



Основные определения, теоремы и формулы планиметрии.

Обозначения:

$\triangle ABC$ — треугольник с вершинами A, B, C . $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ — его стороны, соответственно, медиана, биссектриса, высота, проведенные к стороне a , P - периметр,

$p = \frac{P}{2}$ — полупериметр, R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей.

S -- площадь фигуры, d_1, d_2 — диагонали четырехугольника,

$(\widehat{a, b})$ — угол между прямыми a и b ;

$\parallel, \perp, \sim$ — знаки, параллельности, перпендикулярности, подобия соответственно.

O — определение, T — теорема.

T—1. (Признаки параллельности прямых, рис. (6).

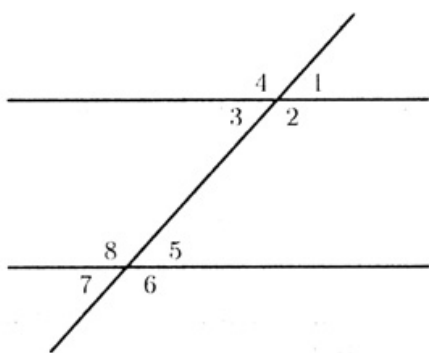


Рис. 6

Две прямые параллельны, если:

- внутренние накрест лежащие углы равны: $\angle 3 = \angle 5$;
- внешние накрест лежащие УГЛЫ равны: $\angle 1 = \angle 7$;
- соответственные углы равны: $\angle 1 = \angle 5$;
- сумма внутренних односторонних углов равна 180° : $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$;
- сумма внешних односторонних углов равна 180° : $\angle 1 + \angle 6 = 180^\circ$.

O-1. $\triangle A_1B_1C_1' \sim \triangle ABC$ (k - коэффициент подобия), если их стороны пропорциональны, а соответственные углы равны (рис. 7):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k, \\ \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1.$$

T—2 (признаки подобия). Два треугольника подобны, если:

- два угла одного $\triangle$ равны двум углам другого $\triangle$;
- две стороны одного $\triangle$ пропорциональны двум сторонам другого $\triangle$, а углы, заключенные между этими сторонами, равны;
- три стороны одного $\triangle$ пропорциональны трем сторонам другого $\triangle$.

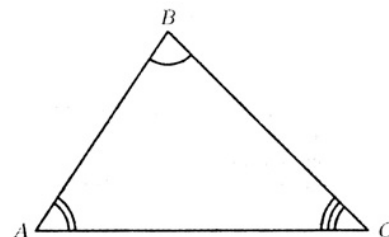
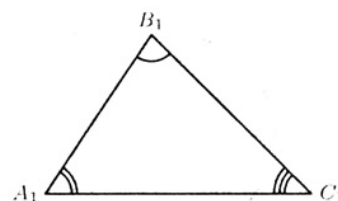


Рис. 7

Т—3. В подобных треугольниках пропорциональны все их линейные элементы (с одним и тем же k): стороны, медианы, биссектрисы, высоты, радиусы вписанных и описанных окружностей и пр.

Т—4 (Фалеса). Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки (рис. 8):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots$$

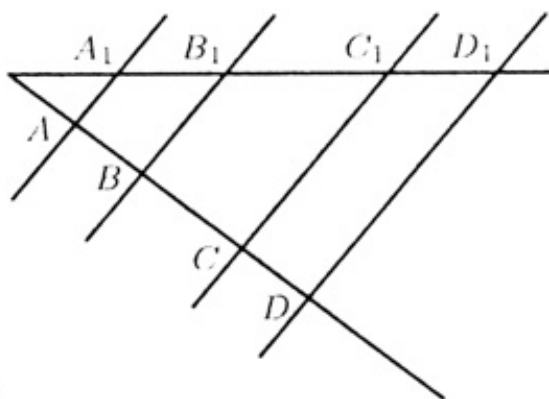


Рис. 8

Т—5. Сумма углов треугольника равна 180° .

Т—6. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану на части в отношении $2 : 1$, считая от вершины (см. рис. 9):

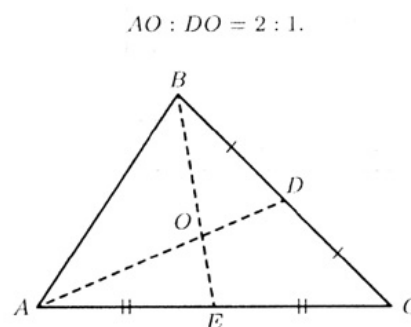


Рис. 9

Т—7. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине (рис. 10):

$$MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2}.$$

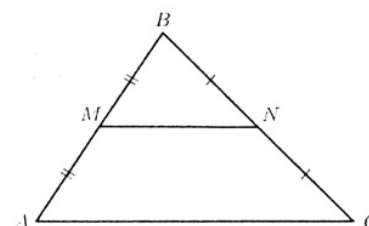


Рис. 10

Т—8. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$BD : CD = AB : AC \text{ (см. рис. 11).}$$

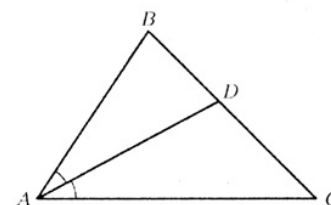


Рис. 11

Т—9. Вписанный угол (образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности) измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 12):

$$\angle ACB = \smile AB : 2.$$

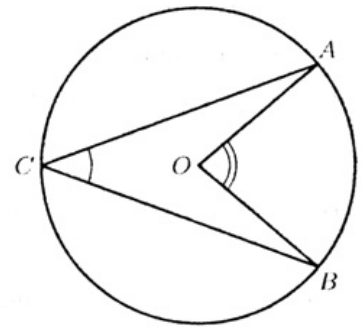


Рис. 12

Т—10. Центральный угол, образованный двумя радиусами окружности, измеряется дугой, на которую он опирается (см. рис. 12):

$$\angle AOB = \smile AB$$

Т—11. Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами (рис. 13):

$$\angle ABC = \smile AmB : 2.$$

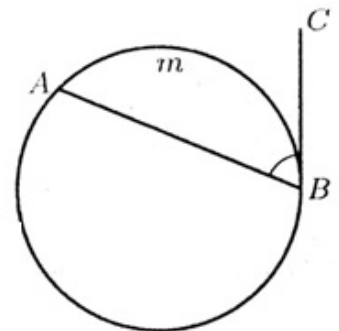


Рис. 13

Т—12. Угол между двумя секущими с вершиной вне окружности измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами (рис. 14):

$$\angle AMC = (\smile AC - \smile BD) : 2.$$

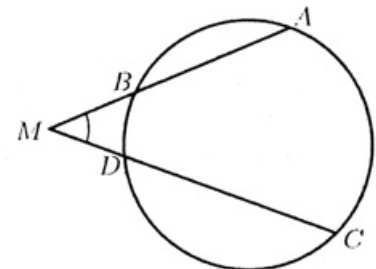


Рис. 14

Т—13. Касательные, проведенные к окружности из общей точки, расположенной вне окружности, равны: $BA = BC$. Угол между двумя касательными (описанный угол) измеряется полуразностью большей, и меньшей дуг, заключенных между точками касания (рис. 15):

$$\angle ABC = (\smile AmC - \smile AnC) : 2.$$

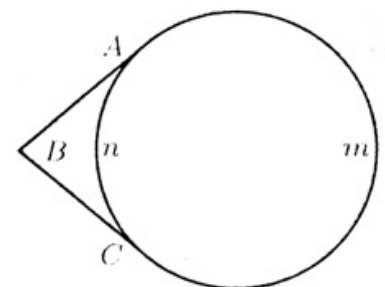


Рис. 15

Т—14. Угол между двумя хордами с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, другая — между их продолжениями (рис. 16):

$$\angle AOC = (\sphericalangle AC - \sphericalangle BD) : 2.$$

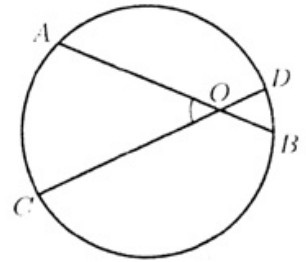


Рис. 16

Т—15. Если две хорды пересекаются внутри круга, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой (см. рис. 16):

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD.$$

$$MA^2 = MC \cdot MB.$$

Т—16. Если из точки вне круга проведены касательная и секущая, то квадрат касательной равен произведению отрезка секущей на ее внешнюю часть (рис. 17):

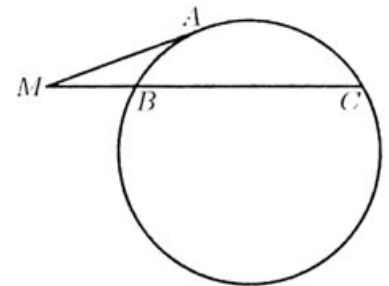
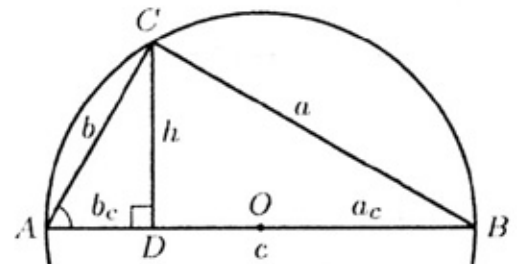


Рис. 17

Т—17. В прямоугольном треугольнике (a, b — катеты, c — гипотенуза, h — высота, опущенная на гипотенузу, a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу) имеют место (рис. 18):



1. формула Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. формулы

$$a^2 = c \cdot a_c,$$

$$b^2 = c \cdot b_c,$$

$$h^2 = a_c \cdot b_c;$$

3. определение тригонометрических величин (функций) острых углов:

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\cos A = \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B = \frac{b}{a};$$

4. формулы решения прямоугольного треугольника:

$$a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B,$$

$$b = c \cos A = c \sin B = a \operatorname{ctg} A = a \operatorname{tg} B,$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\cos A} = \frac{b}{\sin B};$$

5. центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы и

$$R = \frac{c}{2}$$

Т—18 (теорема синусов).

В произвольном треугольнике (рис. 19)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Т-19 (теорема косинусов).

В произвольном треугольнике (рис. 19):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

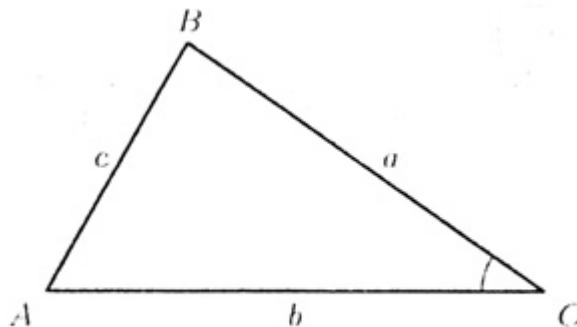


Рис. 19

Т—20. Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Т—21. Центр окружности, описанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла. Радиус окружности перпендикулярен стороне угла и точке касания. Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис углов треугольника.

Т—22. Центр окружности, описанной около треугольника, расположен в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Т—23. В описанном около окружности четырехугольнике суммы противоположных сторон равны. В частности, если равнобокая трапеция описана около окружности, то ее средняя линия равна боковой стороне.

Т—24. Во вписанном в окружность четырехугольнике суммы противоположных углов равны 180° .

Т—25. Площадь треугольника равна

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \\ &= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = pr = \frac{abc}{4R} = \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

Т—26. В правильном треугольнике со стороной a :

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

$$R = \frac{a \sqrt{3}}{3},$$

$$r = \frac{a \sqrt{3}}{6}.$$

Т—27. В правильном n -угольнике (a_n — сторона n -угольника, R — радиус описанной, r — радиус вписанной окружности):

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n},$$

$$S = \frac{n \cdot a_n \cdot r}{2}.$$

Т—28. Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон.

О-2. Две фигуры называются равновеликими, если их площади одинаковы.

Т—29. Медиана делит треугольник на две равновеликие части. Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей. Отрезки, соединяющие точку пересечения медиан с вершинами, делят треугольник на три равновеликие части.

Т—30. В произвольном треугольнике длина медианы вычисляется следующим образом (рис. 19):

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Т—31. Формулы площадей четырехугольников:

• *квадрата со стороной a :*

$$S = a^2;$$

• *прямоугольника со сторонами a и b :*

$$S = a \cdot b;$$

• *параллелограмма со сторонами a и b :*

$$S = ab \sin(\widehat{a, b}) = ah_a;$$

• *ромба со стороной a и острым углом α между сторонами:*

$$S = a^2 \sin \alpha = ah_a = \frac{1}{2} d_1 d_2;$$

• *трапеции с основаниями a и b :*

$$S = \frac{a + b}{2} h;$$

- *выпуклого четырехугольника:*

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(\widehat{d_1 d_2}), \quad S = \frac{1}{2} d_1 d_2,$$

если $d_1 \perp d_2$.

Т-32. Другие формулы:

- *площадь многоугольника, описанного около окружности радиуса r :*

$$S = p \cdot r;$$

- *площадь круга радиуса R :*

$$S = \pi R^2;$$

- *площадь сектора раствора α° (γ рад):*

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha^\circ = \frac{\gamma}{2} R^2;$$

- *длина окружности радиуса R :*

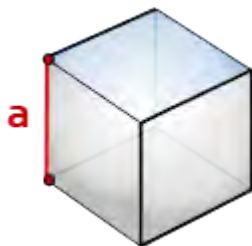
$$L = 2\pi R;$$

- *длина дуги и α° или γ рад:*

$$L = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} = \gamma \cdot R.$$

Все формулы площади поверхности объемных тел

Площадь полной поверхности куба

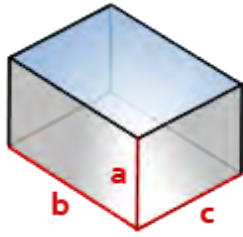


a - сторона куба

Формула площади поверхности куба, (S):

$$S = 6\mathbf{a}^2$$

Найти площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда

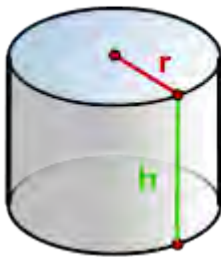


a, b, c, - стороны параллелепипеда

Формула площади поверхности параллелепипеда, (S):

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

Расчет площади поверхности цилиндра



r- радиус основания

h- высота цилиндра

$\pi \approx 3.14$

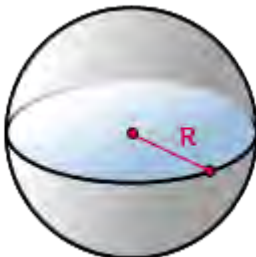
Формула площади боковой поверхности цилиндра, ($S_{\text{бок}}$):

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h$$

Формула площади всей поверхности цилиндра, (S):

$$S = 2\pi r (h + r)$$

Найти площадь поверхности шара, формула



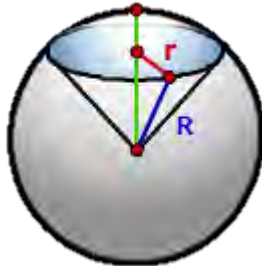
R - радиус сферы

$\pi \approx 3.14$

Формула площади поверхности шара (S):

$$S = 4\pi R^2$$

Площадь поверхности шарового сектора



R - радиус шара

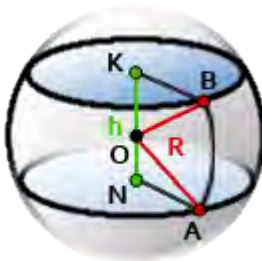
r - радиус основания конуса = радиус сегмента

$\pi \approx 3.14$

Формула площади поверхности шарового сектора, (S):

$$S = 2\pi R \left(R + \frac{r}{2} - \sqrt{R^2 - r^2} \right)$$

Площадь поверхности шарового слоя



h - высота шарового слоя, отрезок KN

R - радиус самого шара

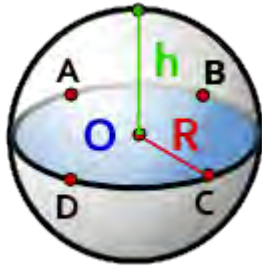
O - центр шара

$\pi \approx 3.14$

Формула площади боковой поверхности шарового слоя, (S):

$$S = 2\pi R h$$

Площадь поверхности шарового сегмента



Шаровый сегмент- это часть шара отсеченная плоскостью. В данном примере, плоскостью **ABCD**.

R - радиус самого шара

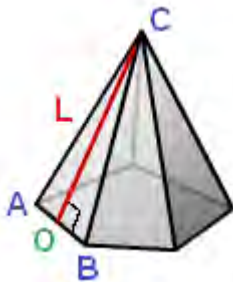
h - высота сегмента

$\pi \approx 3.14$

Формула площади поверхности шарового сегмента, (S):

$$S = 2\pi R h$$

Площадь поверхности правильной пирамиды через апофему



L - апофема (опущенный перпендикуляр **OC** из вершины **C**, на ребро основания **AB**)

P- периметр основания

S_{осн} - площадь основания

Формула площади боковой поверхности правильной пирамиды (**S_{бок}**):

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P L$$

Формула площади полной поверхности правильной пирамиды (**S**):

$$S = \frac{1}{2} P L + S_{\text{осн}}$$

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды



m - апофема пирамиды, отрезок **OK**

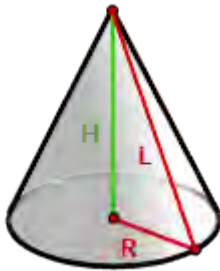
P - периметр нижнего основания, **ABCDE**

p - периметр верхнего основания, **abcde**

Формула площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, (S):

$$S = \frac{m}{2} (P + p)$$

Площадь поверхности прямого, кругового конуса



R - радиус основания конуса

H - высота

L - образующая конуса

$\pi \approx 3.14$

Формула площади боковой поверхности конуса, через радиус (**R**) и образующую (**L**), ($S_{бок}$):

$$S_{бок} = \pi RL$$

Формула площади боковой поверхности конуса, через радиус (**R**) и высоту (**H**), ($S_{бок}$):

$$S_{бок} = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

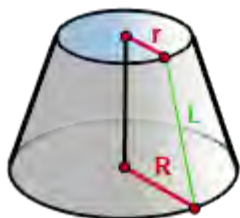
Формула площади полной поверхности конуса, через радиус (**R**) и образующую (**L**), (S):

$$S = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R)$$

Формула площади полной поверхности конуса, через радиус (**R**) и высоту (**H**), (**S**):

$$S = \pi R(R + \sqrt{R^2 + H^2})$$

Формулы площади поверхности усеченного конуса



R - радиус нижнего основания

r - радиус верхнего основания

L - образующая усеченного конуса

$\pi \approx 3.14$

Формула площади боковой поверхности усеченного конуса, (**S_{бок}**):

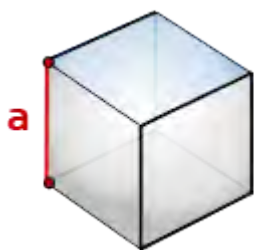
$$S_{\text{бок}} = \pi L(R + r)$$

Формула площади полной поверхности усеченного конуса, (**S**):

$$S = \pi(LR + Lr + R^2 + r^2)$$

Все формулы объема геометрических тел

Расчет объема куба

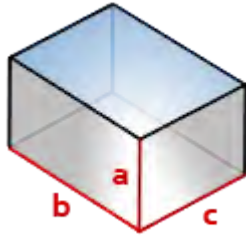


a - сторона куба

Формула объема куба, (**V**):

$$V = a^3$$

Объем прямоугольного параллелепипеда

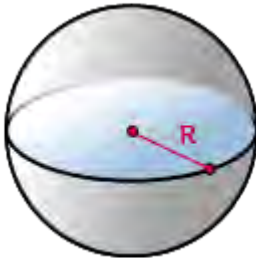


a, b, c - стороны параллелепипеда

Формула объема параллелепипеда, (**V**):

$$V = abc$$

Формула вычисления объема шара



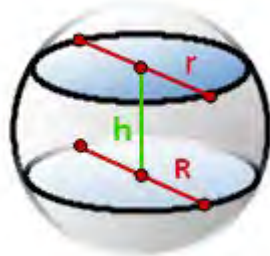
R - радиус шара

$\pi \approx 3,14$

Объем шара, (**V**):

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Объем шарового слоя



h - высота шарового слоя

R - радиус нижнего основания

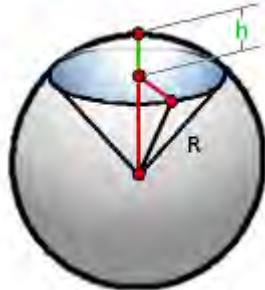
r - радиус верхнего основания

$\pi \approx 3,14$

Объем шарового слоя, (V):

$$V = \frac{1}{2} \pi h (R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2)$$

Объем шарового сектора



h - высота сегмента

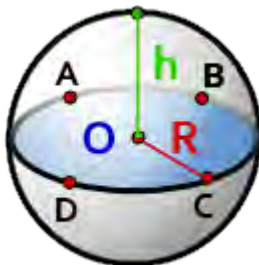
R - радиус шара

$\pi \approx 3,14$

Объем шарового сектора, (V):

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

Объем шарового сегмента, формула



Шаровый сегмент- это часть шара отсеченная плоскостью. В данном примере, плоскостью ABCD.

R - радиус шара

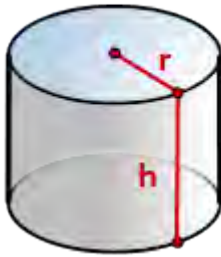
h - высота сегмента

$\pi \approx 3,14$

Объем шарового сегмента, (V):

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$$

Как вычислить объем цилиндра ?



h- высота цилиндра

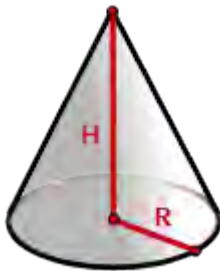
r- радиус основания

$\pi \approx 3,14$

Объем цилиндра, (V):

$$V = \pi r^2 h$$

Как найти объем конуса ?



H- высота конуса

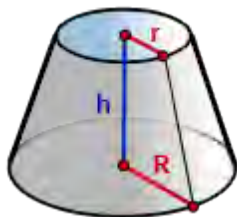
R- радиус основания

$\pi \approx 3,14$

Объем конуса, (V):

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

Формула объема усеченного конуса



R- радиус нижнего основания

r- радиус верхнего основания

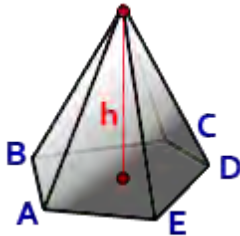
h- высота конуса

$\pi \approx 3,14$

Объем усеченного конуса, (V):

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

Расчет объема пирамиды



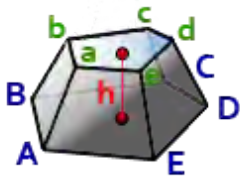
h - высота пирамиды

S - площадь основания $ABCDE$

Объем пирамиды, (V):

$$V = \frac{1}{3} S h$$

Расчёт объёма усечённой пирамиды



h - высота пирамиды

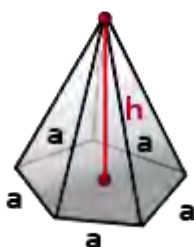
$S_{\text{ниж}}$ - площадь нижнего основания, $ABCDE$

$S_{\text{верх}}$ - площадь верхнего основания, $abcde$

Объем усеченной пирамиды, (V):

$$V = \frac{1}{3} h (S_{\text{ниж}} + \sqrt{S_{\text{ниж}} S_{\text{верх}}} + S_{\text{верх}})$$

Найти объем правильной пирамиды



Пирамида в основании, которой лежит правильный многоугольник и грани равные треугольники, называется правильной.

h - высота пирамиды

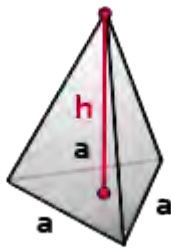
a - сторона основания пирамиды

n - количество сторон многоугольника в основании

Объем правильной пирамиды, (V):

$$V = \frac{na^2h}{12 \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

Объем правильной треугольной пирамиды



Пирамида, у которой основание равносторонний треугольник и грани равные, равнобедренные треугольники, называется правильной треугольной пирамидой.

h - высота пирамиды

a - сторона основания

Объем правильной треугольной пирамиды, (V):

$$V = \frac{ha^2}{4\sqrt{3}}$$

Объем правильной четырехугольной пирамиды

Пирамида, у которой основание квадрат и грани равные, равнобедренные треугольники, называется правильной четырехугольной пирамидой.

h - высота пирамиды

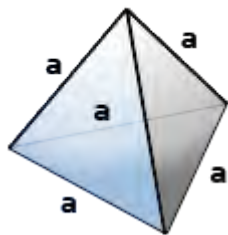
a - сторона основания



Объем правильной четырехугольной пирамиды, (V):

$$V = \frac{1}{3}ha^2$$

Объем правильного тетраэдра



Правильный тетраэдр- пирамида у которой все грани, равносторонние треугольники.

a -ребро тетраэдра

Объем правильного тетраэдра (**V**):

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$
