

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа**

МАТЕМАТИКА

Планиметрия (часть II)

Задание №5 для 9-х классов

(2016 – 2017 учебный год)



г. Долгопрудный, 2017

Составитель: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №5 для 9-х классов (2016 – 2017 учебный год), 2017, 27 с.

Дата отправления заданий по математике 27 марта 2017 г.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и требуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:

Пиголкина Татьяна Сергеевна

Подписано 20.02.17. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,68.

Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 600. Заказ №10-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.

ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение**,

тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение**,

тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение**.

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© МФТИ, ЗФТШ, 2017

Все права защищены. Воспроизведение учебно-методических материалов и материалов сайта ЗФТШ в любом виде, полностью или частично, допускается только с письменного разрешения правообладателей.

Содержание:

§ 1. Свойства касательных, хорд и секущих.

1. Две касательные из одной точки.
2. Угол между касательной и хордой с общей точкой на окружности.
3. Свойства хорд.
4. Две касающиеся окружности.

§ 2. Площадь треугольника (5 основных формул). Сравнение площадей треугольников.

§ 3. 1. Площадь четырёхугольника. 2. Площадь трапеции. Характерные задачи.

Контрольные вопросы.

Задачи.

§ 1. Свойства касательных, хорд и секущих

1. Две касательные из одной точки.

Пусть к окружности с центром в точке O проведены две касательные AM и AN , точки M и N лежат на окружности (рис. 1).

По определению касательной $OM \perp AM$ и $ON \perp AN$. В прямоугольных треугольниках AOM и AON гипотенуза AO общая, катеты OM и ON равны, значит, $\triangle AOM = \triangle AON$. Из равенства этих треугольников следует $AM = AN$ и $\angle MAO = \angle NAO$. Таким образом, если из точки к окружности проведены две касательные, то:

1.1°. отрезки касательных от этой точки до точек касания равны;

1.2°. прямая, проходящая через центр окружности и заданную точку, делит угол между касательными пополам.

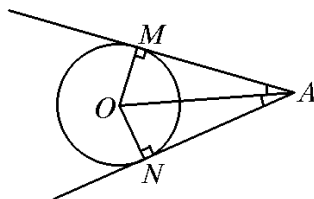


Рис. 1

Используя свойство 1.1°, легко решим следующие две задачи. (В решении используется тот факт, что в каждый треугольник можно вписать окружность).

Задача 1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D , при этом $DA = a$, $DC = b$ (рис. 2). Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC , касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти отрезок MN .

Пусть $a > b$. Обозначим $x = MN$, $y = ND$, $z = BM$.

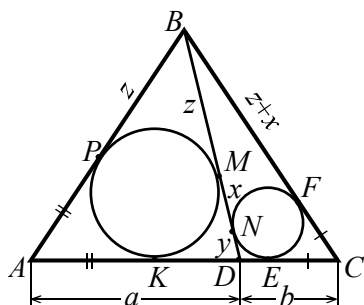


Рис. 2

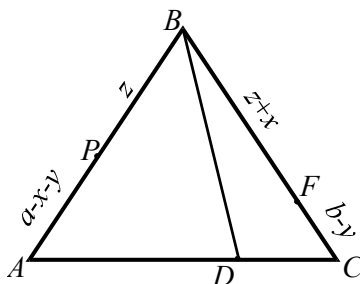


Рис. 2а

По свойству касательных $DE = y$, $KD = x + y$, $AK = AP = a - (x + y)$, $CE = CF = b - y$, $BP = z$ и $BF = z + x$. Выразим боковые стороны (рис. 2а): $AB = z + a - x - y$, $BC = z + x + b - y$. По условию $AB = BC$, поэтому $z + a - x - y = z + x + b - y$. Отсюда находим $x = (a - b)/2$, т. е.

$MN = (a - b)/2$. Если $a < b$, то $MN = (b - a)/2$. Итак, $MN = \frac{1}{2}|a - b|$. ▲

Ответ: $\frac{|a - b|}{2}$.

Задача 2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов вписанной и описанной окружностей, т. е. $a + b = 2R + 2r$.

Пусть M , N и K – точки касания окружностью сторон прямоугольного треугольника ABC (рис. 3), $AC = b$, $BC = a$, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности. Вспомним, что гипотенуза есть диаметр описанной окружности: $AB = 2R$. Далее, $OM \perp AC$, $ON \perp BC$, значит,

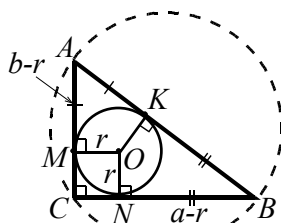


Рис. 3

$OM \parallel BC$, аналогично $ON \perp BC$, $AC \perp BC$, значит, $ON \parallel AC$. Четырёхугольник $MONC$ по определению есть квадрат, все его стороны равны r , поэтому $AM = b - r$ и $BN = a - r$.

По свойству касательных $AK = AM$ и $BK = BN$, поэтому $AB = AK + KB = a + b - 2r$, а т. к. $AB = 2R$, то получаем $a + b = 2R + 2r$. ▲

Свойство 1.2° сформулируем по другому: центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этих углов.

Задача 3. Около окружности с центром в точке O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 4а).

а) Доказать, что $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$.

б) Найти радиус окружности, если $BO = \sqrt{5}$ и $AO = 2\sqrt{5}$. (рис. 4б)

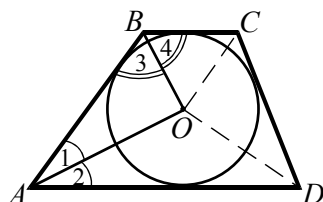


Рис. 4а

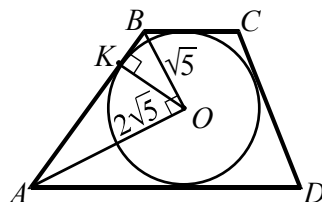


Рис. 4б

а) Окружность вписана в угол BAD , по свойству 1.2° AO — биссектриса угла A , $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle A$; BO — биссектриса угла B , $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} \angle B$. Из параллельности прямых AD и BC следует, что $\angle A + \angle B = 180^\circ$, поэтому в треугольнике AOB из $\angle 1 + \angle 3 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90^\circ$ следует $\angle AOB = 90^\circ$.

Аналогично CO и DO биссектрисы углов C и D трапеции, $\angle COD = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D) = 90^\circ$.

б) Треугольник AOB прямоугольный с катетами $AO = 2\sqrt{5}$ и $BO = \sqrt{5}$. Находим гипотенузу $AB = \sqrt{20 + 5} = 5$. Если окружность касается стороны AB в точке K , то $OK \perp AB$ и OK — радиус окружно-

сти. По свойству прямоугольного треугольника $AB \cdot OK = AO \cdot BO$, откуда $OK = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5} = 2$. ▲

Ответ: 2.

2. Угол между касательной и хордой с общей точкой на окружности.

Напомним, что градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Теорема 1. Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги, заключённой между его сторонами.

□ Пусть O – центр окружности, AN – касательная (рис. 5). Угол между касательной AN и хордой AB обозначим α . Соединим точки A и B с центром окружности. Так как $OA \perp AN$, $OA = OB$, то $\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \alpha$. Сумма углов треугольника равна 180° , поэтому $\angle AOB = 2\alpha$.

Таким образом, градусная мера угла между касательной и хордой равна половине градусной меры дуги AnB , которая заключена между его сторонами, и, значит, угол BAN равен любому вписанному углу, опирающемуся на дугу AnB . (Аналогичные рассуждения можно провести и для угла MAB). ■

Задача 4. Точка C лежит на окружности и отстоит от касательных, проведённых из точки M к окружности, на расстоянии $CS = a$ и $CP = b$ (рис. 6). Доказать, что $CK = \sqrt{ab}$.

△ Проведём хорды CA и CB . Угол SAC между касательной SA и хордой AC равен вписанному углу ABC . А угол PBC между касательной PB и хордой BC равен вписанному углу BAC . Получили две пары подобных прямоугольных треугольников $\triangle ASC \sim \triangle BKC$ и $\triangle BPC \sim \triangle AKC$. Из подобия имеем $\frac{a}{AC} = \frac{x}{BC}$ и $\frac{b}{BC} = \frac{x}{AC}$, откуда следует $ab = x^2$, $x = \sqrt{ab}$.

(Если проекция точки C на прямую AB лежит вне отрезка AB , доказательство изменяется не сильно). (Ч. т. д.) ▲

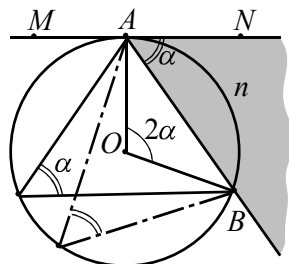


Рис. 5

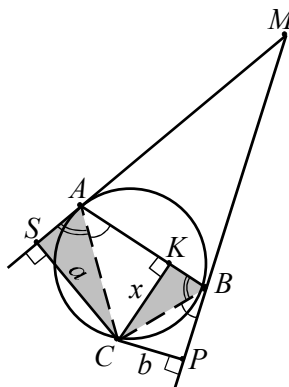


Рис. 6

Приём, применённый в решении, – проведение «недостающих» хорд – часто помогает в задачах и теоремах с окружностью и касательной, как, например, в доказательстве следующей теоремы «о касательной и секущей».

Теорема 2. Если из одной точки M к окружности проведены касательная MA и секущая MB , пересекающая окружность в точке C (рис. 7). То справедливо равенство $MA^2 = MB \cdot MC$, т. е. если из точки M к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки M до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки M до точек её пересечения с окружностью.

□ Проведём хорды AC и AB . Угол MAC между касательной и хордой равен вписанному углу ABC , оба измеряются половиной градусной меры дуги AC . В треугольниках MAC и MBA равны углы MAC и MBA , а угол при вершине M общий. Эти треугольники подобны, из подобия имеем $MA/MB = MC/MA$, откуда следует $MA^2 = MB \cdot MC$. ■

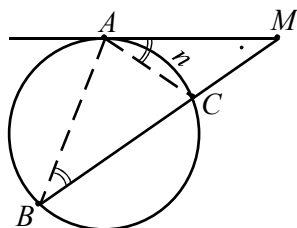


Рис. 7

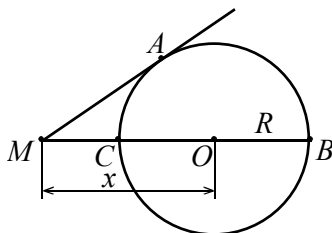


Рис. 8

Задача 5. Радиус окружности равен R . Из точки M проведены касательная MA и секущая MB , проходящая через центр O окружности (рис. 8). Найти расстояние между точкой M и центром окружности, если $MB = 2MA$.

△ Обозначим искомое расстояние x : $x = MO$, тогда $MB = x + R$, $MC = x - R$ и по условию $MA = MB/2 = (x + R)/2$. По теореме о касательной и секущей $(x + R)^2/4 = (x + R)(x - R)$, откуда, сокращая на $(x + R)$, получаем $(x + R)/4 = (x - R)$. Легко находим $x = \frac{5}{3}R$. ▲

Ответ: $\frac{5}{3}R$.

3. Свойство хорд окружности

Полезно доказать эти свойства самостоятельно (лучше закрепляется), можете разобрать доказательства по учебнику.

1.3°. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам. Обратно: диаметр, проходящей через середину хорды (не являющуюся диаметром) перпендикулярен ей.

1.4°. Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от центра окружности. Обратно: на равном расстоянии от центра окружности находятся равные хорды.

1.5°. Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны (рис. 9 подскажет путь доказательства).

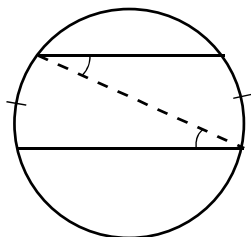


Рис. 9

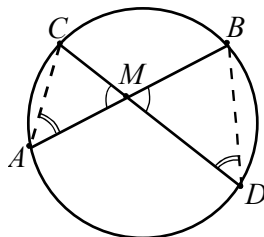


Рис. 10

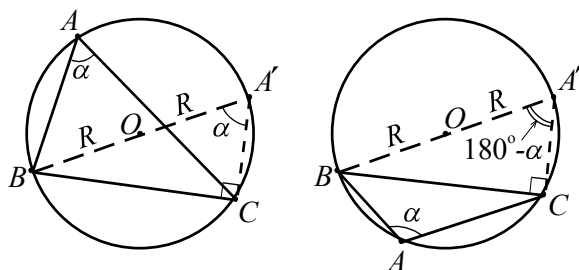
1.6°. Если две хорды AB и CD пересекаются в точке M , то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, т. е. произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды (на рис. 10 $\triangle AMC \sim \triangle DMB$).

Следующее утверждение докажем.

1.7°. Если в окружности радиуса R вписанный угол, опирающийся на хорду длины a , равен α , то $a = 2R \sin \alpha$.

■ Пусть в окружности радиуса R хорда $BC = a$, вписанный угол BAC опирается на хорду a , $\angle BAC = \alpha$ (рис. 11 а,б).

Проведём диаметр BA' и рассмотрим прямоугольный треугольник $BA'C$ ($\angle BCA' = 90^\circ$, опирается на диаметр).



а) Рис. 11 б)

Если угол A острый (рис. 11а), то центр O и вершина A лежат по одну сторону от прямой BC , $\angle A' = \angle A$ и $BC = BA' \cdot \sin A'$, т. е. $a = 2R \sin A$.

Если угол A тупой, центр O и вершина A лежат по разные стороны от прямой BC (рис. 11б), тогда $\angle A' = 180^\circ - \angle A$ и $BC = BA' \cdot \sin A'$, т. е. $a = 2R \sin(180^\circ - A) = 2R \sin A$.

Если $\alpha = 90^\circ$, то BC – диаметр, $BC = 2R = 2R \sin 90^\circ$.

Во всех случаях справедливо равенство $a = 2R \sin \alpha$. ■

Итак, $a = 2R \sin \alpha$ или $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$. (*)

Задача 6. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC , в котором $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 2$ и угол $ABC = 150^\circ$.

В описанной около треугольника ABC окружности известен угол B , опирающийся на хорду AC . Из доказанной формулы следует $R = \frac{AC}{2 \sin B}$.

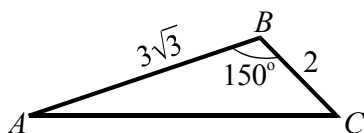


Рис. 12

Применим теорему косинусов к треугольнику ABC (рис. 12) при этом учтём, что

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ получим}$$

$$AC^2 = 27 + 4 + 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 49, AC = 7.$$

$$\text{Находим } R = \frac{AC}{2 \sin 150^\circ} = \frac{7}{2 \sin 30^\circ} = 7. \blacktriangle$$

Ответ: 7.

Используем свойство пересекающихся хорд для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC , тогда $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$, т. е. если $AB = c$, $AC = b$, $BD = x$, $DC = y$, то $AD^2 = bc - xy$ (рис. 13а).

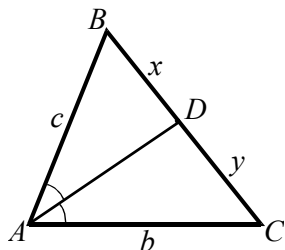


Рис. 13а

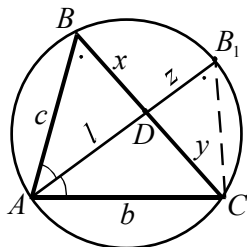


Рис. 13б

□ Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 13б) и точку пересечения продолжения биссектрисы AD с окружностью обозначим B_1 . Обозначим $AD = l$ и $DB_1 = z$. Вписанные углы ABC и AB_1C равны, AD – биссектриса угла A , поэтому $\triangle ABD \sim \triangle AB_1C$ (по двум углам). Из подобия имеем $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB_1}$, т. е. $\frac{l}{b} = \frac{c}{l+z}$, откуда $l^2 = bc - lz$.

По свойству пересекающихся хорд $BD \cdot DC = AD \cdot DB_1$, т. е. $xy = lz$, поэтому получаем $l^2 = bc - xy$. ■

4. Две касающиеся окружности

В заключении параграфа рассмотрим задачи с двумя касающимися окружностями. Две окружности, имеющие общую точку и общую касательную в этой точке, называются касающимися. Если окружности расположены по одну сторону от общей касательной, они называются касающимися внутренне (рис. 14а), а если расположены по разные стороны от касательной, то они называются касающимися внешне (рис. 14б).

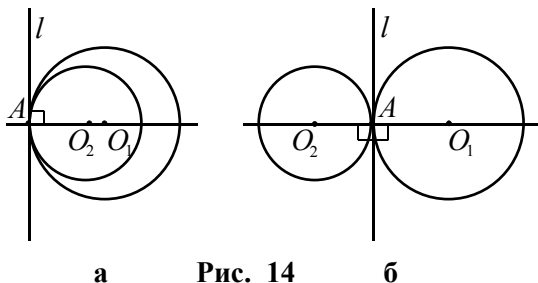


Рис. 14

Если O_1 и O_2 – центры окружностей, то по определению касательной $AO_1 \perp l$, $AO_2 \perp l$ следовательно, в обоих случаях *общая точка касания лежит на линии центров*.

Задача 7. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) внутренне касаются в точке A . Через точку B , лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C (рис. 15). Найти AB , если $BC = a$.

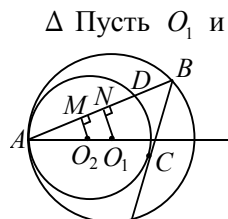


Рис. 15

Пусть O_1 и O_2 – центры большей и меньшей окружностей, D – точка пересечения хорды AB с меньшей окружностью. Если $O_1N \perp AB$ и $O_2M \perp AB$, то $AN = AB/2$ и $AM = AD/2$ (т. к. радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам). Из подобия треугольников AO_2M и AO_1N следует $AN : AM = AO_1 : AO_2$ и, значит, $AB : AD = R_1 : R_2$.

По теореме о касательной и секущей имеем:

$$BC^2 = AB \cdot BD = AB(AB - AD) = AB^2 \left(1 - \frac{AD}{AB}\right),$$

т. е. $a^2 = AB^2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)$.

Итак, $AB = a \sqrt{\frac{R_1}{R_1 - R_2}}$. ▲

Задача 8. Две окружности радиусов R_1 и R_2 внешне касаются в точке A (рис. 16). Их общая внешняя касательная касается большей окружности в точке B и меньшей – в точке C . Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

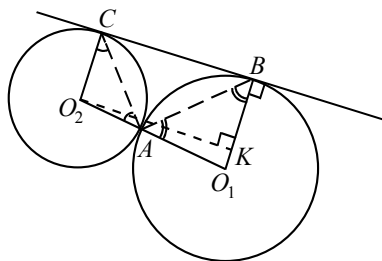


Рис. 16

Соединим центры O_1 и O_2 с точками B и C . По определению касательной, $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$. Следовательно, $O_1B \parallel O_2C$ и $\angle BO_1O_2 + \angle CO_2O_1 = 180^\circ$. Так как $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle BO_1A$ и $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle CO_2A$, то $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$. Отсюда следует, что $\angle BAC = 90^\circ$, и поэтому

радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC , равен половине гипотенузы BC .

Найдём BC . Пусть $O_2K \perp O_1B$, тогда $KO_2 = BC$, $O_1K = R_1 - R_2$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$. По теореме Пифагора находим

$$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = 2\sqrt{R_1R_2}, \quad BC = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

Итак, радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен $\sqrt{R_1R_2}$. В решении $R_1 > R_2$, при $R_1 < R_2$ ответ такой же. ▲

Ответ: $\sqrt{R_1R_2}$.

§ 2. Площадь треугольника

В школьном курсе геометрии доказано несколько формул площади треугольника. Напомним их.

Пусть A, B и C – углы треугольника ABC ; a, b и c – противолежащие этим углам стороны; h_a, h_b и h_c – высоты к этим сторонам; r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности; $2p = (a + b + c)$ – периметр треугольника; S – площадь треугольника.

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c, \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad (2)$$

$$S = pr, \quad (3)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ – формула Герона,} \quad (4)$$

$$S = \frac{abc}{4R}. \quad (5)$$

При вычислении площади из этих формул следует выбрать ту, которая в условиях конкретной задачи приводит к более простому решению.

В некоторых задачах полезно использовать две различные формулы площади одной фигуры.

Задача 9. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , в котором $AC = 7$, $BC = 5$ и $\angle ABC = 120^\circ$ (рис. 17).

△ Обозначим сторону $AB = x$ и применим теорему косинусов к треугольнику $ABC \left(\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \right)$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow 49 = x^2 + 25 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x+8)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

По формуле площади (2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{S_{ABC}}{p}$ формула (3).

Находим $p = \frac{1}{2}(3+5+7) = \frac{15}{2}$ и $r = \frac{\sqrt{3}}{2}. \blacktriangle$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

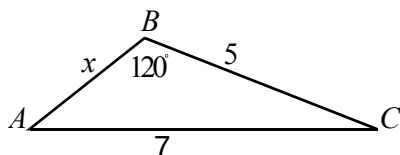


Рис. 17

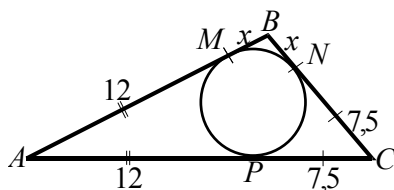


Рис. 18

Задача 10. Около окружности радиуса 5 описан треугольник. Найти его площадь, если одна из его сторон точкой касания делится на отрезки 12 и 7,5.

△ Пусть $AP = 12$, $PC = 7,5$ (рис. 18) и пусть $BM = x$. По свойству касательных $AM = AP$, $CN = CP$ и $BN = BM$, поэтому стороны треугольника таковы: $AC = 19,5$, $AB = 12 + x$, $BC = 7,5 + x$, тогда $p = 19,5 + x$. (Заметим, что $p = AC + BM$). По формулам площади (3) и (4) имеем: $S = pr = (19,5 + x) \cdot 5$; $S = \sqrt{(19,5 + x)x \cdot 7,5 \cdot 12}$. Приравниваем правые части, возводим в квадрат, приводим подобные члены, получаем $x = 7,5$. Вычисляем площадь треугольника:

$$S = pr = (19,5 + 7,5) \cdot 5 = 135. \blacktriangle$$

Ответ: 135.

Сравнение площадей треугольников обычно опирается на одно из следующих утверждений:

2.1°. Площадь треугольников с одинаковой высотой относятся как длины соответствующих оснований. В частности, если точка D лежит на основании AC (рис. 19), то $\frac{S_{DBC}}{S_{ABC}} = \frac{DC}{AC}$.

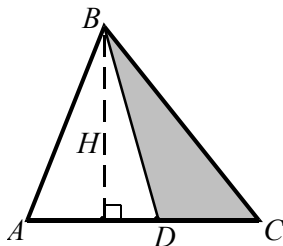


Рис. 19

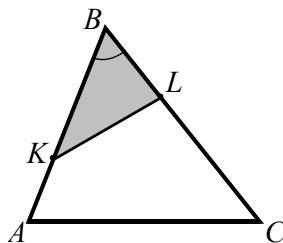


Рис. 20

2.2°. Площади треугольников с общим углом относятся как произведения сторон, заключающих этот угол (рис. 20): $\frac{S_{KBL}}{S_{ABC}} = \frac{BK \cdot BL}{BA \cdot BC}$.

2.3°. Площади подобных треугольников относятся как квадраты их сходственных сторон, т. е. если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2$.

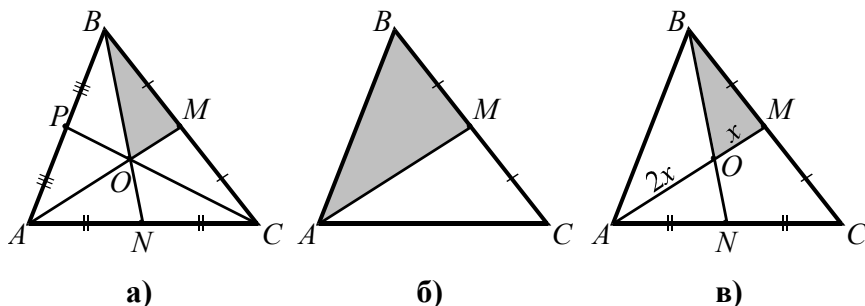


Рис. 21

Все эти утверждения легко доказываются с использованием соответственно формул площади (1) и (2).

Обратите внимание на важное свойство медиан треугольника.

Теорема 4. (о медианах). Три медианы треугольника разбивают его на 6 треугольников с общей вершиной и равными площадями.

□ Известно, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника $\triangle ABC$ площади S (рис. 21а). Надо доказать, что площади всех шести треугольников с вершиной в точке O , составляющих треугольник ABC , равны между собой, т. е. равны $\frac{1}{6}S$. Докажем, например, для треугольника BOM , что $S_{BOM} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.

Точка M – середина стороны BC (рис. 21б), по утверждению 2.1° о сравнении площадей $S_{ABM} = \frac{1}{2}S$. Медиана BN , пересекая медиану AM в точке O (рис. 21в), делит её в отношении $AO:OM = 2:1$, т. е. $OM = \frac{1}{3}AM$. По тому же утверждению 2.1° площадь треугольника BOM составляет $1/3$ площади треугольника ABM , т. е.

$$S_{BOM} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}S \right) = \frac{1}{6}S. \blacksquare$$

Задача 11. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 3 и 7, а медиана к третьей стороне равна 4 (рис. 22).

△ Пусть $AB=3$, $BC=7$, $AM=MC$ и $BM=4$. Достроим треугольник ABC до параллелограмма, для этого на прямой BM отложим отрезок $MD=BM$ и соединим точки:

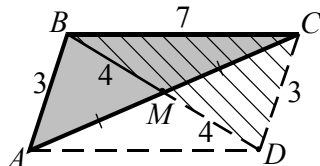


Рис. 22

A с D и C с D . Противоположные стороны параллелограмма равны: $DC=AB$. Равны и площади треугольников ABC и DBC (общее основание BC и равные высоты из вершин A и D). В треугольнике DBC известны все три стороны: $BC=7$, $DC=3$, $BD=2BM=8$.

Находим его площадь по формуле Герона: $p=9$, $S_{DBC} = 6\sqrt{3}$.

Значит и $S_{ABC} = 6\sqrt{3}$. ▲

Ответ: $6\sqrt{3}$.

В решении этой задачи дополнительным построение получен треугольник, площадь которого равна площади заданного и легко вычисляется по данным задачи. Приведём ещё одну задачу, где сначала вычисляется площадь дополнительно построенной фигуры, а затем легко находится искомая площадь.

Задача 12. Найти площадь треугольника, если его медианы равны 3, 4 и 5.

△ Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 23) и пусть $m_a = AM = 3$, $m_b = BN = 4$ и $m_c = CP = 5$.

По свойству медиан $AO = \frac{2}{3}m_a$, $CO = \frac{2}{3}m_c$ и $ON = \frac{1}{3}m_b$. В треугольнике AOC известны две стороны AO и CO и медиана третьей стороны ON . Площадь этого треугольника найдём как в предыдущей задаче. Построим треугольник AOC до параллелограмма $A OCD$, $S_{AOC} = S_{DOC}$, в треугольнике DOC известны три стороны:

$$DO = 2ON = \frac{2}{3}m_a, \quad OC = \frac{2}{3}m_c, \quad DC = AO = \frac{2}{3}m_b.$$

Площадь треугольника DOC вычисляем по формуле Герона

$S_1 = S_{AOC} = S_{DOC} = \frac{8}{3}$. Сравним теперь площадь треугольника ABC (обозначим её S) с площадью треугольника AOC . Из теоремы 2 о медианах и площадях следует $S_{AOC} = S_{AON} + S_{NOC} = 2 \cdot \frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S$.

Итак, $S = 3S_1 = 8$. ▲

Ответ: 8.

Докажем теорему об отношении площади треугольника к площади другого треугольника, построенного из медиан первого. Её доказательство опирается на рассуждения задачи 11.

Теорема 5. Площадь треугольника составленного из медиан данного треугольника, составляет $\frac{3}{4}$ его пло-

щади, т. е. $S_{m_a m_b m_c} = \frac{3}{4}S_{abc}$.

□ Рассмотрим рис. 23. В построенном треугольнике OCD стороны таковы:

$$OC = \frac{2}{3}m_c, \quad OD = \frac{2}{3}m_b, \quad CD = \frac{2}{3}m_a.$$

Очевидно, что треугольник со сторонами m_a, m_b, m_c подобен (по третьему признаку) треугольнику со

сторонами $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$.

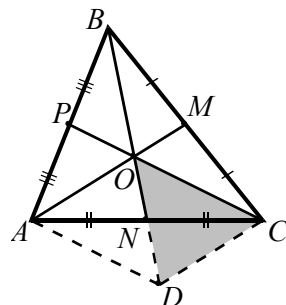


Рис. 23

Из решения предыдущей задачи следует, что $S_{OCD} = S_1 = \frac{1}{3}S$ (здесь S – площадь треугольника ABC). Кроме того, площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон, поэтому $\frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Таким образом, имеем $S_0 = \frac{9}{4}S_1 = \frac{3}{4}S$, т. е.

$$S_{m_a m_b m_c} = \frac{3}{4}S_{abc}. \blacksquare$$

Замечание. Из приведённых выше, рассуждений в решении задачи 11 следует, что всегда существует треугольник со сторонами, равными медианам данного треугольника, поскольку всегда существует подобный ему треугольник со сторонами $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$. Кроме того, становится ясным план построения треугольников по трём отрезкам, равным его медианам: сначала строится треугольник OCD (см. рис. 23) со сторонами $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$, затем точка N – середина отрезка OD , потом точка A (из $AN = NC$) и точка B (из $OB = OD$). Это построение осуществимо, если существует треугольник OCD , т. е. если существует треугольник со сторонами m_a, m_b, m_c . Итак, вывод: *три отрезка могут быть медианами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда из них можно составить треугольник.*

§ 3. Площадь четырёхугольника

1. В школьном учебнике выведены следующие формулы площади параллелограмма:

$$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b, \quad (6)$$

$$S = a \cdot b \sin \varphi,$$

(7)

где a и b – стороны параллелограмма, h_a и h_b – высоты к ним, φ – величина угла между сторонами параллелограмма.

Докажем теорему о площади четырёхугольника.

Теорема 6. Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними, т. е.

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \alpha, \quad (8)$$

где d_1 и d_2 – диагонали четырёхугольника, α – величина угла между ними.

□ $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, диагонали которого AC и BD пересекаются в точке O под углом α (рис. 24). Через вершины A и C проведём прямые, параллельные диагонали BD , а через вершины B и D проведём прямые, параллельные диагонали AC . Проведённые прямые в пересечении образуют параллелограмм со сторонами, равными диагоналям BD и AC , и углом α . Площадь параллелограмма равна $AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$, а площадь четырёхугольника $ABCD$ равна, как легко видеть, половине его площади, т. е.

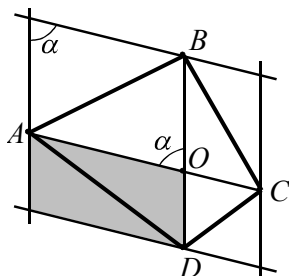


Рис. 24

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha. \blacksquare$$

Следствие. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Это сразу следует из доказанной формулы, т. к. диагонали ромба перпендикулярны.

Задача 13. Дан параллелограмм $ABCD$ площадь S_c тупым углом B . Из вершины B и D опущены перпендикуляры BH и DK на диагональ AC . Доказать, что $BHDK$ – параллелограмм и найти его площадь, если

$$AH = \frac{1}{5} AC.$$

Δ1. По свойству параллелограмма $AB = CD$ и по теореме 6

$$S = S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$$

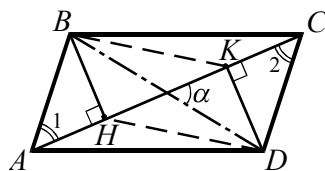


Рис. 25

(рис. 25).

Из $AB \parallel CD$ следует $\angle 1 = \angle 2$, прямоугольные треугольники ABH и CDK равны (по гипотенузе и острому углу), поэтому $BH = DK$ и $AH = CK$. Далее, $BH \perp AC$, $DK \perp AC \Rightarrow BH \parallel KD$.

В четырёхугольнике $BHDK$ противолежащие стороны BH и DK – равны и параллельны, по теореме $BHDK$ – параллелограмм.

2. $S_1 = S_{BHDK} = \frac{1}{2} HK \cdot BD \cdot \sin \alpha$, поэтому $\frac{S_1}{S} = \frac{HK}{AC}$. По условию $AH = \frac{1}{5} AC$, $AH = CK$ (доказано), следовательно $HK = AC - \frac{2}{5} AC = \frac{3}{5} AC$ и $\frac{S_1}{S} = \frac{3}{5}$. ▲

Ответ: $\frac{3}{5}$.

2. Рассмотрим несколько задач, где определяется или используется площадь трапеции. Напомним, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на её высоту, т. е.

$$S = \frac{a+b}{2} h. \quad (9)$$

Задача 14. Найти площадь трапеции, если её основания равны 16 и 44, а боковые стороны равны 17 и 25.

△ Через вершину C проведём $CK \parallel BA$ (рис. 26). $ABCK$ – параллелограмм, его противоположные стороны равны, поэтому в треугольнике KCD определены все стороны: $KC = AB = 25$, $CD = 17$, $KD = AD - BC = 28$.

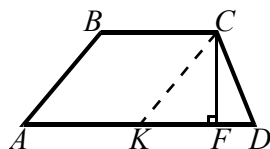


Рис. 26

По формуле Герона вычисляем площадь этого треугольника:

$p = 35$, $S_{KCD} = 210$. С другой стороны, $S_{KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CF$, если

$CF \perp AD$. Отсюда находим $CF = \frac{2S_{KCD}}{KD} = 15$ и вычисляем площадь

трапеции $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + AD) CF = 450$. ▲

Задача 15. Отрезок длины m , параллельный основаниям трапеции, разбивает её на две трапеции (рис. 27). Найти отношение площадей этих трапеций, если основания трапеции равны a и b ($b < a$).

△ Пусть $BC = b$, $AD = a$ и $MN = m$, и $MN \parallel AD$. Проведём $CE \parallel BA$ и $NF \parallel BA$, а так же $CK \perp MN$ и $NP \perp AD$. Обозначим $CK = h_1$, $NP = h_2$. Далее, т. к. $CE \parallel NF$, то

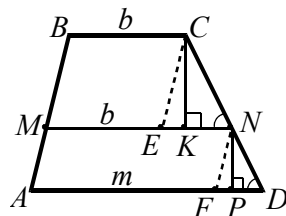


Рис. 27

$\angle ECN = \angle FND$, а из $MN \parallel AD$ следует $\angle ENC = \angle FDN$. Следовательно, треугольники ECN и FND имеют по два равных угла, они подобны. Из подобия имеем $\frac{EN}{FD} = \frac{CN}{ND}$. Прямоугольные треугольники KCN

и PND также подобны и $\frac{CK}{NP} = \frac{CN}{ND}$, поэтому $\frac{EN}{FD} = \frac{CK}{NP}$, т. е.

$\frac{m-b}{a-m} = \frac{h_1}{h_2}$. Если S_1 и S_2 – площади трапеций $MBCN$ и $AMND$, то

$$S_1 = \frac{1}{2}(b+m)h_1, \quad S_2 = \frac{1}{2}(a+m)h_2 \quad \text{и} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{(m+b)h_1}{(a+m)h_2} = \frac{m^2 - b^2}{a^2 - m^2}. \quad \blacktriangle$$

В задании 1 для 9 класса были доказаны некоторые свойства трапеции. Полезно их повторить, а мы добавим ещё некоторые свойства (докажите их самостоятельно).

3.1°. Диагонали трапеции разбивают её на 4 треугольника с общей вершиной. Треугольники, прилежащие к основанию подобны; треугольники, прилежащие к боковым сторонам, имеют равные площади (рис. 28).

3.2°. Если трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности с центром в точке O (рис. 29), то

1. $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ (доказано в задаче 3 §1 этого задания);
2. сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон;
3. площадь трапеции равна произведению суммы оснований на радиус окружности.

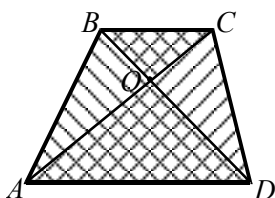


Рис. 28

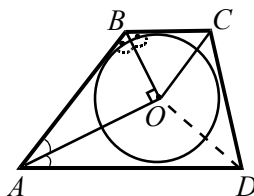


Рис. 29

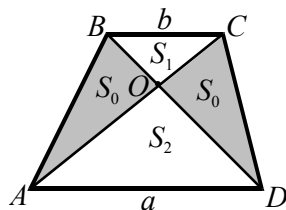


Рис. 30

Задача 16. Диагонали трапеции $ABCD$, пересекаясь, разбивают её на четыре треугольника с общей вершиной O (рис. 30). Найти площадь трапеции, если площади треугольников, прилежащих к основаниям равны S_1 и S_2 .

Δ По свойству 3.1° $S_{ABO} = S_{CDO}$, обозначим эту площадь S_0 (действительно, $S_{ABD} = S_{ACD}$, т. к. у них общие основания и равные высоты, т. е. $S_{AOB} + S_{AOD} = S_{COD} + S_{AOD}$, откуда следует $S_{AOB} = S_{COD}$). Так как $S_{ABC} = S_0 + S_1 = \frac{1}{2}bh$ и $S_{ACD} = S_0 + S_2 = \frac{1}{2}ah$, то $\frac{S_0 + S_1}{S_0 + S_2} = \frac{b}{a}$.

Далее, треугольники BOC и DOA подобны, площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, значит, $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$. Таким образом, $\frac{S_0 + S_1}{S_0 + S_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$. Отсюда находим $S_0 = \sqrt{S_1 S_2}$, и поэтому площадь трапеции будет равна $S_1 + S_2 + 2S_0 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. $\blacktriangle$

Ответ: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Задача 17. Около окружности описана равнобокая трапеция с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ (рис. 31). Найти: 1) радиус окружности r ;

2) косинус угла при большем основании.

Δ Трапеция описана около окружности, следовательно (свойство 3.2°, 2)

$$AB + CD = BC + AD.$$

Трапеция равнобокая, $AB = CD = \frac{a+b}{2}$.

Пусть $BK \perp AD$, по свойству 5° из задания 1 $AK = \frac{a-b}{2}$. Из прямоугольного треугольника ABK следует

$$BK = 2r = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab},$$

откуда $\boxed{r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}}$. Кроме того $\boxed{\cos A = \frac{a-b}{a+b}}$. $\blacktriangle$

Ответ: $r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, $\cos A = \frac{a-b}{a+b}$.

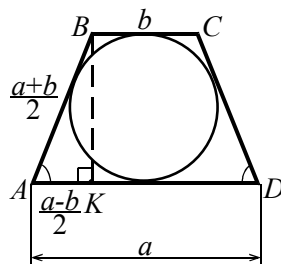


Рис. 31

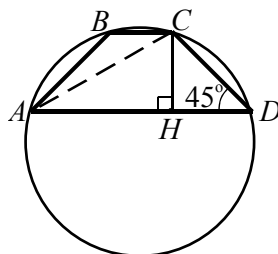


Рис. 32

Задача 18. Около трапеции $ABCD$ описана окружность. Основание AD образует со стороной AB угол 45° (рис. 32). Найти радиус окружности, если $AD=8$, $BC=6$.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \text{ Трапеция вписана в окружность: } \angle B + \angle D = 180^\circ, \\ BC \parallel AD: \angle B + \angle A = 180^\circ, \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A = \angle D \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ трапеция равнобока, $\angle A = \angle D = 45^\circ$.

Если $CH \perp AD$, то $HD = \frac{AD - BC}{2} = 1$. Треугольник CHD – прямоугольный равнобедренный $CH = HD = 1$.

На хорду AC опирается вписанный угол ADC , по формуле (*) §1

(на стр.9) $R = \frac{AC}{2 \sin 45^\circ}$. Хорду AC найдём из прямоугольного треугольника ACH :

$AC = \sqrt{(AD - HD)^2 + CH^2} = \sqrt{7^2 + 1} = 5\sqrt{2}$, тогда

$$R = \frac{5\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 5. \blacktriangle$$

Ответ: 5.

Контрольные вопросы

1(6). а) Точки C и D лежат по разные стороны от диаметра AB (рис. 33). Чему равен угол BDC , если $\angle ABC = 54^\circ$?

б) Чему равен угол α на рис. 34?

в) Около окружности описан пятиугольник, четыре последовательные стороны которого равны 1, 2, 3 и 4. Чему равна пятая сторона, если она выражается целым числом?

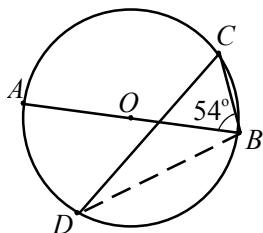


Рис. 33

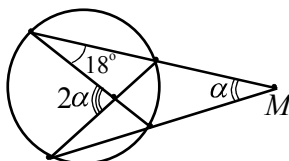


Рис. 34

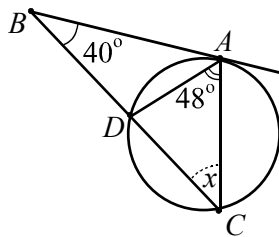


Рис. 35

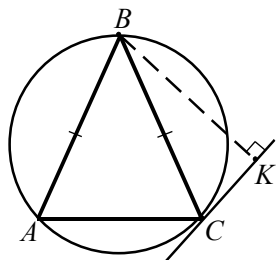


Рис. 36

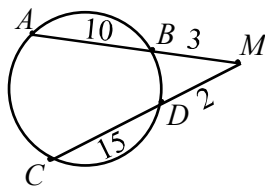


Рис. 37

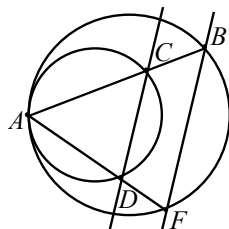


Рис. 38

2(4). а) Чему равен угол между касательной и хордой с общей точкой на окружности?

б) BA – касательная, BC – секущая (рис. 35). Чему равен угол x ?

в) В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC (рис. 36), в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AC = 2$. Чему равно расстояние от вершины B до касательной, проходящей через точку C ?

г) Могут ли быть отрезки секущих такими, как указано на рис. 37?

3(6). а) Как выражается хорда окружности через её радиус R и опирающийся на хорду вписанный угол α ?

б) В треугольнике ABC углы A и B равны 20° и 25° , $AB = 12$. Чему равен радиус описанной около треугольника окружности?

в) В параллелограмм $ABCD$ вписаны две окружности равных радиусов, внешне касающихся друг друга. Каждая окружность касается трёх сторон параллелограмма. Каковы стороны параллелограмма, если его периметр равен 24, а радиус окружности равен 1?

4(5). а) Две окружности внутренне касаются друг друга в точке A . Хорды AB и AF большей окружности пересекают меньшую окружность в точках C и D (рис. 38). Верно ли, что $BF \parallel CD$?

б) Две окружности радиусов R_1 и R_2 пересекаются в точках A и B (рис. 39). Верно ли, что $O_1O_2 \perp AB$? Если $AB = 6$ и $BK = 2$, чему равен отрезок CD ?

5(5). Две окружности радиуса R_1 и R_2 внешне касаются в точке A и обе касаются одной прямой в точках M и N (рис. 40). Прямая MA пересекает вторую окружность в точке K .

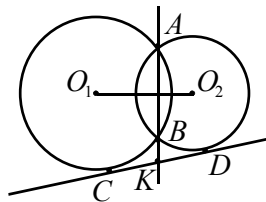


Рис. 39

1. Верно ли, что $\angle MAN = 90^\circ$?
2. Верно ли, что точки N, O_2 и K лежат на одной прямой?
3. Чему равна площадь трапеции MNO_2O_1 , если $R_1 = 9$, $R_2 = 4$?

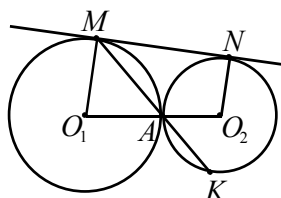


Рис. 40

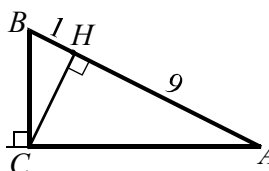


Рис. 41

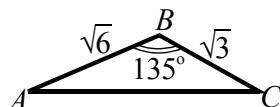


Рис. 42

6(7). Чему равна площадь треугольника ABC

- а) $BH = 1$, $AH = 9$ (рис. 41);
- б) $\angle B = 135^\circ$, $AB = \sqrt{6}$, $BC = \sqrt{3}$ (рис. 42);
- в) $AC = 7$, $\angle ABC = 60^\circ$, $r = \sqrt{3}$ (рис. 43).

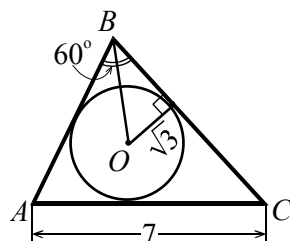


Рис. 43

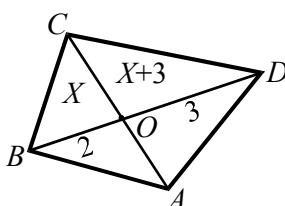


Рис. 44

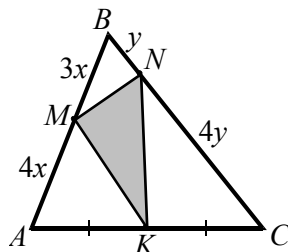


Рис. 45

7(7). а) Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 44). Площади треугольников AOB , AOD равны 2 и 3, а площадь треугольника COD на 3 больше площади треугольника BOC . Найти площадь $ABCD$.

б) Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника MNK , если $AM : MB = 4 : 3$, $AK = KC$ и $BN : NC = 1 : 4$ (рис. 45)?

в) Как относятся площади подобных треугольников? В треугольнике ABC $MN \parallel AC$ (рис. 46), $S_{MBN} : S_{AMNC} = 4 : 5$, $AC = b$. Чему равно MN ?

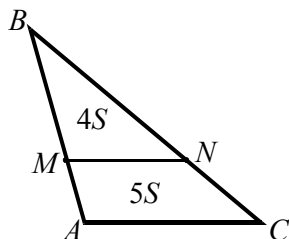


Рис. 46

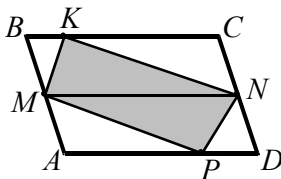


Рис. 47

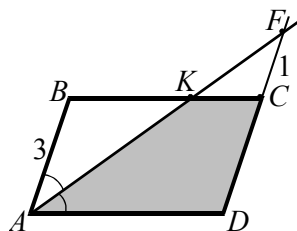


Рис. 48

8(6). $ABCD$ – параллелограмм площади S . Чему равна площадь заштрихованной фигуры, если

а) $AM = MB$, $CN = ND$, $BK = \frac{1}{5}BC$, $AP = \frac{5}{7}AD$ (рис. 47)?

б) Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K , а продолжение стороны DC в точке F , $AB = 3$, $CF = 1$ (рис. 48)?

в) $AM = \frac{3}{10}AC$, $KC = \frac{1}{6}AC$, $BN = \frac{5}{16}BD$ (рис. 49)?

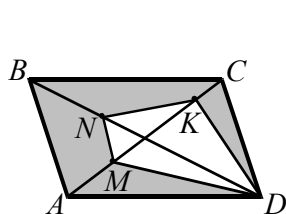


Рис. 49

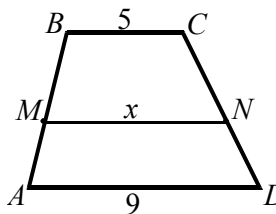


Рис. 50

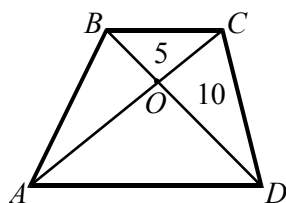


Рис. 51

9(4). $ABCD$ – трапеция.

а) Отрезок $MN = x$ параллелен основаниям трапеции $BC = 5$, $AD = 9$ (рис. 50). Найти длину отрезка MN , который делит площадь трапеции пополам.

б) Диагонали трапеции пересекаются в точке O (рис. 51), $S_{BOC} = 5$, $S_{COD} = 10$. Найти площадь трапеции.

в) Около окружности описана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями 1 и 9. Что больше: площадь круга или часть площади трапеции вне круга?

Задачи

1(5). Треугольник ABC – прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$. Продолжение биссектрисы CK пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке P при этом $CK = 2$, $KP = 4$. Найти радиус окружности.

2(5). Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A так, что $AD = \frac{2}{3}AB$. Найти площадь треугольника ABC , если $AC = 1$.

3(4). Дана окружность радиуса R с центром в точке O . Из точки M к окружности проведены касательные MA и MB (A и B – точки касания). Прямая MO пересекает окружность в точке F . Касательная в точке F пересекает отрезки MA и MB в точках C и D . Найти радиус окружности, описанной около треугольника MCD , если $\angle AMB = 60^\circ$.

4(5). Окружность диаметра 1 вписан четырёхугольник $ABCD$, у которого угол D прямой, $AB = BC$. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$, если его периметр равен $\frac{9\sqrt{2}}{5}$.

5(5). Окружность, построенная на меньшем основании BC трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины диагоналей AC и BD трапеции и касается основания AD . Найти углы трапеции при основании AD и расстояние между серединами диагоналей, если $BC = 4$.

6(5). В треугольнике ABC медианы CC_1 и BB_1 пересекаются в точке M , $\angle BAC = 48^\circ$, $\angle BMC = 132^\circ$ и $BC = 4\sqrt{3}$. Найти третью медиану.

7(5). В треугольнике ABC медианы AA_1 и CC_1 равны соответственно 12 и 15, а сторона AC равна 12. Найти площадь треугольника ABC .

8(6). В треугольнике ABC биссектриса CD делит сторону AB на отрезки $BD = 9$ и $AD = 4$. Около треугольника описана окружность. Прямая AB пересекает в точке F касательную, проходящую через точку C . Найти CF .

9(6). Две окружности радиусов $R_1 = 1$ и $R_2 = 3$ внешне касаются друг друга в точке A . Прямая BC касается меньшей окружности в точке B , а большей – в точке C . На общей внутренней касательной взята точка D такая, что AD – диаметр окружности, описанной около треугольника ABC . Найти площадь четырёхугольника $ABDC$.

10(7). Дан параллелограмм, в котором отношение диагоналей $d_1 : d_2 = 10$. В параллелограмм вписан ромб так, что его стороны параллельны диагоналям параллелограмма, а вершины лежат на сторонах параллелограмма. Найти отношение площади ромба к площади параллелограмма.