_1B_1$, следовательно, $AB \parallel A_1B_1$. Далее, $AA_1 \parallel BB_1$ (как два перпендикуляра к одной плоскости), значит AA_1B_1B – параллелограмм и $AB = A_1B_1$. Так как $CD \perp AB$ и $AB \parallel A_1B_1$, то $CD \perp A_1B_1$. По теореме о трех перпендикулярах $A_1B_1 \perp C_1D_1$. Следовательно, C_1D_1 – высота в треугольнике $A_1B_1C_1$.

В плоскости CC_1D проведем $DC_2 \parallel D_1C_1, C_2 \in [CC_1]$. В треугольнике CC_2D : $\angle CC_2D = 90^\circ, \angle CDC_2 = \varphi$, $C_1D_1 = C_2D = CD \cos \varphi$ (рис.5.5.2). Поскольку $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, то $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot C_1D_1 = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \cos \varphi = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$. Теорема верна в рассматриваемом частном случае.

Пусть теперь M – произвольный треугольник. Проведем через его вершины прямые, параллельные l . Одна из них разобьет рассматриваемый треугольник на два треугольника, у каждого из которых одна сторона параллельна l (рис. 5.5.3). Остается для каждого из этих треугольников воспользоваться формулой (1) и сложить полученные результаты: $S_{np1} = S_1 \cos \varphi, S_{np2} = S_2 \cos \varphi, S_{np} = S_{np1} + S_{np2} = (S_1 + S_2) \cos \varphi = S \cos \varphi$.

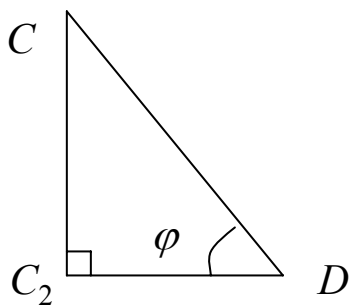


Рис. 5.5.2

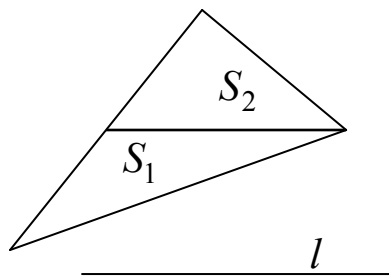


Рис 5.5.3

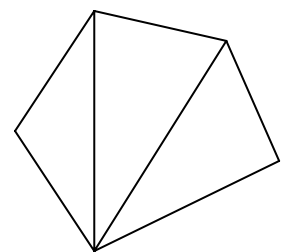


Рис. 5.5.4

Теперь рассмотрим выпуклый многоугольник. Возьмем одну из его вершин и проведем все выходящие из нее диагонали многоугольника. Они разбивают многоугольник на

непересекающиеся треугольники (рис. 5.5.4). Применив к каждому треугольнику формулу (1) и сложив полученные равенства, придем к выводу, что формула (1) верна для произвольного выпуклого многоугольника. Теорема доказана.

§5.6. Угол между двумя плоскостями. Перпендикулярность плоскостей.

Определение 1. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьшая из величин двугранных углов, образованных при их пересечении. Угол между параллельными плоскостями по определению считается равным нулю.

Таким образом, угол между плоскостями (измеренный в градусах) принадлежит промежутку $[0^\circ, 90^\circ]$.

Определение 2. Две плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90° .

Теорема 1 (признак перпендикулярности двух плоскостей).

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

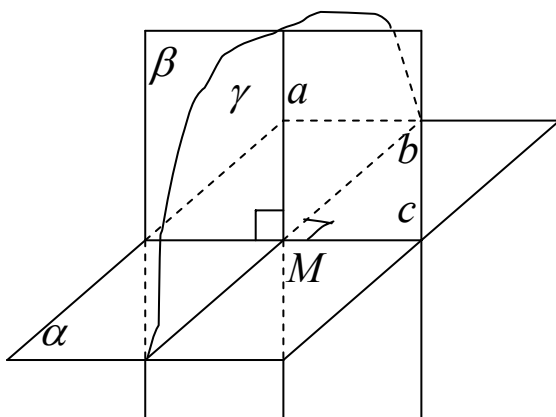


Рис. 5.6.1

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна плоскости α , а плоскость β проходит через прямую a . Обозначим основание перпендикуляра через M ($M = a \cap \alpha$), а прямую, по которой пересекаются α и β – через c (рис. 5.6.1). Через точку M в плоскости α проведем прямую b , перпендикулярную прямой c . Пусть γ – плоскость, проходящая через a и b . Так как $c \perp a$ и $c \perp b$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $\gamma \perp c$. Значит, угол между α и β равен углу между a и b , но $a \perp b$ (так как по условию $a \perp \alpha$, а $b \subset \alpha$ по построению), следовательно $\alpha \perp \beta$. Теорема доказана.

Теорема 2 (свойство перпендикулярных плоскостей).

Если две плоскости перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения плоскостей, перпендикулярна второй плоскости.

Доказательство. Пусть $\alpha \perp \beta$, $c = \alpha \cap \beta$, а плоскость α проходит через прямую a , перпендикулярную c (рис. 5.6.2). Докажем, что $a \perp \beta$.

Пусть $M = a \cap c$. В плоскости β через точку M проведем прямую b , перпендикулярную c . Тогда угол aMb – линейный угол двугранного угла, образованного α и β . Так как $\alpha \perp \beta$, то $a \perp b$. Итак, $a \perp c$ (по условию) и $a \perp b$, следовательно, $a \perp \beta$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Теорема доказана.

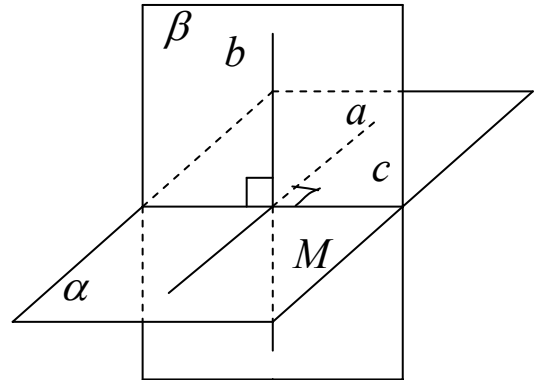


Рис. 5.6.2

Глава 6. Метод координат в пространстве. Уравнения прямых и плоскостей.

§6.1. Уравнение плоскости.

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость σ . Множество L всех векторов, параллельных плоскости σ , называется **направляющим подпространством плоскости σ** . Направляющее подпространство L плоскости σ можно считать известным, если даны какие-либо два неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, параллельные этой плоскости. Действительно, так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис, то любой вектор $\vec{p}$ из множества L является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Направляющее подпространство L , заданное векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначим $L = L(\vec{a}, \vec{b})$.

На плоскости σ с направляющим подпространством $L = L(\vec{a}, \vec{b})$ возьмем некоторую точку M_0 . Точка M лежит на плоскости σ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны и, следовательно, когда их смешанное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{M_0M} \vec{a} \vec{b} = 0 \quad (1)$$

Используя это равенство, запишем уравнение плоскости σ , заданной различными способами.

1. Уравнение плоскости, заданной точкой и направляющим подпространством.

Задача 1.

В аффинной системе координат заданы своими координатами точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее подпространство $L(\vec{a}, \vec{b})$.

Решение.

Как отмечено выше, $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1) и, следовательно, выполнено равенство

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) есть уравнение плоскости σ .

2. Уравнение плоскости, заданной тремя точками.

Задача 2.

Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, заданные своими координатами в некоторой аффинной системе координат.

Решение.

Векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ неколлинеарны и поэтому образуют базис направляющего подпространства рассматриваемой плоскости. Эту плоскость можно определить как плоскость, проходящую через данную точку M_1 и имеющую данное направляющее подпространство $L(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$. Следовательно, ее уравнение можно написать по образцу уравнения (2) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

3. Уравнение плоскости, заданной двумя точками и направляющим вектором.

Задача 3.

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и параллельной вектору $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, неколлинеарному $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение.

Векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ неколлинеарны, поэтому они образуют базис направляющего подпространства рассматриваемой плоскости. Эту плоскость можно определить как плоскость, проходящую через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (или $M_2(x_2, y_2, z_2)$) и имеющую данное направляющее подпространство $L(\vec{a}, \overrightarrow{M_1M_2})$. Следовательно, ее уравнение можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & a_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & a_2 & y_2 - y_1 \\ z - z_1 & a_3 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

4. Уравнение плоскости, заданной точкой и перпендикулярным вектором.

Определение. Вектор $\vec{n}$ называется перпендикулярным плоскости σ , если вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору из направляющего подпространства плоскости σ .

Задача 4.

В ПДСК заданы своими координатами точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n}(A, B, C)$. Написать уравнение плоскости σ , проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

Решение.

$$(M(x, y, z) \in \sigma) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0). \quad \text{Запишем}$$

последнее равенство в координатном виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (5)$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$.

5. Общее уравнение плоскости.

Любую плоскость в пространстве можно задать принадлежащей ей точкой и направляющим подпространством. Раскрывая по элементам первого столбца определитель, находящийся в левой части уравнения (2), получим уравнение плоскости в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (6)$$

$$\text{где } A = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то в уравнении (6) коэффициенты A , B и C не равны нулю одновременно и, значит, уравнение (6) – уравнение первой степени. Уравнение (6) называют **уравнением плоскости в общем виде** (или **общим уравнением плоскости**).

Замечание. Если система координат прямоугольная, то уравнением (4) также определяется плоскость (так как прямоугольная

система координат – частный случай аффинной). Но в этом случае вектор $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярен этой плоскости.

§6.2. Лемма о параллельности вектора и плоскости. Расположение плоскости относительно системы координат.

Докажем следующую лемму.

Лемма о параллельности вектора и плоскости. Пусть в аффинной системе координат задана плоскость σ общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

и вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Для того, чтобы вектор $\vec{p}$ был параллелен плоскости σ , необходимо и достаточно, чтобы

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \quad (2)$$

Доказательство. От некоторой точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ плоскости σ отложим вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{p}$ и обозначим через (x_2, y_2, z_2) координаты точки M_2 . Тогда

$$p_1 = x_2 - x_1, p_2 = y_2 - y_1, p_3 = z_2 - z_1 \quad (3)$$

Так как $M_1 \in \sigma$, то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \quad (4)$$

Пусть $\vec{p} \parallel \sigma$, тогда $M_2 \in \sigma$, поэтому

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \quad (5)$$

Из равенств (4) и (5) следует, что

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0 \quad (6)$$

или, учитывая равенства (3), получим равенство (2).

Обратно, пусть выполняется равенство (2). Подставим сюда значения p_1, p_2, p_3 из (3), получим (6). Сложив равенства (4) и (6), приходим к равенству (5). Таким образом, $M_2 \in \sigma$, т.е. $\vec{p} \parallel \sigma$.

Выясним, какие имеются особенности в расположении плоскости σ относительно системы координат, если равны нулю некоторые из чисел A, B, C, D в общем уравнении (1) этой плоскости. Возможны следующие случаи:

1) $D = 0$. В этом случае плоскость проходит через начало координат $O(0,0,0)$.

2) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$. По лемме о параллельности вектора и плоскости $\vec{e}_1(1,0,0) \parallel \sigma$. Следовательно, $\sigma \parallel (Ox)$, если $D \neq 0$ и $\sigma \supset (Ox)$, если $D = 0$.

3) $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$. В этом случае $\vec{e}_2(0,1,0) \parallel \sigma$, следовательно, $\sigma \parallel (Oy)$, если $D \neq 0$ и $\sigma \supset (Oy)$, если $D = 0$.

4) $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$. Аналогично случаям 2) и 3): $\sigma \parallel (Oz)$, если $D \neq 0$ и $\sigma \supset (Oz)$, если $D = 0$.

5) $A = 0, B = 0, C \neq 0$. По лемме о параллельности вектора и плоскости $\vec{e}_1(1,0,0) \parallel \sigma$, $\vec{e}_2(0,1,0) \parallel \sigma$, поэтому $\sigma \parallel (Oxy)$, если $D \neq 0$ и $\sigma = (Oxy)$, если $D = 0$.

Если $D \neq 0$, то уравнение (1) можно привести к виду $z = c$, где $c \neq 0$. Уравнение самой плоскости (Oxy) запишется так: $z = 0$.

6) $A = 0, B \neq 0, C = 0$. Аналогично предыдущему, $\sigma \parallel (Oxz)$, если $D \neq 0$ и $\sigma = (Oxz)$, если $D = 0$. Уравнение плоскости (Oxz) запишется так: $y = 0$.

7) $A \neq 0, B = 0, C = 0$. $\sigma \parallel (Oyz)$, если $D \neq 0$ и $\sigma = (Oyz)$, если $D = 0$. Уравнение плоскости (Oyz) : $x = 0$.

§6.3. Вычисление расстояния от точки до плоскости, расстояния между параллельными плоскостями, угла между двумя плоскостями (векторно-аналитический подход).

Изучение вопросов, указанных в названии этого параграфа, удобно проводить в ПДСК.

Задача 1. В ПДСК дана плоскость σ , заданная уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \notin \sigma$. Вычислить расстояние $\rho(M_0, \sigma)$ от точки M_0 до плоскости σ .

Решение. Расстояние $\rho(M_0, \sigma)$ есть проекция вектора $\overrightarrow{M_1 M_0}$ на вектор $\vec{n}(A, B, C)$, где $M_1 \in \sigma$, $\vec{n} \perp \sigma$ (рис. 6.3.1).

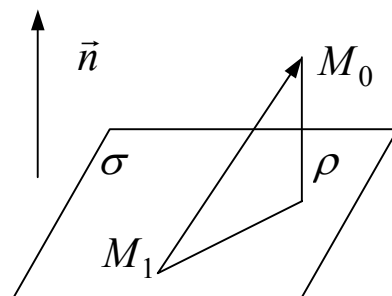


Рис. 6.3.1

$$\rho(M_0, \sigma) = np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0} = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

значит,

$$\rho(M_0, \sigma) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1)$$

(так как $M_1 \in \sigma$, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$).

Пример. В ПДСК дана плоскость $\sigma: 3x - 4y + \sqrt{11}z - 5 = 0$. Найти расстояние от начала координат до этой плоскости.

Решение.

По формуле (1) получим:

$$\rho(O, \sigma) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + \sqrt{11} \cdot 0 - 5|}{\sqrt{9 + 16 + 11}} = \frac{|-5|}{6} = \frac{5}{6}.$$

Задача 2. Вычислить расстояние $\rho(\sigma_1, \sigma_2)$ между параллельными плоскостями σ_1 и σ_2 , заданными в ПДСК уравнениями:

$$\sigma_1: Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$$

$$\sigma_2: Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0, \text{ где } D_1 \neq D_2.$$

Отметим, что плоскости σ_1 и σ_2 действительно параллельны, так как они перпендикулярны одному и тому же вектору $\vec{n}(A, B, C)$, но не совпадают ($D_1 \neq D_2$).

Решение.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma_1$. Тогда, очевидно, $\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \rho(M_0, \sigma_2)$. Поэтому, пользуясь формулой (1), получим:

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma_1$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1 = 0$. Таким образом, предыдущая формула принимает вид:

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2)$$

Задача 3. В ПДСК две пересекающиеся плоскости заданы своими уравнениями:

$$\sigma_1 : Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0,$$

$$\sigma_2 : Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0.$$

Вычислить угол между ними.

Решение.

По определению (§5.5) угол между плоскостями, измеренный в градусах, принадлежит промежутку $[0^\circ, 90^\circ]$. Так как векторы $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ перпендикулярны соответственно данным плоскостям, то для решения задачи достаточно найти $|\cos \varphi|$, где $\varphi = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$.

$$|\cos \varphi| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (3)$$

Так как $(\sigma_1 \perp \sigma_2) \Leftrightarrow (\vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0)$, то **необходимым и достаточным условием перпендикулярности** плоскостей σ_1 и σ_2 является выполнение

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

§6.4. Вычисление расстояния между двумя скрещивающимися прямыми (векторно-координатный подход).

Напомним, что расстояние между двумя множествами A_1 и A_2 есть наименьшее расстояние между любыми двумя точками этих множеств, т.е.

$$\rho(A_1, A_2) = \min\{\rho(M_1, M_2), M_1 \in A_1, M_2 \in A_2\}.$$

Скрещивающиеся прямые лежат в двух параллельных плоскостях σ_1 и σ_2 (рис. 6.4.1), расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию между плоскостями σ_1 и σ_2 :

$$\rho(l_1, l_2) = \rho(\sigma_1, \sigma_2).$$

Найдем $\rho(\sigma_1, \sigma_2)$. Возьмем любые две точки A_1 и B_1 , лежащие на прямой l_1 и две точки A_2 и B_2 , лежащие на l_2 . Тогда $\overrightarrow{A_1B_1} \parallel l_1$, $\overrightarrow{A_2B_2} \parallel l_2$. Пара векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ задает семейство параллельных плоскостей с точностью до параллельного переноса, т.е. задает вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскостям σ_1 и σ_2 .

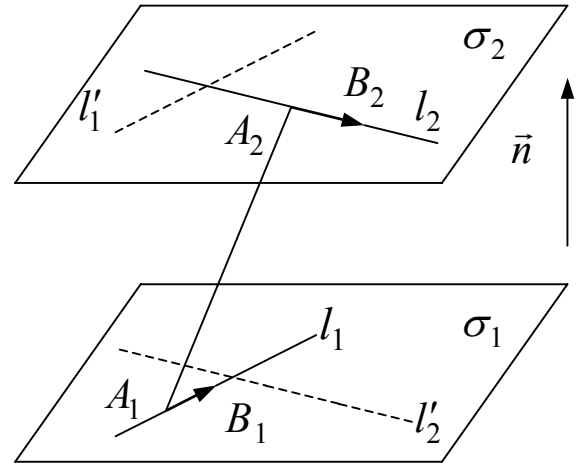


Рис. 6.4.1

Координаты (n_1, n_2, n_3) вектора $\vec{n}$ можно найти из условий:

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{A_2B_2} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (1),$$

где координаты векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ нам известны.

В координатном виде условия (1) являются системой двух линейных уравнений с тремя неизвестными n_1, n_2, n_3 . Но так как вектор $\vec{n}$ нас интересует с точностью до длины, то одну его координату, например, n_3 , можно задать произвольно. Пусть $n_3 = 1$. В случае, если система (1) не будет иметь решений при $n_3 = 1$, следует принять $n_3 = 0$. Итак, координаты вектора $\vec{n}$ найдены. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(l_1, l_2) &= \rho(\sigma_1, \sigma_2) = np_{\vec{n}} \overrightarrow{A_1A_2} = \\ &= \frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_2 - x_1)n_1 + (y_2 - y_1)n_2 + (z_2 - z_1)n_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}, \end{aligned}$$

где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

§6.5. Уравнение прямой в пространстве.

Пусть d – прямая в пространстве. Любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой, называется ее **направляющим вектором**. (Ясно, что прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, любые два из которых коллинеарны).

Положение прямой d в пространстве определяется полностью, если даны:

- а) направляющий вектор прямой d и некоторая ее точка (рис. 6.5.1),
- б) две точки прямой (рис. 6.5.2),
- в) две плоскости, пересекающиеся по прямой d (рис. 6.5.3).

Для каждого из этих способов задания прямой напомним её уравнение.

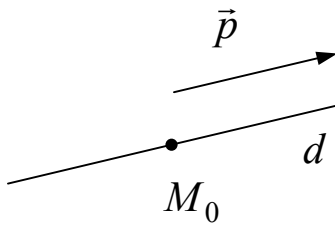


Рис. 6.5.1

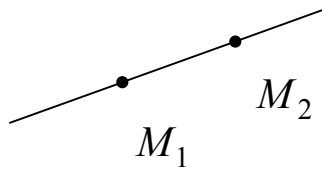


Рис. 6.5.2

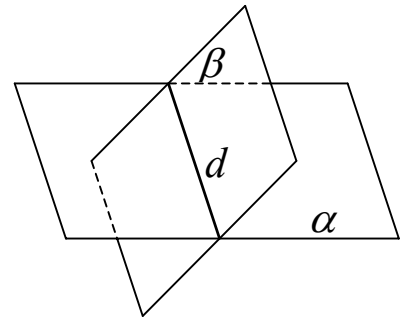


Рис. 6.5.3

1. Канонические уравнения прямой.

Пусть в пространстве выбрана аффинная система координат и в этой системе известны координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и координаты направляющего вектора $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ прямой d . Напишем уравнение прямой d .

- а) Ни одна из координат вектора $\vec{p}$ не равна нулю.

Очевидно, что $(M(x, y, z) \in d) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p})$. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Запишем условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3} \quad (1)$$

Равенства (1) являются уравнениями прямой d .

б) Пусть одна из координат вектора $\vec{p}$ равна нулю, например, $p_1 \neq 0, p_2 \neq 0, p_3 = 0$. Тогда условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ запишется так:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}, \quad z - z_0 = 0 \quad (2)$$

в) Аналогично, если равны нулю две координаты вектора $\vec{p}$, например, $p_1 \neq 0, p_2 = p_3 = 0$, то получаем:

$$y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = 0 \quad (3)$$

В этом случае прямая d параллельна оси Ox или совпадает с осью Ox (если $x_0 = z_0 = 0$). Уравнения (1), (2) или (3) называются **каноническими уравнениями прямой**.

2. Уравнения прямой, заданной двумя точками.

Пусть в некоторой аффинной системе координат известны координаты двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ прямой d . Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{p}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Для получения канонических уравнений прямой следует воспользоваться формулами (1), (2) или (3). Например, если $x_2 - x_1 \neq 0, y_2 - y_1 \neq 0, z_2 - z_1 \neq 0$, то

$$d: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (4)$$

3. Уравнение прямой, заданной двумя плоскостями.

Пусть в некоторой аффинной системе координат плоскости σ_1 и σ_2 заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

а прямая d является линией пересечения плоскостей σ_1 и σ_2 .

Точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой d тогда и только тогда, когда ее координаты являются решениями системы уравнений (5).

Для того чтобы найти каноническое уравнение прямой, заданной уравнениями (5), надо найти координаты какой-нибудь точки M_0 этой прямой и некоторого направляющего вектора $\vec{p}$. Точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ следует выбрать так, чтобы ее координаты удовлетворяли системе линейных уравнений (5). Для нахождения

координат направляющего вектора воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Если в аффинной системе координат прямая задана уравнениями (5), то вектор $\vec{p} \left(\left| \begin{smallmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{smallmatrix} \right|, \left| \begin{smallmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{smallmatrix} \right|, \left| \begin{smallmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{smallmatrix} \right| \right)$ является направляющим вектором этой прямой.

Доказательство. Пусть σ_1 и σ_2 – плоскости, заданные уравнениями (5), а d – данная прямая. По лемме о параллельности вектора плоскости (§6.2) $\vec{p} \parallel \sigma_1$ и $\vec{p} \parallel \sigma_2$, поэтому $\vec{p} \parallel d$. Вектор $\vec{p}$ ненулевой, поэтому он является направляющим вектором прямой d . Лемма доказана.

Пример. Написать канонические уравнения прямой, которая в аффинной системе координат задана системой уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + y - z + 6 = 0 \end{cases} \quad (6).$$

Решение. Сначала выберем какую-нибудь точку на данной прямой. В данном случае коэффициенты при x и y не пропорциональны, поэтому придадим z произвольное значение, например, $z_0 = 0$ и найдем из системы (6): $x_0 = -1$, $y_0 = -4$. Точка $M_0(-1; -4; 0)$ лежит на прямой d .

Координаты направляющего вектора $\vec{p}$ прямой найдем, используя лемму:

$$\vec{p} \left(\left| \begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix} \right|, \left| \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix} \right|, \left| \begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \right| \right) \text{ или } \vec{p} = (-1; 5; 3).$$

Итак, канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{3}.$$

4. Параметрические уравнения прямой.

Выберем какую-нибудь аффинную систему координат и зададим прямую d направляющим вектором $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Точка $M(x, y, z)$ пространства лежит на прямой d тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, т.е. когда существует такое $t \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}$. Запишем это соотношение в координатах:

$$x - x_0 = tp_1, y - y_0 = tp_2, z - z_0 = tp_3 \text{ или}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t, \\ y = y_0 + p_2 t, \\ z = z_0 + p_3 t. \end{cases} \quad (7)$$

Эти равенства называются **параметрическими уравнениями прямой**, а t – **параметром**. Их смысл заключается в следующем: при любых $t \in \mathbb{R}$ точка $M(x, y, z)$, координаты которой удовлетворяют условиям (7), лежит на прямой d . Обратно, если $M(x, y, z) \in d$, то существует $t \in \mathbb{R}$, такое, что x , y и z выражаются через $x_0, y_0, z_0, p_1, p_2, p_3$ при помощи равенств (7).

§6.6. Взаимное расположение прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Если прямая d задана точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{p}$, то будем обозначать это так: $d = (M_0, \vec{p})$.

1. Взаимное расположение двух прямых.

Пусть в пространстве даны прямые d_1 и d_2 , $d_1 = (M_1, \vec{p}_1)$ и $d_2 = (M_2, \vec{p}_2)$. По векторам $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ можно определить взаимное расположение данных прямых. Возможны четыре случая:

- 1) прямые скрещиваются,
- 2) прямые пересекаются,
- 3) прямые параллельны,
- 4) прямые совпадают.

Заметим, что прямые d_1 и d_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ компланарны и, значит, имеет место равенство:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \vec{p}_1 \vec{p}_2 = 0 \quad (1)$$

- 1) Если прямые скрещиваются (рис. 6.6.1), то не существует плоскости, содержащей обе эти прямые. Следовательно, прямые d_1 и d_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \vec{p}_1 \vec{p}_2 \neq 0 \quad (2)$$

- 2) Прямые d_1 и d_2 пересекаются (рис. 6.6.2) тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \vec{p}_1 \vec{p}_2 = 0 \text{ и } \vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2 \quad (3)$$

3) Прямые d_1 и d_2 параллельны (рис. 6.6.3) тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \nparallel \vec{p}_1 \text{ и } \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \quad (4)$$

4) Прямые d_1 и d_2 совпадают тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \vec{p}_1 \text{ и } \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \quad (5)$$

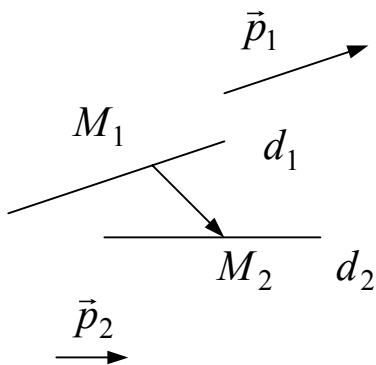


Рис. 6.6.1

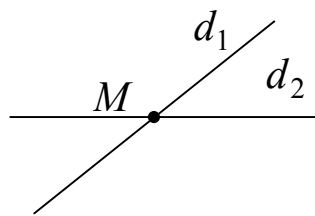


Рис. 6.6.2

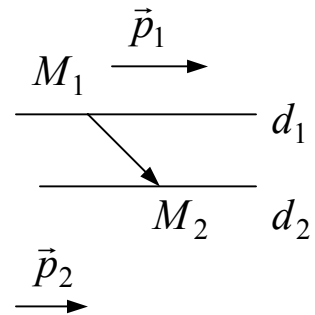


Рис. 6.6.3

Пример. Выяснить взаимное расположение двух прямых, заданных в аффинной системе координат каноническими уравнениями:

$$d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}, \quad d_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8}{4}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} d_1: M_1(2;-1;1) \in d_1, \quad \vec{p}_1(1;2;3) \parallel d_1, \\ d_2: M_2(5;2;8) \in d_2, \quad \vec{p}_2(2;1;4) \parallel d_2, \quad \overrightarrow{M_1 M_2} = (3;3;7), \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \vec{p}_1 \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{следовательно, прямые } d_1 \text{ и } d_2$$

лежат в одной плоскости. Кроме того, $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$, так как $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{4}$.
 Делаем вывод: прямые d_1 и d_2 пересекаются.

2. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Пусть $d = (M_0, \vec{p})$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$. Плоскость σ задана уравнением:

$Ax + By + Cz + D = 0$ в аффинной системе координат. Возможны следующие случаи их взаимного расположения:

- 1) прямая пересекает плоскость (рис. 6.6.4),
- 2) прямая параллельна плоскости (рис. 6.6.5),
- 3) прямая лежит в плоскости (рис. 6.6.6).

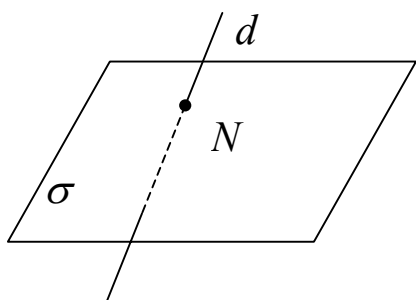


Рис. 6.6.4

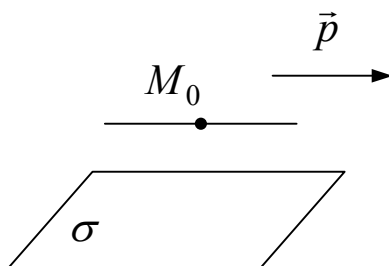


Рис. 6.6.5

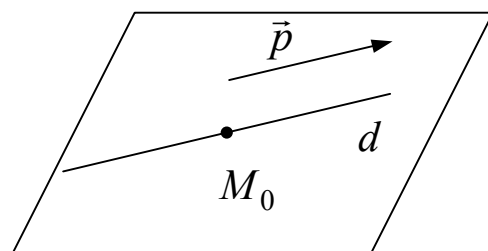


Рис. 6.6.6

Рассмотрим эти случаи.

- 1) $(d \cap \sigma = N) \Leftrightarrow (\vec{p} \nparallel \sigma)$, т.е. когда

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 \neq 0 \quad (6)$$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямой и плоскости, надо решить систему, состоящую из уравнений прямой и уравнения плоскости.

- 2) $(d \parallel \sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p} \parallel \sigma, \\ M_0 \notin \sigma, \end{cases}$

т.е. когда

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$3) (d \subset \sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p} \parallel \sigma, \\ M_0 \in \sigma, \end{cases}$$

т.е. когда

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Пример.

Выяснить взаимное расположение прямой d и плоскости σ , заданных в аффинной системе координат уравнениями:

$$d: \frac{x}{10} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-6}, \quad \sigma: 3x + 6y + z - 8 = 0.$$

Решение.

По каноническим уравнениям прямой найдем точку $M_0(0; -1; 3)$ на данной прямой и $\vec{p}(10; -4; -6)$, $\vec{p} \parallel d$. Имеем

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 3 \cdot 10 + 6 \cdot (-4) + 1 \cdot (-6) = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 3 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 - 8 \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, выполнены соотношения (7), т.е. $d \parallel \sigma$.

§6.7. Вычисление угла между двумя прямыми, угла между прямой и плоскостью (векторно-координатный подход).

Вычисление углов, указанных в названии этого параграфа, носит метрический (измерительный) характер, поэтому эти задачи удобно решать в ПДСК.

1. Вычисление угла между двумя прямыми.

Пусть в пространстве даны две скрещивающиеся прямые d_1 и d_2 . Возьмем произвольную точку A пространства и проведем через нее прямые d'_1 и d'_2 , соответственно параллельные прямым d_1 и d_2 (рис. 6.7.1).

Прямые d'_1 и d'_2 образуют две пары вертикальных углов. Напомним, что величина наименьшего из этих углов называется **углом между пересекающимися прямыми** d'_1 и d'_2 . Этот же угол называется также **углом между скрещивающимися прямыми** d_1 и d_2 .

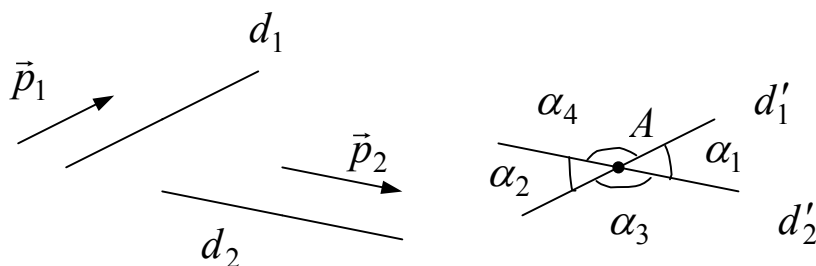


Рис. 6.7.1

Если $\vec{p}_1 \parallel d_1$, $\vec{p}_2 \parallel d_2$, то угол α между этими прямыми вычисляется по формуле:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}.$$

Отсюда получаем **условие перпендикулярности двух прямых**:

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0.$$

Напомним, что две взаимно перпендикулярные прямые в пространстве могут быть как скрещивающимися, так и пересекающимися.

2. Вычисление угла между прямой и плоскостью.

Если прямая d не перпендикулярна плоскости σ , то углом между прямой d и плоскостью σ называется острый угол между прямой d и ее ортогональной проекцией на плоскость σ . Если же прямая перпендикулярна плоскости, то угол между прямой и плоскостью считается равным 90° .

Предположим, что прямая d пересекает плоскость σ и не перпендикулярна ей. Пусть в ПДСК прямая d имеет направляющий вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, а плоскость – уравнение

$Ax + By + Cz + D = 0$. Найдем угол φ между прямой d и плоскостью σ . Вектор $\vec{n}(A, B, C) \perp \sigma$, поэтому нетрудно выразить угол φ через угол

$\theta = \angle(\vec{n}, \vec{p})$. Действительно, так как φ – острый угол между прямой d и ее проекцией d' на плоскость σ , то $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, если угол θ острый (рис. 6.7.2), и $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$, если угол θ тупой (рис. 6.7.3).

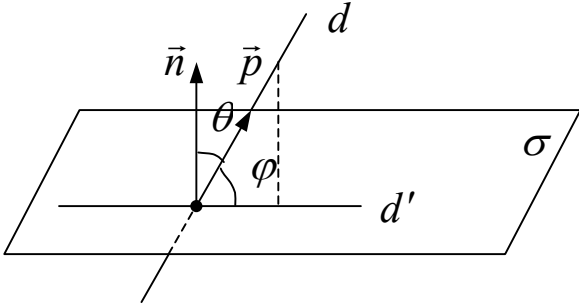


Рис. 6.7.2

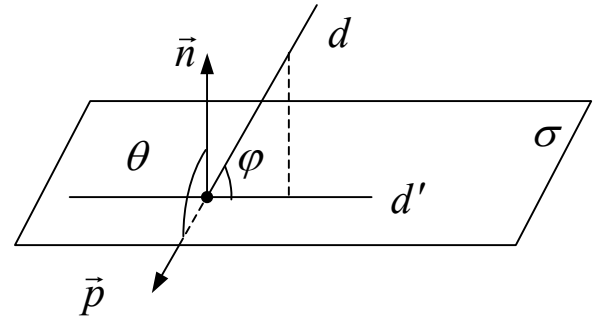


Рис. 6.7.3

Таким образом, $\sin \varphi = \cos \theta$, если $\cos \theta > 0$ и $\sin \varphi = -\cos \theta$, если $\cos \theta < 0$, (т.к. $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = -\sin \varphi$). Отсюда следует, что $\sin \varphi = |\cos \theta|$. Поэтому

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$$

или

$$\sin \varphi = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}.$$

Приложение 1. Аксиомы стереометрии.

При изложении нашего курса геометрии мы исходим из системы аксиом, положенной в основу курса геометрии в учебниках Л. С. Атанасяна и др. Эта система аксиом по сравнению с системой аксиом Гильберта несколько ослаблена по методически соображениям. В частности, в школьный курс введены некоторые дополнительные предложения в виде аксиом.

Первая группа аксиом характеризует взаимное расположение точек, прямых и плоскостей.

1. На каждой прямой и в каждой плоскости имеются точки.
2. Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой, и по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.
3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.
4. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
5. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.
7. Из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими.

Иногда вместо слов «точка B лежит между точками A и C » говорят, что точки A и C лежат по разные стороны от точки B , или точки A и B лежат по одну сторону от точки C (аналогично точки B и C лежат по одну сторону от точки A).

8. Каждая точка O прямой разделяет ее на две части – два луча – так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O , а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O .

Напомним, что отрезком AB называется геометрическая фигура, состоящая из точек A и B и всех точек прямой AB , лежащих между ними. Если отрезок AB и прямая a лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a . Если же отрезок AB пересекается с прямой a в некоторой точке, лежащей между A и B , то говорят, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a .

9. Каждая прямая a , лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и

той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a , а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a .

Если отрезок не имеет общих точек с данной плоскостью, то говорят, что концы отрезка лежат по одну сторону от плоскости; если же отрезок пересекается с плоскостью в некоторой своей внутренней точке, то говорят, что концы отрезка лежат по разные стороны от плоскости.

10. Каждая плоскость α разделяет пространство на две части (два полупространства) так, что любые две точки одного и того же полупространства лежат по одну сторону от плоскости α , а любые две точки разных полупространств лежат по разные стороны от плоскости α .

При этом точки плоскости α принадлежат ни одному из указанных полупространств. Плоскость α называется границей каждого полупространства.

Следующая группа аксиом относится к понятиям наложения и равенства фигур. Под наложением мы понимаем отображение пространства на себя. Однако не всякое отображение пространства называется наложением. Наложения – это такие отображения пространства на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах 11-17. В формулировках этих аксиом используется понятие равенства фигур, которое определяется так: пусть Φ и Φ_1 – две фигуры; если существует наложение, при котором фигура Φ отображается на фигуру Φ_1 , то мы говорим, что фигуру Φ можно совместить наложением с фигурой Φ_1 или что фигура Φ равна фигуре Φ_1 .

11. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

12. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

13. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

14. Два равных угла hk и h_1k_1 , лежащие в плоскостях, являющихся границами полупространств P и P_1 , можно совместить наложением так, что при этом совместятся полупространства P и P_1 , причем это

можно сделать двумя способами: в одном совместятся лучи h и h_1 , k и k_1 , а в другом – лучи h и k_1 , k и h_1 .

15. Любая фигура равна самой себе.

16. Если фигура Φ равна фигуре Φ_1 , то фигура Φ_1 равна фигуре Φ .

17. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2 , а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3 , то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3 .

Следующие две аксиомы связаны с измерением отрезков. Прежде чем их сформулировать, напомним, как измеряются отрезки. Пусть AB – измеряемый отрезок, а PQ – выбранная единица измерения отрезков. На луче AB отложим отрезок $AA_1 = PQ$, на луче A_1B – отрезок $A_1A_2 = PQ$ и т. д. до тех пор, пока точка A_n не совпадет с точкой B , либо точка B не окажется лежащей между A_n и A_{n+1} . В первом случае говорят, что длина отрезка AB при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке AB n раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка AB при единице измерения PQ приближенно выражается числом n . Для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB . Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то ее также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Мы утверждаем, что таким способом можно измерить любой отрезок, т.е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Это утверждение кратко сформулируем так:

18. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

Кроме того, мы принимаем аксиому существования отрезка данной длины.

19. При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

И, наконец, последняя аксиома в стереометрии, как и в планиметрии, есть аксиома параллельных прямых.

20. В любой плоскости через точку, не лежащую на данной прямой этой плоскости, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Приложение 2. Векторное и смешанное произведения векторов.

В этом приложении в качестве ориентации пространства выбираем класс всех правых базисов, поэтому все правые базисы (некомпланарные упорядоченные правые тройки векторов) положительны.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. От некоторой точки M пространства отложим векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$ и построим параллелограмм $MACB$ так, чтобы отрезки MA и MB были его смежными сторонами (рис. П.1). Этот параллелограмм называют **параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$** . В зависимости от выбора точки M на данных векторах можно построить бесконечное множество параллелограммов, но все они равны друг другу, поэтому имеют одну и ту же площадь.

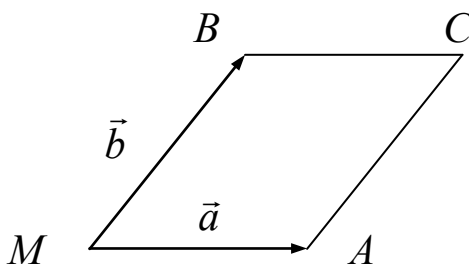


Рис. П.1

Определение. *Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, взятых в данном порядке, называется вектор $\vec{p}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах; этот вектор перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен так, что тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}\}$ является положительной, т.е. является правой. Векторное произведение коллинеарных векторов считается равным нулю.*

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $[\vec{a}\vec{b}]$, $[\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$.

Основные свойства векторного произведения векторов сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1. Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и произвольного числа α имеют место следующие равенства:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$,
2. $[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{a}, \alpha\vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$,
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$,
4. Для $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$: $(\vec{a} \parallel \vec{b}) \Leftrightarrow ([\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0})$.

Доказательство: Свойства 1 и 2 вытекают непосредственно из определения векторного произведения.

Свойство 3 будет доказано ниже, после свойств смешанного произведения векторов.

Часть свойства 4, касающаяся равенства нулю векторного произведения для коллинеарных векторов, следует из определения. Осталось доказать коллинеарность ненулевых векторов, векторное произведение которых равно нулю. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. Поскольку площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$, то из равенства нулю векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, а сам угол равен нулю или 180° . Это и означает, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Теорема доказана.

Определение. Число $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$ называется **смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$** .

Таким образом, чтобы вычислить смешанное произведение, следует первый вектор, т.е. $\vec{a}$, умножить векторно на $\vec{b}$, после чего результат скалярно умножить на $\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ обозначают так: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некопланарные векторы. От некоторой точки M пространства отложим вектора $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$ и построим параллелепипед $MADBCA_1D_1B_1$ так, чтобы отрезки MA , MB и MC были ребрами этого параллелепипеда (рис. II.2). Его назовем **параллелепипедом, построенным на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$** . Заметим, что в зависимости от выбора точки M на данных векторах можно построить бесконечное множество параллелепипедов, но все они равны друг другу, поэтому имеют один и тот же объем.

Теорема 2. Модуль смешанного произведения некопланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Если $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – положительная (правая) тройка, то $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) > 0$, если $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – отрицательная (левая) тройка, то $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) < 0$.

Доказательство: Рассмотрим параллелепипед $MADBSCA_1D_1B_1$, построенный на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Пусть θ – угол между векторами $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $\vec{c}$, $C' \in (ABM)$, $CC' \perp (ABM)$. Тогда $\angle MCC'$ равен либо θ , если вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ направлен как на рисунке П.2, либо $\pi - \theta$, если $[\vec{a}, \vec{b}]$ направлен в противоположную сторону (рис. П.3). В обоих случаях из треугольника MCC' находим, что $CC' = |\vec{c}| \cdot |\cos \theta|$.

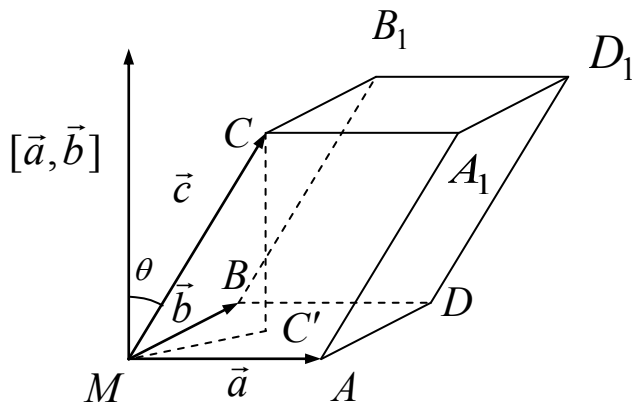


Рис.П.2

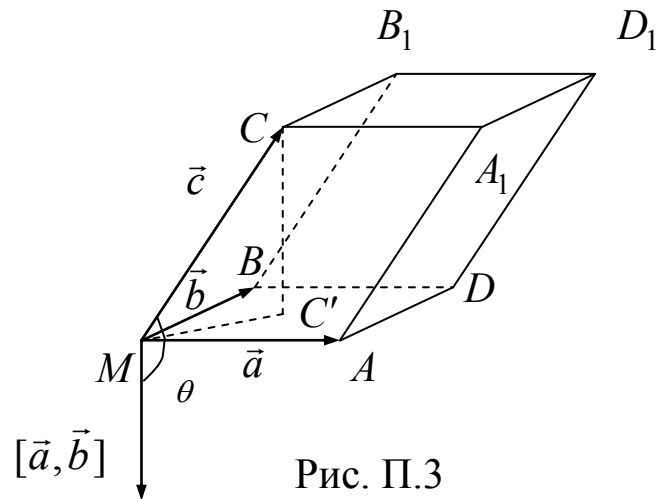


Рис. П.3

По определению векторного произведения $S_{MADB} = |[\vec{a}, \vec{b}]|$, следовательно, объем V параллелепипеда равен $V = S_{MADB} \cdot CC' = |[\vec{a}, \vec{b}]| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos \theta| = |[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}| = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$.

Знак $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ определяется знаком $\cos \theta$. Ясно, что если $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – правая тройка (рис. П.2), то $\cos \theta > 0$, если $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – левая тройка (рис. П.3), то $\cos \theta < 0$. Теорема доказана.

Теорема 3. Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и произвольного числа α имеют место следующие равенства:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$,
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$,
3. $(\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\vec{a}\vec{b}(\alpha\vec{c}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$,
4. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$, $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$,
 $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$.

Доказательство:

1. Свойство 1 следует из теоремы 2, поскольку модуль смешанного произведения при перестановке сомножителей остается тем же, знак определяется наименованием тройки сомножителей (т.е. правая тройка или левая), а тройки $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$, $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$ имеют одинаковое наименование.

2. По определению смешанного произведения имеем

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} =$$

$$= (-[\vec{b}, \vec{a}]) \cdot \vec{c} = (\text{по свойству 1 векторного произведения})$$

$$= -([\vec{b}, \vec{a}] \cdot \vec{c}) = (\text{по свойству 2 скалярного произведения})$$

$$= -\vec{b}\vec{a}\vec{c} \quad (\text{по определению смешанного произведения}).$$

Для доказательства двух других утверждений из свойства 2 используем сначала свойство 1:
 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$, а затем доказательство проводится аналогично предыдущему.

3. По определению смешанного произведения имеем

$$(\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c} = [\alpha\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} =$$

$$= (\alpha[\vec{a}, \vec{b}]) \cdot \vec{c} = (\text{применили свойство 2 векторного произведения})$$

$$= \alpha([\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}) = (\text{по свойству 2 скалярного произведения})$$

$$= \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \quad (\text{по определению смешанного произведения}).$$

Аналогично,

$$\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c} = [\vec{a}, \alpha\vec{b}] \cdot \vec{c} = (\text{по определению смешанного произведения})$$

$$= (\alpha[\vec{a}, \vec{b}]) \cdot \vec{c} = (\text{по свойству 2 векторного произведения})$$

$$= \alpha([\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}) = (\text{по свойству 2 скалярного произведения})$$

$$= \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \quad (\text{по определению смешанного произведения}).$$

И, наконец,

$$\vec{a}\vec{b}(\alpha\vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot (\alpha\vec{c}) = (\text{по определению смешанного произведения})$$

$$= \alpha([\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}) = (\text{по свойству 2 скалярного произведения})$$

$$= \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \quad (\text{по определению смешанного произведения}).$$

4. Доказательство 4 свойства начнем с последнего из трех входящих в него равенств:

$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot (\vec{c} + \vec{d}) =$ (применили определение смешанного произведения)
 $= [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} + [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{d} =$ (по свойствам 1 и 3 скалярного произведения)
 $= \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$ (по определению смешанного произведения).

Далее $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{c}\vec{d}(\vec{a} + \vec{b}) =$ (свойство 1 смешанного произведения)
 $= \vec{c}\vec{d}\vec{a} + \vec{c}\vec{d}\vec{b} =$ (по уже доказанному выше утверждению из свойства 4)
 $= \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$ (по свойству 1 смешанного произведения).

Наконец, $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{d}\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) =$ (свойство 1 смешанного произведения)
 $= \vec{d}\vec{a}\vec{b} + \vec{d}\vec{a}\vec{c} =$ (по уже доказанному выше утверждению из свойства 4)
 $= \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$ (по свойству 1 смешанного произведения).

Теорема доказана.

Теорема 4. (Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов)

Для того, чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

Доказательство: Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, т.е. $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$. Тогда либо один из сомножителей – нулевой вектор, либо $\cos \theta = 0$, где θ – угол между векторами $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $\vec{c}$.

Если $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$, то по свойству 4 векторного произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, поэтому $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны (теоремы 1,2 §3.4).

Если $\vec{c} = \vec{0}$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны (свойство 3 §3.4).

В случае, когда $\cos \theta = 0$, вектор $\vec{c}$ параллелен той же плоскости, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, следовательно $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Тогда по теореме 2 §3.4 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависимы, т.е. существуют числа α , β , γ , не все равные нулю одновременно, что выполняется равенство: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Пусть для определенности именно $\alpha \neq 0$, тогда можно выразить вектор $\vec{a}$ через $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c} = \mu\vec{b} + \nu\vec{c}, \text{ где } \mu = -\frac{\beta}{\alpha}, \nu = -\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Подставив выражение для $\vec{a}$ и применив свойства 4, 3, 2 смешанного произведения, получим

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\mu\vec{b} + \nu\vec{c})\vec{b}\vec{c} = \mu(\vec{b}\vec{b}\vec{c}) + \nu(\vec{c}\vec{b}\vec{c}) = \mu(\vec{b}\vec{b}\vec{c}) - \nu(\vec{c}\vec{c}\vec{b}) = 0.$$

Действительно, $\vec{b}\vec{b}\vec{c} = [\vec{b}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$, поскольку $[\vec{b}, \vec{b}] = \vec{0}$ (аналогично и $\vec{c}\vec{c}\vec{b} = 0$).

Теперь докажем свойство 3 векторного произведения. Выберем ортонормированный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и рассмотрим смешанное произведение $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{e}_i$, где $i = 1, 2, 3$. Воспользовавшись свойством 4 смешанного произведения, получаем: $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{e}_i = \vec{a}\vec{c}\vec{e}_i + \vec{b}\vec{c}\vec{e}_i$. Значит, $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] \cdot \vec{e}_i = [\vec{a}, \vec{c}] \cdot \vec{e}_i + [\vec{b}, \vec{c}] \cdot \vec{e}_i$ (применили определение смешанного произведения и свойство 3 скалярного произведения). Полученные равенства означают, что в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ равны координаты векторов $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}]$ и $[\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.

Действительно, пусть $\vec{d} = d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3$. Умножая скалярно это равенство на $\vec{e}_1$, получим $d_1 = \vec{e}_1\vec{d}$. Умножив на $\vec{e}_2$, получим $d_2 = \vec{e}_2\vec{d}$, при умножении на $\vec{e}_3$ получим $d_3 = \vec{e}_3\vec{d}$. Из единственности разложения по базису вытекает, что векторы $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}]$ и $[\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ равны. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – правый ортонормированный базис, в котором $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, тогда

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \quad (1)$$

Доказательство: воспользуемся линейностью векторного произведения:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}] = a_1b_1[\vec{i}, \vec{i}] + a_1b_2[\vec{i}, \vec{j}] + a_1b_3[\vec{i}, \vec{k}] + a_2b_1[\vec{j}, \vec{i}] + a_2b_2[\vec{j}, \vec{j}] + a_2b_3[\vec{j}, \vec{k}] + a_3b_1[\vec{k}, \vec{i}] + a_3b_2[\vec{k}, \vec{j}] + a_3b_3[\vec{k}, \vec{k}]$$

Если $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – правый ортонормированный базис, то, пользуясь определением векторного произведения, легко показать, что $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$, $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$.

Кроме того, $[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}$,

$$[\vec{i}, \vec{j}] = -[\vec{j}, \vec{i}], [\vec{j}, \vec{k}] = -[\vec{k}, \vec{j}], [\vec{k}, \vec{i}] = -[\vec{i}, \vec{k}].$$

Итак, $[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$.

Теорема доказана.

Формулу (1) можно записать в удобном для запоминания виде:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Если стоящий в правой части «определитель» разложить по первой строке, то получим формулу (1).

План лекций

Лекция 1.

Неопределяемые понятия и аксиомы стереометрии. Простейшие следствия из аксиом. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Определение скрещивающихся прямых. Доказательство признака скрещивающихся прямых.

Лекция 2.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Определение параллельности прямой и плоскости. Доказательство признака параллельности прямой и плоскости. Доказательство теоремы о линии пересечения. Следствия из теоремы о линии пересечения. Определение параллельных плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

Лекция 3.

Определение направленного отрезка и вектора. Понятие противоположных, одинаково (противоположно) направленных, равных направленных отрезков и векторов. Длина вектора. Линейные операции над векторами в пространстве. Правила треугольника, параллелограмма, ломаной и параллелепипеда сложения векторов. Свойства умножения вектора на число. Определение коллинеарных векторов. Теорема о коллинеарных векторах. Определение компланарных векторов. Доказательство признака компланарности векторов. Теорема о компланарных векторах. Понятие линейной комбинации векторов. Определения линейно зависимой и линейно независимой систем векторов.

Лекция 4.

Доказательство свойств системы линейно зависимых векторов. Геометрический смысл линейной зависимости двух и трех векторов (доказательства). Доказательство теоремы о разложении вектора по трем некомпланарным векторам. Следствие (доказательство). Определение базиса на плоскости и в пространстве. Определение координат вектора в базисе. Определение аффинной системы координат, координатных осей и координатных плоскостей. Понятие радиус-вектора точки и координат точки в системе координат.

Лекция 5.

Координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число. Понятие угла между параллельными, пересекающимися и скрещивающимися прямыми. Доказательство того, что величина угла между двумя скрещивающимися прямыми не зависит от выбора пары

пересекающихся прямых, параллельных им. Определение угла между двумя векторами в пространстве. Определения ортонормированного базиса и прямоугольной декартовой системы координат (ПДСК). Вывод формулы для вычисления длины вектора, заданного своими координатами в ортонормированном базисе. Вывод формулы для вычисления расстояния между двумя точками, заданными своими координатами в ПДСК. Определение скалярного произведения векторов. Вывод формулы для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.

Лекция 6.

Условие перпендикулярности двух векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе. Вычисление косинуса угла между ненулевыми векторами, заданными координатами в ортонормированном базисе. Доказательство основных свойств скалярного произведения векторов. Специфические свойства скалярного произведения векторов. Определение проекции вектора на вектор. Доказательство свойств проекции вектора на вектор.

Лекция 7.

Деление отрезка в данном отношении. Вывод формулы для вычисления координат точки, делящей направленный отрезок в данном отношении. Простое отношение трех точек. Доказательства признаков коллинеарности двух и компланарности трех векторов, заданных своими координатами в произвольном базисе. Понятие правого и левого базисов. Понятие ориентированного пространства. Положительные и отрицательные базисы. Определение смешанного произведения трех векторов. Формула для вычисления смешанного произведения трех векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе (без вывода). Доказательство основных свойств смешанного произведения векторов. Применение смешанного произведения векторов для вычисления объема тетраэдра. Определение векторного произведения двух векторов. Доказательство теоремы о связи между смешанным, векторным и скалярным произведениями векторов. Следствие из этой теоремы.

Лекция 8.

Вывод формулы для вычисления векторного произведения двух векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе. Доказательство основных свойств векторного произведения векторов.

Применение векторного произведения векторов для вычисления площади треугольника.

Лекция 9.

Уравнение плоскости: 1) заданной точкой и направляющим подпространством, 2) тремя точками, 3) точкой и перпендикулярным вектором, 4) общее уравнение плоскости. Лемма о параллельности вектора плоскости. Расположение плоскости относительно системы координат.

Лекция 10.

Вычисление расстояния от точки до плоскости, расстояния между параллельными плоскостями, угла между двумя плоскостями. Вычисление расстояния между двумя скрещивающимися прямыми (векторно-координатный подход). Уравнение прямой в пространстве (каноническое уравнение прямой; уравнение прямой, заданной двумя точками; уравнение прямой, заданной двумя плоскостями; параметрические уравнения прямой).

Лекция 11.

Взаимное расположение прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Вычисление угла между двумя прямыми, угла между прямой и плоскостью (векторно-координатный подход).

Лекция 12.

Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости (доказательство). Теорема о трех перпендикулярах (доказательство). Определение угла между наклонной и плоскостью. Расстояние между фигурами: расстояние от точки до плоскости (доказательство того, что расстояние от точки до плоскости равно расстоянию от этой точки до ее ортогональной проекции на плоскость); расстояние между скрещивающимися прямыми. Доказательство существования и единственности общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых. Доказательство того, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Лекция 13.

Доказательство теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника. Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей. Свойства перпендикулярных плоскостей.

Литература

1. Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. Геометрия, часть 1. – М., Просвещение, 1986.
2. Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Л.С. Киселева, Э.Г. Позняк. Геометрия. Учебник для 10-11 классов средней школы. – М., Просвещение, 1993.
3. Д.В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М., Наука, 1987.
4. В.Г. Болтянский. Элементарная геометрия. Книга для учителя. – М., Просвещение, 1985.
5. А.Ю. Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия. 10-11. – М., Изд-во МФТИ, 1996.
6. А.В. Погорелов. Геометрия. – М., Наука, 1984.

Содержание

Некоторые пояснения.	3
Глава 1. Введение в стереометрию.	5
§1.1. Предмет стереометрии.	5
§1.2. Аксиомы стереометрии.	7
§1.3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые.	9
Глава 2. Параллельность в пространстве.	
§2.1. Прямая и плоскость в пространстве. Признак параллельности.	11
§2.2. Параллельность плоскостей. Признак параллельности и свойства параллельных плоскостей.	12
Глава 3. Элементы векторной алгебры в пространстве.	
§3.1. Определения направленного отрезка и вектора в пространстве.	15
§3.2. Линейные операции над векторами в пространстве.	17
§3.3. Коллинеарность и компланарность векторов.	19
§3.4. Линейная зависимость векторов. Геометрический смысл линейной зависимости двух и трех векторов.	21
§3.5. Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.	23
§3.6. Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора в базисе. Система координат. Координаты точки в системе координат.	25
§3.7. Координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число.	27
§3.8. Угол между прямыми. Угол между векторами. Понятие ортонормированного базиса и прямоугольной декартовой системы координат.	28
§3.9. Длина вектора, заданного координатами в ортонормированном базисе. Расстояние между двумя точками, заданными своими координатами в прямоугольной декартовой системе координат.	30
§3.10. Определение скалярного произведения векторов. Теорема о вычислении скалярного произведения двух векторов,	

заданных своими координатами в ортонормированном базисе.	31
§3.11. Свойства скалярного произведения векторов.	33
§3.12. Проекция вектора на вектор.	34
§3.13. Деление отрезка в данном отношении.	35
§3.14. Признаки коллинерности и компланарности векторов, заданных своими координатами в некотором базисе.	38
§3.15. Правые и левые тройки векторов. Понятие ориентации пространства. Положительные и отрицательные базисы.	41
§3.16. Смешанное произведение векторов. Объем тетраэдра.	42
§3.17. Векторное произведение двух векторов.	45
 Глава 4. Методы изображений.	
§4.1. Параллельное и центральное проектирование.	50
§4.2. Изображение плоских фигур в параллельной проекции.	51
§4.3. Первоначальное понятие о многогранниках.	53
§4.4. Изображение многогранников в параллельной проекции.	54
 Глава 5. Перпендикулярность в пространстве.	
§5.1. Перпендикулярность прямой и плоскости.	55
§5.2. Теорема о трех перпендикулярах.	57
§5.3. Расстояние между фигурами.	58
§5.4. Площадь ортогональной проекции многоугольника.	62
§5.5. Двугранный угол и его измерение.	64
§5.6. Угол между двумя плоскостями. Перпендикулярность плоскостей.	65
 Глава 6. Метод координат в пространстве. Уравнения прямых и плоскостей.	
§6.1. Уравнение плоскости.	67
§6.2. Лемма о параллельности вектора и плоскости. Расположение плоскости относительно системы координат.	70
§6.3. Вычисление расстояния от точки до плоскости, расстояния между параллельными плоскостями, угла между двумя плоскостями (векторно-аналитический подход).	71
§6.4. Вычисление расстояния между двумя скрещивающимися прямыми (векторно-координатный подход).	73
§6.5. Уравнение прямой в пространстве.	75
§6.6. Взаимное расположение прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.	78

§6.7. Вычисление угла между двумя прямыми, угла между прямой и плоскостью (векторно-координатный подход).	81
Приложение 1. Аксиомы стереометрии.	84
Приложение 2. Векторное и смешанное произведения векторов.	87
План лекций.	94
Литература.	97