Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Решение задач с параметрами

(2014 – 2015 учебный год)

г. Долгопрудный, 2015

Составитель: С.Е. Городецкий, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: Решение задач с параметрами 2015, 39 с.

Внимание! Данное задание является факультативным, т. е. присылать его в ЗФТШ на проверку не обязательно, но мы настоятельно рекомендуем Вам внимательно проработать его, т. к. задачи с параметрами включены в ЕГЭ.

Составитель:
Городецкий Сергей Евгеньевич
Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение.**

***e-mail:* zftsh@mail.mipt.ru**

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Простейшие задачи с параметром

Наиболее часто встречаются следующие формулировки задач с параметром:

а) для каждого значения параметра (параметров) решить уравнение (неравенство, систему);

б) найти все значения параметра (параметров), при каждом из которых решения удовлетворяют некоторым заданным условиям (ровно одно решение, нет решений, множества решений двух уравнений совпадают, все решения неравенства принадлежат промежутку $(a\,;+\infty)$ и т. п.).

Пример 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\left(x^2-4\right)\sqrt{x+a}=0.$

Решение. Произведение двух множителей равно нулю в том и только том случае, когда один из множителей равен нулю, а второй имеет смысл. Поэтому возможны два случая:

$$\begin{cases} x^2-4=0, \\ x+a\geq 0, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x+a=0. \qquad (2)$$

Из (1) следует, что числа $x=\pm 2$ являются корнями исходного уравнения только в том случае, когда они удовлетворяют неравенству $x\geq -a$. Таким образом, при $a<-2$ система (1) не имеет решений, при $-2\leq a<2$ получаем $x=2$, а при $a\geq 2$ подходят оба корня и мы получаем, что $x=\pm 2$.

В (2) $x=-a$ является решением при любых a.

Ответ: при $a<-2$: $x=-a$;

при $-2\leq a<2$: $x=-a, x=2$;

при $a<-2$: $x=-a, x=2, x=-2$.

Замечания. 1. Если задача сформулирована таким образом (для каждого a решите уравнение), то в ответе для ***каждого*** значения параметра должно быть указано множество решений, в том числе и для тех значений, при которых решений нет.

2. В ответе знаки тире заменены на двоеточия, чтобы их не перепутать с минусами.

Пример 2. Для каждого значения a решите неравенство $\left(a^2+a-2\right)x\geq a^2-1.$

Решение. 1) Если коэффициент при x отличен от нуля, то неравенство является линейным и чтобы его решить, надо разделить обе его части на a^2+a-2. Но *при делении обеих частей неравенства на число необходимо знать знак этого числа*. Рассматриваем два варианта.

1а) Если $a^2+a-2>0$ (т. е. $a\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$), то $x\geq\dfrac{a^2-1}{a^2+a-2}$. Сокращая дробь в правой части, получаем $x\geq\dfrac{a+1}{a+2}$.

1б) Если $a^2+a-2<0$ (т. е. $a\in(-2;1)$), то $x\leq\dfrac{a^2-1}{a^2+a-2}$, т. е. $x\leq\dfrac{a+1}{a+2}$.

2) Если $a^2+a-2=0$ (при $a=-2$ или $a=1$), у нас остаётся числовое неравенство, и этот случай надо рассматривать отдельно.

2а) Если $a=-2$, то исходное неравенство принимает вид $0x\geq3$, т. е. решений нет.

2б) Если $a=1$, то получаем $0x\geq0$, что верно при всех x, поэтому x – любое число.

Ответ: при $a=1$: $x\in R$,

при $a=-2$: $x\in\varnothing$,

при $a\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$: $x\in\left[\dfrac{a+1}{a+2};+\infty\right)$,

при $a\in(-2;1)$: $x\in\left(-\infty;\dfrac{a+1}{a+2}\right]$.

Пример 3. При каком наименьшем положительном значении b функция $y=\sin\left(20x+\dfrac{b\pi}{150}\right)$ имеет минимум в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$?

Решение. Минимальное значение синуса равно (-1), и оно достигается, когда аргумент равен $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathrm{Z}$. Значит, функция принимает минимальное значение при $x=\dfrac{\pi}{2}$, если

$$20\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{b\pi}{150}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathrm{Z},$$

откуда находим, что $b=-1575+300k,\ k\in\mathrm{Z}$. Наименьшим положительным числом в этой серии является $b=225$ (при $k=6$).

Ответ: $b=225$.

Пример 4. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x-3a-1}{x+2a-2}\le 0$ выполняется при каждом значении x таком, что $2\le x\le 3$?

Решение. Для решения подобных неравенств обычно используется метод интервалов. Находим точки, в которых числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль ($x_1=3a+1$ и $x_2=2-2a$). Далее отмечаем эти точки на числовой прямой и определяем знаки левой части на получившихся промежутках. Возможны три способа расположения точек: $x_1=x_2$, $x_1<x_2$, $x_1>x_2$. Если $x_1=x_2$, то числитель дроби равен знаменателю, левая часть неравенства обращается в единицу, поэтому решений нет. В двух оставшихся случаях решением является *промежуток между числами* x_1 *и* x_2 (при этом граничная точка x_1 включается, а x_2 – нет). Для того, чтобы отрезок $2\le x\le 3$ включался в множество решений, необходимо и достаточно, чтобы границы этого отрезка принадлежали множеству решений, т. е. являлись решениями неравенства. Таким образом, получаем систему: $\begin{cases}\frac{2-3a-1}{2+2a-2}\le 0,\\ \frac{3-3a-1}{3+2a-2}\le 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(-\infty;0)\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right),\\ a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right).$$

Ответ: $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Пример 5. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений $\begin{cases}(a+2)x-ay=1-a,\\ 2x-(3a+1)y=a+5.\end{cases}$

Решение. Выразим из второго уравнения x:

$$x=\frac{a+5}{2}+\frac{3a+1}{2}y \tag{3}$$

и подставим в первое уравнение[1]:

[1] Выгоднее делать именно так, поскольку во втором уравнении коэффициент при x не зависит от параметра и, следовательно, не обращается в ноль. Если бы мы стали выражать y из второго уравнения, то пришлось бы отдельно рассматривать случай, когда $3a+1=0$.

$$(a+2)\left(\frac{a+5}{2}+\frac{3a+1}{2}y\right)-ay=1-a.$$

После упрощения получаем уравнение:

$$\left(3a^2+5a+2\right)y=-a^2-9a-8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a+1)(3a+2)y=-(a+8)(a+1). \qquad (4)$$

Рассматриваем два случая.

1) $(a+1)(3a+2)=0$. Это возможно при двух значениях a.

1а) Если $a=-1$, то уравнение (4) принимает вид $0=0$, откуда $y\in R$. Тогда из (3) находим, что $x=2-y$. Если обозначить $y=t$, то $x=2-t$. Таким образом, решениями системы являются пары чисел вида $(2-t;t)$, $t\in R$.

1б) Если $a=-\frac{2}{3}$, то (4) принимает вид $0=-\frac{4}{9}+6-8$. Значит, в этом случае решений нет.

2) $(a+1)(3a+2)\neq 0$. Тогда делим обе части уравнения (4) на $(a+1)(3a+2)$ и получаем, что $y=-\frac{a+8}{3a+2}$. Подставляя в (3), находим

$$x=\frac{a+5}{2}-\frac{3a+1}{2}\cdot\frac{a+8}{3a+2}=\frac{1-4a}{3a+2}.$$

Ответ: при $a=-1$: $(2-t;t), t\in R$;

при $a=-\frac{2}{3}$: нет решений;

при всех остальных значениях a: $\left(\frac{1-4a}{3a+2};-\frac{a+8}{3a+2}\right)$.

Замечание. Линейное уравнение $ax+by=c$ при $a^2+b^2\neq 0$ задаёт прямую на плоскости. Поэтому в системе двух линейных уравнений возможны следующие варианты: прямые пересекаются (1 решение), прямые параллельны (нет решений), прямые совпадают (бесконечно много решений).

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x+a\cos x=2a$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. Левая часть уравнения может принимать значения в пределах[2] $\left[-\sqrt{1+a^2}\,;\sqrt{1+a^2}\right]$. Поэтому данное уравнение имеет решения, если $2a\in\left[-\sqrt{1+a^2}\,;\sqrt{1+a^2}\right]$. Это условие равносильно неравенству $|2a|\le\sqrt{1+a^2}$. Так как обе части неравенства неотрицательны, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$4a^2\le 1+a^2 \Leftrightarrow a^2\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}\le a\le\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{3}}\le a\le\frac{1}{\sqrt{3}}$.

§2. Квадратные уравнения и неравенства с параметром

Многие задачи с параметром сводятся к исследованию квадратного трёхчлена, поэтому рассмотрим эти задачи подробнее.

I. При решении простейших задач бывает достаточно формулы для корней квадратного уравнения и теоремы Виета.

Пример 7. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $x^2+ax-1<0$ является интервалом длины 5?

Решение. Поскольку коэффициент при x^2 положителен, решением неравенства является интервал между корнями в случае $D>0$ и пустое множество, если $D\le 0$.

Находим дискриминант: $D=a^2+4$ ($D>0$ при всех a). Тогда множество решений есть промежуток

$x\in\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2};\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)$. Требуется, чтобы длина этого промежутка была равна 5, т. е.

$$\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2}=5\Leftrightarrow\sqrt{a^2+4}=5\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{21}.$$

Ответ: $a=\pm\sqrt{21}$.

---

[2] С помощью введения дополнительного угла выражение $A\cos x+B\sin x$ может быть преобразовано к виду $\sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos(x-\alpha)$. Поскольку косинус принимает всевозможные значения из отрезка $[-1;1]$, отсюда следует, что множеством значений выражения $A\cos x+B\sin x$ является отрезок $\left[-\sqrt{A^2+B^2};\sqrt{A^2+B^2}\right]$.

Пример 8. При каких значениях параметра p уравнение $x^2+\sqrt{p^2+4p}\cdot x+p-1=0$ имеет корни, а сумма квадратов корней минимальна?

Решение. Сумму квадратов корней уравнения удобно выразить с помощью теоремы Виета:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\sqrt{p^2+4p}\right)^2-2(p-1)=p^2+2p+2.$$

Но прежде, чем применять теорему Виета, обязательно нужно проверить, что уравнение имеет корни! Для этого вычисляем дискриминант: $D=p^2+4p-4(p-1)=p^2+4$. Видим, что дискриминант положителен при любых допустимых значениях p, т. е. при

$$p\in(-\infty;-4]\cup[0;+\infty). \qquad (5)$$

Остаётся найти, при каких значениях p выражение p^2+2p+2 принимает наименьшее значение. График функции $f(p)=p^2+2p+2$ – парабола с ветвями вверх, поэтому наименьшее значение принимается в вершине (если она принадлежит множеству (5)) или в точке множества (5), ближайшей к вершине.

Так как абсциссой вершины является $p=-1$, что не принадлежит (5), получаем, что наименьшее значение $f(p)$ при условии (5) принимается при $p=0$.

Ответ: $p=0$.

II. Если в задаче требуется определить знаки корней квадратного уравнения, то, как правило, удобнее использовать теорему Виета. При условии, что уравнение $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$, имеет два корня ($D>0$) справедливы следующие утверждения[3]:

1°. корни положительны $\Leftrightarrow \dfrac{c}{a}>0$ и $-\dfrac{b}{a}>0$ $\Leftrightarrow ac>0$ и $ab<0$;

2°. корни отрицательны $\Leftrightarrow \dfrac{c}{a}>0$ и $-\dfrac{b}{a}<0$ $\Leftrightarrow ac>0$ и $ab>0$;

3°. корни разных знаков $\Leftrightarrow \dfrac{c}{a}<0$ $\Leftrightarrow ac<0$.

Пример 9. При каких значениях b уравнение $(b-1)\cdot 4^x-(2b-1)\cdot 2^x-1=0$ имеет два различных корня?

---

[3] В третьем случае условие $D>0$ можно опустить, так как оно следует из неравенства $ac<0$.

Решение. Сделаем замену $2^x = t$, где t может принимать любые положительные значения. Тогда уравнение принимает вид

$$(b-1)t^2 - (2b-1)t - 1 = 0. \qquad (6)$$

Чтобы у исходного уравнения было два корня необходимо и достаточно, чтобы у уравнения (6) было два положительных корня[4].

Если $b=1$, то (3) принимает вид $-t-1=0$, что нам не подходит (нет положительных корней)[5].

Если $b \neq 1$, то для существования двух положительных корней мы должны потребовать (см. выше):

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1+x_2>0, \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2b-1)^2+4(b-1)>0, \\ (2b-1)(b-1)>0, \\ -1\cdot(b-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\in\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right), \\ b\in\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)\cup(1; +\infty), \\ b<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b\in\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ: $b\in\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

III. Нередко встречаются задачи на расположение корней квадратного трёхчлена[6]. Начнём этот раздел с примера.

Пример 10. При каких значениях параметра a уравнение $5x^2+(4a-6)x+1=0$ имеет два корня, причём один из корней больше (-1), а второй – меньше (-1)?

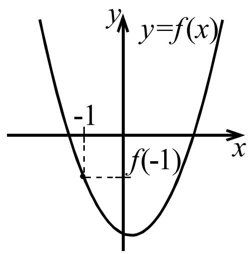

Рис. 1

Решение. Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$ и рассмотрим график функции $y=f(x)$. Это парабола с ветвями вверх. Для того, чтобы выполнялось условие задачи, график должен быть расположен так, чтобы точка $x=-1$ оказалась между корнями (см. рис. 1). Следовательно, $f(-1)<0$.

---

[4] После того, как мы сформулировали задачу для уравнения относительно t, об исходной задаче можно забыть: действительно, каждому положительному t соответствует ровно одно значение x.

[5] Если коэффициент при t^2 зависит от параметра, то обязательно надо рассмотреть случай, когда он обращается в ноль, т.к. тогда получается не квадратное уравнение, а линейное.

[6] В предыдущем пункте был рассмотрен частный случай такой задачи, а именно, расположение корней относительно точки $x = 0$.

Заметим, что из выполнения этого неравенства следует, что уравнение имеет два корня, расположенные по разные стороны от точки $x=-1$. Действительно, если некоторая точка с абсциссой x_0 параболы с ветвями вверх лежит ниже оси абсцисс, то эта парабола пересекает ось в двух точках: один раз слева от x_0 и один раз справа от x_0.

Записываем и решаем неравенство $f(-1)<0$: $5-(4a-6)+1<0 \Leftrightarrow a>3$.

Ответ: $a>3$.

Теперь рассмотрим различные варианты расположения корней квадратичной функции. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, $x_{\text{в}}=-\dfrac{b}{2a}$ – абсцисса вершины параболы; $D=b^2-4ac$ – дискриминант, x_1 и x_2 – корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

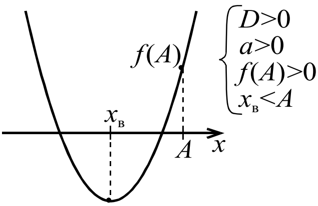

Рис. 2а

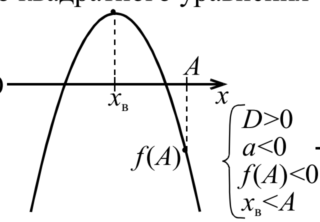

Рис. 2б

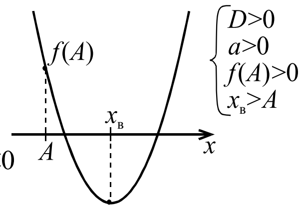

Рис. 3а

1°. Уравнение имеет два корня, и оба они меньше некоторого числа A (рис. 2а, 2б). (*1)

2°. Уравнение имеет два корня, и оба они больше некоторого числа A (рис. 3а, 3б). (*2)

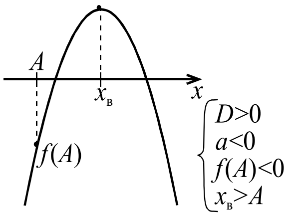

Рис. 3б

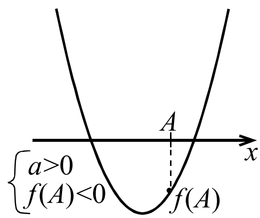

Рис. 4а

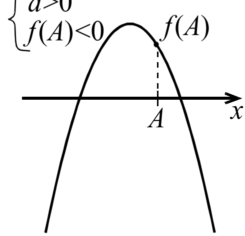

Рис. 4б

3°. Уравнение имеет два корня, лежащие по разные стороны от числа A (рис. 4). Обратите внимание, что в этом случае условие $D>0$ является лишним (см. решение примера 10) и мы получаем одно неравенство $f(A)<0$ (или $f(A)>0$).

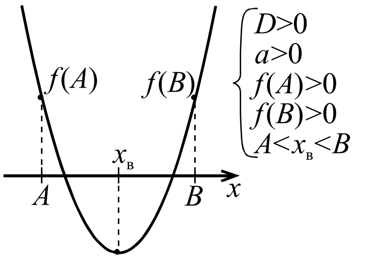

Рис. 5а

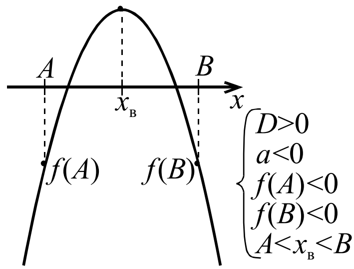

Рис. 5б

4°. Уравнение имеет два корня, лежащие в интервале $(A;B)$ (рис. 5). (*3)

Возможны также и другие случаи расположения корней (например, оба корня лежат вне некоторого отрезка $[A;B]$ и пр.), в которых надо самостоятельно нарисовать чертёж и сделать соответствующие выводы.

Замечания. 1. Для уравнений и неравенств вида $ax^2+bx+c=0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\le 0$, $ax^2+bx+c\ge 0$ **надо отдельно рассматривать случай** $a=0$**.** Тогда получится *линейное* уравнение (неравенство).

2. В большинстве задач важно учесть *знак* числа a – от этого зависит направление ветвей параболы.

3. Заметим, что совокупность двух систем

$$\begin{cases} a>0, \\ f(a)>0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a<0, \\ f(a)<0 \end{cases}$$

равносильна неравенству $af(a)>0$. Поэтому в условии 1° можно записать одну систему $\begin{cases} D>0, \\ af(A)>0, \\ x_{\text{В}}<A. \end{cases}$

Аналогично можно упростить и некоторые другие условия:

$$2^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} D>0, \\ af(A)>0, \\ x_{\text{В}}>A; \end{cases} \quad 3^\circ \Leftrightarrow af(A)<0, \quad 4^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} D>0, \\ af(A)>0, \\ af(B)>0, \\ A<x_{\text{В}}<B. \end{cases}$$

Перейдём к примерам.

Пример 11. При каких a уравнение $(2a-2)x^2+(a+1)x+1=0$ имеет корни, и все они принадлежат интервалу $(-2;0)$?

Решение. 1) Если $2a-2=0$ ($a=1$), то уравнение принимает вид $2x+1=0$. Это уравнение имеет единственный корень $x=-0{,}5$, который принадлежит интервалу $(-2;0)$. Значит, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

2) Если $2a-2\neq 0$, то уравнение квадратное. Находим дискриминант:

$$D=(a+1)^2-4(2a-2)=a^2-6a+9=(a-3)^2.$$

Поскольку дискриминант является полным квадратом, находим корни[7]: $x=\dfrac{-a-1\pm(a-3)}{4a-4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{1-a}, \\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Для выполнения условий задачи требуется, чтобы выполнялось неравенство $-2<\dfrac{1}{1-a}<0$, решая которое, находим, что $a>\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $a\in\{1\}\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Пример 12. При каких значениях a неравенство $4^{\sin x}-2\cdot(a-3)\cdot 2^{\sin x}+a+3>0$ выполняется для всех x?

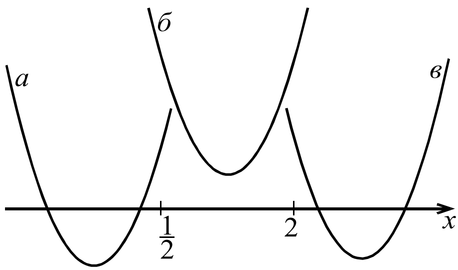

Рис. 6

Решение. Обозначим $2^{\sin x}=y$. Поскольку $-1\le\sin x\le 1$, получаем, что $\dfrac{1}{2}\le 2^{\sin x}\le 2$. Исходное неравенство принимает вид $y^2-2(a-3)y+(a+3)>0$.

Данная задача эквивалентна следующей: «при каких a неравенство $y^2-2(a-3)y+(a+3)>0$ выполнено для всех $y\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$?»

[7] Как правило, вышеописанные приёмы с расположением корней удобно использовать, если формулы для корней громоздкие. Если дискриминант является полным квадратом и корни получаются “хорошими”, то проще решить задачу напрямую.

График левой части этого неравенства – парабола с ветвями вверх. Требования задачи будут выполнены в двух случаях. 1) $D<0$ (тогда парабола целиком лежит выше оси абсцисс и неравенство выполнено для всех y (рис. 6, случай б). 2) Если корни есть $(D \geq 0)$, то они не должны лежать на отрезке $y \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. (рис. 6, случаи а) и в)).

Переходим к вычислениям.

а) Это расположение параболы (корни находятся слева от отрезка $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$) задаётся условиями (записываем и решаем систему):

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_{\text{в}} < \frac{1}{2}, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 - (a+3) \geq 0, \\ a - 3 < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} - (a-3) + a + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty), \\ a < \frac{7}{2}, \\ \frac{25}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 1.$$

б) Этот случай задаётся условием $D<0 \Leftrightarrow a \in (1; 6)$.

в) Аналогично случаю а) получаем систему:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_{\text{в}} > 2, \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 - (a+3) \geq 0, \\ a - 3 > 2, \\ 4 - 4(a-3) + a + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty), \\ a > 5, \\ a < \frac{19}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 6 \leq a < \frac{19}{3}.$$

Объединяя результаты, полученные в трёх пунктах, получаем, что $a < \frac{19}{3}$.

Ответ: $a < \frac{19}{3}$.

Пример 13. При каких значениях a ровно один корень уравнения $ax^2 + (2a-5)x + (a-6) = 0$ лежит на отрезке $[0; 2]$?

Решение. 1) Рассматриваем случай $a=0$ (тогда уравнение не квадратное). Уравнение принимает вид $-5x-6=0$. Корней на отрезке $[0; 2]$ нет, поэтому $a=0$ не подходит.

2) Уравнение квадратное. Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$. Уравнение имеет на отрезке $[0; 2]$ ровно один корень в двух случаях.

А) Уравнение имеет единственный корень и он принадлежит отрезку $[0; 2]$. Это возможно при $D=0$. Вычисляем дискриминант:

$$D = (2a-5)^2 - 4a(a-6) = 4a+25.$$

Дискриминант обращается в ноль при $a=-\dfrac{25}{4}$. При этом значении a исходное уравнение принимает вид $-\dfrac{25}{4}x^2-\dfrac{35}{2}x-\dfrac{49}{4}=0$, откуда $x=-\dfrac{7}{5}$. Корней на отрезке $[0;2]$ нет, значит, этот случай не реализуется ни при каких a.

Б) Уравнение имеет два корня $\left(D>0 \Leftrightarrow a>-\dfrac{25}{4}\right)$, один из которых принадлежит отрезку $[0;2]$, а другой – нет. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы либо (а) функция $f(x)$ принимала на концах отрезка $[0;2]$ значения разных знаков – тогда корень лежит в интервале $(0;2)$ (в качестве примера[8] см. рис. 7), либо (б) в одном из концов отрезка обращалась в ноль – тогда корень лежит на одном из концов отрезка.

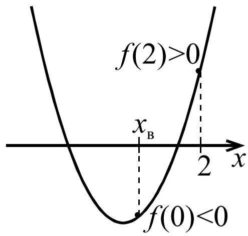

Рис. 7

(а) Условие "числа $f(0)$ и $f(2)$ имеют разные знаки" равносильно неравенству $f(0)\cdot f(2)<0$, откуда

$$(a-6)(4a+2(2a-5)+(a-6))<0 \Leftrightarrow (a-6)(9a-16)<0 \Leftrightarrow \frac{16}{9}<a<6.$$

(б) Если $f(0)=0$, то $a=6$. Тогда уравнение принимает вид $6x^2+7x=0$. Его корнями являются числа $x=0$ и $x=-\dfrac{7}{6}$, т. е. на отрезке $[0;2]$ оно имеет ровно один корень.

Если $f(2)=0$, то $a=\dfrac{16}{9}$. Тогда получаем $\dfrac{16}{9}x^2-\dfrac{13}{9}x-\dfrac{38}{9}=0$, откуда $x=2$ или $x=-\dfrac{19}{16}$, т. е. опять из двух корней только один принадлежит отрезку $[0;2]$.

Значит, оба значения $a=6$ и $a=\dfrac{16}{9}$ удовлетворяют условию задачи*.

---

[8] Можете самостоятельно рассмотреть и другие возможные расположения параболы.

* при $f(2)=0$ или $f(0)=0$ обязательно надо найти второй корень и посмотреть, находится ли он на отрезке $[0;2]$.

Объединяя результаты, получаем $a \in \left[\frac{16}{9}; 6\right]$.

Ответ: $\frac{16}{9} \le a \le 6$.

Пример 14. При каких значениях параметра a уравнение $\left|x^2 - 4|x| + 3\right| = a$ имеет ровно 8 решений?

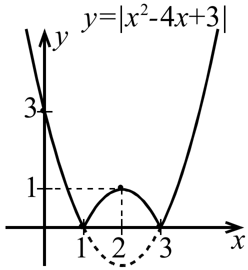

Рис. 8а

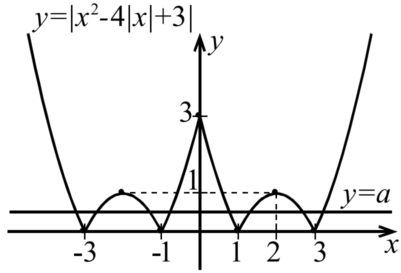

Рис. 8б

Решение. Изобразим графики левой и правой частей на плоскости xOy.

Чтобы построить график левой части, сначала изображаем параболу $y = x^2 - 4x + 3$. Затем отражаем все точки этой параболы, лежащие ниже оси абсцисс, относительно этой оси и получаем график функции $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ (рис. 8а). Далее отбрасываем все точки, лежащие слева от оси абсцисс, а оставшиеся точки отражаем относительно этой оси – получаем график функции $y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$.

График правой части – это горизонтальная прямая $y = a$. Уравнение имеет 8 решений, когда эта прямая пересекает график $y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$ в восьми точках. Несложно видеть, что это возможно при $0 < a < 1$.

Ответ: $a \in (0;1)$.

Пример 15. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\left(4^x + 4^{-x}\right) + 4 \cdot \left(2^x + 2^{-x}\right) = p - 7$ и сделаем замену $2^x + 2^{-x} = t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем, что $t^2 = \left(2^x + 2^{-x}\right)^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$, откуда $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$. Уравнение принимает вид $t^2 - 2 + 4t = p - 7 \Leftrightarrow (t+2)^2 = p - 1$.

Найдём множество значений левой части уравнения. Поскольку[9] $t \geq 2$, получаем, что левая часть уравнения принимает значения из промежутка $[16; +\infty)$.

Уравнение имеет хотя бы одно решение, если правая часть принадлежит этому же промежутку, т. е. при $p-1 \geq 16$, откуда $p \geq 17$.

Ответ: $p \geq 17$.

Пример 16. Найдите все значения параметра a, при которых для любого положительного значения b уравнение

$$\log_2\left(1-x-x^2\right) = a \cdot \log_{\left(1-x-x^2\right)} 2 + b$$

имеет хотя бы одно решение, принадлежащее интервалу $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Решение. Определим множество значений функции $f(x) = \log_2\left(1-x-x^2\right)$ при $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. График функции $g(x) = 1-x-x^2$ – парабола с ветвями вниз, вершина которой имеет абсциссу $x_в = -\frac{1}{2}$. Поскольку промежуток $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ находится справа от вершины, функция на нём убывает, и своё наибольшее значение она принимает в точке 0, а наименьшее – в точке $\frac{1}{2}$.

Итак, если $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то функция $g(x)$ принимает все значения из промежутка $\left(g\left(\frac{1}{2}\right); g(0)\right)$, т.е. из интервала $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Значит, множеством значений $f(x) = \log_2 g(x)$ является интервал $(-2; 0)$.

Перепишем уравнение в виде $\log_2\left(1-x-x^2\right) = a \cdot \dfrac{1}{\log_2\left(1-x-x^2\right)} + b$ и сделаем замену $t = \log_2\left(1-x-x^2\right)$. Получаем уравнение $t = \dfrac{a}{t} + b$.

[9] Используем, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше двух: $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$ (равенство возможно только при $a = 1$). Это можно доказать, например, с помощью неравенства Коши: для положительных чисел среднее арифметическое не меньше среднего геометрического $\left(\frac{a_1 + a_2 \ldots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}\right)$, причём равенство достигается только в случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$. Для двух положительных чисел это неравенство принимает вид $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Если сюда подставить $b = \frac{1}{a}$, то получится требуемое неравенство.

Каждому значению $t \in (-2; 0)$ соответствует ровно одно значение $x \in (0; \frac{1}{2})$, а для всех остальных t значения переменной x, если они существуют, не будут принадлежать промежутку $(0; \frac{1}{2})$. Поэтому для нового уравнения задачу можно сформулировать задачу так: «найти все значения параметра a, при которых для любого положительного значения b уравнение $t = \frac{a}{t} + b$ имеет хотя бы одно решение, принадлежащее интервалу $(-2; 0)$».

Перепишем это уравнение[10] в виде $t^2 - bt - a = 0$. Графиком функции $h(t) = t^2 - bt - a$ является парабола с ветвями вверх, причём по условию абсцисса вершины этой параболы положительна $\left(x_{\text{в}} = \frac{b}{2} > 0\right)$. Таким образом, если это уравнение имеет корни, то по крайней мере один из них положителен. Для того чтобы второй корень лежал в интервале $(-2; 0)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия: $h(0) < 0$, $h(-2) > 0$ (см. рис. 9).

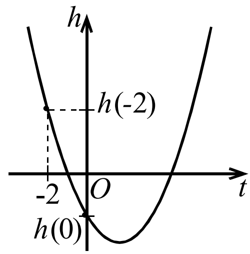

Рис. 9

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} -a < 0, \\ 4 + 2b - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < 4 + 2b. \end{cases}$$

Необходимо, чтобы эти условия выполнялись при любых положительных значениях b, откуда следует, что $0 < a \le 4$.

Ответ: $0 < a \le 4$.

§3. Аналитические методы решения задач с параметром

Пример 17. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $8\sin^3 x = p + 9\cos 2x$ не имеет решений.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$8\sin^3 x = p + 9\left(1 - 2\sin^2 x\right),\ 8\sin^3 x + 18\sin^2 x = p + 9$$

и найдём множество значений левой части получившегося уравнения.

---

[10] Условие $t \ne 0$ можно отбросить, так как нас интересуют только решения из промежутка $(-2; 0)$.

Для этого обозначим $\sin x = t$ и рассмотрим функцию $f(t) = 8t^3 + 18t^2$ при $t \in [-1; 1]$. Её производная равна $f'(t) = 24t^2 + 36t = 12t(2t+3)$. На отрезке $[-1; 1]$ производная обращается в ноль при $t = 0$, положительна при $t > 0$ и отрицательна при $t < 0$. Значит, при $t \in [-1; 0]$ функция убывает, а при $t \in [0; 1]$ – возрастает. Наименьшее значение на отрезке – это $f(0) = 0$. Чтобы определить наибольшее значение, найдём значения $f(t)$ на концах отрезка: $f(-1) = 10$, $f(1) = 26$. Значит, наибольшее значение равно 26, и функция $f(t)$ принимает все значения из отрезка $[0; 26]$.

Следовательно, данное уравнение имеет решения при $p + 9 \in [0; 26]$, т.е. при $p \in [-9; 17]$, а при всех остальных p решений нет.

Ответ: $p \in (-\infty; -9) \cup (17; +\infty)$.

Пример 18. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_3\left(3^x + \log_3 a\right) = 2x$ имеет ровно одно решение.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему[11]:

$$3^x + \log_3 a = 3^{2x}, \;\; 3^{2x} - 3^x - \log_3 a = 0.$$

Делаем замену $3^x = t$. Получаем уравнение

$$t^2 - t - \log_3 a = 0. \qquad (4)$$

Исходное уравнение имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда уравнение (4) имеет ровно одно *положительное* решение. Это возможно в двух случаях.

1) Уравнение (4) имеет ровно одно решение и это решение положительно.

Это может быть, если $D = 1 + 4\log_3 a = 0$, откуда $a = 3^{-1/4}$. Тогда получаем, что $t = \frac{1}{2}$, т. е. (4) имеет один положительный корень.

2) Уравнение (4) имеет два корня, один из которых положителен, а другой – нет. В этом случае удобно разобрать два варианта.

а) Одним из корней уравнения является $t = 0$. Подставляя это значение t в (4), находим, что $\log_3 a = 0$ ($a = 1$). Тогда (4) принимает вид $t^2 - t = 0$, т. е. действительно имеет ровно один положительный корень. Значит, $a = 1$ подходит.

[11] Условие положительности подлогарифмического выражения можно опустить, так как оно равно 3^{2x}, а $3^{2x} > 0$ при всех x.

б) Один из корней положителен, а второй – отрицателен. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $-\log_3 a < 0$ (см. стр. 8, свойство 3°), откуда $a > 1$.

Объединяя полученные результаты, находим, что $a \in \left\{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right\} \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $a \in \left\{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right\} \cup [1; +\infty)$.

Пример 19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Заметим, что если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением этой системы, то пара чисел $(-x_0; y_0)$ также является решением[12]. Поэтому если решение единственно, то оно имеет вид $(0; y_0)$. Подставляя в систему, получаем $\begin{cases} 3 + 0 + 4 = 3y_0 + 0 + 3a, \\ 0 + y_0^2 = 1, \end{cases}$

откуда находим, что $a = \frac{10}{3}$ или $a = \frac{4}{3}$. Все остальные значения a нам не подходят (так как при них система не имеет решений вида $(0; y_0)$, поэтому ровно одного решения быть не может). Проверим[13], подходят ли значения $a = \frac{10}{3}$ и $a = \frac{4}{3}$. Для этого подставляем найденные a в исходную систему.

1) При $a = \frac{10}{3}$ получаем систему $\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2 + 6, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

---

[12] Так как при замене $x \to -x$ оба уравнения системы не изменяются.

[13] Почему надо проверять? Давайте задумаемся, что происходит с системой при найденных значениях параметра. Мы нашли те значения a, при которых она имеет решения вида $(0; y_0)$. Но никто не гарантирует нам, что такое решение будет единственным. Могут также присутствовать какие-либо другие решения. Действительно, нет такой теоремы: “если система уравнений имеет решение вида $(0; y_0)$, то других решений быть не может”.

Заметим, что пара чисел $(1;0)$ является решением этой системы. Но тогда $(-1;0)$ также является решением. Значит, система имеет более одного решения, поэтому $a=\frac{10}{3}$ не подходит[14].

2) При $a=\frac{4}{3}$ получаем $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Из второго уравнения системы следует, что каждая из переменных по модулю не превосходит единицы. Перепишем первое уравнение системы в виде

$$3\cdot\left(2^{|x|}-y\right)=5\left(x^2-|x|\right). \qquad (5)$$

Заметим, что при $x\in[-1;1]$ и $y\in[-1;1]$ левая часть уравнения (5) неотрицательна, а правая – неположительна. Действительно, $2^{|x|}\ge 2^0=1$, тогда как $y\le 1$; кроме того, на промежутке $x\in[-1;1]$ выполняется неравенство $x^2\le|x|$. Тогда равенство в (5) может достигаться, только если левая и правая части обращаются в ноль, что возможно при $x=0$, $y=1$. Заметим, что эта пара чисел также удовлетворяет второму уравнению системы. Таким образом, при $a=\frac{4}{3}$ система имеет решение $(0;1)$ и это решение единственно.

Ответ: $a=\frac{4}{3}$.

Пример 20. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $\left|bx^2+3\right|=|2bx|+3|b|$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Если $b=0$, то уравнение принимает вид $3=0$ и решений нет.

При $b\ne 0$ можно переписать уравнение в виде $|b|\cdot\left|x^2+\frac{3}{b}\right|=|b|\cdot 2|x|+3|b|$. Разделив обе части на положительное число $|b|$, получаем уравнение $\left|x^2+\frac{3}{b}\right|=2|x|+3$. Поскольку правая часть положительна при всех x, уравнение равносильно совокупности

[14] Находить все решения системы не требуется – достаточно выяснить, единственно ли решение.

$$\left[\begin{array}{l} x^2+\dfrac{3}{b}=2|x|+3, \\ x^2+\dfrac{3}{b}=-2|x|-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2|x|+\dfrac{3}{b}-3=0, \\ x^2+2|x|+\dfrac{3}{b}+3=0. \end{array}\right. \tag{6}$$

Сделаем замену $|x|=t$. Для того, чтобы совокупность (6) имела хотя бы одно решение необходимо и достаточно, чтобы следующая совокупность имела хотя бы одно *положительное* решение:

$$\left[\begin{array}{l} t^2-2t+\dfrac{3}{b}-3=0, \\ t^2+2t+\dfrac{3}{b}+3=0. \end{array}\right. \tag{7}$$

Для этого надо, чтобы хотя бы одно из уравнений в (7) имело положительный корень. Иногда задачи такого рода удобно решать “в лоб”. Находим корни обоих уравнений:

$$t=1\pm\sqrt{4-\frac{3}{b}} \quad \text{и} \quad t=-1\pm\sqrt{-2-\frac{3}{b}}\,.$$

Для того, чтобы хотя бы одно из этих чисел было положительным[15], необходимо и достаточно, чтобы

$$\left[\begin{array}{l} 1+\sqrt{4-\dfrac{3}{b}}>0, \\ -1+\sqrt{-2-\dfrac{3}{b}}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b\in(-\infty;0)\cup\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right), \\ -1<b<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow b\in(-\infty;0)\cup\left[\frac{3}{4};+\infty\right).$$

Ответ: $b\in(-\infty;0)\cup\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

---

[15] При решении задач с параметром иногда удобно использовать следующие утверждения:
– хотя бы одно из чисел положительно $\Leftrightarrow$ наибольшее из чисел положительно;
– все числа положительны $\Leftrightarrow$ наименьшее из чисел положительно;
– хотя бы одно из чисел отрицательно $\Leftrightarrow$ наименьшее из чисел отрицательно;
– все числа отрицательны $\Leftrightarrow$ наибольшее из чисел отрицательно.
Если речь идёт о корнях квадратного уравнения, то нередко можно понять, какой из корней больше, а какой меньше, поэтому если мы знаем, что $x_1<x_2$, то от совокупности неравенств $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$ можно перейти к одному неравенству $x_2\ge 0$.
Иногда данными утверждениями удобно пользоваться в обратную сторону. Например, требуется определить, при каких x меньшее из чисел $f(x)$ и $g(x)$ больше единицы. Если неизвестно, какое из чисел $f(x)$ или $g(x)$ больше, то можно перейти к системе неравенств $f(x)>1$, $g(x)>1$.

Замечание. Неотрицательность дискриминантов в (7) была учтена при решении иррациональных неравенств (ОДЗ).

Пример 21. При каких значениях параметра a уравнение $\lg\left(x^2-6x+8\right)^{\log_2 10}=\log_2(ax-17)$ имеет ровно одно решение?

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\log_2 10\cdot\lg\left(x^2-6x+8\right)=\log_2(ax-17)\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-6x+8\right)=\log_2(ax-17)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+8=ax-17,\\ x^2-6x+8>0.\end{cases}$$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases}x^2-(a+6)x+25=0,\\ x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty).\end{cases}\qquad(8)$$

Система (8) имеет ровно одно решение в двух случаях.

1) Уравнение имеет ровно один корень, и этот корень удовлетворяет условию

$$x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty).\qquad(9)$$

Это возможно, если дискриминант обращается в ноль.

$$D=(a+6)^2-100=(a+6+10)(a+6-10)=(a+16)(a-4).$$

Если $a=4$, то уравнение в (8) принимает вид $x^2-10x+25=0$, откуда $x=5$, что удовлетворяет условию (9).

Если $a=-16$, то уравнение в (8) принимает вид $x^2+10x+25=0$, откуда $x=-5$, что также удовлетворяет условию (9).

2) Уравнение в (8) имеет ровно 2 корня, из которых только один удовлетворяет условию.

Чтобы были 2 корня, дискриминант должен быть положителен, откуда $a\in(-\infty;-16)\cup(4;+\infty)$. Один из корней уравнения должен принадлежать отрезку $[2;4]$, а другой – нет. Удобнее разбить этот случай ещё на два.

а) Одним из корней уравнения является $x=2$ или $x=4$.

Подставляя в уравнение системы (8) $x=2$, находим, что $a=\frac{17}{2}$. При этом a уравнение принимает вид $x^2-\frac{29}{2}x+25=0$, откуда $x=2$ или $x=\frac{25}{2}$. Система (8) имеет одно решение, поэтому $a=\frac{17}{2}$ подходит.

Аналогично действуем в случае, когда одним из корней является $x=4$. Находим, что $a=\dfrac{17}{4}$ и подстановкой этого значения в (8) убеждаемся, что оно подходит.

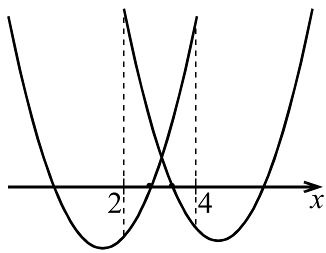

Рис. 10

б) Один из корней лежит на интервале $x\in(2;4)$, а другой – на множестве $x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$. Чтобы понять, при каких условиях это выполняется, нарисуем график левой части уравнения ($f(x)=x^2-(a+6)x+25$ – парабола с ветвями вверх – см. рис. 10.) Заметим, что в обоих случаях должно выполняться условие $f(2)\cdot f(4)<0$. Получаем неравенство $(4-2(a+6)+25)(16-4(a+6)+25)<0$, решая которое, находим, что $a\in\left(\dfrac{17}{4};\dfrac{17}{2}\right)$.

Объединяя все полученные результаты, получаем:

$$a\in\{-16;4\}\cup\left[\frac{17}{4};\frac{17}{2}\right].$$

Ответ: $a\in\{-16;4\}\cup\left[\dfrac{17}{4};\dfrac{17}{2}\right]$.

Замечание. В итоге нам подошли все значения a, при которых $f(2)\cdot f(4)\le 0$. Почему же мы отдельно разбирали случай, когда $f(2)=0$ или $f(4)=0$? Всё, что можно сказать об уравнении системы (8) при $f(2)=0$ – это, что $x=2$ является его корнем; при этом неизвестно, будет ли второй корень уравнения удовлетворять условию (9).

Пример 22. Найдите все пары чисел $(a;b)$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2+a(x+y)=x-y+a, \\ x^2+y^2+bxy=1 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x;y)$.

Решение. Разложим первое уравнение на множители:

$$(x-y)(x+y)+a(x+y)=x-y+a \Leftrightarrow (x-y+a)(x+y)=x-y+a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-y+a)(x+y-1)=0.$$

Тогда система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y+a=0,\\x^2+y^2+bxy=1,\end{cases}\\\begin{cases}x+y+1=0,\\x^2+y^2+bxy=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y-a,\\(y-a)^2+y^2+b(y-a)y=1,\end{cases}\\\begin{cases}x=-y-1,\\(y+1)^2+y^2-b(y+1)y=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y-a,\\(2+b)y^2-a(b+2)y+a^2-1=0,\end{cases}\\\begin{cases}x=-y-1,\\(2-b)y^2+(2-b)y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Количество решений каждой из систем равно количеству решений её второго уравнения[16]. Если числа $(2+b)$ и $(2-b)$ отличны от нуля, то второе уравнение каждой из систем является квадратным, следовательно, имеет не более двух решений. Тогда вся совокупность имеет не более четырёх решений.

Если $2-b=0$, то второе уравнение второй системы выполняется при любых y, т. е. вторая система, а вместе с ней и вся совокупность имеют бесконечно много решений[17]. При этом параметр a может принимать любые значения.

Если $2+b=0$, то $b=-2$ и вторая система имеет два решения. Тогда в первой системе нам нужно получить по крайней мере 3 решения[18]. При $b=-2$ первая система принимает вид $\begin{cases}x=y-a,\\a^2-1=0.\end{cases}$

Эта система имеет бесконечно много решений при $a=1$ или $a=-1$

Ответ: $(1;-2),(-1;-2),(t;2),t\in R$.

Пример 23. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $2x^2-ax-8=0$ и $x^3+bx-16=0$ имеют два общих корня.

Решение. Пусть x_0 – общий корень уравнений. Тогда при подстановке $x=x_0$ оба данных уравнения превращаются в верные равенства.

---

[16] Действительно, из первого уравнения системы для каждого y находится единственное значение x.

[17] Количество решений первой системы нас тогда не интересует.

[18] При этом они не должны совпадать с решениями второй системы!

Это означает, что общий корень x_0 является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_0^2 - ax_0 - 8 = 0, \\ x_0^3 + bx_0 - 16 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Так как общих корней должно быть два, то система (10) должна иметь два решения.

Из второго уравнения системы, умноженного на 2, вычтем первое уравнение системы, умноженное на x_0. Получаем

$$2bx_0 - 32 + ax_0^2 + 8x_0 = 0. \qquad (11)$$

Сложим уравнение (11) с первым уравнением системы (10), умноженным на $\left(-\frac{a}{2}\right)$:

$$\left(\frac{a^2}{2} + 2b + 8\right)x_0 + (4a - 32) = 0. \qquad (12)$$

Любое решение системы (10) удовлетворяет также уравнению (12), поэтому (12) должно иметь два решения, что возможно только при $\frac{a^2}{2} + 2b + 8 = 0$ и $4a - 32 = 0$. Решая эти два уравнения, получаем $a = 8$, $b = -20$.

Подставим найденные значения параметров в систему (10) и убедимся, что она действительно имеет два решения[19]:

$$\begin{cases} 2x_0^2 - 8x_0 - 8 = 0, \\ x_0^3 - 20x_0 - 16 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение. Подбирая у него целочисленный корень $x_0 = -4$ и выполняя деление левой части на $(x_0 + 4)$, получаем $(x_0 + 4)(x_0^2 - 4x_0 - 4) = 0$. Значит, уравнения системы имеют два общих корня, и система имеет два решения.

Ответ. $a = 8$, $b = -20$.

---

[19] Для чего надо подставлять? Дело в том, что уравнение (12) является следствием системы (10), т.е. каждое решение системы является также решением уравнения. Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. решения уравнения (12) могут и не удовлетворять системе (10). При найденных значениях параметров уравнение (12) имеет бесконечно много решений. Далее надо убедиться, что система (10) имеет 2 решения.

Пример 24. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2^x(y+1)\left(1-y\cdot 2^x\right)=a^3, \\ \left(1+2^x\right)\left(1-y\cdot 2^x\right)=a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Если $a=0$, то система имеет решения (любая пара чисел, удовлетворяющая условию $1-y\cdot 2^x=0$, является решением системы, например, $x=0$, $y=1$).

Если $a\neq 0$, то обе части уравнений отличны от нуля, поэтому имеем право разделить первое уравнение на второе. Получаем $\dfrac{2^x}{2^x+1}(y+1)=a^2$, откуда

$$y=a^2+a^2\cdot 2^{-x}-1. \qquad (13)$$

Подставляем это во второе уравнение исходной системы и преобразуем:

$$\left(1+2^x\right)\left(1-2^x\cdot a^2-a^2+2^x\right)=a \Leftrightarrow \left(1+2^x\right)^2\left(1-a^2\right)=a. \qquad (14)$$

Для того, чтобы система имела хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (14) имело хотя бы одно решение (так как каждому значению x, найденному из (14), соответствует единственное значение y из (13)).

При $a=\pm 1$ уравнение (14) не имеет решений, а при всех остальных a оно равносильно следующему: $\left(1+2^x\right)^2=\dfrac{a}{1-a^2}$. Множество значений функции в левой части уравнения – это промежуток $(1;+\infty)$. Поэтому уравнение имеет хотя бы одно решение при $\dfrac{a}{1-a^2}\in(1;+\infty)$, откуда $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};-1\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};1\right)$.

Не забываем добавить в ответ также $a=0$, полученное нами в начале решения.

Ответ. $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};-1\right)\cup\{0\}\cup\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};1\right)$.

§4. Графические методы решения задач с параметрами

Пример 25. для каждого значения параметра a решите неравенство $|2x + a| \le x + 2$.

Решение. Сначала решим вспомогательную задачу. Рассмотрим данное неравенство как неравенство с двумя переменными x и a и изобразим на координатной плоскости xOa все точки, координаты которых удовлетворяют неравенству.

Если $2x + a \ge 0$ (т.е. на прямой $a = -2x$ и выше), то получаем $2x + a \le x + 2 \Leftrightarrow a \le 2 - x$.

Если $2x + a < 0$ (т.е. ниже прямой $a = -2x$), то получаем $-2x - a \le x + 2 \Leftrightarrow a \ge -2 - 3x$.

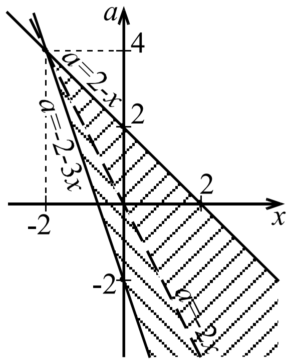

Рис. 11

Множество изображено на рис. 11.

Теперь решим с помощью этого чертежа исходную задачу. Если мы фиксируем a, то получаем горизонтальную прямую $a = \text{const}$. Чтобы определить значения x, надо найти абсциссы точек пересечения этой прямой с множеством решения неравенства. Например, если $a = 8$, то неравенство не имеет решений (прямая не пересекает множество); если $a = 1$, то решениями являются все x из отрезка $[-1; 1]$ и т. д. Итак, возможны три варианта.

1) Если $a > 4$, то решений нет.

2) Если $a = 4$, то $x = -2$.

3) Если $a < 4$, то решением неравенства является отрезок, причём левый конец отрезка лежит на прямой $a = -3x - 2$, а правый – на прямой $a = 2 - x$, т.е. $x \in \left[-\dfrac{a+2}{3}; 2 - a\right]$.

Ответ: при $a < 4$ – $x \in \left[-\dfrac{a+2}{3}; 2 - a\right]$;

при $a = 4$ – $x = -2$;

при $a > 4$ – решений нет.

Пример 26. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ а) имеет хотя бы одно решение; б) имеет хотя бы одно положительное решение.

Решение. Перепишем неравенство в виде $3-x^2>|x-a|$. Построим графики левой и правой частей на плоскости xOy. График левой части – это парабола с ветвями вниз с вершиной в точке $(0;3)$. График пересекает ось абсцисс в точках $(\pm\sqrt{3};0)$. График правой части – это угол с вершиной на оси абсцисс, стороны которого направлены вверх под углом 45° к осям координат. Абсцисса вершины – точка $x=a$.

а) Для того, чтобы неравенство имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одной точке парабола оказалась выше графика $y=|x-a|$. Это будет выполнено, если вершина уголка лежит между точками A и B оси абсцисс (см. рис. 12 – точки A и B не включаются). Таким образом, надо определить, при каком положении вершины одна из ветвей уголка касается параболы.

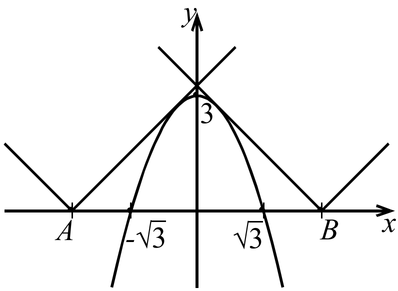

Рис. 12

Рассмотрим случай, когда вершина уголка находится в точке A. Тогда правая ветвь уголка касается параболы. Её угловой коэффициент равен единице. Значит производная функции $y=3-x^2$ в точке касания равна 1, т. е. $-2x=1$, откуда $x=-\frac{1}{2}$. Тогда ордината точки касания равна $y=3-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1\frac{1}{4}$. Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k=1$ и проходящей через точку с координатами $\left(-\frac{1}{2};1\frac{1}{4}\right)$, следующее[20]: $y-1\frac{1}{4}=1\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$, откуда $y=x+1\frac{3}{4}$.

Это уравнение правой ветви уголка. Абсцисса точки пересечения с осью x равна $-1\frac{3}{4}$, т. е. точка A имеет координаты $A\left(-1\frac{3}{4};0\right)$.

[20] Полезные формулы:

– прямая, проходящая через точку $(x_0;y_0)$ и имеющая угловой коэффициент k, задаётся уравнением $y-y_0=k(x-x_0)$;

– угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(x_0;y_0)$ и $(x_1;y_1)$, где $x_0\ne x_1$, вычисляется по формуле $k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$.

Из соображений симметрии точки B, она имеет координаты: $B\left(13/4;\,0\right)$.

Отсюда получаем, что $a\in\left(-13/4;\,13/4\right)$.

б) Неравенство будет иметь положительные решения, если вершина уголка находится между точками F и B (см. рис. 13). Найти положение точки F несложно: если вершина уголка находится в точке F, то его правая ветвь (прямая, задаваемая уравнением $y=x-a$) проходит через точку $(0;3)$. Отсюда находим, что $a=-3$ и $F(-3;0)$. Следовательно, $a\in\left(-3;\,13/4\right)$.

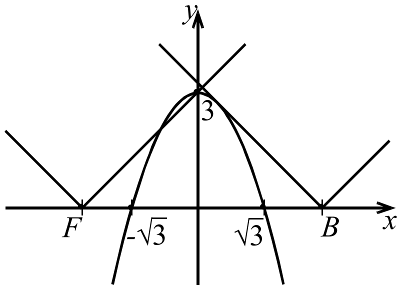

Рис. 13

Ответ: а) $a\in\left(-13/4;\,13/4\right)$, б) $a\in\left(-3;\,13/4\right)$.

Замечание. Если надо найти значение параметра, при котором касаются прямая $y=kx+l$ и парабола $y=ax^2+bx+c$, то можно записать условие, что уравнение $kx+l=ax^2+bx+c$ имеет ровно одно решение. Тогда значение параметра a, при котором вершина уголка находится в точке A, получаем так: уравнение $x-a=3-x^2$ имеет ровно одно решение $\Leftrightarrow D=1+4(a+3)=0\Leftrightarrow a=-\dfrac{13}{4}$. Обратите внимание, что таким образом нельзя записать условие касания прямой с произвольным графиком. Например, прямая $y=3x-2$ касается кубической параболы $y=x^3$ в точке $(1;1)$ и пересекает её в точке $(-2;-8)$, т. е. уравнение $x^3=3x-2$ имеет два решения.

Пример 27. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(a+1-|x+2|\right)\left(x^2+4x+1-a\right)=0$ имеет а) ровно два различных корня; б) ровно три различных корня.

Решение. Поступим так же, как и в примере 25. Изобразим множество решений этого уравнения на плоскости xOa. Оно равносильно совокупности.

$a = |x+2| - 1$ – это угол с ветвями вверх и вершиной в точке $(-2;-1)$.

$a = x^2 + 4x + 1$ – это парабола с ветвями вверх и вершиной в точке $(-2;-3)$. См. рис. 14.

Находим точки пересечения двух графиков. Правая ветвь угла задаётся уравнением $y = x + 1$. Решая уравнение $x + 1 = x^2 + 4x + 1$, находим, что $x = 0$ или $x = -3$. Подходит только значение $x = 0$ (т.к. для правой ветви $x + 2 \geq 0$). Тогда $a = 1$. Аналогично находим координаты второй точки пересечения – $(-4;1)$.

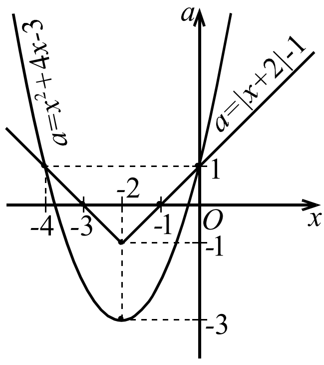

Рис. 14

Возвращаемся к исходной задаче. Уравнение имеет ровно два решения при тех a, при которых горизонтальная прямая $a = \text{const}$ пересекает множество решений уравнения в двух точках. По графику видим, что это выполняется при $a \in (-3;-1) \cup \{1\}$. Ровно три решения будут в случае трёх точек пересечения, что возможно только при $a = -1$.

Ответ: а) $a \in (-3;-1) \cup \{1\}$; б) $a = -1$.

Пример 28. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 - x + a \leq 0, \\ x^2 + 2x - 6a \leq 0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

Решение. Изобразим решения системы неравенств на плоскости xOa. Перепишем систему в виде $\begin{cases} a \leq -x^2 + x, \\ a \geq \dfrac{x^2 + 2x}{6}. \end{cases}$

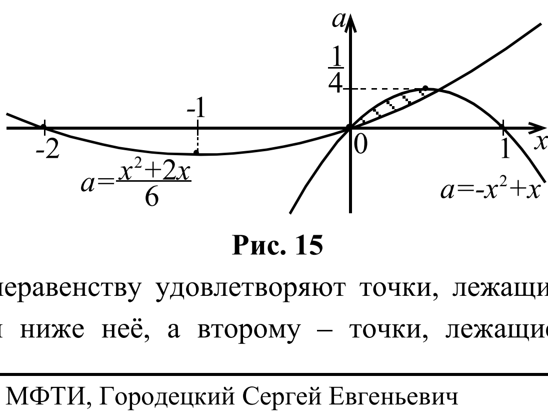

Рис. 15

Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие на параболе $a = -x^2 + x$ и ниже неё, а второму – точки, лежащие на параболе

$a=\dfrac{x^2+2x}{6}$ и выше неё. Находим координаты вершин парабол и точек их пересечения, а затем строим график. Вершина первой параболы – $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, второй параболы – $\left(-1;-\frac{1}{6}\right)$, точки пересечения – $(0;0)$ и $\left(\frac{4}{7};\frac{12}{49}\right)$. Множество точек, удовлетворяющих системе, изображено на рис. 15. Видно, что горизонтальная прямая $a=\mathrm{const}$ имеет с этим множеством ровно одну общую точку (а значит, система имеет ровно одно решение) в случаях $a=0$ и $a=\frac{1}{4}$.

Ответ: $a=0$, $a=\frac{1}{4}$.

Пример 29. Найдите наименьшее значение параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+3a^2=2y+2\sqrt{3}ax, \\ \sqrt{3}|x|-y=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем первое уравнение, *выделяя полные квадраты*:

$$\left(x^2-2\sqrt{3}ax+3a^2\right)+\left(y^2-2y+1\right)=1 \Leftrightarrow \left(x-a\sqrt{3}\right)^2+\left(y-1\right)^2=1. \qquad (15)$$

В отличие от предыдущих задач здесь лучше изобразить чертёж[21] на плоскости xOy. Уравнение (15) задаёт окружность с центром $\left(a\sqrt{3};1\right)$ радиуса 1. Центр этой окружности в зависимости от значения a может находиться в любой точке прямой $y=1$.

Второе уравнение системы $y=\sqrt{3}|x|-4$ задаёт угол со сторонами вверх под углом 60° к оси абсцисс[22] с вершиной в точке $(0;-4)$.

[21] Чертёж в плоскости “переменная – параметр” обычно используется для задач с одной переменной и одним параметром – в результате получается множество на плоскости. В данной задаче мы имеем дело с двумя переменными и параметром. Изобразить множество точек $(x;\, y;\, a)$ в трёхмерном пространстве – это трудная задача; к тому же, такой чертёж вряд ли получится наглядным.

[22] Угловой коэффициент прямой – это тангенс угла наклона, а $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$.

Данная система уравнений имеет ровно одно решение, если окружность касается одной из ветвей уголка. Это возможно в четырёх случаях (рис. 16): центр окружности может находиться в одной из точек A, B, C, D. Поскольку нам надо найти наименьшее значение параметра a, нас интересует абсцисса точки D. Рассмотрим прямоугольный треугольник DHM. Расстояние от точки D до прямой HM равно радиусу окружности, поэтому

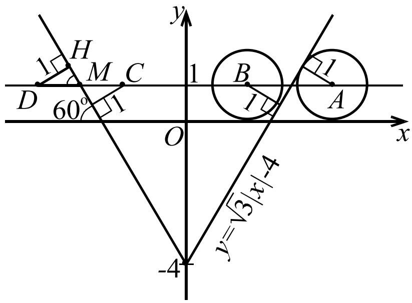

Рис. 16

$DH=1$. Значит, $DM=\dfrac{DH}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Координаты точки M находятся как координаты точки пересечения двух прямых $y=1$ и $y=-\sqrt{3}x-4$ (левая сторона угла). Получаем $M\left(-\dfrac{5}{\sqrt{3}};1\right)$. Тогда абсцисса точки D равна $-\dfrac{5}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=-\dfrac{7}{\sqrt{3}}$.

Поскольку абсцисса центра окружности равна $a\sqrt{3}$, отсюда следует, что $a=-\dfrac{7}{3}$.

Ответ: $a=-\dfrac{7}{3}$.

Пример 30. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|4x+3y|\le 12a,\\ x^2+y^2\le 14ax+6ay-57a^2+16a+64\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Изобразим множества решений каждого из неравенств на плоскости xOy.

Во втором неравенстве выделим полные квадраты:

$$x^2-14ax+49a^2+y^2-6ay+9a^2\le a^2+16a+64 \Leftrightarrow (x-7a)^2+(y-3a)\le (a+8)^2 \quad (16)$$

При $a+8=0$ ($a=-8$) неравенство (16) задаёт точку с координатами $(7a;3a)$, т. е. $(-56;-24)$. При всех остальных значениях a (16) задаёт круг с центром в точке $(7a;3a)$ радиуса $|a+8|$.

Рассмотрим первое неравенство.

1) Очевидно, что при отрицательных a оно не имеет решений. Значит, не имеет решений и система.

2) Если $a=0$, то получаем прямую $4x+3y=0$. Из первого неравенство при этом получается круг с центром $(0;0)$ радиуса 8. Очевидно, выходит более одного решения.

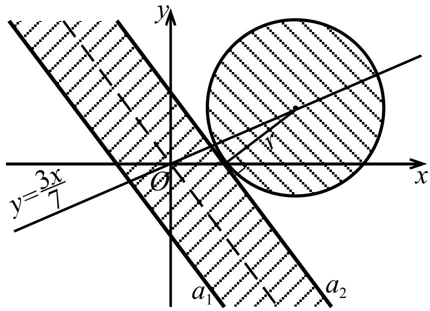

Рис. 17

3) Если $a>0$, то данное неравенство равносильно двойному неравенству $-12a \le 4x+3y \le 12a$. Оно задаёт полосу между двумя прямыми $y=\pm 3a-\frac{4x}{3}$, каждая из которых параллельна прямой $4x+3y=0$ (рис. 17).

Поскольку мы рассматриваем $a>0$, центр круга расположен в первой четверти на прямой $y=\frac{3x}{7}$. Действительно, координаты центра – это $x=7a$, $y=3a$; выражая a и приравнивая, получаем $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}$, откуда $y=\frac{3x}{7}$. Для того, чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы круг касался прямой a_2. Это происходит, когда радиус окружности равен расстоянию от центра окружности до прямой a_2. По формуле расстояния от точки до прямой[23] получаем, что расстояние от точки $(7a;3a)$ до прямой $4x+3y-12a=0$ равно

[23] Пусть даны точка $M(x_0;y_0)$ и прямая l, заданная уравнением $ax+by+c=0$. Тогда расстояние от точки M до прямой l определяется формулой $\rho=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$\frac{|4\cdot 7a+3\cdot 3a-12a|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5|a|$. Приравнивая к радиусу круга, получаем $5|a|=|a+8|$. Так как $a>0$, опускаем модули и находим, что $a=2$.

Ответ: $a=2$.

Пример 31. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}|x|+|y|=1,\\ |x+a|+|y+a|=1\end{cases}$$ не имеет решений?

Решение. Первое уравнение системы задаёт на плоскости xOy квадрат $ABCD$[24] (см. рис. 18). Второе уравнение задаёт квадрат $PQRS$, равный квадрату $ABCD$, но с центром в точке $(-a;-a)$. На рис. 18 для примера изображён этот квадрат для $a=-2$. Система не будет иметь решений, если эти два квадрата не пересекаются.

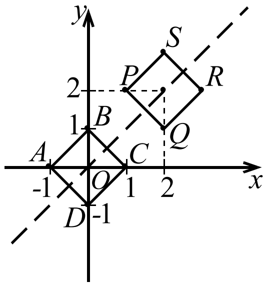

Рис. 18

Несложно видеть, что если отрезки PQ и BC совпадают, то центр второго квадрата находится в точке $(1;1)$. Нам подойдут те значения a, при которых центр расположен “выше” и “правее”, т. е. $a<-1$. Аналогично рассматриваем случай, когда центр квадрата $PQRS$ находится в третьей четверти. Тогда подходят значения $a>1$.

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Пример 32. Найдите все значения параметра b, при которых система $\begin{cases}y=|b-x^2|,\\ y=a(x-b)\end{cases}$

имеет хотя бы одно решение при любом значении a.

---

[24] Чтобы его построить, рассмотрим $x\ge 0$ и $y\ge 0$. Тогда уравнение принимает вид $x+y=1$. Получаем отрезок – часть прямой $x+y=1$, лежащую в первой четверти. Далее отражаем этот отрезок относительно оси Ox, а затем полученное множество отражаем относительно оси Oy.

Решение. Рассмотрим несколько случаев.

1) Если $b<0$, то выражение под модулем в первом уравнении отрицательно. Раскрывая модуль, получаем $y=x^2-b$. Графиком является парабола с ветвями вверх и вершиной в точке $(0;-b)$, расположенной выше оси абсцисс (так как $b<0$). Но во втором уравнении при $a=0$ получается прямая $y=0$, не имеющая с параболой никаких общих точек. Значит, система имеет решения не при любых a, и $b<0$ не подходит.

2) Если $b=0$, то система принимает вид $\begin{cases} y=x^2, \\ y=ax. \end{cases}$

При любом a пара чисел $(0;0)$ является решением этой системы, следовательно, $b=0$ подходит.

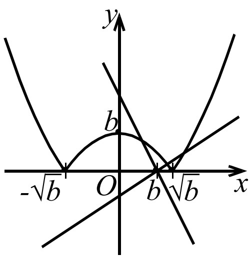

Рис. 19а

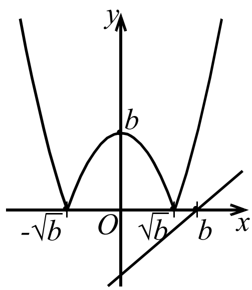

Рис. 19б

3) Зафиксируем некоторое $b>0$. Первому уравнению удовлетворяет множество точек, полученное из параболы $y=x^2-b$ отражением части этой параболы относительно оси Ox (см. рис. 19а, б). Второе уравнение задаёт семейство прямых[25], проходящих через точку $(b;0)$. Если точка $(b;0)$ лежит на отрезке $\left[-\sqrt{b};\sqrt{b}\right]$ оси абсцисс, то прямая пересечёт график первой функции при любом угловом коэффициенте (рис. 19а). Иначе (рис. 19б) в любом случае найдётся прямая, не пересекающая данный график. Решая неравенство $-\sqrt{b}\le b\le\sqrt{b}$ и учитывая, что $b>0$, получаем, что $b\in(0;1]$.

Объединяем результаты: $b\in[0;1]$.

Ответ: $b\in[0;1]$.

[25] Подставляя различные значения a, можно получить всевозможные прямые, проходящие через точку $(b;0)$, кроме вертикальной.

Пример 33. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-\left|x-a^2\right|-3x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение. Раскрывая модуль, получаем, что

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+a^2, & x\geq a^2, \\ x^2-2x-a^2, & x\leq a^2. \end{cases}$$

На каждом из двух промежутков графиком функции $y=f(x)$ является парабола с ветвями вверх. Поскольку параболы с ветвями вверх не могут иметь точек максимума, единственная возможность заключается в том, что точкой максимума является граничная точка этих промежутков – точка $x=a^2$. В этой точке будет максимум, если вершина параболы $y=x^2-4x+a^2$ попадёт

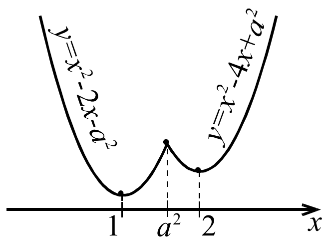

Рис. 20

на промежуток $x>a^2$, а вершина параболы $y=x^2-2x-a^2$ – на промежуток $x<a^2$ (см. рис. 20). Это условие задаётся неравенствами $2>a^2$ и $1<a^2$, решая которые, находим, что $a\in\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$.

Ответ: $a\in\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$.

Пример 34. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств

$$y+2x\geq a \text{ и } y-x\geq 2a \qquad (17)$$

являются решениями неравенства

$$2y-x>a+3. \qquad (18)$$

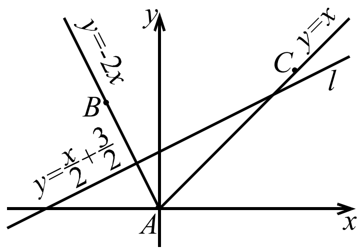

Рис. 21

Решение. Чтобы сориентироваться в ситуации, иногда бывает полезным рассмотреть какое-нибудь одно значение параметра. Сделаем чертёж, например, для $a=0$. Неравенствам(17)[26] удовлетворяют точки угла BAC (см. рис. 21) – точки, каждая из которых лежит выше обеих прямых $y=-2x$ и $y=x$ (или на этих прямых). Неравенству (18) удовлетворяют точки, лежащие выше прямой $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Видно, что при $a=0$ условие задачи не выполняется.

[26] Фактически мы имеем дело с системой неравенств (12).

Что изменится, если мы возьмём другое значение параметра a? Каждая из прямых переместится и перейдёт в *параллельную самой себе* прямую, так как угловые коэффициенты прямых не зависят от a. Чтобы выполнялось условие задачи, нужно, чтобы весь угол BAC лежал выше прямой l. Так как угловые коэффициенты прямых AB и AC по модулю больше углового коэффициента прямой l, необходимо и достаточно, чтобы вершина угла лежала выше прямой l.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y + 2x = a, \\ y - x = 2a, \end{cases}$$

находим координаты точки $A\left(-\frac{a}{3}; \frac{5a}{3}\right)$. Они должны удовлетворять неравенству (13), поэтому $\frac{10a}{3} + \frac{a}{3} > a + 3$, откуда $a > \frac{9}{8}$.

Ответ: $a > \frac{9}{8}$.

Контрольные вопросы и задачи

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2y - \sqrt{2x - 3y} = 3, \\ 2x + y = a \end{cases}$$

удовлетворяет условию $x - 2y = 0$.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2}{\log_x 64} = \frac{135 \log_{32} x}{(x - a)^4}$$

не имеет корней.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - (a + 2)x + 2a = 6(x - a)\sqrt{x}$ имеет единственный корень.

4. а) Найдите все значения параметра q, при каждом из которых уравнение $(x+4)|x-2| = 7-q$ имеет ровно два корня.

б) Найдите все значения параметра q, при каждом из которых уравнение $\left|x^2+7x-13\right| = 7-q$ имеет ровно три корня.

в) Найдите все значения параметра q, при каждом из которых уравнение $x^2-5|x|-4 = 7-q$ имеет ровно три корня.

г) Найдите все значения параметра q, при каждом из которых ровно три корня уравнения $\left||x-q|-2\right| = \frac{3}{2}$ принадлежат промежутку $[-10; 6]$.

д) Найдите все значения параметра q, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{|2x-3|-7}{|2x-3|-11}\right| = q$ имеет ровно три корня.

5. Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x) = (3a+1)x + 9x^2 + x\cdot\frac{1-2x^2+x^4}{x^2-1}$ имеет точку минимума.

6. Найдите все значения b, при которых неравенство $\frac{x-7b-1}{x-2b} < 0$ выполняется для всех x таких, что $-3 \le x \le 1$.

7. Найдите все значения параметра q, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-6)^2 + (y-12)^2 = 4, \\ (x+1)^2 + y^2 = q^2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

8. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2ax + y^2 + 2ay \le 7a^2 - 6a + 1, \\ x^2 + 4ax + y^2 - 6ay \le 16 + 8a - 12a^2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

9. При каких значения параметра a, существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} \left(3x^2 + 3xy + 2y^2\right)\left(|x+y| - 8\right) \ge 0, \\ x(x-4) + y(y-2) = a\, ? \end{cases}$$

10. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 2a \le 0, \\ x^2 - 2x - 5a \ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $g(x) = 2ax + \left|x^2 - 8x + 15\right|$ больше 1.

12. Найдите все значения a такие, что для любого y выполняется неравенство $|y+3| + 2|y+2a| > 3 - 7y$.

13. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ |2x - y| = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

14. Найдите все значения p и q такие, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6|y| + 13 \le q^2, \\ y = px - 4\sqrt{2} \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{-x^2 + 6x + 16} - ax = 5 + 6a$ имеет ровно одно решение.

16. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(\log_4(x-a) - \log_4(x+a)\right)^2 + 8a\left(\log_4(x-a) - \log_4(x+a)\right) + 15a^2 + 2a - 1 = 0$ имеет ровно два корня.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{6-x}(a + x + 3) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 6)$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - |x - 2a - 2015| = |x + 2a + 2015| - \frac{1}{2}(2a + 2015)^2$ имеет ровно одно решение.