

Задача 15. Теория и примеры решений

Дженисубай Эдуард

<http://mathus.ru/math/ege17a.pdf> <http://mathus.ru/math/ege17p.pdf>

<http://mathus.ru/math/ege17.pdf> (с 2013 года)

Перед работой прочитайте все статьи по этой ссылке:
<http://mathus.ru/math/index.php#base>

Воодушевляющая речь

Рассмотрим задачи из ЕГЭ по математике профильного уровня с 1 по 12. В задаче 1 требуется умение выполнять арифметические действия, в том числе умножение и деление в столбик, округление. В задаче 3 уже нужно было знать теорему косинусов и Пифагора, а значит уметь извлекать корни, преобразовывать выражения. В задаче 4 вновь проверялось умение умножать, делить и округлять. В задаче 5 требуются навыки решения самых простых уравнений всех видов, а также навыки сравнения чисел (нередко просят в ответ указать наибольший/наименьший из корней). В задаче 7 требуются навыки вычисления производной, решения квадратных уравнений и неравенств методом интервалов (вспоминайте, когда там приходилось понимать, как производная меняет свой знак). В задаче 8 снова умножение и деление, а также работа с выражениями. Задача 9 требует уже более сложных преобразований, в том числе по формулам сокращенного умножения, тоже нужно уметь извлекать корни, умножать и делить, раскладывать числа на простые множители для упрощения.

То есть все эти задачи требуют ровно того же, что и задача 15. Вообще задачи 10 и 11 прямо требуют умения решать уравнения, неравенства и системы.

Документальное доказательство этого факта содержится и в Спецификации КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня на страницах 8-9: в требованиях к 15 написано «Уметь решать уравнения и неравенства», то же самое написано и в 5.

Поэтому я глубоко убежден в том, что можно и нужно хотя бы не бояться попробовать решить задачу 15 на ЕГЭ.

Напоминаю, что задача оценивается в 2 первичных балла.

1. (МИОО, 2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{2}{0,5x\sqrt{5}-1} + \frac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3} \geq 2, \\ \left(\frac{2}{x-4} + \frac{x-4}{2} \right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

Решение.

1. Разумеется, решаем последовательно и не спеша. В Спецификации на решение этой задачи слабым ученикам отводится не меньше 30 минут, а сильным – не меньше 15 минут. Если знать, что надо делать и делать это уверенно, то этого времени вполне достаточно.

Надо всегда избавляться от дробей любого рода. Вот первом неравенстве есть число 0,5, его надо убить. Умножим и числитель и знаменатель каждой дроби на 2.

$$\begin{aligned} \frac{4}{x\sqrt{5}-2} + \frac{x\sqrt{5}-4}{x\sqrt{5}-6} &\geq 2, \\ \frac{4x\sqrt{5}-24+5x^2-2x\sqrt{5}-4x\sqrt{5}+8}{(x\sqrt{5}-2)(x\sqrt{5}-6)} - 2 &\geq 0, \\ \frac{5x^2-2x\sqrt{5}-16}{(x\sqrt{5}-2)(x\sqrt{5}-6)} - 2 &\geq 0, \\ \frac{5x^2-2x\sqrt{5}-16-10x^2+12x\sqrt{5}+4x\sqrt{5}-24}{(x\sqrt{5}-2)(x\sqrt{5}-6)} &\geq 0, \\ \frac{-5x^2+14x\sqrt{5}-40}{(x\sqrt{5}-2)(x\sqrt{5}-6)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Никогда нельзя оставлять отрицательные множители перед членами в высшей степени, нельзя оставлять отрицательные множители перед членами в первой степени, если осуществлено разложение на множители. Умножаем обе части на -1 , знак неравенства меняет направление:

$$\frac{5x^2-14x\sqrt{5}+40}{(x\sqrt{5}-2)(x\sqrt{5}-6)} \leq 0.$$

Дальше что делать? Раскладывать числитель на множители. Как? Решая уравнение:

$$5x^2 - 14x\sqrt{5} + 40 = 0, \quad \frac{D}{4} = 49 \cdot 5 - 5 \cdot 40 = 5 \cdot 9, \quad x_1 = \frac{7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$x_2 = \frac{7\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}.$$

Тогда:

$$5x^2 - 14x\sqrt{5} + 40 = 5 \left(x - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) (x - 2\sqrt{5}).$$

Неравенство превращается в:

$$\frac{5 \left(x - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) (x - 2\sqrt{5})}{(x\sqrt{5} - 2)(x\sqrt{5} - 6)} \leq 0.$$

Можно поделить обе части на 5:

$$\frac{\left(x - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) (x - 2\sqrt{5})}{(x\sqrt{5} - 2)(x\sqrt{5} - 6)} \leq 0.$$

Теперь надо сделать так, чтобы и в знаменателе в каждой скобке множителем x стала единица. Для этого вынесем $\sqrt{5}$ из первой скобки и из второй:

$$\frac{\left(x - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) (x - 2\sqrt{5})}{\sqrt{5} \left(x - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \sqrt{5} \left(x - \frac{6\sqrt{5}}{5} \right)} \leq 0.$$

Теперь обе части уравнения можно умножить на 5. Я описываю это подробно для того, чтобы все поняли, что если справа или слева от неравенства или уравнения стоит 0, то положительные числа, вынесенные за скобки при разложении на множители, можно просто удалять.

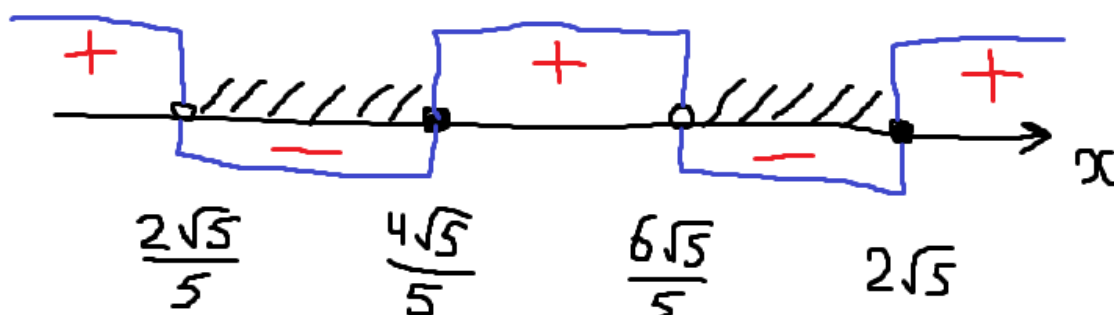
$$\frac{\left(x - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) (x - 2\sqrt{5})}{\left(x - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \left(x - \frac{6\sqrt{5}}{5} \right)} \leq 0.$$

Понятно, что

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} < \frac{4\sqrt{5}}{5} < \frac{6\sqrt{5}}{5} < 2\sqrt{5} = \frac{10\sqrt{5}}{5}.$$

Теперь, когда наша дробь приведена в идеальный вид, а именно и числитель и знаменатель разложены на множители и в каждом из этих множителей перед x стоит единица (ничего не стоит), то смело можно переходить к методу интервалов и в крайнем правом интервале будет знак «плюс». Все наши множители в первой степени, то есть каждый из нулей имеет нечётную кратность, значит «змейка» метода интервалов поворачивает, проходя через каждый из нулей.

Нули знаменателя, как и всегда, рисуем выколотыми кружочками, нули числителя рисуем сплошными кружочками, потому что неравенство нестрогое.



Внимательный читатель заметит, что линейные размеры числовой оси нарушены. Действительно, точка $2\sqrt{5}$ должна быть расположена от точки $6\sqrt{5}/5$ в два раза дальше, чем точка $4\sqrt{5}/5$.

Нам здесь не важно *абсолютное положение*, нам важно *относительное положение* точек друг относительно друга! Важен правильный порядок их следования на числовой оси!

Итак, решение первого неравенства системы:

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} < x \leq \frac{4\sqrt{5}}{5}, \quad \frac{6\sqrt{5}}{5} < x \leq 2\sqrt{5}.$$

А можно было бы записать и так:

$$x \in \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{4\sqrt{5}}{5} \right] \cup \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}; 2\sqrt{5} \right].$$

А можно было бы записать и так:

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{5}}{5} < x \leq \frac{4\sqrt{5}}{5}, \\ \frac{6\sqrt{5}}{5} < x \leq 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

2. Разложим второе неравенство на множители по формуле разности квадратов:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{x-4} + \frac{x-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 &\leq 0, \\ \left(\frac{2}{x-4} + \frac{x-4}{2} - \frac{5}{2}\right) \left(\frac{2}{x-4} + \frac{x-4}{2} + \frac{5}{2}\right) &\leq 0, \\ \left(\frac{4 + x^2 - 8x + 16 - 5x + 20}{2x-8}\right) \left(\frac{4 + x^2 - 8x + 16 + 5x - 20}{2x-8}\right) &\leq 0, \\ \left(\frac{x^2 - 13x + 40}{2x-8}\right) \left(\frac{x^2 - 3x}{2x-8}\right) &\leq 0. \end{aligned}$$

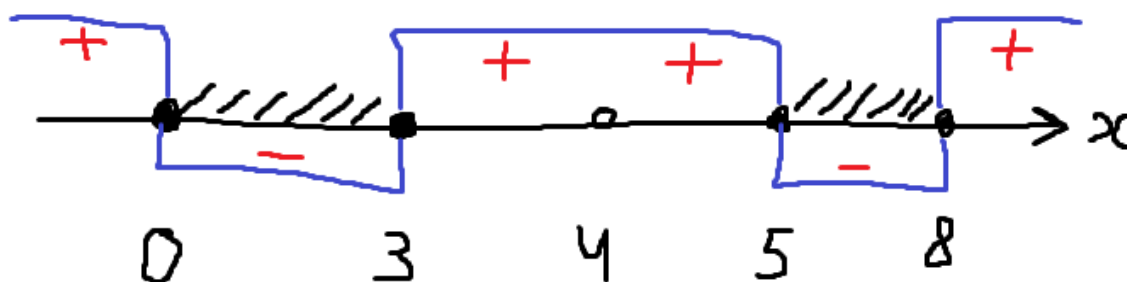
Можно ли сейчас просто разделить знаменатель каждой из дробей на 2? Да, можно, ведь справа стоит ноль.

$$\frac{(x^2 - 13x + 40)x(x-3)}{(x-4)^2} \leq 0,$$

$$x^2 - 13x + 40 = 0, \quad D = 169 - 160 = 9, \quad x_1 = \frac{13-3}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{13+3}{2} = 8.$$

$$\frac{x(x-3)(x-5)(x-8)}{(x-4)^2} \leq 0.$$

Нули числителя рисуем сплошными кружочками снова, потому что неравенство нестрогое. Ноль знаменателя, как и всегда, выкалываем, но при этом он еще является нулем чётной степени, поэтому «змейка» при переходе через него не меняет направления, игнорирует точку $x = 4$. Вновь неравенство приведено к идеальному виду, везде множитель перед x равен единице.



Итак, решение второго неравенства исходной системы:

$$x \in [0; 3] \cup [5; 8].$$

Теперь, как говорится, пора вспомнить условие задачи. А задача была найти решение *системы неравенств*. А когда нас просят найти решение *системы*

неравенств, то это означает, что нужно указать в ответ общие точки *всех* неравенств системы.

Осталось понять взаимное расположение точек из обоих неравенств.

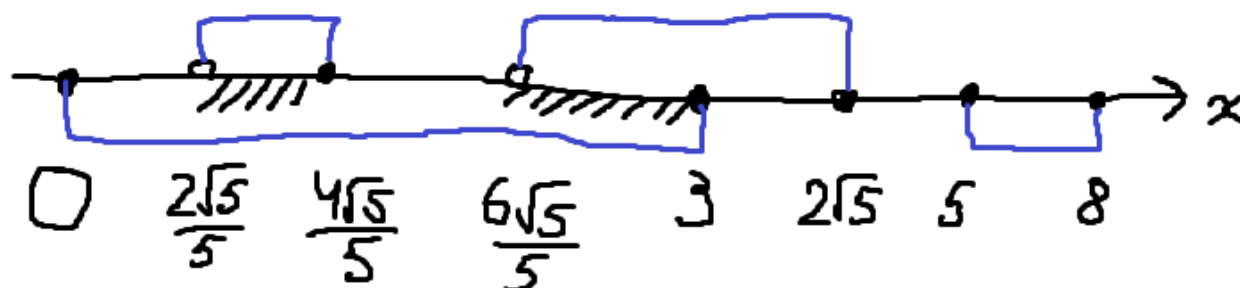
$$2\sqrt{5} \vee 5, \quad 4 \cdot 5 = 20 < 25, \quad 2\sqrt{5} < 5.$$

$$2\sqrt{5} \vee 3, \quad 20 > 9, \quad 2\sqrt{5} > 3.$$

$$3 \vee \frac{6\sqrt{5}}{5}, \quad 15 \vee 6\sqrt{5}, \quad 225 > 180, \quad 3 > \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Значит взаимное расположение точек таково:

$$0 < \frac{2\sqrt{5}}{5} < \frac{4\sqrt{5}}{5} < \frac{6\sqrt{5}}{5} < 3 < 2\sqrt{5} < 5 < 8.$$



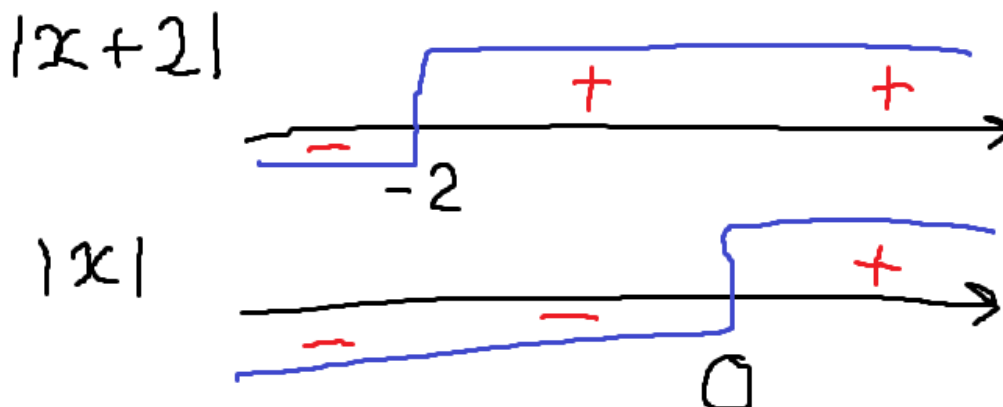
Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{4\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}; 3\right]$.

2. (МИОО, 2013) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} |x+2| - x|x| \leq 0, \\ (x^2 - x - 6)\sqrt{8-x} \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Раскрываем модули, три случая раскрытия с учетом знаков:



I. $x \leq -2$:

$$-x - 2 + x^2 \leq 0, \quad x^2 - x - 2 \leq 0, \quad D = 1 + 8 = 9, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2. \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2,$$

нет решений.

II. $-2 < x \leq 0$:

$$x + 2 + x^2 \leq 0, \quad x^2 + x + 2 \leq 0, \quad D = 1 - 8 < 0,$$

нет решений.

III. $x > 0$:

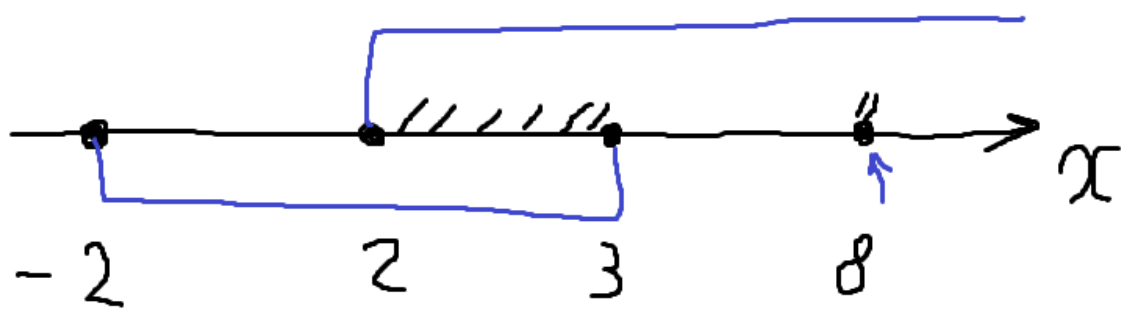
$$x + 2 - x^2 \leq 0, \quad x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 2, \end{cases}$$

значит $x \geq 2$ – решение первого неравенства.

2.

$$(x^2 - x - 6)\sqrt{8-x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=0, \\ 8-x \geq 0, \\ x^2-x-6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8, \\ x \leq 8, \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8, \\ -2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Осталось пересечь множества решений неравенств исходной системы:



Ответ: $[2; 3] \cup \{8\}$.

3. (МИОО, 2013) Решите систему неравенств

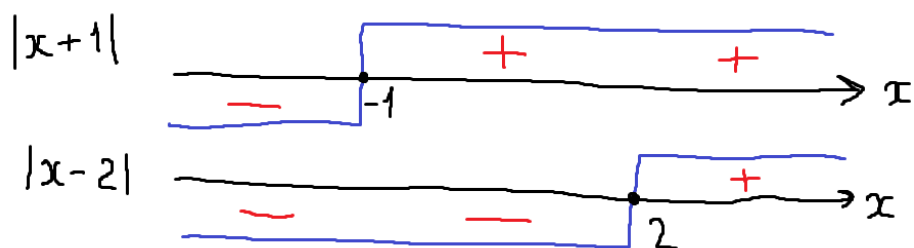
$$\begin{cases} 3|x+1| + \frac{1}{2}|x-2| - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

1. Избавляемся от дробей всегда, умножаем обе части первого неравенства системы на число $2 > 0$:

$$6|x+1| + |x-2| - 3x \leq 16.$$

Рассматриваем случаи «раскрытия» модулей.



I. $x \leq -1$.

$$-6x - 6 - x + 2 - 3x - 16 \leq 0, \quad -10x - 20 \leq 0, \quad x \geq -2.$$

Тогда решение случая I: $-2 \leq x \leq -1$.

II. $-1 < x < 2$.

$$6x + 6 - x + 2 - 3x - 16 \leq 0, \quad 2x - 8 \leq 0, \quad x \leq 4.$$

Тогда решение случая II: $-1 < x < 2$.

III. $x \geq 2$.

$$6x + 6 + x - 2 - 3x - 16 \leq 0, \quad 4x - 12 \leq 0, \quad x \leq 3.$$

Тогда решение случая III: $2 \leq x \leq 3$.

Решение первого неравенства системы: $-2 \leq x \leq 3$.

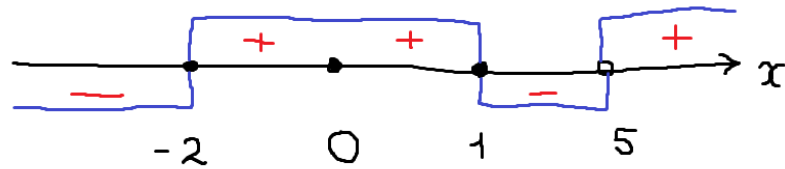
2. Решаем второе неравенство системы.

$$\frac{x^4 + 6x^3 - 5x^3 - 30x^2 + 28x^2 + 2x - 10 - 2x + 10}{x-5} \leq 0,$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x-5} \leq 0, \quad \frac{x^2(x^2 + x - 2)}{x-5} \leq 0,$$

$$\frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5} \leq 0.$$

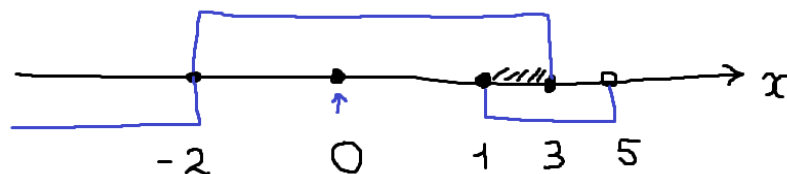
Еще раз проверяем финальное разложение на множители: есть корень чётной степени, $x = 0$, поэтому при переходе через эту точку «змейка» не меняет своего направления; все множители перед x равны единице (нет отрицательных множителей перед переменной). Теперь можем приступить к методу интервалов без сомнений, крайний правый промежуток будет со знаком плюс, а дальше чередование.



Поскольку неравенство нестрогое, то число $x = 0$ тоже является решением второго неравенства. Тогда решение второго неравенства системы:

$$x \leq -2, \quad x = 0, \quad 1 \leq x < 5.$$

Остается пересечь решения обоих неравенств:



Ответ: $\{-2, 0\} \cup [1; 3]$.

4. (МИОО, 2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-5)^{-1}}{2(x-5)^{-1} - 1} \leq -0,5. \end{cases}$$

Решение.

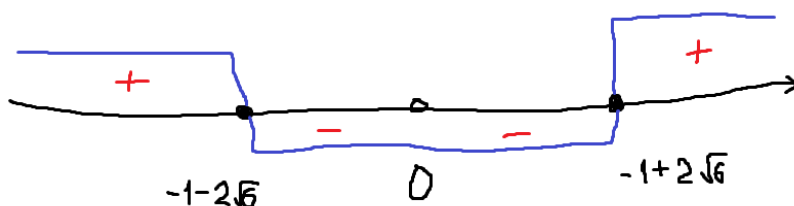
1.

$$\frac{x^2 + 2|x| - 23}{x^2} \leq 0.$$

Рассматриваем два случая раскрытия модуля.

I. $x < 0$.

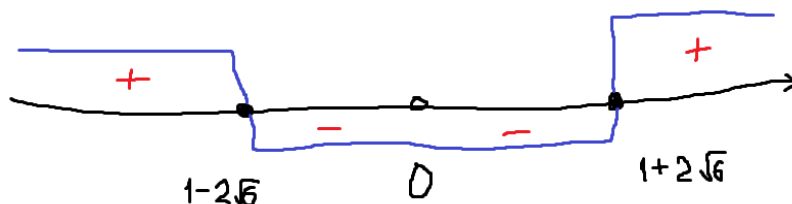
$$\frac{x^2 + 2x - 23}{x^2} \leq 0, \quad \frac{(x - (-1 - 2\sqrt{6}))(x - (-1 + 2\sqrt{6}))}{x^2} \leq 0.$$



С учетом $x < 0$, решение первого случая: $-1 - 2\sqrt{6} \leq x < 0$.

II. $x > 0$.

$$\frac{x^2 - 2x - 23}{x^2} \leq 0, \quad \frac{(x - (1 - 2\sqrt{6}))(x - (1 + 2\sqrt{6}))}{x^2} \leq 0.$$



С учётом $x > 0$, решение второго случая: $0 < x \leq 1 + 2\sqrt{6}$.

Значит решение первого неравенства системы запишется так:

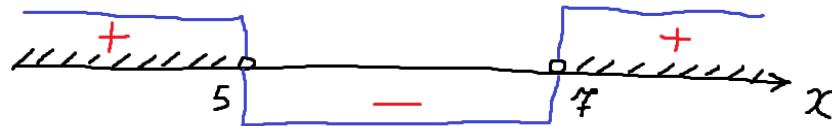
$$-1 - 2\sqrt{6} \leq x < 0, \quad 0 < x \leq 1 + 2\sqrt{6}.$$

2. Перепишем неравенство в виде:

$$\frac{2 - \frac{1}{x-5}}{\frac{2}{x-5} - 1} \leq -\frac{1}{2}.$$

Понятно, что в ОДЗ не входят числа $x = 5$ и $x = 7$. Осуществим равносильные на ОДЗ преобразования:

$$\frac{\frac{2x-11}{x-5}}{\frac{-x+7}{x-5}} \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{2x-11}{x-7} \geq 1, \quad \frac{3x-15}{x-7} \geq 0, \quad \frac{x-5}{x-7} \geq 0.$$



Решение второго неравенства системы запишется так:

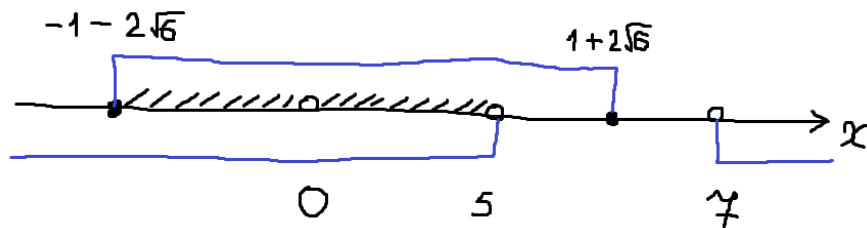
$$x < 5, \quad x > 7.$$

Остается определить взаимное положение точек на числовой оси. Понятно, что $-1 - 2\sqrt{6} < 0$, поэтому нужно сравнивать число $1 + 2\sqrt{6}$ с 5 и 7.

$$1 + 2\sqrt{6} \vee 5, \quad 2\sqrt{6} \vee 4, \quad 24 > 16, \quad 1 + 2\sqrt{6} > 5.$$

$$1 + 2\sqrt{6} \vee 7, \quad 2\sqrt{6} \vee 6, \quad 24 < 36, \quad 1 + 2\sqrt{6} < 7.$$

Тогда:



Ответ: $[-1 - 2\sqrt{6}; 0) \cup (0; 5).$

5. (МИОО, 2014) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^5 - x^2}{x^2} \geq \frac{x^3 - 1}{4x^2}, \\ \left| 2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8} \right| \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}. \end{cases}$$

Решение.

1. ОДЗ: $x \neq 0$. Поэтому имеем все права умножить обе части первого неравенства на $4x^2 > 0$.

$$4x^5 - 4x^2 \geq x^3 - 1,$$

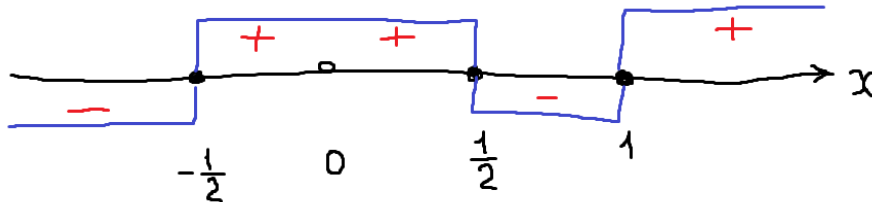
$$4x^2(x^3 - 1) - (x^3 - 1) \geq 0,$$

$$(x^3 - 1)(4x^2 - 1) \geq 0,$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ больше нуля при любом x , поскольку $D = 1 - 4 < 0$, и коэффициент при x^2 положительный. Поэтому можно обе части неравенства поделить на $x^2 + x + 1 > 0$. Остается

$$(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$



Решение первого неравенства системы:

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0, \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}, \quad x \geq 1.$$

2. Умножим обе части второго неравенства на 8, потому что от дробей надо избавляться.

$$|16x^2 + 19x - 1| \geq 24x^2 + x - 19.$$

Вспоминаем о том, что:

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f^2(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} 24x^2 + x - 19 < 0, \\ (16x^2 + 19x - 1)^2 \geq (24x^2 + x - 19)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x - \left(\frac{-1 - 5\sqrt{73}}{48} \right) \right) \left(x - \left(\frac{-1 + 5\sqrt{73}}{48} \right) \right) < 0, \\ (4x^2 - 9x - 9)(2x^2 + x - 1) \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-1 - 5\sqrt{73}}{48} < x < \frac{-1 + 5\sqrt{73}}{48}, \\ \left(x + \frac{3}{4} \right) (x - 3) (x + 1) \left(x - \frac{1}{2} \right) \leq 0. \end{cases}$$

Сравниваем числа:

$$-1 \vee \frac{-1 - 5\sqrt{73}}{48}, \quad -48 \vee -1 - 5\sqrt{73}, \quad 5\sqrt{73} \vee 47, \quad 1825 < 2209,$$

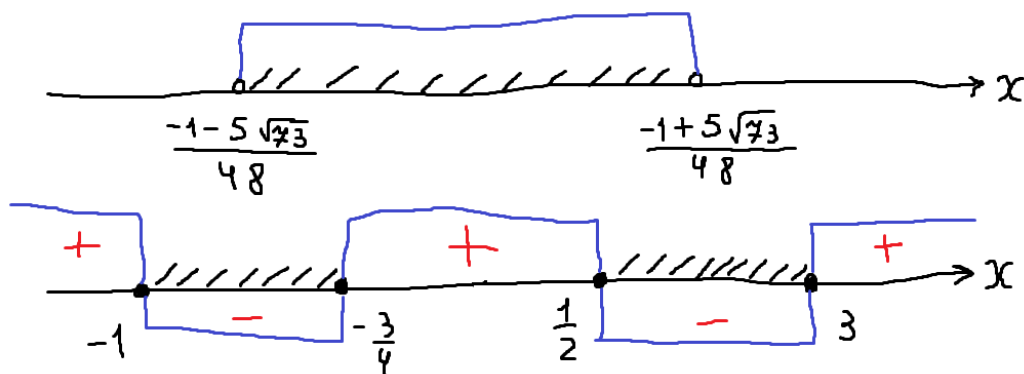
$$-1 < \frac{-1 - 5\sqrt{73}}{48}.$$

$$\frac{-1 - 5\sqrt{73}}{48} \vee -\frac{3}{4}, \quad -1 - 5\sqrt{73} \vee -36, \quad 35 \vee 5\sqrt{73}, \quad 1225 < 1825,$$

$$\frac{-1 - 5\sqrt{73}}{48} < -\frac{3}{4}.$$

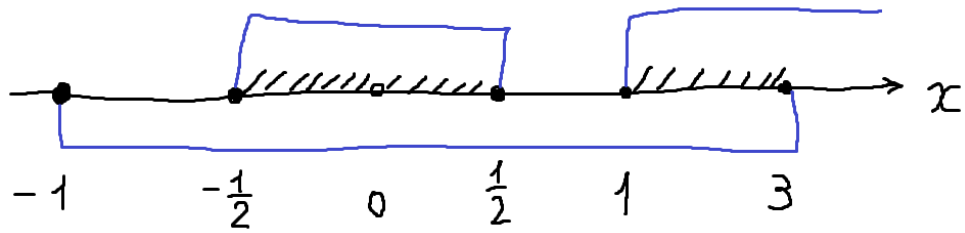
$$\frac{-1 + 5\sqrt{73}}{48} \vee \frac{1}{2}, \quad -1 + 5\sqrt{73} \vee 24, \quad 1825 > 625, \quad \frac{-1 + 5\sqrt{73}}{48} > \frac{1}{2}.$$

$$\frac{-1 + 5\sqrt{73}}{48} \vee 3, \quad -1 + 5\sqrt{73} \vee 144, \quad 1825 < 21025.$$



В данном случае нас интересует не пересечение, а объединение, то есть все x , которые удовлетворяют или первому, или второму неравенству совокупности. Поэтому берем все числа $-1 \leq x \leq 3$. Итак, решением второго неравенства являются числа $-1 \leq x \leq 3$.

Осталось пересечь множества решений первого и второго неравенства системы.



Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [1; 3]$.

6. (МИОО, 2015) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + x}}{x^2 + x - 1} \leq 0.$$

Решение.

На ОДЗ можно применить метод знакотожественных множителей, он же метод рационализации.

1	$a(x) = (u(x))^{2n+1} \pm (v(x))^{2n+1}$	$b(x) = u(x) \pm v(x)$
2	$a(x) = (u(x))^{2n} - (v(x))^{2n}$	$b(x) = (u(x))^2 - (v(x))^2$
3	$a(x) = u(x) - v(x) $	$b(x) = (u(x))^2 - (v(x))^2$
4	$a(x) = \sqrt[2n+1]{u(x)} \pm \sqrt[2n+1]{v(x)}$	$b(x) = u(x) \pm v(x)$
5	$a(x) = \sqrt[2n]{u(x)} - \sqrt[2n]{v(x)}$	$b(x) = u(x) - v(x)$ (при условиях $u(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$)
6	$a(x) = l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $l > 1$	$b(x) = u(x) - v(x)$
7	$a(x) = l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $0 < l < 1$	$b(x) = v(x) - u(x)$
8	$a(x) = \log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $c > 1$	$b(x) = u(x) - v(x)$ (при условиях $u(x) > 0, v(x) > 0$)
9	$a(x) = \log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $0 < c < 1$	$b(x) = v(x) - u(x)$ (при условиях $u(x) > 0, v(x) > 0$)
10	$a(x) = \log_c u(x)$ при $c > 1$	$b(x) = u(x) - 1$ (при условии $u(x) > 0$)
11	$a(x) = \log_c u(x)$ при $0 < c < 1$	$b(x) = 1 - u(x)$ (при условии $u(x) > 0$)
12	$a(x) = \log_{c(x)} u(x)$	$b(x) = \frac{u(x) - 1}{c(x) - 1}$ (при условиях $u(x) > 0, c(x) > 0$)

Тогда (по критерию 5 знаки корней четной степени просто отбрасываются):

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + x}}{x^2 + x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geq 0, \\ x^2 + x \geq 0, \\ \frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2 + x)}{x^2 + x - 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

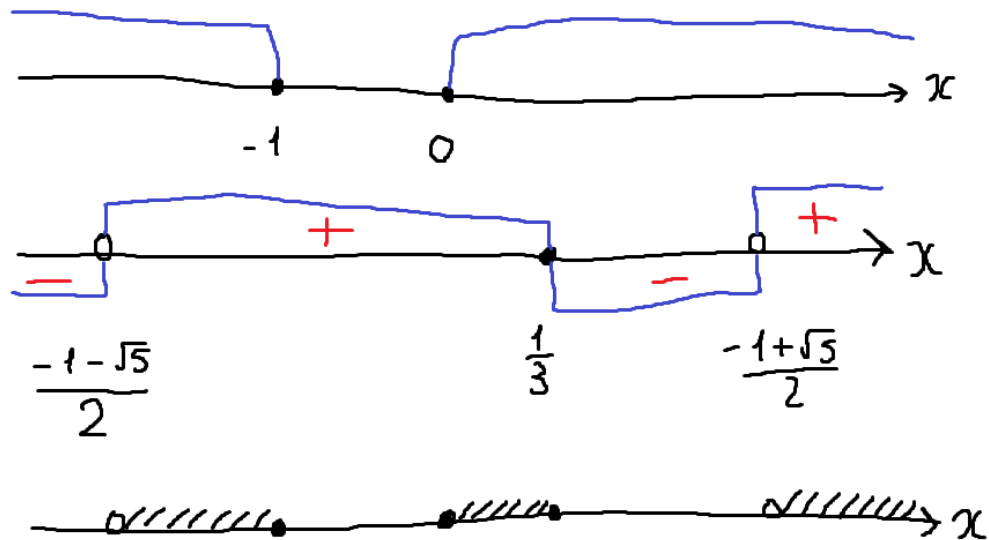
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 0, \end{cases} \\ x - \frac{1}{3} \\ \frac{x - \frac{1}{3}}{\left(x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)} \geq 0. \end{cases}$$

Понятно, что

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2} < -1.$$

Сравним теперь положительные числа:

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, \quad 2 \sqrt{-3 + 3\sqrt{5}}, \quad 25 < 45, \quad \frac{1}{3} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$



Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$

7. (МИОО, 2015) Решите неравенство

$$\frac{(5x-3)^2}{x-2} \geq \frac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}.$$

Решение.

После преобразований:

$$\frac{(5x-3)^2}{x-2} \geq \frac{(5x-3)^2}{x^2-9x+14} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x^2-9x+14}. \end{cases}$$

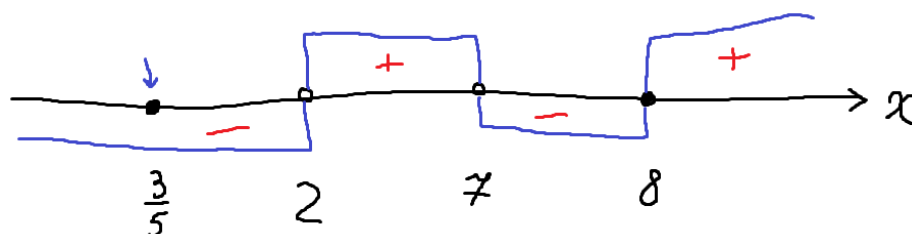
$$\frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x^2-9x+14},$$

$$\frac{x^2-9x+14-x+2}{(x-2)(x^2-9x+14)} \geq 0, \quad \frac{x^2-10x+16}{(x-2)(x^2-9x+14)} \geq 0.$$

1) $x^2-10x+16=0$, $\frac{D}{4}=25-16=9$, $x_1=5-3=2$, $x_2=8$.

2) $x^2-9x+14=0$, $D=81-56=25$, $x_1=2$, $x_2=7$.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x^2-9x+14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ \frac{(x-2)(x-8)}{(x-2)^2(x-7)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ \frac{x-8}{(x-2)(x-7)} \geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left\{\frac{3}{5}\right\} \cup (2; 7) \cup [8; +\infty)$.

8. (МИОО, 2017) Решите неравенство

$$\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} - \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{x + 2} \leq 1.$$

Решение.

Поскольку

$$\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x^2(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ \frac{x^2(x - 1)}{x + 2}. \end{cases}$$

Тогда исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ \frac{x^3 - x^2 - 2x^3 - x^2 - x + 1}{x + 2} - 1 \leq 0, \end{cases}$$

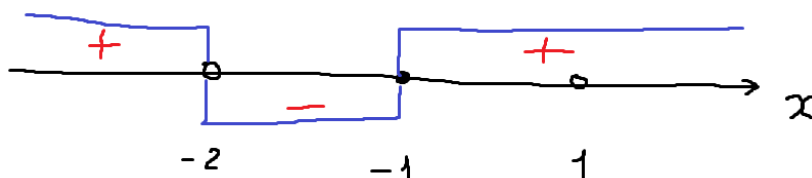
$$\begin{cases} x \neq 1, \\ \frac{-x^3 - 2x^2 - x + 1 - x - 2}{x + 2} \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ \frac{(x^3 + 1) + 2x(x + 1)}{x + 2} \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ \frac{(x + 1)(x^2 + x + 1)}{x + 2} \geq 0. \end{cases}$$

$x^2 + x + 1 = 0$, $D = 1 - 4 < 0$, поэтому можно разделить обе части неравенства на это выражение.

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ \frac{x + 1}{x + 2} \geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup [-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

9. (МИОО, 2017) Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4x - 3}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 24}{x^2 - 4x} \geq 0.$$

Решение.

Сделаем замену $t = x^2 - 4x$.

$$\frac{t - 3}{t + 3} + \frac{t + 24}{t} \geq 0,$$

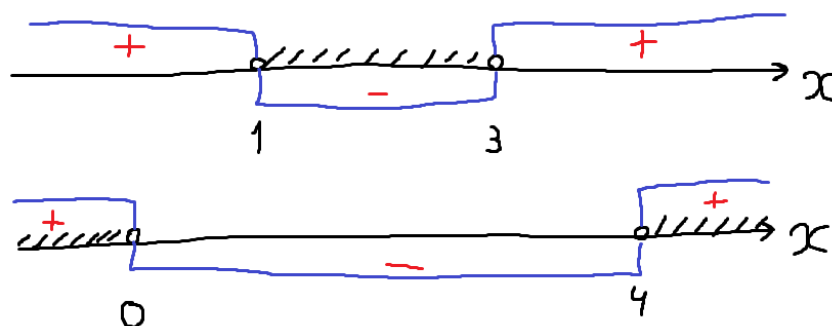
$$\frac{t^2 - 3t + t^2 + 24t + 3t + 3 \cdot 24}{t(t + 3)} \geq 0,$$

$$\frac{t^2 + 12t + 3 \cdot 24}{t(t + 3)} \geq 0,$$

$$\frac{(t + 6)^2}{t(t + 3)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -6, \\ t < -3, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3, \\ t > 0. \end{cases}$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\begin{cases} x^2 - 4x < -3, \\ x^2 - 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 3) < 0, \\ x(x - 4) > 0. \end{cases}$$



В ответ указываем все x , которые удовлетворяют или первому неравенству, или второму, потому что совокупность.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$.

10. (МИОО, 2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (1 - \sqrt{10})x - \sqrt{10} \leq 0, \\ \frac{3^{|x^2-2x-1|} - 9}{x} \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

$$1. D = 1 - 2\sqrt{10} + 10 + 4\sqrt{10} = 1 + 2\sqrt{10} + 10 = (1 + \sqrt{10})^2.$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{10} - 1 - \sqrt{10}}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{10} + 1 + \sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}.$$

Тогда решение первого неравенства системы запишется так:

$$-1 \leq x \leq \sqrt{10}.$$

2. Представив 9 в виде 3^2

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|} - 3^2}{x} \geq 0,$$

воспользуемся методом знакотожественных множителей.

1	$a(x) = (u(x))^{2n+1} \pm (v(x))^{2n+1}$	$b(x) = u(x) \pm v(x)$
2	$a(x) = (u(x))^{2n} - (v(x))^{2n}$	$b(x) = (u(x))^2 - (v(x))^2$
3	$a(x) = u(x) - v(x) $	$b(x) = (u(x))^2 - (v(x))^2$
4	$a(x) = \sqrt[2n+1]{u(x)} \pm \sqrt[2n+1]{v(x)}$	$b(x) = u(x) \pm v(x)$
5	$a(x) = \sqrt[2n]{u(x)} - \sqrt[2n]{v(x)}$	$b(x) = u(x) - v(x)$ (при условиях $u(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$)
6	$a(x) = l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $l > 1$	$b(x) = u(x) - v(x)$
7	$a(x) = l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $0 < l < 1$	$b(x) = v(x) - u(x)$
8	$a(x) = \log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $c > 1$	$b(x) = u(x) - v(x)$ (при условиях $u(x) > 0, v(x) > 0$)
9	$a(x) = \log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $0 < c < 1$	$b(x) = v(x) - u(x)$ (при условиях $u(x) > 0, v(x) > 0$)
10	$a(x) = \log_c u(x)$ при $c > 1$	$b(x) = u(x) - 1$ (при условии $u(x) > 0$)
11	$a(x) = \log_c u(x)$ при $0 < c < 1$	$b(x) = 1 - u(x)$ (при условии $u(x) > 0$)
12	$a(x) = \log_{c(x)} u(x)$	$b(x) = \frac{u(x) - 1}{c(x) - 1}$ (при условиях $u(x) > 0, c(x) > 0$)

Поскольку $3 > 1$, то нужно применить правило 6. Второе неравенство системы примет вид:

$$\frac{|x^2 - 2x - 1| - 2}{x} \geq 0.$$

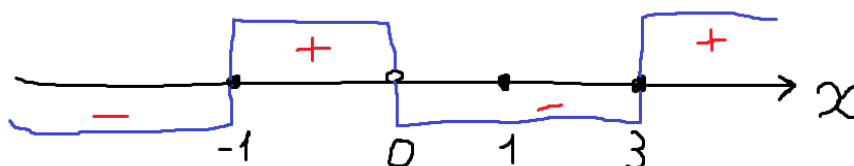
Теперь воспользуемся правилом 3, чтобы избавиться от модуля.

$$\frac{(x^2 - 2x - 1) - 2^2}{x} \geq 0,$$

$$\frac{(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 1)}{x} \geq 0,$$

$$\frac{(x + 1)(x - 3)(x - 1)^2}{x} \geq 0.$$

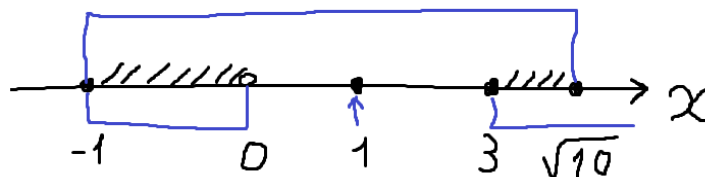
Решаем методом интервалов:



Решение второго неравенства системы:

$$x \in [-1; 0) \cup \{1\} \cup [3; +\infty).$$

Осталось пересечь полученные множества решений, заметив, что $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$.



Ответ: $[-1; 0) \cup \{1\} \cup [3; \sqrt{10}]$.

11. (ЕГЭ, 2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leq 0, \\ \frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geq x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x}. \end{cases}$$

Решение.

1. Последовательно преобразуем второе неравенство системы.

$$x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x} = x^2 + \frac{-x + 5x - 20}{x(x-4)} = \frac{x^4 - 4x^3 + 4x - 20}{x(x-4)}.$$

Получим:

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x(x-5)} \geq \frac{x^4 - 4x^3 + 4x - 20}{x(x-4)}.$$

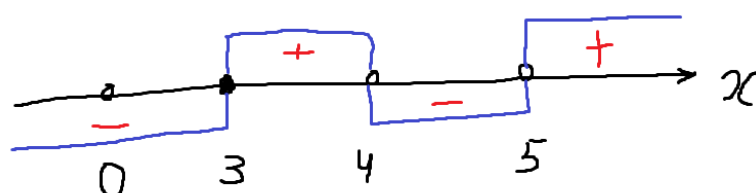
Найдем произведения, образующиеся при приведении к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} (x^4 - 5x^3 + 3x - 25)(x-4) &= x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 25x - 4x^4 + 20x^3 - 12x + 100 = \\ &= x^5 - 9x^4 + 20x^3 + 3x^2 - 37x + 100. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^4 - 4x^3 + 4x - 20)(x-5) &= x^5 - 4x^4 + 4x^2 - 20x - 5x^4 + 20x^3 - 20x + 100 = \\ &= x^5 - 9x^4 + 20x^3 + 4x^2 - 40x + 100. \end{aligned}$$

Вычитая из первого полученного выражения второе, имеем:

$$\frac{-x^2 + 3x}{x(x-4)(x-5)} \geq 0, \quad \frac{x(x-3)}{x(x-4)(x-5)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{x-3}{(x-4)(x-5)} \leq 0. \end{cases}$$



Итак, решение неравенства 2 исходной системы:

$$x < 0, \quad 0 < x \leq 3, \quad 4 < x < 5.$$

2. Первое неравенство системы после замены $t = 2^x$ примет вид:

$$t^2 - 29t + 168 \leq 0, \quad D = 841 - 672 = 13^2, \quad t_1 = 8, \quad t_2 = 21.$$

Тогда

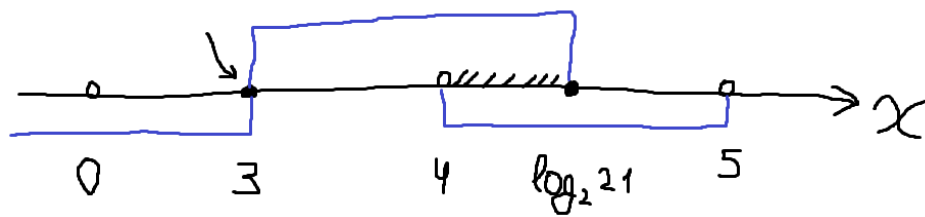
$$8 \leq 2^x \leq 21, \quad 3 \leq x \leq \log_2 21.$$

Сравним числа:

$$4 \vee \log_2 21, \quad \log_2 16 \vee \log_2 21, \quad 16 < 21, \quad 4 < \log_2 21.$$

$$5 \vee \log_2 21, \quad \log_2 32 \vee \log_2 21, \quad 32 > 21, \quad 5 > \log_2 21.$$

Значит $4 < \log_2 21 < 5$, откуда:



Ответ: $\{3\} \cup (4; \log_2 21]$.

12. (ЕГЭ, 2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{2x+2} - 21 \cdot 2^{x-1} + 1 \leq 0, \\ \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \frac{3x + 1}{x - 1} \leq \frac{4x + 1}{x}. \end{cases}$$

Решение.

1. Преобразуем первое неравенство системы:

$$\begin{aligned} 20 \cdot 2^{2x} - \frac{21}{2} \cdot 2^x + 1 &\leq 0, \\ 40 \cdot 2^{2x} - 21 \cdot 2^x + 2 &\leq 0, \quad D = 441 - 320 = 121, \\ t_1 = \frac{21 - 11}{80} = \frac{1}{8}, \quad t_2 = \frac{21 + 11}{80} = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}. \\ \frac{1}{8} &\leq 2^x \leq \frac{2}{5}, \quad -3 \leq x \leq \log_2 \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

2. Второе неравенство системы есть дробно-рациональное неравенство, не спеша и внимательно приводим все дроби к общему знаменателю.

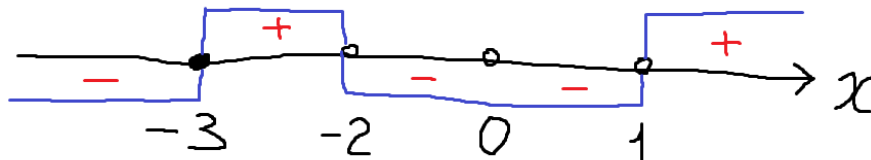
$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x(x + 2)} + \frac{3x + 1}{x - 1} - \frac{4x + 1}{x} \leq 0.$$

Отдельно считаем получающийся числитель:

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 2)(x - 1) + (3x + 1)(x^2 + 2x) - (4x + 1)(x + 2)(x - 1) &= \\ = x^3 + 2x^2 + 2x - x^2 - 2x - 2 + 3x^3 + x^2 + 6x^2 + 2x - & \\ - 4x^3 - x^2 - 4x^2 - x + 8x + 2 = 3x^2 + 9x = 3x(x + 3). \end{aligned}$$

Неравенство примет вид:

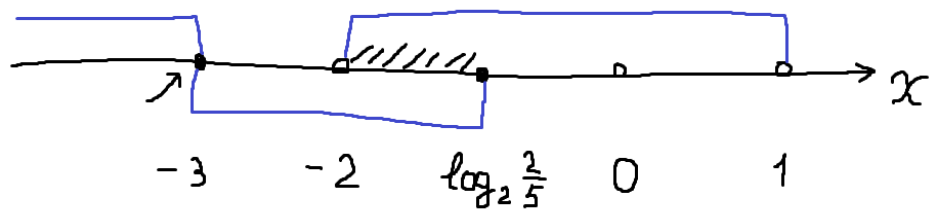
$$\frac{x(x + 3)}{x(x + 2)(x - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{x + 3}{(x + 2)(x - 1)} \leq 0. \end{cases}$$



Осталось понять, где расположено число $\log_2 \frac{2}{5}$. Понятно, что оно меньше нуля.

$$\log_2 \frac{2}{5} < -2, \quad \log_2 \frac{2}{5} < \log_2 \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{5} = 0,4 > \frac{1}{4} = 0,25, \quad \log_2 \frac{2}{5} > -2.$$

Тогда имеем:



Ответ: $\{-3\} \cup \left(-2; \log_2 \frac{2}{5}\right]$.

13. (ЕГЭ, 2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 17 \cdot 2^{3-x} \leq 25, \\ \frac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \frac{3x^2 - 15x + 2}{x - 5} \leq 4x + 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решаем первое неравенство, $t = 2^x > 0$.

$$t + 17 \cdot 8 \cdot \frac{1}{t} - 25 \leq 0, \quad t^2 - 25t + 17 \cdot 8 \leq 0, \quad 8 \leq t \leq 17,$$

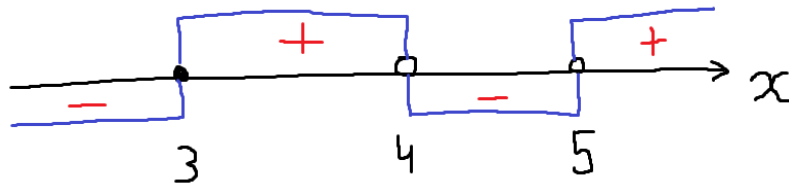
$$3 \leq x \leq \log_2 17.$$

2. Вычислим отдельно числитель получающейся дроби:

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x - 5)(x - 5) + (3x^2 - 15x + 2)(x - 4) - (4x + 1)(x - 4)(x - 5) = \\ = x^3 - 3x^2 - 5x - 5x^2 + 15x + 25 + 3x^3 - 15x^2 + 2x - 12x^2 + 60x - 8 - \\ - 4x^3 + 36x^2 - 80x - x^2 + 9x - 20 = x - 3. \end{aligned}$$

Тогда второе неравенство системы запишется так:

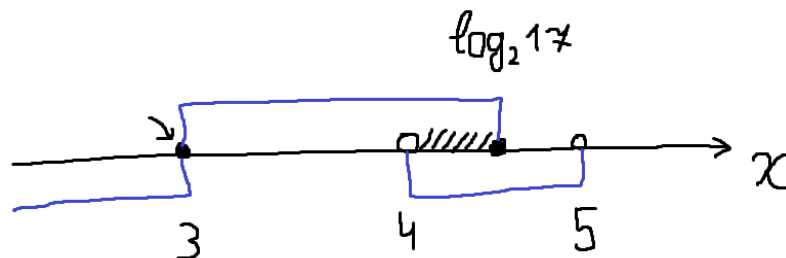
$$\frac{x - 3}{(x - 4)(x - 5)} \leq 0.$$



Осталось понять расположение точки $\log_2 17$.

$$4 = \log_2 16 < \log_2 17 < 5 = \log_2 32.$$

Окончательно:



Ответ: $\{3\} \cup (4; \log_2 17]$.

15. (ЕГЭ, 2015) Решите неравенство

$$\frac{105}{(2^{4-x^2} - 1)^2} - \frac{22}{2^{4-x^2} - 1} + 1 \geq 0.$$

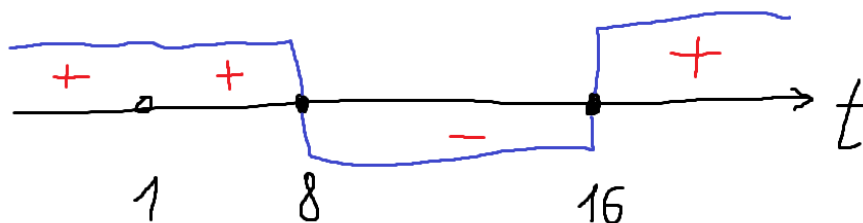
Решение.

Можно ввести замену $z = 2^{4-x^2} - 1$, но я введу замену $t = 2^{4-x^2}$.

$$\frac{105}{(t-1)^2} - \frac{22}{t-1} + 1 \geq 0,$$

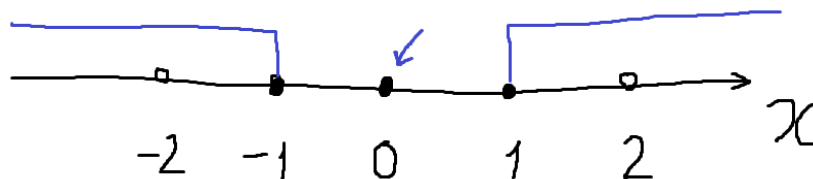
$$\frac{105 - 22t + 22 + t^2 - 2t + 1}{(t-1)^2} \geq 0,$$

$$\frac{t^2 - 24t + 128}{(t-1)^2} \geq 0, \quad \frac{(t-8)(t-16)}{(t-1)^2} \geq 0.$$



Возвращаясь к старой переменной, имеем:

$$\begin{cases} 2^{4-x^2} \neq 1, \\ 2^{4-x^2} \leq 8, \\ 2^{4-x^2} \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2, \\ 4 - x^2 - 3 \leq 0, \\ 4 - x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \leq -1, \\ x \geq 1, \\ x = 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

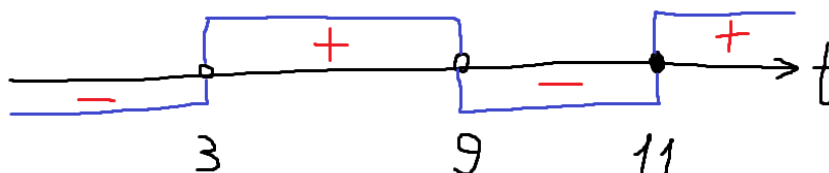
16. (ЕГЭ, 2015) Решите неравенство

$$\frac{2}{3^x - 9} \geq \frac{8}{3^x - 3}.$$

Решение.

Замена $t = 3^x > 0$.

$$\frac{2}{t-9} - \frac{8}{t-3} \geq 0, \quad \frac{2t-6-8t+72}{(t-9)(t-3)} \geq 0, \quad \frac{t-11}{(t-3)(t-9)} \leq 0.$$



Возвращаясь к переменной x , получим совокупность неравенств:

$$\begin{cases} 3^x < 3, \\ 9 < 3^x \leq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ 2 < x \leq \log_3 11. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; \log_3 11]$.

17. (ЕГЭ, 2015) Решите неравенство

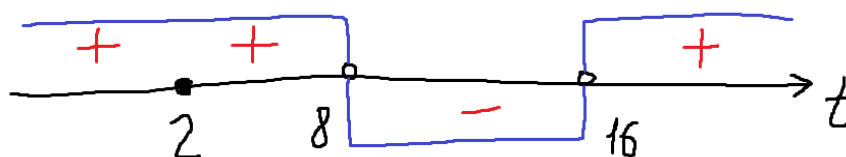
$$\frac{31 - 5 \cdot 2^x}{4^x - 24 \cdot 2^x + 128} \geq 0,25.$$

Решение.

Делаем замену $t = 2^x > 0$.

$$\frac{31 - 5t}{t^2 - 24t + 128} - \frac{1}{4} \geq 0, \quad \frac{124 - 20t - t^2 + 24t - 128}{(t - 8)(t - 16)} \geq 0,$$

$$\frac{-t^2 + 4t - 4}{(t - 8)(t - 16)} \geq 0, \quad \frac{(t - 2)^2}{(t - 8)(t - 16)} \leq 0.$$



Осуществляя обратную замену, получим совокупность:

$$\begin{cases} 2^x = 2, \\ 8 < 2^x < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3 < x < 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{1\} \cup (3; 4)$.

18. (МИОО, 2016) Решите неравенство

$$\frac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0,5^{2x+3} + 2}{x+1} \leq 0.$$

Решение.

Осуществляем преобразования:

$$\frac{2 \cdot 2^{2x} - 96 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0,5^{2x} + 2}{x+1} \leq 0, \quad \frac{2^{2x} - 6 \cdot 2^{-2x} + 1}{x+1} \leq 0,$$

$$\frac{2^{4x} + 2^{2x} - 6}{x+1} \leq 0, \quad \frac{(2^{2x} - 2)(2^{2x} + 3)}{x+1} \leq 0.$$

Множитель $2^{2x} + 3$ больше нуля при любом x , поэтому просто убираем его.

$$\frac{2^{2x} - 2}{x+1} \leq 0.$$

Воспользуемся методом знакотожественных множителей, правило 6.

1	$a(x) = (u(x))^{2n+1} \pm (v(x))^{2n+1}$	$b(x) = u(x) \pm v(x)$
2	$a(x) = (u(x))^{2n} - (v(x))^{2n}$	$b(x) = (u(x))^2 - (v(x))^2$
3	$a(x) = u(x) - v(x) $	$b(x) = (u(x))^2 - (v(x))^2$
4	$a(x) = \sqrt[2n+1]{u(x)} \pm \sqrt[2n+1]{v(x)}$	$b(x) = u(x) \pm v(x)$
5	$a(x) = \sqrt[2n]{u(x)} - \sqrt[2n]{v(x)}$	$b(x) = u(x) - v(x)$ (при условиях $u(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$)
6	$a(x) = l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $l > 1$	$b(x) = u(x) - v(x)$
7	$a(x) = l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $0 < l < 1$	$b(x) = v(x) - u(x)$
8	$a(x) = \log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $c > 1$	$b(x) = u(x) - v(x)$ (при условиях $u(x) > 0, v(x) > 0$)
9	$a(x) = \log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $0 < c < 1$	$b(x) = v(x) - u(x)$ (при условиях $u(x) > 0, v(x) > 0$)
10	$a(x) = \log_c u(x)$ при $c > 1$	$b(x) = u(x) - 1$ (при условии $u(x) > 0$)
11	$a(x) = \log_c u(x)$ при $0 < c < 1$	$b(x) = 1 - u(x)$ (при условии $u(x) > 0$)
12	$a(x) = \log_{c(x)} u(x)$	$b(x) = \frac{u(x) - 1}{c(x) - 1}$ (при условиях $u(x) > 0, c(x) > 0$)

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq 0, \quad \frac{x-\frac{1}{2}}{x+1} \leq 0.$$

Ответ: $\left(-1; \frac{1}{2}\right]$.

19. (МИОО, 2016) Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 3^{2x+1} - 6^x - 4^{x+1} - 9}{9^x - 3} \leq 3.$$

Решение.

$$\frac{6 \cdot 3^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 2^{2x} - 9}{3^{2x} - 3} - 3 \leq 0,$$

$$\frac{6 \cdot 3^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 2^{2x} - 9 - 3 \cdot 3^{2x} + 9}{3^{2x} - 3} \leq 0,$$

$$\frac{3 \cdot 3^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 2^{2x}}{3^{2x} - 3} \leq 0.$$

Разделим обе части неравенства на $2^{2x} > 0$. А в знаменателе в это время воспользуемся правилом 6 метода знакотожественных множителей:

$$\frac{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 4}{x - \frac{1}{2}} \leq 0, \quad \frac{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{4}{3}\right)}{x - \frac{1}{2}} \leq 0.$$

Множитель $\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1$ больше нуля при любом x , просто убираем его.

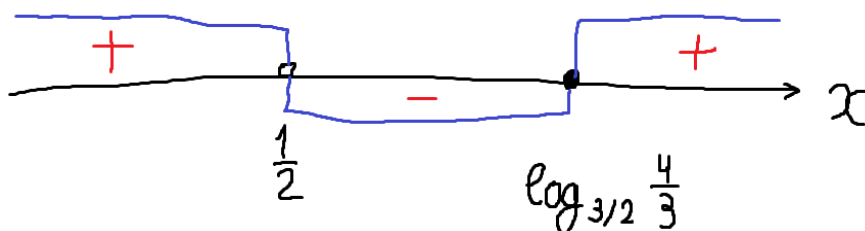
$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{4}{3}}{x - \frac{1}{2}} \leq 0.$$

Вновь применим правило 6, поскольку $\frac{3}{2} > 1$:

$$\frac{x - \log_{3/2} \frac{4}{3}}{x - \frac{1}{2}} \leq 0.$$

Осталось сравнить числа:

$$\log_{3/2} \frac{4}{3} \vee \frac{1}{2}, \quad \log_{3/2} \frac{4}{3} > \log_{3/2} \frac{3}{2} = 1 > \frac{1}{2}.$$



Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \log_{3/2} \frac{4}{3}\right]$.

20. (МИОО, 2016) Решите неравенство

$$\frac{x}{2^{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}.$$

Решение.

Понятно, что нужно преобразовывать дробь:

$$\frac{5x+3}{x+1} = \frac{3(x+1) + 2x}{x+1} = 3 + \frac{2x}{x+1}.$$

Тогда:

$$\frac{x}{2^{x+1}} - 2^{3+\frac{2x}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}},$$

$$\frac{x}{2^{x+1}} - 9 \cdot 2^{\frac{2x}{x+1}} + 8 \leq 0,$$

$$9 \cdot 2^{\frac{2x}{x+1}} - \frac{x}{2^{x+1}} - 8 \geq 0.$$

Замена $t = 2^{\frac{x}{x+1}} > 0$.

$$9t^2 - t - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -\frac{8}{9}, \\ t \geq 1. \end{cases}$$

С учётом $t > 0$, остается только $t \geq 1$, откуда

$$2^{\frac{x}{x+1}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \geq 0.$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$.

21. (ЕГЭ, 2016) Решите неравенство

$$\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3} \leq 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}.$$

Решение.

Последовательно преобразуем:

$$27^{x+\frac{1}{3}} = 27^x \cdot \sqrt[3]{27} = 3 \cdot 3^{3x}, \quad 9^{x+\frac{1}{2}} = 9^x \cdot \sqrt{9} = 3 \cdot 3^{2x}.$$

Тогда первая дробь равна:

$$\frac{3 \cdot 3^{3x} - 10 \cdot 3^{2x} + 10 \cdot 3^x - 5}{3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3}.$$

Разлагаем на множители знаменатель:

$$3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 = 3 \left(3^x - \frac{1}{3} \right) (3^x - 3) = (3 \cdot 3^x - 1)(3^x - 3).$$

Возвращаемся к исходному неравенству с заменой $t = 3^x > 0$:

$$\frac{3t^3 - 10t^2 + 10t - 5}{(3t - 1)(t - 3)} \leq t + \frac{1}{t - 2} + \frac{1}{3t - 1}.$$

Последовательно считаем слагаемые числителя:

$$\begin{aligned} (3t^3 - 10t^2 + 10t - 5)(t - 2) &= 3t^4 - 10t^3 + 10t^2 - 5t - 6t^3 + 20t^2 - 20t + 10 = \\ &= 3t^4 - 16t^3 + 30t^2 - 25t + 10. \end{aligned}$$

$$(t - 3)(t - 2) = t^2 - 5t + 6.$$

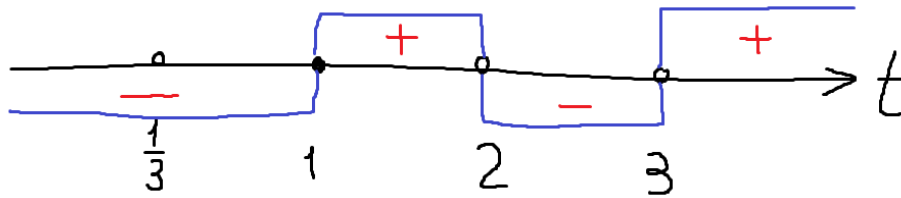
$$(3t^2 - 10t + 3)(t - 2) = 3t^3 - 10t^2 + 3t - 6t^2 + 20t - 6 = 3t^3 - 16t^2 + 23t - 6.$$

Итак, числитель равен:

$$\begin{aligned} 3t^4 - 16t^3 + 30t^2 - 25t + 10 - 3t^4 + 16t^3 - 23t^2 + 6t - 3t^2 + 10t - 3 - \\ - t^2 + 5t - 6 = 3t^2 - 4t + 1 = (3t - 1)(t - 1). \end{aligned}$$

Тогда неравенство равносильно следующему:

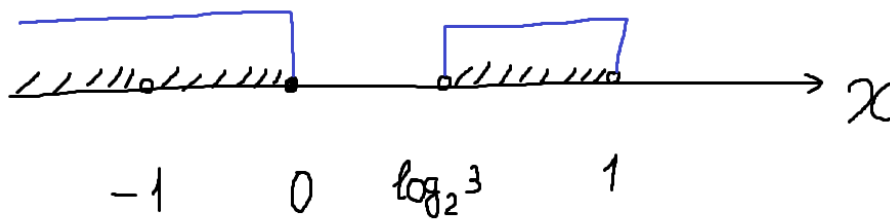
$$\frac{(3t - 1)(t - 1)}{(3t - 1)(t - 3)(t - 2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq \frac{1}{3}, \\ \frac{t - 1}{(t - 2)(t - 3)} \leq 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} t \neq \frac{1}{3}, \\ \begin{cases} t \leq 1, \\ 2 < t < 3. \end{cases} \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получим:

$$\begin{cases} 3^x \neq \frac{1}{3}, \\ \begin{cases} 3^x \leq 1, \\ 2 < 3^x < 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ \begin{cases} x \leq 0, \\ \log_3 2 < x < 1. \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup (\log_2 3; 1)$.

22. (ЕГЭ, 2016) Решите неравенство

$$125^x - 25^x + \frac{4 \cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \leq 4.$$

Решение.

$$5^{3x} - 5^{2x} + \frac{4 \cdot 5^{2x} - 20}{5^x - 5} \leq 4.$$

Замена $t = 5^x > 0$.

$$t^3 - t^2 + \frac{4t^2 - 20}{t - 5} \leq 4,$$

$$\frac{t^4 - t^3 - 5t^3 + 5t^2 + 4t^2 - 20 - 4t + 20}{t - 5} \leq 0.$$

$$\frac{t(t^3 - 6t^2 + 9t - 4)}{t - 5} \leq 0.$$

Видим, что коэффициенты уравнения $t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$ в сумме дают 0. Это означает, что $t = 1$ – корень данного уравнения. Поделим многочлен $t^3 - 6t^2 + 9t - 4$ на выражение $t - 1$.

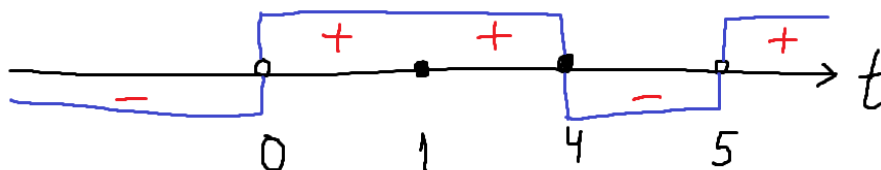
$$\begin{array}{r} t^3 - 6t^2 + 9t - 4 \quad | \quad t - 1 \\ \underline{t^3 - t^2} \\ -5t^2 + 9t - 4 \\ \underline{-5t^2 + 5t} \\ 4t - 4 \\ \underline{-4t + 4} \\ 0 \end{array}$$

Тогда

$$t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = (t - 1)(t^2 - 5t + 4) = (t - 1)^2(t - 4)$$

и неравенство принимает вид:

$$\frac{t(t - 1)^2(t - 4)}{t - 5} \leq 0.$$



$$\begin{cases} t < 0, \\ t = 1, \\ 4 \leq t < 5. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем:

$$\begin{cases} 5^x < 0, \\ 5^x = 1, \\ 4 \leq 5^x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \log_5 4 \leq x < 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{0\} \cup [\log_5 4; 1)$.

23. (ЕГЭ, 2016) Решите неравенство

$$\frac{4^x - 2^{x+4} + 30}{2^x - 2} + \frac{4^x - 7 \cdot 2^x + 3}{2^x - 7} \leq 2^{x+1} - 14.$$

Решение.

После замены $t = 2^x > 0$ получаем:

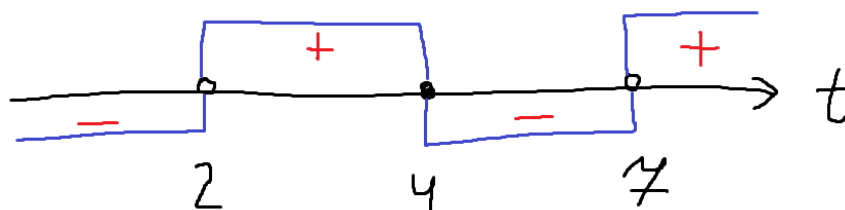
$$\frac{t^2 - 16t + 30}{t - 2} + \frac{t^2 - 7t + 3}{t - 7} \leq 2t - 14.$$

Считаем числитель:

$$\begin{aligned} (t^2 - 16t + 30)(t - 7) + (t^2 - 7t + 3)(t - 2) - (2t - 14)(t^2 - 9t + 14) = \\ = t^3 - 16t^2 + 30t - 7t^2 + 112t - 210 + t^3 - 7t^2 + 3t - 2t^2 + 14t - 6 - \\ - 2t^3 + 14t^2 + 18t^2 - 126t - 28t + 14^2 = 5t - 20. \end{aligned}$$

Тогда неравенство принимает вид:

$$\frac{t - 4}{(t - 2)(t - 7)} \leq 0.$$



$$\begin{cases} t < 2, \\ 4 \leq t < 7. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем:

$$\begin{cases} 2^x < 2, \\ 4 \leq 2^x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ 2 \leq x < \log_2 7. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup [2; \log_2 7)$.

24. (МИОО, 2017) Решите неравенство

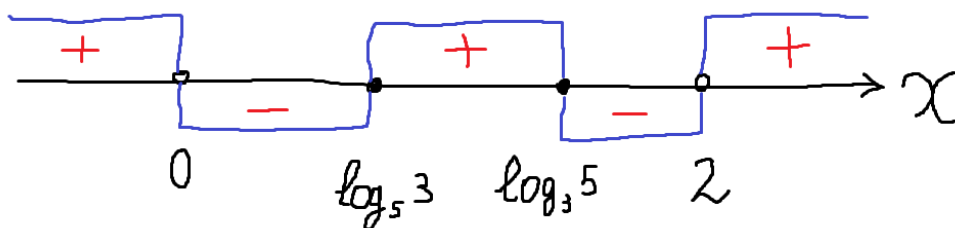
$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0.$$

Решение.

$$\frac{3^x \cdot 5^x - 3 \cdot 3^x - 5 \cdot 5^x + 3 \cdot 5}{x(x-2)} \leq 0,$$

$$\frac{3^x(5^x - 3) - 5(5^x - 3)}{x(x-2)} \leq 0,$$

$$\frac{(5^x - 3)(3^x - 5)}{x(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - \log_5 3)(x - \log_3 5)}{x(x-2)} \leq 0.$$



Ответ: $(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5; 2)$.

25. (МИОО, 2017) Решите неравенство

$$\frac{3^{2x} - 54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x+1)} - 1}{x+3} \leq 0.$$

Решение.

$$\frac{3^{2x} - 6 \cdot 3^{-2x} - 1}{x+3} \leq 0,$$

$$\frac{3^{4x} - 3^{2x} - 6}{x+3} \leq 0, \quad \frac{(3^{2x} + 2)(3^{2x} - 3)}{x+3} \leq 0, \quad \frac{3^{2x} - 3}{x+3} \leq 0, \quad \frac{x - \frac{1}{2}}{x+3} \leq 0.$$

Ответ: $\left(-3; \frac{1}{2}\right]$.

26. (МИОО, 2017) Решите неравенство

$$3^{|x|} - 8 - \frac{3^{|x|} + 9}{9^{|x|} - 4 \cdot 3^{|x|} + 3} \leq \frac{5}{3^{|x|} - 1}.$$

Решение.

Замена $t = 3^{|x|} > 0$.

$$t - 8 - \frac{t + 9}{t^2 - 4t + 3} - \frac{5}{t - 1} \leq 0.$$

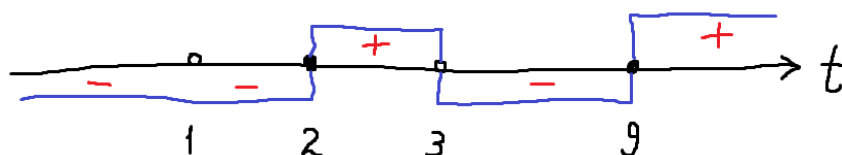
Считаем числитель:

$$\begin{aligned} & (t - 8)(t^2 - 4t + 3) - (t + 9)(t - 1) - 5 \cdot (t^2 - 4t + 3) = \\ & = t^3 - 4t^2 + 3t - 8t^2 + 32t - 24 - t - 9 - 5t + 15 = t^3 - 12t^2 + 29t - 18. \end{aligned}$$

Замечаем, что $t = 1$ – корень уравнения $t^3 - 12t^2 + 29t - 18 = 0$ (сумма коэффициентов равна нулю).

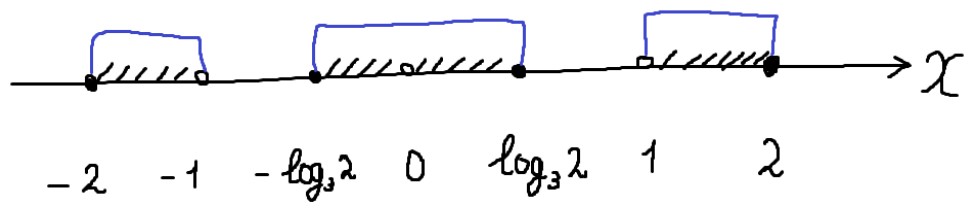
$$\begin{array}{r} t^3 - 12t^2 + 29t - 18 \quad | \quad t - 1 \\ - t^3 + t^2 \\ \hline -11t^2 + 29t - 18 \\ - -11t^2 + 11t \\ \hline 18t - 18 \\ - 18t + 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{(t - 1)(t - 2)(t - 9)}{(t - 1)(t - 3)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 1, \\ \frac{(t - 2)(t - 9)}{t - 3} \leq 0. \end{cases}$$



Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\begin{cases} 3^{|x|} \neq 1, \\ 3^{|x|} \leq 2, \\ 3 < 3^{|x|} \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ -\log_3 2 \leq x \leq \log_3 2, \\ 1 < |x| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ -\log_3 2 \leq x \leq \log_3 2, \\ -2 \leq x < 1, \\ 1 < x \leq 2. \end{cases}$$



Ответ: $[-2; -1) \cup [-\log_3 2; 0) \cup (0; \log_3 2] \cup (1; 2]$.

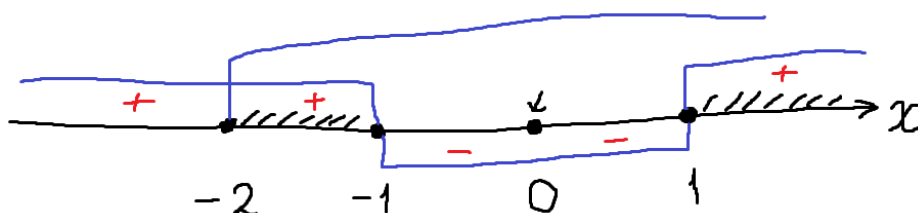
27. (МИОО, 2017) Решите неравенство

$$\frac{35^{|x|} - 5^{|x|} - 5 \cdot 7^{|x|} + 5}{2^{\sqrt{x+2}} + 1} \geq 0.$$

Решение.

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ 35^{|x|} - 5^{|x|} - 5 \cdot 7^{|x|} + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ 5^{|x|}(7^{|x|} - 1) - 5(7^{|x|} - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ (7^{|x|} - 1)(5^{|x|} - 5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ |x|(|x| - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x^2(x - 1)(x + 1) \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $[-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$.

28. (МИОО, 2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x+1}(2x-5) + \log_{2x-5}(x+1) \leq 2, \\ 25^x - 20^x - 2 \cdot 16^x \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1 \neq 1, \\ 2x-5 \neq 1, \\ x+1 > 0, \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 3, \\ x > -1, \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3, \\ x > \frac{5}{2}. \end{cases}$$

2. Первое неравенство принимает вид:

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(2x-5) + \frac{1}{\log_{x+1}(2x-5)} - 2 &\leq 0, \\ \frac{\log_{x+1}(2x-5) - 2\log_{x+1}(2x-5) + 1}{\log_{x+1}(2x-5)} &\leq 0, \\ \frac{(\log_{x+1}(2x-5) - 1)^2}{\log_{x+1}(2x-5)} &\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x+1}(2x-5) = 1, \\ \log_{x+1}(2x-5) < 0 \end{cases} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \\ \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x-5=0, \\ \frac{2x-5-1}{x+1-1} < 0 \end{cases} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \frac{5}{2}, \\ 0 < x < 3. \end{cases} \end{aligned}$$

С учётом ОДЗ решение первого неравенства: $\frac{5}{2} < x < 3$.

3. Преобразуем:

$$\begin{aligned} 5^{2x} - 5^x \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 2^{4x} &\leq 0, \\ 5^{2x} - 2^{4x} - 2^{2x}(5^x + 2^{2x}) &\leq 0, \\ (5^x - 2^{2x})(5^x + 2^{2x}) - 2^{2x}(5^x + 2^{2x}) &\leq 0, \\ (5^x + 2^{2x})(5^x - 2^{2x+1}) &\leq 0. \end{aligned}$$

Первый множитель больше нуля при любом x , поэтому его можно просто убрать:

$$5^x - 2^{2x+1} \leq 0, \quad 5^x \leq 2^{2x+1}.$$

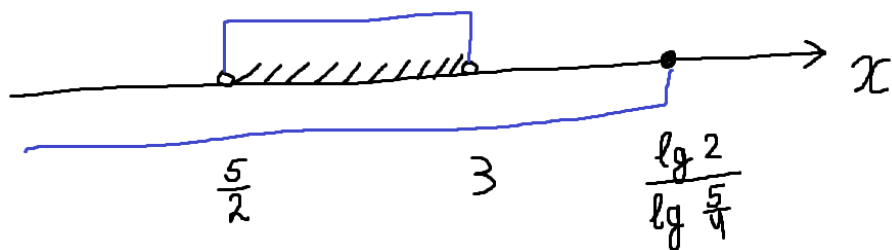
Обе части последнего неравенства нуждаются в логарифмировании по одному и тому же основанию. Можем выбрать любое число от 0 до 1, но тогда знак неравенства поменяется на противоположно направленный, можем выбрать любое число больше 1, в этом случае знак неравенства сохранится. Принято в таких случаях для краткости записи брать в качестве основания число 10 или число e .

$$x \cdot \lg 5 \leq (2x + 1) \lg 2, \quad x \cdot \lg 5 - 2x \cdot \lg 2 \leq \lg 2, \quad x(\lg 5 - \lg 4) \leq \lg 2.$$

$$x \leq \frac{\lg 2}{\lg \frac{5}{4}}.$$

Сравниваем:

$$\frac{\lg 2}{\lg \frac{5}{4}} \vee 3, \quad \lg 2 \vee 3 \lg \frac{5}{4}, \quad 2 > \frac{125}{64}, \quad \frac{\lg 2}{\lg \frac{5}{4}} > 3.$$



Ответ: $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

29. (ФЦТ, 2013) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x^2 - 2x + 26) \leq 3 \log_{3-x} 3, \\ \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 3} \leq \frac{x}{2} + 1. \end{cases}$$

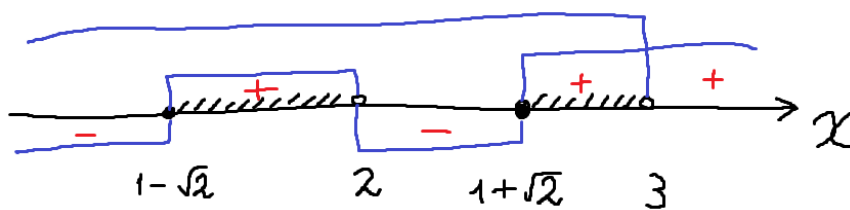
Решение.

1. Правило 12 метода знакотожественных множителей позволяет сократить ОДЗ до нахождения решений двух неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 26 > 0, \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 3.$$

2. Теперь на ОДЗ первое неравенство исходной системы равносильно следующему:

$$\frac{x^2 - 2x + 26 - 27}{3 - x - 1} \leq 0, \quad \frac{(x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))}{x - 2} \geq 0.$$

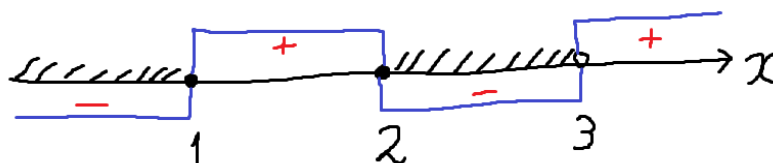


Решение первого неравенства:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{2} \leq x < 2, \\ 1 + \sqrt{2} \leq x < 3. \end{cases}$$

3. Второе неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 3} - \frac{x}{2} - 1 &\leq 0, \\ \frac{2x^2 - 4x - 4 - x^2 + 3x - 2x + 6}{x - 3} &\leq 0, \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} \leq 0, \\ \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 3} &\leq 0. \end{aligned}$$



Решение второго неравенства:

$$x \leq 1, \quad 2 \leq x < 3.$$

Ответ: $[1 - \sqrt{2}; 1] \cup [1 + \sqrt{2}; 3)$.

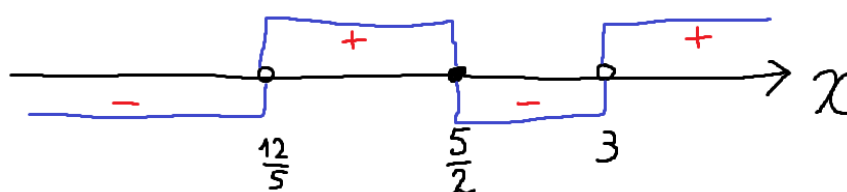
30. (ЕГЭ, 2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{5x-12} + \frac{2x^2-6x+1}{x-3} \geq 2x, \\ \log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leq -2. \end{cases}$$

Решение.

1. Решаем первое неравенство системы.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5x-12} + \frac{2x^2-6x+1}{x-3} - 2x &\geq 0, \\ \frac{x-3+10x^3-30x^2+5x-24x^2+72x-12-10x^3+54x^2-72x}{\left(x-\frac{12}{5}\right)(x-3)} &\geq 0, \\ \frac{x-\frac{5}{2}}{\left(x-\frac{12}{5}\right)(x-3)} &\geq 0. \end{aligned}$$



Решение первого неравенства исходной системы:

$$\begin{cases} \frac{12}{5} < x \leq \frac{5}{2}, \\ x > 3. \end{cases}$$

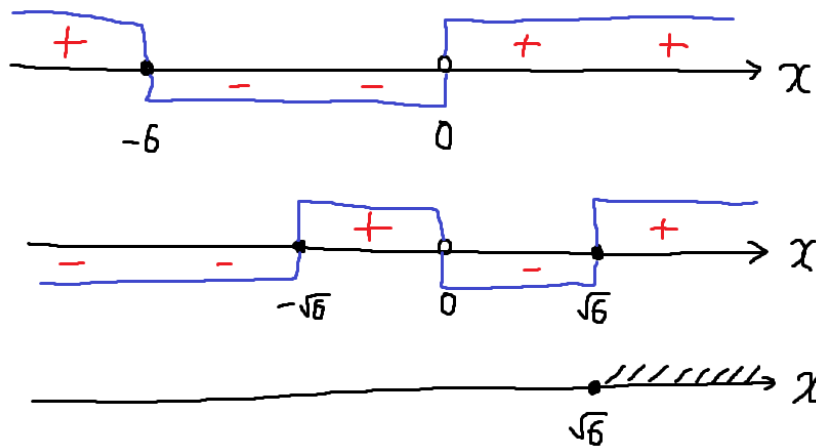
2. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ 2x+7 > 0, \\ 2x^2+9x+7 > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x > -1. \end{cases}$$

На ОДЗ второе неравенство можно преобразовать:

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(2x+7) \cdot (\log_{x+1}(2x+7) + \log_{x+1}(x+1) - 4\log_{x+1}(x+1)) + 2 &\leq 0, \\ \log_{x+1}(2x+7) \cdot (\log_{x+1}(2x+7) - 3) + 2 &\leq 0, \\ [\log_{x+1}(2x+7)]^2 - 3\log_{x+1}(2x+7) + 2 &\leq 0, \end{aligned}$$

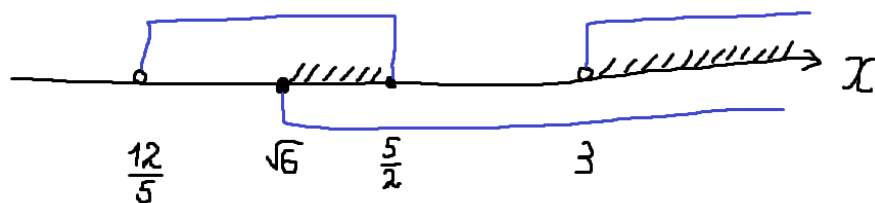
$$\begin{cases} \log_{x+1}(2x+7) \geq 1, \\ \log_{x+1}(2x+7) \leq 2 \end{cases} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{2x+7-x-1}{x+1-1} \geq 0, \\ \frac{2x+7-(x+1)^2}{x+1-1} \leq 0 \end{cases} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{x+6}{x} \geq 0, \\ \frac{(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})}{x} \geq 0. \end{cases}$$



С учётом ОДЗ, решение второго неравенства: $x \geq \sqrt{6}$. Осталось сравнить числа:

$$\frac{12}{5} \vee \sqrt{6}, \quad 12 \vee 5\sqrt{6}, \quad 144 < 150, \quad \frac{12}{5} < \sqrt{6}.$$

$$\frac{5}{2} \vee \sqrt{6}, \quad 5 \vee 2\sqrt{6}, \quad 25 > 24, \quad \frac{5}{2} > \sqrt{6}.$$



Ответ: $\left[\sqrt{6}; \frac{5}{2}\right] \cup (3; +\infty)$.

31. (МИОО, 2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x - 5 \cdot 3^x + 4 \geq 0, \\ \log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0. \end{cases}$$

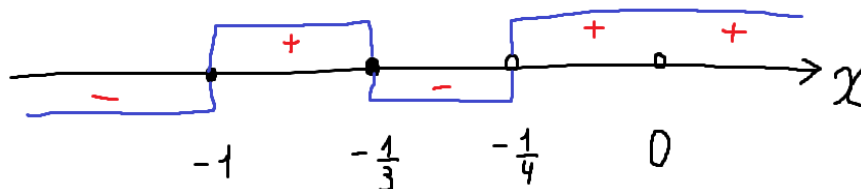
Решение.

1. Первое неравенство

$$3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 4 \geq 0, \quad (3^x - 1)(3^x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq \log_3 4. \end{cases}$$

2. ОДЗ для второго неравенства

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{3x^2 + 4x + 1}{4x + 1} > 0, \\ 3x^2 + 4x + 1 \neq 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{3x^2 + 4x + 1}{4x + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})}{x+\frac{1}{4}} > 0. \end{cases}$$



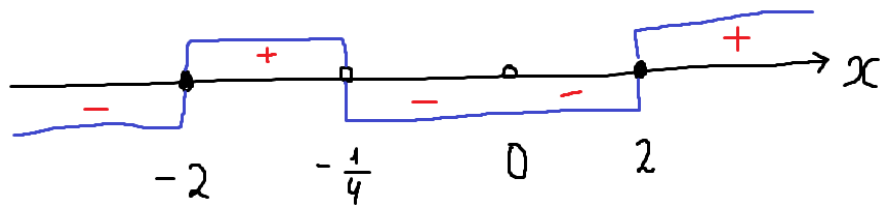
Итак, ОДЗ: $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4} < x < 0$, $x > 0$.

По правилу 12 метода знакотожественных множителей:

$$\log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{\left| \frac{x}{2} \right| - 1}{\frac{3x^2 + 4x + 1}{4x + 1} - 1} \leq 0,$$

$$\frac{x^2 - 4}{\frac{3x^2 + 4x + 1 - 4x - 1}{4x + 1}} \leq 0,$$

$$\begin{cases} x \neq -\frac{1}{4}, \\ \frac{(x + \frac{1}{4})(x - 2)(x + 2)}{x^2} \leq 0. \end{cases}$$



С учётом ОДЗ, остается: $\left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 2]$.

Понятно, что $\log_3 4 < \log_3 9 = 2$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup [\log_3 4; 2]$.

32. (МИОО, 2014) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_2^2(-\log_2 x) + \log_2 \log_2^2 x \leq 3, \\ -4|x^2 - 1| - 3 \geq \frac{1}{x^2 - 1}. \end{cases}$$

Решение.

1. ОДЗ первого неравенства системы:

$$\begin{cases} x > 0, \\ -\log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < 1. \end{cases}$$

2. В первом неравенстве требуются преобразования и разложение на множители сведением к квадратному уравнению. Однако слагаемое $\log_2 \log_2^2 x$ не дает этого сделать. Свойство: $\log_2 a^b = b \log_2 |a|$, $\log_2 \log_2^2 x = 2 \log_2 |\log_2 x|$. На ОДЗ выражение $\log_2 x$ меньше нуля, поэтому модуль раскрывается со знаком минус.

$$\log_2^2(-\log_2 x) + 2 \log_2(-\log_2 x) - 3 \leq 0,$$

$$-3 \leq \log_2(-\log_2 x) \leq 1,$$

$$\frac{1}{8} \leq -\log_2 x \leq 2,$$

$$-2 \leq \log_2 x \leq -\frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

2. Во втором неравенстве системы благодаря ОДЗ первого неравенства модуль раскрывается со знаком минус.

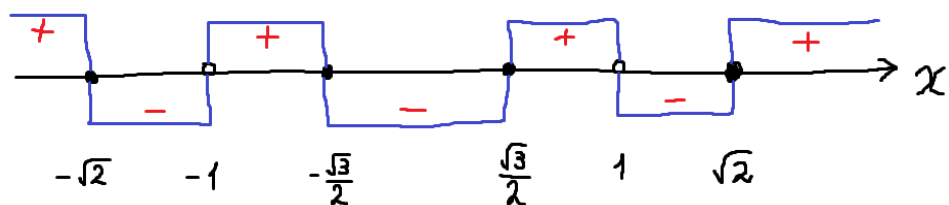
$$4(x^2 - 1) - 3 - \frac{1}{x^2 - 1} \geq 0,$$

замена $t = x^2 - 1$

$$\frac{4t^2 - 3t - 1}{t} \geq 0, \quad \frac{(t - 1)\left(t + \frac{1}{4}\right)}{t} \geq 0,$$

обратная замена:

$$\frac{(x^2 - 2)\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)}{x^2 - 1} \geq 0, \quad \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{(x - 1)(x + 1)} \geq 0.$$



Решение второго неравенства:

$$x \leq -\sqrt{2}, \quad -1 < x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < 1, \quad x \geq \sqrt{2}.$$

Осталось сравнить числа:

$$\frac{1}{4} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 1 \vee 2\sqrt{3}, \quad \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{1}{\sqrt[8]{2}}, \quad \frac{3^4}{2^8} \vee \frac{1}{2}, \quad 3^4 \vee 2^7, \quad 81 < 128, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$.

33. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_x(x^3 - 1) \leq \log_x(x^3 + 2x - 4), \\ \sqrt{3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 3} \geq 2^x - 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Первое неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^3 - 1 > 0, \\ x > 0, \\ \frac{x^3 - 1 - x^3 - 2x + 4}{x - 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{x - \frac{3}{2}}{x - 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

2. Пусть $t = 2^x$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3t^2 - 10t + 3} \geq t - 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} t - 3 \geq 0, \\ 3t^2 - 10t + 3 \geq t^2 - 6t + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 3, \\ (t + 1)(t - 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t \geq 3, \end{aligned}$$

возвращаясь к переменной x , получим: $x \geq \log_2 3$. Остается сравнить:

$$\log_2 3 \vee \frac{3}{2}, \quad \log_2 9 \vee 3, \quad 9 > 8, \quad \log_2 3 > \frac{3}{2}.$$

Ответ: $[\log_2 3; +\infty)$.

34. (ЕГЭ, 2014) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 9^{x+\frac{1}{2}} - 28 \cdot 3^{x-1} + 1 \leq 0, \\ \log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1}. \end{cases}$$

Решение.

1. Первое неравенство:

$$3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^x + 1 \leq 0,$$

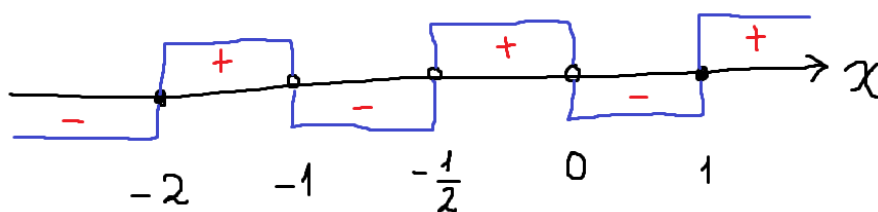
$$9 \cdot 3^{2x} - 25 \cdot 3^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1.$$

2. ОДЗ: $x \neq -\frac{1}{2}$.

$$\log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+x} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \cdot \log_{\sqrt{7}} 7 \leq \frac{4}{2x+1}.$$

$$\frac{1}{x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \geq 0.$$



Ответ: $[-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \{1\}$.

35. (ЕГЭ, 2014) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 19 \cdot 4^x + 4^{-x} \leq 20, \\ x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \geq 0. \end{cases}$$

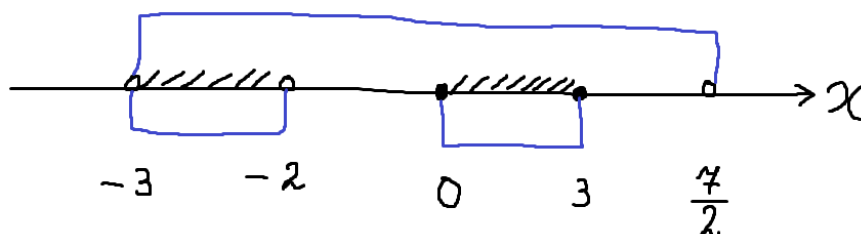
Решение.

1. Первое неравенство системы умножим на $4^x > 0$:

$$19 \cdot 4^{2x} - 20 \cdot 4^x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_4 \frac{1}{19} \leq x \leq 0.$$

2. Второе неравенство системы равносильно:

$$\begin{cases} 7-2x > 0, \\ x+3 > 0, \\ \frac{x \cdot (7-2x-1)}{x+3-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{2}, \\ x > -3, \\ \frac{x(x-3)}{x+2} \geq 0. \end{cases}$$



Остается понять, где находится число $\log_4 \frac{1}{19} = -\log_4 19$.

$$-3 \vee -\log_4 19, \quad \log_4 19 \vee 3, \quad \log_4 19 < \log_4 64, \quad -3 < -\log_4 19.$$

$$-2 \vee -\log_4 19, \quad \log_4 19 \vee 2, \quad \log_4 19 > \log_4 16.$$

Ответ: $[-\log_4 19; -2) \cup \{0\}$.

36. (МИОО, 2015) Решите неравенство

$$\frac{\log_{1-2x}((x+1)(1-4x+4x^2))}{\log_{x+1}(1-2x)} \leq -1.$$

Решение.

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 1-2x \neq 1, \\ \log_{1-2x}((x+1)(2x-1)^2) \cdot \log_{1-2x}(x+1) \leq -1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ (\log_{1-2x}(x+1) + 2 \log_{1-2x}(1-2x)) \log_{1-2x}(x+1) + 1 \leq 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ (\log_{1-2x}(x+1))^2 + 2 \log_{1-2x}(x+1) + 1 \leq 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \log_{1-2x}(x+1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x+1 > 0, \\ 1-2x > 0, \\ 1-2x \neq 1, \\ x+1 = \frac{1}{1-2x} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

37. (ЕГЭ, 2015) Решите неравенство

$$\lg^4 x - 4 \lg^3 x + 5 \lg^2 x - 2 \lg x \geq 0.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$. Замена $t = \lg x > 0$.

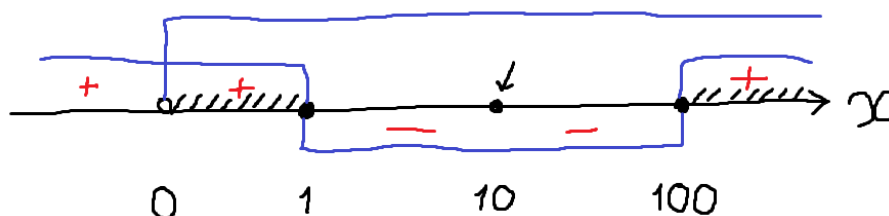
$$t(t^3 - 4t^2 + 5t - 2) \geq 0.$$

Сумма коэффициентов уравнения $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$ равна нулю, значит $t = 1$ — его корень.

$$\begin{array}{r} t^3 - 4t^2 + 5t - 2 \quad | \quad t-1 \\ \underline{t^3 - t^2} \\ -3t^2 + 5t \\ \underline{-3t^2 + 3t} \\ 2t - 2 \\ \underline{2t - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$t(t-1)^2(t-2) \geq 0,$$

$$x(x-10)^2(x-100) \geq 0,$$



Ответ: $(0; 1] \cup \{10\} \cup [100; +\infty)$.

38. (МИОО, 2016) Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} (5 - 2^x).$$

Решение.

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 5 - 2^x > 0, \\ \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{13}}{5} - 1 \right) (4 - 5 + 2^x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_2 5, \\ (\sqrt{2} + \sqrt{13} - 5)x \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{13} \vee 5, \quad 17 + 2\sqrt{26} \vee 25, \quad 2\sqrt{26} \vee 10, \quad 104 > 100, \quad \sqrt{2} + \sqrt{13} > 5.$$

Ответ: $[0; \log_2 5)$.

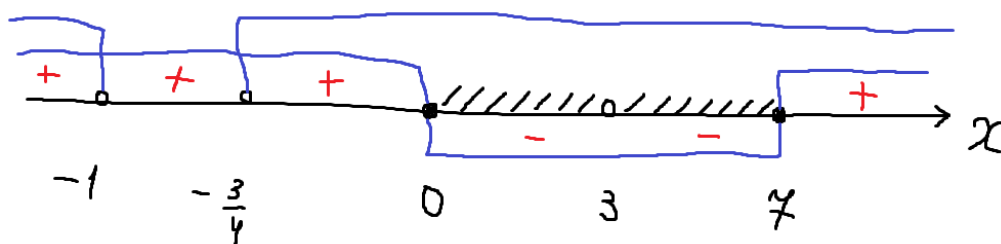
39. (ЕГЭ, 2016) Решите неравенство

$$2 \log_{(x^2-6x+10)^2} (5x^2 + 3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2 + 7x + 3).$$

Решение.

Равносильное преобразование

$$\begin{aligned} \log_{x^2-6x+10} (5x^2 + 3) &\leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2 + 7x + 3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 7x + 3 > 0, \\ \frac{5x^2 + 3 - 4x^2 - 7x - 3}{x^2 - 6x + 10 - 1} \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\left(x+\frac{3}{4}\right) > 0, \\ \frac{x(x-7)}{(x-3)^2} \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $[0; 3) \cup (3; 7]$.

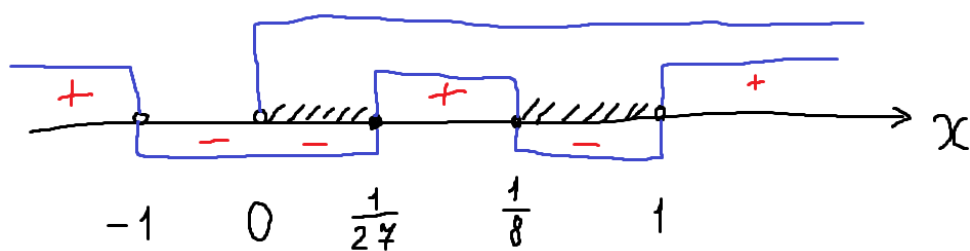
40. (МИОО, 2017) Решите неравенство

$$\frac{\log_2(8x) \cdot \log_3(27x)}{x^2 - |x|} \leq 0.$$

Решение.

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \frac{(8x - 1)(27x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} \leq 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left(0; \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{1}{8}; 1\right)$.