МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БАРАНОВИЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т. Р. ЯКУБОВИЧ, Ю. В. ШАРАПОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАМЕНЫ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ

**Учебно-методическое пособие
для учащихся старших классов
общеобразовательных школ и абитуриентов**

**Рекомендовано к печати
научно-методическим советом университета**

Барановичи
РИО БарГУ
2009

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я73
Я29

А в т о р ы:

Т. Р. Якубович, Ю. В. Шарапов

Р е ц е н з е н т ы:

В. В. Суворов, кандидат наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ;
Н. И. Шляго, старший преподаватель кафедры физико-математических дисциплин БарГУ

Якубович, Т. Р.

Я29 **Использование замены функций при решении неравенств** [Текст] : учеб.-метод. пособие для учащихся ст. кл. общ.-образоват. шк. и абитуриентов / Т. Р. Якубович, Ю. В. Шарапов. — Барановичи : РИО БарГУ, 2009. — 144 с. — 110 экз. — ISBN 978-985-498-273-1.

Приведены основные теоретические сведения об использовании способа замены функций при решении неравенств. Даны примеры решения неравенств, задания для самостоятельного решения (неравенства с модулем, иррациональные неравенства, показательные неравенства, логарифмические неравенства), тестовые задания, а также варианты самостоятельных работ. Предлагается решение типового варианта.

Рекомендовано учащимся старших классов общеобразовательных школ, абитуриентам, учителям математики.

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-498-273-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В 1992 году фирмой «Квантор» была издана серия учебно-методической литературы, в одном из выпусков которой излагался метод замены множителей, использованный ранее при подготовке абитуриентов как очень эффективный способ решения целого класса неравенств. Удивительно, что этот метод оказался вне поля зрения многих авторов учебников по математике для средней школы. И только в последние годы в массовых изданиях для учащихся и абитуриентов стали появляться решения задач методом замены множителей.

Одним из важнейших умений, которым должны владеть учащиеся и абитуриенты, является умение решать неравенства. В школьном курсе математики изучается решение линейных, квадратичных, дробно-рациональных, иррациональных, тригонометриических, показательных, логарифмических неравенств, но суть одна — сведение к решению простейших неравенств, равносильных исходным. Этот подход реализуется и в данном пособии.

Способ замены функций при решении неравенств в некоторых случаях имеет явное преимущество перед другими способами решения (алгоритмизирован, достаточно универсален).

Его изучение можно начинать с 9-го класса (11-летнее обучение) и продолжать далее.

После знакомства со способом замены функций при решении неравенств у учащихся появляется возможность выбора способа решения, осуществляющегося путем равносильных преобразований, что упрощает его так называемое «оформление».

Цель данного издания состоит в том, чтобы в доступной форме познакомить учителей и старшеклассников, собирающихся поступать в ВУЗы, с методом замены функций (множителей), так как овладение этим методом существенно экономит необходимое для решения задач повышенной сложности время на государственном тестировании.

1 ОСНОВНАЯ ИДЕЯ МЕТОДА ЗАМЕНЫ ФУНКЦИЙ

С помощью перехода от одной функции к другой (замены множителей) неравенство сводится к равносильному ему неравенству, легко решаемому методом интервалов. В основе описываемого преобразования лежит утверждение(*).

Утверждение (*). Если область определения, нули и промежутки знакопостоянства функции $f(x)$ соответственно совпадают с областью определения, нулями и промежутками знакопостоянства функции $g(x)$, то неравенства $p(x)f(x) \geq 0(1)$ и $p(x)g(x) \geq 0(2)$ равносильны.

Данное утверждение означает, что если одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ имеет более простой вид, чем другая, то при решении неравенств вида (1) или (2) ее можно «заменить» на другую. При этом получится неравенство, равносильное исходному.

Предлагаемые методы решения достаточно эффективны при решении неравенств, левая часть которых представляет собой произведение (частное) двух функций указанных ниже видов, а правая часть равна нулю. Традиционные решения таких неравенств путем рассмотрения двух случаев (или применения обобщенного метода интервалов) оказываются, как правило, более громоздкими по сравнению с изученными.

1.1 Монотонность — ключ к замене функций

Основная часть замены функций обусловлена двумя утверждениями.

Утверждение 1. Функция $f(x)$ есть строго (!) возрастающая функция тогда и только тогда, когда для любых двух значений x_1 и x_2 из области определения функции разность $(x_1 - x_2)$ совпадает по знаку с разностью $(f(x_1) - f(x_2))$, т. е.

$$f(x)\uparrow <\!\!-\!\!> (x_1 - x_2 <\!\!-\!\!> f(x_1) - f(x_2)) \text{ на ОДЗ,}$$

где <–> — совпадение знаков.

Утверждение 2. Функция $f(x)$ есть строго (!) убывающая функция тогда и только тогда, когда для любых двух значений x_1 и x_2 из области определения функции разность $(x_1 - x_2)$ совпадает по знаку с разностью $(f(x_2) - f(x_1))$, т. е.

$$f(x)\downarrow <\!\!-\!\!> (x_1 - x_2 <\!\!-\!\!> f(x_2) - f(x_1)) \text{ на ОДЗ.}$$

Обоснование этих утверждений непосредственно следует из определения строго монотонной функции. Равносильность утверждений *1* и *2* следует из того факта, что если $y = f(x)$ есть монотонно возрастающая функция, то $y = -f(x)$ есть монотонно убывающая.

1.2 Базовая информация по методу замены функций

С методической точки зрения вместо термина «замена функций» лучше использовать термин «замена множителей». Тогда лучше воспринимается процесс решения неравенств данным методом.

1. Стандартный вид неравенств, когда применяется метод замены множителей, следующий:

$$\frac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n}{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \ldots \cdot g_k} \vee 0, \qquad (1.1)$$

где $\vee$ — один из четырех возможных знаков неравенства: $\le, \ge, <, >$.

Замечание:

а) $\dfrac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n}{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \ldots \cdot g_k} > 0 \;<=>\; f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \mathbf{K}\, f_n \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \mathbf{K} \cdot g_k > 0;$

б) $\dfrac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n}{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \ldots \cdot g_k} \geq 0 \;<=>$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \mathbf{K}\, f_n \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \mathbf{K} \cdot g_k \geq 0; \\ g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \mathbf{K} \cdot g_k \neq 0. \end{cases}$$

2. Основная идея метода замены множителей состоит в замене любого множителя в числителе или в знаменателе на знакосовпадающий с ним и имеющий одни и те же корни.

Замечание. Преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области его существования. Указанная замена возможна только тогда, когда неравенство приведено к стандартному виду (1.1).

3. Две основные замены:

$\left(f(t_1) - f(t_2)\right) \leftrightarrow (t_1 - t_2)$, если $f(t)$ строго возрастающая функция;

$\left(f(t_2) - f(t_1)\right) \leftrightarrow (t_1 - t_2)$, если $f(t)$ строго убывающая функция.

Замечание. В качестве заменяемых функций могут выступать любые функции, строго монотонные на определенном промежутке (тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, степенные функции и др.).

1.3 Часто встречающиеся замены

Существуют следующие часто встречающиеся замены:

1) $ax^2 + bx + c <-> a$ при $D = b^2 - 4ac < 0$;

2) $f - g <-> f^2 - g^2$ при $f \geq 0$ и $g \geq 0$;

3) а) $f(x) = |u(x)| - |\mathrm{v}(x)| <-> g(x) = u^2(x) - \mathrm{v}^2(x)$.

Следствие 1. $|t| <-> t^2$.

Следствие 2. $|u(x)| - (ax^2 + bx + c) <-> u^2(x) - (ax^2 + bx + c)^2$
при $D = b^2 - 4ac < 0, \text{a} > 0;$

б) $f(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{\nu(x)} <-> g(x) = u(x) - \nu(x),\ n = 2k+1,\ k \in N;$

$f(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{\nu(x)} <-> g(x) = u(x) - \nu(x),\ n = 2k,\ k \in N;$

$$D(g) = \begin{cases} u(x) \geq 0, \\ \nu(x) \geq 0. \end{cases}$$

Следствие 1. $\sqrt{u(x)} <-> u(x)$ при $u(x) \geq 0.$

Следствие 2. $|u(x)| - \sqrt{n(x)} <-> u^2(x) - n(x), n(x) \geq 0.$

Следствие 3. $\sqrt{u(x)} - (ax^2 + bx + c) <-> u(x) - (ax^2 + bx + c)^2$
при $u(x) \geq 0,\ D = b^2 - 4ac < 0, a > 0;$

в) $f(x) = a^{u(x)} - a^{\nu(x)} <-> g(x) = u(x) - \nu(x)$ при $a > 1.$

Следствие 1. $a^{u(x)} - a^{n(x)} <-> (u(x) - n(x))(a-1),\ a \neq 1.$

Следствие 2. $a^{u(x)} - 1 <-> u(x)(a-1),\ a \neq 1;$

г) $f(x) = \log_a u(x) - \log_a \nu(x) <-> g(x) = u(x) - \nu(x)$ при $a > 1,$

$$D(g) = \begin{cases} u(x) > 0, \\ \nu(x) > 0. \end{cases}$$

Следствие 1. $\log_a u(x) <-> (u(x) - 1)(a-1)$ при $a > 0,\ a \neq 1.$

Следствие 2. $\log_a u(x) - \nu(x) <-> (u(x) - a^{\nu(x)})(a-1)$
при $a > 1,\ a \neq 1,\ u(x) > 0.$

Следствие 3. $\log_a u(x) - \log_a \nu(x) <-> (u(x) - \nu(x))(a-1)$
при $u(x) > 0, n(x) > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$

2 ПРИМЕРЫ ЗАМЕНЯЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим несколько примеров таких пар функций, для которых справедливо утверждение (*).

1. Функции $f(x) = |u(x)| - |v(x)|$ и $g(x) = u^2(x) - v^2(x)$.

Области определения $D(f)$ и $D(g)$ этих функций совпадают. Кроме того, $|u(x)|-|v(x)|\ge 0 \Leftrightarrow |u(x)|\ge|v(x)| \Leftrightarrow u^2(x)\ge v^2(x) \Leftrightarrow u^2(x)-v^2(x)\ge 0.$

Значит, для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполнены условия утверждения (*).

Пример 2.1. Решите неравенство $\dfrac{|3x-2|-|2x-3|}{|x^2+x-8|-|x^2-x|}\le 0.$

Решение

Воспользуемся утверждением (*) и, заменив разности модулей соответствующими разностями квадратов, получим равносильное неравенство

$$\frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{(x^2+x-8-x^2+x)(x^2+x-8+x^2-x)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(5x-5)}{(2x-8)(2x^2-8)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-2)(x+2)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)\le 0,\\ x\ne 4,\ x\ne 2,\ \ x\ne -2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\,\mathbf{U}\,[-1;1]\,\mathbf{U}\,(2;4).$$

Ответ: $(-\infty;-2)\,\mathbf{U}\,[-1;1]\,\mathbf{U}\,(2;4)$.

Пример 2.2. Решите неравенство $\dfrac{|2x^2-x-3|-x^2-2x-1}{|3x^2+x-2|-x^2-2x-1}\le 0$.

Решение

Поскольку $(x+1)^2=\left|(x+1)^2\right|$, то имеем

$$\frac{|2x^2-x-3|-x^2-2x-1}{|3x^2-x-2|-x^2-2x-1}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2x^2-x-3\right|-\left(x+1\right)^2}{\left|3x^2+x-2\right|-\left(x+1\right)^2}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2x^2-x-3\right|-\left|(x+1)^2\right|}{\left|3x^2+x-2\right|-\left|(x+1)^2\right|}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\left|2x^2-x-3\right|-\left|x^2+2x+1\right|}{\left|3x^2+x-2\right|-\left|x^2+2x+1\right|}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2x^2-x-3\right)^2-\left(x^2+2x+1\right)^2}{\left(3x^2+x-2\right)^2-\left(x^2+2x+1\right)^2}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-3x-4\right)\left(3x^2+x-2\right)}{\left(2x^2-x-3\right)^2\left(4x^2+3x-1\right)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+1)^2\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x+1)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x-\frac{2}{3})(x+1)^4(x-\frac{3}{2})(x-\frac{1}{4})\le 0, \\ x\ne -1, x\ne\frac{3}{2}, x\ne\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{4};\frac{2}{3}\right]\mathbf{U}\left(\frac{3}{2};4\right].$$

Ответ: $x\in\left(\frac{1}{4};\ \frac{2}{3}\right]\mathbf{U}\left(\frac{3}{2};\ 4\right].$

Пример 2.3. Решите неравенство $\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

Решение

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(|x-4|-|x-1|\right)|x-4|-(x-3)^2+(x-2)^2}{\left(|x-3|-|x-2|\right)|x-4|}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-8x+16-\left|(x-1)(x-4)\right|-x^2+6x-9+x^2-4x+4}{|x-4|\left(|x-3|-|x-2|\right)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-6x+11\right)-\left|x^2-5x+4\right|}{|x-4|\left(|x-3|-|x-2|\right)}<0.$$

Поскольку $x^2-6x+11>0$ для любого $x \in R$, так как коэффициент при x^2 равен $1>0$ и $D=36-44<0$, то $x^2-6x+11=\left|x^2-6x+11\right|$:

$$\frac{\left|x^2-6x+11\right|-\left|x^2-5x+4\right|}{|x-4|\left(|x-3|-|x-2|\right)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left|x^2-6x+11\right|-\left|x^2-5x+4\right|}{|x-3|-|x-2|}<0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x^2-6x+11)^2-(x^2-5x+4)^2}{(x-3)^2-(x-2)^2}<0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-7)(x-2{,}5)(x-3)}{x-2{,}5}<0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-7)<0 \\ x \neq 4;\ x \neq 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3;\ 4) \cup (4;\ 7).$$

Ответ: $(3;\ 4)$ **U** $(4;\ 7)$.

Пример 2.4. Решите неравенство $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geq \dfrac{2}{|x+1|-2}$.

Решение

Пусть $|x+1| = t$, тогда неравенство примет вид $\dfrac{1}{t-1} \geq \dfrac{2}{t-2}$. Решая его, получим

$$\frac{1}{t-1} - \frac{2}{t-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t-2-2t+2}{(t-1)(t-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t}{(t-1)(t-2)} \leq 0.$$

Возвращаясь к исходной переменной, имеем

$$\frac{|x+1|}{(|x+1|-1)(|x+1|-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{((x+1)^2-1^2)((x+1)^2-2^2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+1|^2}{x(x+2)(x-1)(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-3;-2) \,\mathbf{U}\, \{-1\} \,\mathbf{U}\, (0;1).$$

Ответ: $x \in (-3;-2) \,\mathbf{U}\, \{-1\} \,\mathbf{U}\, (0;1)$.

Пример 2.5. Решите неравенство $\dfrac{||x^2-x|-1|-1}{||4x+3|-2|-1} \geq 0$.

Решение

В силу сформулированного утверждения

$$\frac{|a|-|b|}{|c|-|d|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b)}{(c-d)(c+d)} \geq 0.$$

Поэтому можно сразу перейти к следующему неравенству, равносильному данному:

$$\frac{(|x^2-x|-2)|x^2-x|}{(|4x+3|-3)(|4x+3|-1)} \ge 0.$$

Вновь воспользовавшись тем же преобразованием, получим неравенство

$$\frac{(x^2-x-2)(x^2-x+2)\left(x^2-x\right)^2}{4x(4x+6)(4x+2)(4x+4)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)x^2(x-1)^2}{x(x+1{,}5)(x+0{,}5)(x+1)} \ge 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов.

Ответ: $x \in (-\infty; -1{,}5) \cup (-0{,}5; 0) \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Пример 2.6. Решите неравенство $\dfrac{|5x-19|-|3x-13|}{(x-3)(x-4)} \ge 0$.

Решение

$$\frac{|5x-19|-|3x-13|}{(x-3)(x-4)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(5x-19)^2-(3x-13)^2}{(x-3)(x-4)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{16(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)} \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$.

2. Функции $f(x) = a^{u(x)} - a^{v(x)}$**,** $a > 1$ **и** $g(x) = u(x) - v(x)$**.**

Области определения $D(f)$ и $D(g)$ этих функций совпадают. Кроме того, при $a > 1$ имеем $a^{u(x)} - a^{v(x)} \ge 0 \Leftrightarrow a^{u(x)} \ge a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) - v(x) \ge 0$.

Значит, для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполнены условия утверждения (*).

Пример 2.7. Решите неравенство $(2^x - 4)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

Решение

$$(2^x-4)(x^2-2x-3)>0 \Leftrightarrow (2^x-2^2)(x+1)(x-3)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x+1)>0 \Leftrightarrow x\in(-1;\,2)\cup(3;+\infty).$$

Ответ: $x\in(-1;\,2)\,\mathbf{U}\,(3;+\infty).$

Пример 2.8. Решите неравенство $\dfrac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0.$

Решение

Перейдем в числителе дроби к основанию 2, а в знаменателе — к основанию 5 и применим утверждение (*):

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-\left(0{,}5\right)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}}{5^x-5^0}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+6x-4-\left(-2x^2-2x+1\right)}{x-0}\le 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+8x-5}{x}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+\frac{5}{2})(x-\frac{1}{2})\le 0, \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ x\in(-\infty;\frac{-5}{2})\,\mathbf{U}\left(0;\frac{1}{2}\right].$$

Ответ: $x\in(-\infty;\dfrac{-5}{2})\,\mathbf{U}\left(0;\dfrac{1}{2}\right].$

Пример 2.9. Решите неравенство $\dfrac{3^{2x-1}-5^x}{5^{2x-1}-3^x}\le 0\,.$

Решение

$$\frac{3^{2x-1}-5^x}{5^{2x-1}-3^x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{3^{2x-1}-3^{\log_3 5^x}}{5^{2x-1}-5^{\log_3 3^x}}\le 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-\log_3 5^x}{2x-1-\log_5 3^x}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2x-x\log_3 5\right)-1}{\left(2x-x\log_5 3\right)-1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x\log_3\frac{9}{5}-1}{x\log_5\frac{25}{3}-1}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \dfrac{9}{5}\left(x - \dfrac{1}{\log_3 \dfrac{9}{5}}\right)\log_5 \dfrac{25}{3}\left(x - \dfrac{1}{\log_5 \dfrac{25}{3}}\right) \le 0, \\ x \ne \dfrac{1}{\log_5 \dfrac{25}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{\log_3 \dfrac{9}{5}}\right)\left(x - \dfrac{1}{\log_5 \dfrac{25}{3}}\right) \le 0, \\ x \ne \dfrac{1}{\log_5 \dfrac{25}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{1}{\log_5 \dfrac{25}{3}}; \dfrac{1}{\log_3 \dfrac{9}{5}}\right].$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{\log_5 \dfrac{25}{3}}; \dfrac{1}{\log_3 \dfrac{9}{5}}\right].$

Пример 2.10. Решите неравенство $8 \cdot 5^x - 10^x + 2^x > 8$.

Решение

$$8 \cdot 5^x - 10^x + 2^x > 8 \Leftrightarrow (5^x - 1)(2^x - 8) < 0 \Leftrightarrow (x - 0)(x - 3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0; 3).$$

Ответ: $x \in (0; 3)$.

Пример 2.11. Решите неравенство $\dfrac{8^x - 64}{x^2 + 11x + 30} \le 0$.

Решение

$$\frac{8^x - 64}{x^2 + 11x + 30} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2}{(x + 6)(x + 5)} \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (-5; 2].$$

Ответ: $x \in (-\infty;-6) \cup (-5;2]$.

Пример 2.12. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^{0,5x^2-4} > 5, \\ 25^x - 30 \cdot 5^x + 125 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} 25^{0,5x^2-4} > 5, \\ 25^x - 30 \cdot 5^x + 125 \geq 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$$25^{\,0,5x^2-4} > 5 \Leftrightarrow 5^{\,x^2-8} - 5 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty;\,-3) \cup (3;\,+\infty).$$

Решим второе неравенство системы:

$$(5^x - 5^2)(5^x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty;\,1] \cup [2;\,+\infty).$$

Решение системы следующее: $x \in (-\infty;\,-3) \cup (3;\,+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.

3. Функции $f(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ и $g(x) = u(x) — v(x)$ при нечетном n; функции $f(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ и $g(x) = u(x) — v(x)$, где $D(g)$ определяется системой неравенств $\begin{cases} u(x) \geq 0, \\ v(x) \geq 0 \end{cases}$ при четном n.

Очевидно, что при нечетном n утверждение (*) справедливо. При четном n области определения функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают. При четном n имеем

$$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x)\ge v(x), \\ u(x)\ge 0, \\ v(x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x)-v(x)\ge 0, \\ u(x)\ge 0, \\ v(x)\ge 0. \end{cases}$$

Значит, при четном n для функций $f(x)$ и $g(x)$ также выполнены условия утверждения (*).

Пример 2.13. Решите неравенство $\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}}\le 0$.

Решение

$$\frac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{1}-\sqrt{x+2}}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4-x-2}{1-x-2}\le 0, \\ x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-x}{-1-x}\le 0, \\ x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1}\le 0, \\ x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1)\le 0, \\ x\ge -2, x\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-1;2], \\ x\in(-2;+\infty] \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1;2].$$

Ответ: $x\in(-1;2]$.

Пример 2.14. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt{3x^2+x-4}}\ge 0.$

Решение

$$\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt{3x^2+x-4}}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt{-3x^2+x-4}} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2+x+1-x^2-x-1}{3x^2+4x-2-(-3x^2-x+4)} \ge 0, \\ 2x^2+x+1 \ge 0, \\ x^2+x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{6x^2+5x-6} \ge 0, \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+\frac{3}{2})(x-\frac{2}{3})} \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \mathbf{U} \{0\} \mathbf{U} \left(\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right) \mathbf{U} \{0\} \mathbf{U} \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

Пример 2.15. Решите неравенство $\dfrac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x} \le 0.$

Решение

$$\frac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-\sqrt[3]{x^3}} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1-5+2x+2x^2}{x^3+2x^2-5x+2-x^3} \le 0, \\ 2x^2+2x-5 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2+4x-x}{2x^2-5x+2} \le 0, \\ 2x^2+2x-5 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-\frac{2}{3})}{(x-2)(x-\frac{1}{2})} \le 0, \\ -\dfrac{1+\sqrt{11}}{2} \le x \le \dfrac{\sqrt{11}-1}{2}. \end{cases}$$

Решив последнюю систему методом интервалов, получим ответ.

Ответ: $x \in \left[-2;\ \frac{1}{2}\right) \mathbf{U} \left[\frac{2}{3};\ \frac{\sqrt{11}-1}{2}\right].$

Пример 2.16. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{4x^2+4x-4}+\sqrt[3]{-2-5x-3x^2}}{2x^2+5x-18} \geq 0 .$$

Решение

$$\frac{\sqrt[3]{4x^2+4x-4}+\sqrt[3]{-2-5x-3x^2}}{2x^2+5x-18} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+4x-4-3x^2-5x-2}{2x^2+5x-18} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{2x^2+5x-18} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty;-\frac{9}{2}\right) \mathbf{U} \left[-2;\ 2\right) \mathbf{U} \left[3;+\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty;-\frac{9}{2}\right) \mathbf{U} \left[-2;\ 2\right) \mathbf{U} \left[3;+\infty\right).$

4. Функции $f(x) = \log_a u(x) - \log_a v(x)$ при $a > 1$ и $g(x) = u(x)$ — v(x), где D(g) определяется системой неравенств $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0. \end{cases}$

Области определения этих функций совпадают. Кроме того, при $a > 1$ имеем

$$\log_a u(x) \text{-} \log_a v(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \log_a u(x) \geq \ \log_a v(x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) \geq v(x), \\ u(x) > 0, \\ v(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) - v((x) \geq 0, \\ u(x) > 0, \\ v(x) > 0. \end{cases}$$

Значит, для функций $f(x)$ и $g(x)$ при $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0 \end{cases}$ выполнены условия утверждения (*).

Пример 2.17. Решите неравенство $\dfrac{\lg(x+1)}{x^2+3x-4} \geq 0.$

Решение

$$\frac{\lg(x+1)}{x^2+3x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+1)-\lg 1}{x^2+3x-4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)-1}{(x-1)(x+4)} \geq 0, \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{(x-1)(x+4)} \geq 0, \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \; x \in (-1;\, 0] \cup (1;\, +\infty).$$

Ответ: $x \in (-1;\, 0] \cup (1;\, +\infty)$.

Пример 2.18. Решите неравенство $(4-x)(x+7)\log_{0,5}(x+2) \geq 0$.

Решение

$$(4-x)(x+7)\log_{0,5}(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+7)\log_2(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+7)(\log_2(x+2)-\log_2 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+7)(x+2-1) \geq 0, \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \; x \in (-2;\, -1] \cup [4;\, +\infty).$$

Ответ: $x \in (-2;\, -1] \cup [4;\, +\infty)$.

Пример 2.19. Решите неравенство $\dfrac{5\lg x-16}{\lg x-4} < 4$.

Решение

$$\frac{5\lg x-16}{\lg x-4} < 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lg x - \lg 1}{\lg x - \lg 10\,000} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-10\,000}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 10\,000).$$

Ответ: $x \in (1; 10\,000)$.

Пример 2.20. Решите неравенство $\dfrac{5}{\log_3 x + 3} \geq 1$.

Решение

$$\frac{5}{\log_3 x + 3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_3 x - 2}{\log_3 x + 3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3 x - \log_3 9}{\log_3 x - \log_3 \dfrac{1}{27}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-9}{x - \dfrac{1}{27}} \leq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{27}; 9\right].$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{27}; 9\right]$.

Пример 2.21. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(2x+3)} \leq 0$.

Решение

Традиционный способ решения подобных неравенств состоит в рассмотрении совокупности двух систем. Мы воспользуемся утверждением (*), предварительно представив числитель и знаменатель дроби в виде разности логарифмов.

Итак, данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\log_2(3x+2) - \log_2 1}{\log_3(2x+3) - \log_3 1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+2-1}{2x+3-1} \leq 0, \\ x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2x+2} \leq 0, \\ x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1}{x+1} \le 0, \\ x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x \le -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right]$.

Пример 2.22. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,2}\frac{1}{2x-1} + \log_5(2-x)}{\log_5(2x-1) + \log_{0,2}\frac{1}{3-2x}} \ge 0.$

Решение

Приведем логарифмы к основанию 5, преобразуем выражения и воспользуемся тем же приемом, что и при решении предыдущего примера:

$$\frac{\log_2(2x-1) + \log_5(2-x)}{\log_5(2x-1) + \log_5(3-2x)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{\log_5(-2x^2+5x-2)}{\log_5(-4x^2+8x-3)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{\log_5(-2x^2+5x-2) - \log_5 1}{\log_5(-4x^2+8x-3) - \log_5 1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{-2x^2+5x-3}{-4x^2+8x-4} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-2x+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(x-1)^2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{x-\frac{3}{2}}{x-1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1.$$

Ответ: $x \in (0,5;\ 1)$.

Пример 2.23. Решите неравенство

$$\frac{(\log_2(2x+1)-\log_2(x+2))(|x|-|x-2|)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}} \le 0.$$

Решение

Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{((2x+1)-(x+2))(x^2-(x-2)^2)}{(3x-2)-(2x-1)} \le 0, \\ x \ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)\cdot 2\cdot 2(x-1)}{x-1} \le 0, \\ x \ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x-1} \le 0, \\ x \ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \le x < 1\right).$$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{2}{3};1\right)$.

Пример 2.24. Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3\left(x+7\right)} \le 0.$

Решение

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-13x+20-2}{x+7-1} \le 0, \\ 2x^2-13x+20>0, \\ x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2-13x+18}{x+6} \le 0, \\ 2x^2-13x+20>0, \Leftrightarrow \\ x>-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-2)(x-\frac{9}{2})(x+6)\le 0,\\ x>-7, x\ne -6,\\ 2(x-4)(x-\frac{5}{2})>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;-6)\cup[2;4{,}5],\\ x\in(-7;+\infty),\\ x\in(-\infty;2{,}5)\cup(4;+\infty).\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-7;-6)\cup[2;2{,}5)\cup(4;4{,}5].$$

Ответ: $x\in(-7;-6)\cup[2;2{,}5)\cup(4;4{,}5]$.

Пример 2.25. Решите неравенство $\dfrac{\log_3(10x+3)\log_3(3x+10)}{\log_3(10x)\cdot\log_3 x}\ge 0.$

Решение

$$\frac{\log_3(10x+3)\log_3(3x+10)}{\log_3(10x)\cdot\log_3 x}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\log_3(10x+3)-\log_3 1)(\log_3(3x+10)-\log_3 1)}{(\log_3(10x)-\log_3 1)(\log_3 x-\log_3 1)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(10x+3-1)(3x+10-1)}{(10x-1)(x-1)}\ge 0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(10x+2)(3x+9)}{(10x-1)(x-1)}\ge 0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(5x+1)(x+3)}{(10x-1)(x-1)}\ge 0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;\frac{1}{10})\cup(1;+\infty).$$

Ответ: $x\in(0;\frac{1}{10})\cup(1;+\infty)$.

Пример 2.26. Решите неравенство $\frac{2\lg x+110}{1gx+10}\geq 1.$

Решение

$$\frac{2\lg x+110}{1gx+10}\geq 1\Leftrightarrow \frac{2\lg x+110-\lg x-10}{1gx+10}\geq 0\Leftrightarrow \frac{\lg x+100}{1gx+10}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg x-\lg 10^{-100}}{1gx-\lg 10^{-10}}\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-10^{-100}}{x-10^{-10}}\geq 0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0;10^{-100}\right]\mathbf{U}\left(10^{-10};+\infty\right).$$

Ответ: $x\in\left(0;10^{-100}\right]\mathbf{U}\left(10^{-10};+\infty\right).$

5. Логарифмические неравенства, содержащие переменную в основании логарифма. Данная группа неравенств занимает особое место среди стандартных неравенств, поскольку решение таких неравенств вызывает определенные трудности у школьников и абитуриентов. Наиболее распространенный способ решения этих неравенств заключается в рассмотрении двух случаев: 1) основание больше единицы; 2) основание положительно и меньше единицы. Другим методом решения является обобщенный метод интервалов, заключающийся в приведении неравенства к виду $f(x) \vee 0$ (где символом «$\vee$» обозначен один из знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$), разбиении $D(f)$ нулями $f(x)$ на несколько интервалов и определении знака $f(x)$ на каждом интервале по ее знаку в одной из точек соответствующего интервала.

Существует и метод решения логарифмических неравенств, содержащих переменную в основании логарифма, основанный на замене функций, т. е. если область определения, нули и промежутки знакопостоянства функции $f(x)$ соответственно совпадают с областью определения, нулями и промежутками знакопостоян-ства функции $g(x)$, то неравенства $p(x)f(x)\geq 0$ и $p(x)g(x)\geq 0$ равносильны.

В частности, при $a > 1$

$$(\log)_a u(x)-\log_a n(x))\,p(x)\leq 0\Leftrightarrow \begin{cases}(u(x)-n(x))\,p(x)\leq 0,\\ u(x)>0,\\ n(x)>0.\end{cases} \tag{2.1}$$

Суть метода состоит в приведении логарифмов неравенства к любому основанию, большему 1, и применении равносильного преобразования (2.1).

Рассмотрим основные виды логарифмических неравенств, содержащих переменную в основании логарифма.

I. ***Неравенства вида*** $\mathbf{\log_{h(x)} f(x) < b}$.

Применим формулу перехода к новому основанию и воспользуемся свойствами логарифмов:

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x)}{\log_2 h(x)} - b < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x) - b\log_2 h(x)}{\log_2 h(x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x) - \log_2 h^b(x)}{\log_2 h(x) - \log_2 1} < 0.$$

Теперь воспользуемся преобразованием (2.1):

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - h^b(x)}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Важнейшими частными случаями являются неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) < b$ при $b \in \{0; 1; 2\}$:

$$\log_{h(x)} f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - 1}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0; \end{cases} \qquad (2.3)$$

$$\log_{h(x)} f(x) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - h(x)}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

$$\log_{h(x)} f(x) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - h^2(x)}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Замечания:

1. Заучивать системы (2.2)—(2.5) нет необходимости. Надо лишь помнить об основной идее решения, заключающейся в переходе к снованию, большему единицы, и замене разности логарифмов разностью соответствующих функций при естественных ограничениях на каждую из них.

2. Если в качестве сомножителя левая часть неравенства содержит какой-либо логарифм (а не разность двух логарифмов), то для применения преобразования (2.1) необходимо представить этот логарифм в виде разности, вычтя из него нуль, записанный как логарифм единицы по тому же основанию.

3. Аналогичные преобразования применимы как для неравенств противоположного знака, так и для нестрогих неравенств.

Пример 2.27. Решите неравенство $\log_{2x-5}(5x-2) \geq 1$.

Решение

$$\log_{2x-5}(5x-2) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)}{\log_2(2x-5)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5) - \log_2 1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(5x-2)-(2x-5)}{(2x-5)-1} \geq 0, \\ 5x-2 > 0, \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+3}{2x-6} \ge 0, \\ x > 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

Пример 2.28. Решите неравенство $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) \le 2$.

Решение

$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(4+7x-2x^2\right)}{\log_2|x+2|} - 2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(4+7x-2x^2\right) - \log_2|x+2|^2}{\log_2|x+2| - \log_2 1} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(4+7x-2x^2\right) - (x+2)^2}{|x+2|-1} \le 0, \\ 4+7x-2x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3x^2+3x}{(x+2)^2-1^2} \le 0, \\ 2x^2-7x-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)} \ge 0, \\ -0{,}5 < x < 4. \end{cases}$$

Решая методом интервалов, получим $x \in (-0{,}5;\ 0] \cup [1;\ 4)$.

Ответ: $x \in (-0{,}5;\ 0] \cup [1;\ 4)$.

Необходимо знать, что при решении предыдущего неравенства были использованы тождество $|a|^2 = a^2$ и замена функции $|u(x)| - |v(x)|$ функцией $u^2(x) - v^2(x)$.

Пример 2.29. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0.$

Решение

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+2)}{\log_2(2-x)}\cdot\frac{\log_2(3-x)}{\log_2(x+3)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+2)-\log_2 1}{\log_2(2-x)-\log_2 1}\cdot\frac{\log_2(3-x)-\log_2 1}{\log_2(x+3)-\log_2 1}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)}\le 0, \\ -2<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\le 0, \\ -2<x<2. \end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов.

Ответ: $x\in(-2;\,-1]\cup(1;\,2)$.

II. *Неравенства вида* $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$.

Решение неравенства указанного вида (неравенства, рассмотренные выше, являются его частными случаями) проводится с помощью привычных преобразований:

$$\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x)}{\log_2 h(x)} - \frac{\log_2 g(x)}{\log_2 h(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x)-\log_2 g(x)}{\log_2 h(x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x)-\log_2 g(x)}{\log_2 h(x)-\log_2 1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)-1} < 0, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ h(x)>0. \end{cases}$$

Эти преобразования остаются в силе как для неравенств противоположного знака, так и для нестрогих неравенств.

Пример 2.30. Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2).$$

Решение

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(2x^2+x-1)-\log_2(11x-6-3x^2)}{\log_2 \dfrac{3x-1}{x+2}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x^2+x-1)-(11x-6-3x^2)}{\dfrac{3x-1}{x+2}-1} \geq 0, \\ 2x^2+x-1>0, \\ 11x-6-3x^2>0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{2x-3} \geq 0, \\ \dfrac{2}{3}<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=1, \\ &1{,}5<x<3. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x \in \{1\} \cup (1{,}5;\ 3)$.

III. *Неравенства вида* $\log_{f(x)} h(x) < \log_{g(x)} h(x)$.

Последняя группа стандартных логарифмических неравенств, содержащих неизвестную в основании логарифма, — неравенства, левая и правая части которых представляют собой логарифмы с разными основаниями от одной и той же функции. Равносильная система и в этом случае получается с помощью преобразований, аналогичных рассмотренным ранее:

$$\log_{f(x)} h(x) < \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \frac{\log_2 h(x)}{\log_2 f(x)} - \frac{\log_2 h(x)}{\log_2 g(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 h(x)\left(\frac{1}{\log_2 f(x)} - \frac{1}{\log_2 g(x)}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 h(x) \frac{\log_2 g(x) - \log_2 f(x)}{\log_2 f(x) \cdot \log_2 g(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_2 h(x) - \log_2 1)(\log_2 g(x) - \log_2 f(x))}{(\log_2 f(x) - \log_2 1)\,(\log_2 g(x) - \log_2 1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(h(x)-1)(g(x)-f(x))}{(f(x)-1)(g(x)-1)} < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Отметим, что данные преобразования применимы и в случае неравенства противоположного знака, и в случае нестрогих неравенств. Последнее особенно важно, поскольку случай равенства $h(x)$ единице будет учтен в соответствующей системе, что позволит избежать потери решения, которая часто происходит при традиционном решении путем перехода к основанию $h(x)$.

Пример 2.31. Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(3-x)}{\log_2(12x^2-41x+35)}-\frac{\log_2(3-x)}{\log_2(2x^2-5x+3)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(3-x)\cdot(\log_2(2x^2-5x+3)-\log_2(12x^2-41x+35))}{\log_2(12x^2-41x+35)\cdot\log_2(2x^2-5x+3)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_2(3-x)-\log_2 1)\cdot(\log_2(2x^2-5x+3)-\log_2(12x^2-41x+35))}{(\log_2(12x^2-41x+35)-\log_2 1)\cdot(\log_2(2x^2-5x+3)-\log_2 1)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-x)(-10x^2+36x-32)}{(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)}\ge 0, \\ 3-x>0, \\ 12x^2-41x+35>0, \\ 2x^2-5x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2(x-\frac{8}{5})}{\left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2)^2(x-\frac{1}{2})}\ge 0, \\ x<3, \\ (x-\frac{5}{3})(x-\frac{7}{4})>0, \\ (x-1)(x-\frac{3}{2})>0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства последней системы — объединение промежутков $\left(\frac{1}{2};\frac{17}{12}\right)\mathbf{U}\left[\frac{8}{5};2\right)\mathbf{U}\,(2;\infty)$.

Пересечением решений трех оставшихся неравенств является множество $(-\infty;1)\,\mathbf{U}\left(\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right)\mathbf{U}\left(\frac{7}{4};3\right)$. Следовательно, решение всей системы следующее: $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)\mathbf{U}\left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right)\mathbf{U}\left(\frac{7}{4};2\right)\mathbf{U}\,(2;3)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3).$

Не вызывает сомнений, что в ряде случаев изложенный метод позволяет решать логарифмические неравенства, содержащие переменную в основаниях логарифмов, быстрее и эффективнее других методов. Соответствующие примеры легко найти во многих задачниках.

6. Примеры повышенной сложности.

Пример 2.32. Решите неравенство $\dfrac{26-3x+\sqrt{x^2-2x-24}}{2x-10}<-1.$

Решение

$$\frac{26-3x+\sqrt{x^2-2x-24}}{2x-10}<-1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-2x-24}-2(x-8)}{x-10}<0.$$

Рассмотрим два случая:

$$1)\ \begin{cases} x^2-2x-24 \ge 0, \\ x-8<0, \\ x-10<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [6; +\infty), \\ x \in (-\infty; 8), \\ x \in (-\infty; 10) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [6; 8);$$

$$2)\ \begin{cases} x-8 \ge 0, \\ x^2-2x-24 \ge 0, \\ \dfrac{x^2-2x-24-4(x-8)^2}{x-10}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 8, \\ x^2-2x-24 \ge 0, \\ \dfrac{3x^2-62x+280}{x-10}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\left(\dfrac{20}{3};10\right)\cup(14;+\infty), \\ x\in[8;+\infty), \\ x\in(-\infty;-4]\cup[6;+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow x\in[8;10)\cup(14;+\infty).$$

Ответ: $x\in(-\infty;-4]\cup[6;10)\cup(14;+\infty)$.

Пример 2.33. Решите неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\log_3\left(-2x-x^2\right)\geq\log_3\left(\frac{1}{2}|x|+\frac{3}{2}\right)\log_2\left(-2x-x^2\right).$$

Решение

Данное неравенство равносильно следующему:

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\log_3\left(-2x-x^2\right)\geq\frac{\log_2\left(\frac{1}{2}|x|+\frac{3}{2}\right)}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_3(-2x-x^2)}{\log_3 2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\log_3\left(-2x-x^2\right)\geq$$

$$\geq\log_2\left(\frac{1}{2}|x|+\frac{3}{2}\right)\log_3\left(-2x-x^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(-2x-x^2\right)\left(\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)-\log_2\left(\frac{1}{2}\left|x+\frac{3}{2}\right|\right)\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(-2x-x^2-1\right)\left(\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}x+1\right)-\left(\frac{1}{2}|x|+\frac{3}{2}\right)\right)\geq 0, \\ -2x-x^2>0, \\ \sqrt{x-\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-2;0), \\ (x+1)^2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+x-\frac{1}{2}\right)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x\in\left(-2;-\frac{3}{2}\right] \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\{1\}.$$

Ответ: $x\in\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\{1\}.$

Пример 2.34. Решите неравенство $\dfrac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{\left|x^2+2x-3\right|-\left|2x^2-10x+8\right|}\geq 0.$

Решение

Данное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{\log_2(2x+8)-\log_2(13-x)}{\left(x^2+2x-3-2x^2+10x-8\right)\left(x^2+2x-3+2x^2-10x+8\right)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-4; 13), \\ \dfrac{2x+8-13+x}{(-x^2+12x-11)(3x^2-8x+5)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-4; 13), \\ \dfrac{x-\frac{5}{3}}{(x-1)^2(x-11)\left(x-\frac{5}{3}\right)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-4; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 11\right).$$

Ответ: $x \in (-4; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 11\right).$

Пример 2.35. Решите неравенство

$$\log_{|3x-3|}\left(25^x - 9^x\right) < \log_{|3x-3|}\left(5^x + 3^x\right) + \log_{|3x-3|}\left(5^{x-1} + 3^{x-1}\right).$$

Решение

$$\log_{|3x-3|}\left(25^x - 9^x\right) < \log_{|3x-3|}\left(5^x + 3^x\right) + \log_{|3x-3|}\left(5^{x-1} + 3^{x-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{|3x-3|}\left(25^x - 9^x\right) - \log_{|3x-3|}\left(5^x + 3^x\right) - \log_{|3x-3|}\left(5^{x-1} + 3^{x-1}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{|3x-3|}\left(5^x + 3^x\right) - \log_{|3x-3|}\left(5^{x-1} + 3^{x-1}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg\left(5^x - 3^x\right) - \lg\left(5^{x-1} + 3^{x-1}\right)}{\lg|3x-3| - \lg 1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|3x-3|-1)(5^x-3^x-5^{x-1}-3^{x-1})<0, \\ |3x-3|\neq 0, \\ |3x-3|\neq 1, \\ 5^x-3^x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|3x-3|-1)\left(\frac{4}{5}5^x-\frac{4}{3}3^x\right)<0, \\ x>0, \\ x\neq 1,\ x\neq \frac{4}{3},\ x\neq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-4)(3x-2)(5^{x-1}-3^{x-1})<0, \\ x>0, x\neq 1,\ x\neq \frac{4}{3},\ x\neq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-4)(3x-2)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}-\left(\frac{5}{3}\right)^{0}\right)<0, \\ x>0, x\neq 1,\ x\neq \frac{4}{3},\ x\neq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)<0, \\ x>0, x\neq 1,\ x\neq \frac{4}{3},\ x\neq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{2}{3}\right)\mathbf{U}\left(1;\frac{4}{3}\right).$$

Ответ: $x\in\left(0;\frac{2}{3}\right)\mathbf{U}\left(1;\frac{4}{3}\right).$

Замечание. Появление сомножителя $(|3x-3|-1)$ логически вытекает из вышеизложенного подхода к решению неравенств. Также видно, что равносильность

$$\log_A B > 0 \;(\text{или} < 0) \Leftrightarrow \begin{cases} (A-1)(B-1) > 0 (\text{или} < 0), \\ A > 0,\ B > 0, \\ A \neq 1 \end{cases}$$

является следствием из описываемого метода замены функций при решении неравенств.

Пример 2.36. Решите неравенство $\dfrac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\dfrac{2x-7}{4}-\cos\dfrac{x-5}{4}} \geq 0.$

Решение

1) $5-x^2 \geq 0,\ x^2 \leq 5,\ |x| \leq \sqrt{5};$ при $x \in [\,-\sqrt{5};\sqrt{5}\,]$ выражение $3-x>0;$

2) при $x \in [\,-\sqrt{5};\sqrt{5}\,]$ $\quad -\pi < \dfrac{2x-7}{4} < 0$ и $-\pi < \dfrac{x-5}{4} < 0;$

3) функция $\cos t$ возрастает на множестве $[-\pi;\, 0]$.

4) $\dfrac{\sqrt{(3-x)^2}-\sqrt{5-x^2}}{\cos\dfrac{2x-7}{4}-\cos\dfrac{x-5}{4}} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(3-x)^2-(5-x^2)}{\cos\dfrac{2x-7}{4}-\cos\dfrac{x-5}{4}} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(3-x)^2-(5-x^2)}{\dfrac{2x-7}{4}-\dfrac{x-5}{4}} \geq 0, \Leftrightarrow \\ |x| \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2} \geq 0, \Leftrightarrow \\ |x| \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le \sqrt{5}, \\ x \ne 2. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [1;\ 2) \cup (2;\ \sqrt{5}]$.

3 СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Задачи из сборника под редакцией М. И. Сканави[5], решенные двумя способами

9.216*. $\log_5 x + \log_x \dfrac{x}{3} < \dfrac{\log_5 x(2 - \log_3 x)}{\log_3 x}$.

Решение

I способ

Перейдя к основанию 5, получим

$$\log_5 x + \frac{\log_5 x - \log_5 3}{\log_5 x} < \frac{\log_5 x\left(2 - \dfrac{\log_5 x}{\log_5 3}\right)}{\dfrac{\log_5 x}{\log_5 3}}.$$

После упрощений получим

$$\frac{2\log_5^2 x + (1 - 2\log_5 3)\log_5 x - \log_5 3}{\log_5 x} < 0 \Leftrightarrow$$

* Здесь и далее номера со звездочкой обозначают номер задания из сборника под редакцией М. И. Сканави [5].

$$\frac{2\log_5^2 x+(1-2\log_5 3)\log_5 x-\log_5 3}{\log_5 x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\log_5 x-\log_5 3)\left(\log_5 x+\frac{1}{2}\right)}{\log_5 x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_5 x-\log_5 3)\left(\log_5 x+\frac{1}{2}\right)\log_5 x<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_5 x<-\frac{1}{2}, \\ 0<\log_5 x<\log_5 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<5^{-\frac{1}{2}}, \\ 1<x<3\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup(1;3).$$

Ответ: $x\in\left(0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup(1;3).$

II с п о с о б

$$\log_5 x+\log_x \frac{x}{3}<\frac{\log_5 x(2-\log_3 x)}{\log_3 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x+1-\frac{1}{\log_3 x}-\frac{2\log_5 x-\log_5 x\cdot\log_3 x}{\log_3 x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_5 x\cdot\log_3 x+\log_3 x-1-2\log_5 x}{\log_3 x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_5 x(\log_3 x-1)+(\log_3 x-1)}{\log_3 x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_5 x\left(\log_3 x-1\right)+\left(\log_3 x-1\right)}{\log_3 x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\log_3 x-1\right)\left(\log_5 x+\frac{1}{2}\right)}{\log_3 x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-3)\left(x-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{x-1}, <0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ или } 1<x<3.$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \mathbf{U} (1; 3)$.

9.219*. $\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}$.

Решение

I способ

$$\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|} \Leftrightarrow 3^{2|x-1|}-4\cdot 3^{|x-1|}+3<0 \Leftrightarrow 1<3^{|x-1|}<3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<|x-1|<1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x-1<1, \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0; 1) \mathbf{U} (1; 2)$.

II способ

$$\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|} \Leftrightarrow \left(3^{|x-2|}\right)^2-4\cdot 3^{|x-1|}+3<0 \Leftrightarrow \left(3^{|x-1|}-1\right)\times$$

$$\times\left(3^{|x-1|}-3\right)<0 \Leftrightarrow \left(|x-1|-0\right)\left(|x-1|-1\right)<0 \Leftrightarrow (x-1)^2\times$$

$$\times\left((x-1)-1\right)(x-1+1)<0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)x<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(1;2).$$

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;2)$

9.237*. $\log_x \log_2\left(4^x-12\right)\le 1$.

Решение

I способ

$$\log_x \log_2\left(4^x-12\right)\le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ \log_2\left(4^x-12\right)\ge x; \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ \log_2\left(4^x-12\right)\le x, \\ \log_2\left(4^x-12\right)>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ 4^x-12\ge 2^x; \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ 4^x-12\le 2^x, \\ 4^x-12>1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ 2^{2x}-2^x-12\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ 2^{2x}-2^x-12\le 0, \\ 4^x>13 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ \left[\begin{array}{l} 2^x\ge 4, \\ 2^x\le -3; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ -3\le 2^x\le 4, \\ 4^x>13 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ x\ge 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ x\le 2, \\ x>\log_4 13 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ \begin{cases} 1<x\le 2, \\ x>\log_4 13 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(\log_4 13;\, 2\right].$$

Ответ: $x\in\left(\log_4 13;\, 2\right]$.

II с п о с о б

$$\log_x \log_2\left(4^x-12\right)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\log_2\left(4^x-12\right)-x\right)(x-1)\le 0,\\ \log_2\left(4^x-12\right)>0,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(4^x-12-2^2\right)(x-1)\le 0,\\ 4^x-12-1>0,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(2^{2x}-2^x-12\right)(x-1)\le 0,\\ x>\log_4 13\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2^x+3\right)\left(2^x-4\right)(x-1)\le 0,\\ x>\log_4 13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(2^x-2^2\right)(x-1)\le 0,\\ x>\log_4 13\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x-1)\le 0,\\ x>\log_4 13\end{cases} \Leftrightarrow \log_4 13< x\le 2.$$

Ответ: $x\in\left(\log_4 13;\, 2\right]$.

9.246*. $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

Решение

I с п о с о б

$$\log_{x^2}(3-2x)>\log_{x^2}x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x^2<1,\\ 3-2x<x^2,\\ 3-2x>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2>1,\\ 3-2x>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<1,\\ x\ne 0,\\ x^2+2x-3>0,\\ x<\dfrac{3}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<-1,\end{array}\right.\\ x^2+2x-3<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<1,\\ \left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<-3,\end{array}\right.\\ x<\dfrac{3}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ x<-1,\\ -3<x<1.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ -3 < x < -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-3; -1)$.

II способ

$$\log_{x^2}(3-2x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(3-2x)-x^2}{x^2-1} > 0, \\ 3-2x > 0, \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} < 0, \\ x < \dfrac{3}{2}, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 < x < -1.$$

Ответ: $x \in (-3; -1)$.

9.247*. $\log_3(4^x+1) + \log_{4^x+1} 3 > 2{,}5.$

Решение

I способ

$$\log_3(4^x+1) + \frac{1}{\log_3(4^x+1)} - 2{,}5 > 0 \Leftrightarrow \log_3^2(4^x+1) - 2{,}5\log_3(4^x+1) + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3(4^x+1) - 2)(\log_3(4^x+1) - 0{,}5) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(4^x+1) < 0{,}5, \\ \log_3(4^x+1) > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(4^x+1) < \log_3\sqrt{3}, \\ \log_3(4^x+1) > \log_3 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4^x+1 < \sqrt{3}, \\ 4^x+1 > 0, \end{cases} \\ 4^x+1 > 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x < \sqrt{3}-1, \\ 4^x > 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \log_4\left(\sqrt{3}-1\right), \\ x > \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \log_4\left(\sqrt{3}-1\right)\right) \mathbf{U} \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \log_4\left(\sqrt{3}-1\right)\right) \mathbf{U} \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$

II способ

$$\log_3\left(4^x+1\right)+\log_{4^x+1} 3 > 2{,}5 \Leftrightarrow \log_3\left(4^x+1\right)+\frac{1}{\log_3\left(4^x+1\right)} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(\log_3\left(4^x+1\right)\right)^2 - 5\log_3\left(4^x+1\right)+2}{\log_3\left(4^x+1\right)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(\log_3\left(4^x+1\right)-2\right)\left(\log_3\left(4^x+1\right)-\dfrac{1}{2}\right)}{\log_3\left(4^x+1\right)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\left(4^x+1-9\right)\left(4^x+1-\sqrt{3}\right)}{4^x+1-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(4^x-8\right)\left(4^x-\left(\sqrt{3}-1\right)\right)}{4^x} > 0 \Leftrightarrow \left(x-\log_4 8\right)\left(x-\log_4\left(\sqrt{3}-1\right)\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\log_4\left(\sqrt{3}-1\right)\right) > 0 \Leftrightarrow x < \log_4\left(\sqrt{3}-1\right) \text{ или } x > \frac{3}{2}.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \log_4\left(\sqrt{3}-1\right)\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$

9.248*. $\log_3\left(3^x-1\right)\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x+2}-9\right) > -3$.

Решение

I способ

$$\log_3\left(3^x-1\right)\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x+2}-9\right) > -3 \Leftrightarrow \log_3\left(3^x-1\right)\log_3\left(9\left(3^x-1\right)\right) < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x-1)(2+\log_3(3^x-1))-3<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2(3^x-1)+2\log_3(3^x-1)-3<0 \Leftrightarrow -3<\log_3(3^x-1)<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{27}<3^x<4 \Leftrightarrow \log_3\frac{28}{27}<x<\log_3 4.$$

Ответ: $x\in\left(\log_3\frac{28}{27};\log_3 4\right)$.

II с п о с о б

$$\log_3(3^x-1)\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2}-9)>-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3(3^x-1)\log_3(9(3^x-1))+3>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3(3^x-1)(2+\log_3(3^x-1))+3>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3(3^x-1))^2+2\log_3(3^x-1)-3<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3(3^x-1)-(-3))(\log_3(3^x-1)-1)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(3^x-1-\frac{1}{27}\right)(3^x-1-3)<0,\\ 3^x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x-\frac{28}{27}\right)(3^x-4)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\log_3\frac{28}{27}\right)(x-\log_3 4)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{28}{27}<x<\log_3 4.$$

Ответ: $x\in\left(\log_3\frac{28}{27};\log_3 4\right)$.

9.249*. $\log_p \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x} < 0$.

Решение

I способ

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq p. \end{cases}$

Данное неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < p < 1, \\ \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log^2{}_p x} > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} p > 1, \\ \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log^2{}_p x} < 1 \end{cases} \\ \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x} > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < p < 1, \\ \dfrac{\log_p^2 x + \log_p x}{\log_p x - 1} < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} p > 1, \\ \dfrac{\log_p^2 x + \log_p x}{\log_p x - 1} > 0, \\ \dfrac{\log_p^2 x + 1}{\log_p x - 1} < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < p < 1, \\ \log_p x(\log_p x + 1)(\log_p x - 1) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} p > 1, \\ \log_p x(\log_p x + 1)(\log_p x - 1) > 0, \\ \log_p x < 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$
\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}
\begin{cases} 0< p<1, \\ \left[\begin{array}{l} \log_p x<-1, \\ 0<\log_p x<1; \end{array}\right. \end{cases} \\
\begin{cases} p>1, \\ \left[\begin{array}{l} -1<\log_p x<0, \\ \log_p x>1, \end{array}\right. \\ \log_p x<1 \end{cases}
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} 0< p<1, \\ \left[\begin{array}{l} x>\dfrac{1}{p}, \\ p<x<1; \end{array}\right. \end{cases} \\
\begin{cases} p>1, \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{p}<x<1, \\ x>p, \end{array}\right. \\ x<p. \end{cases}
\end{array}\right.
$$

Ответ: если $p\in(0;1)$, то $x\in(p;1)\cup\left(\dfrac{1}{p};+\infty\right)$;

если $p\in(1;\ +\infty)$, то $x\in\left(\dfrac{1}{p};1\right)$.

II способ

$$
\log_p \frac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x}-1\right)(p-1)<0, \\ \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(\log_p^2 x+\log_p x\right)(p-1)}{1-\log_p x}<0, \\ 1-\log_p x>0 \end{cases} \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \log_p x\cdot\left(\log_p x+1\right)(p-1)<0, \\ 1-\log_p x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x-\dfrac{1}{p}\right)(p-1)<0, \\ (x-p)(p-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow
$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p < 1, \\ (x-1)\left(x - \dfrac{1}{p}\right) > 0, \\ x - p > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p > 1, \\ (x-1)\left(x - \dfrac{1}{p}\right) < 0, \\ x - p < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p < 1, \\ p < x < 1 \end{cases} \text{или } x > \frac{1}{p} \text{ или} \begin{cases} p > 1, \\ \dfrac{1}{p} < x < 1. \end{cases}$$

При $p \le 0,\ p = 1$ решений нет.

Ответ: если $p \in (0;1)$, то $x \in (p;1) \cup \left(\dfrac{1}{p};+\infty\right)$;

если $p \in (1;+\infty)$, то $x \in \left(\dfrac{1}{p};1\right)$.

9.253*. $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$.

Решение

I способ

$$\text{ОДЗ:} \begin{cases} x+1 > 0, \\ 2 - x > 0, \\ x > 0, \\ x \ne 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0;\,1) \cup (1;\,2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x(x+1) < -\log_x(2-x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_x(x+1) < \log_x \frac{1}{2-x}.$$

С учетом ОДЗ имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ x+1>\dfrac{1}{2-x};\end{cases}\\ \begin{cases}1<x<2,\\ x+1<\dfrac{1}{2-x},\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{x^2-x-1}{x-2}>0;\end{cases}\\ \begin{cases}1<x<2,\\ \dfrac{x^2-x-1}{x-2}<0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ (x^2-x-1)(x-2)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}1<x<2,\\ (x^2-x-1)(x-2)<0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ \left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(x-2)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}1<x<2,\\ \left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(x-2)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1,\\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0;1)\mathbf{U}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right).$

II способ

$$\log_x(x+1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x(x+1)<\log_x\frac{1}{2-x}\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{1}{2-x}-(x+1)\right)(x-1)>0,\\ 2-x>0,\\ x+1>0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x^2-x-1)(x-1)}{x-2}<0\\ 0<x<2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x-1)}{x-2}<0, \\ 0<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x-1)>0, \\ 0<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<x<1 \text{ или } \frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2.$$

Ответ: $x \in (0; 1) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right)$.

9.263*. $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1$.

Решение

I способ

$$\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>\left(4x^2+2x+1\right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<4x^2+2x+1<1, \\ x^2-x<0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2+2x+1>1, \\ x^2-x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2+2x<0, \\ 4x^2+2x+1>0, \\ x^2-x<0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2+2x>0, \\ x^2-x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(2x+1)<0, \\ x(x-1)<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x(2x+1)>0, \\ x(x-1)>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{1}{2}, \\ x>1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1;\ +\infty)$.

II с п о с о б

$$\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1 \;\Leftrightarrow\; \left(x^2-x\right)\cdot\left(\left(4x^2+2x+1\right)-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)\cdot(2x+1)>0 \;\Leftrightarrow\; x\in(-\infty;\,-0{,}5)\cup(1;\,+\infty).$$

Ответ: $x\in(-\infty;\,-0{,}5)\cup(1;\,+\infty)$.

9.265*. $1<3^{\left|x^2-x\right|}<9$.

Решение

I с п о с о б

$$1<3^{\left|x^2-x\right|}<9\Leftrightarrow 3^0<3^{\left|x^2-x\right|}<3^2\Leftrightarrow 0<\left|x^2-x\right|<2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x^2-x\right|<2,\\ \left|x^2-x\right|>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x^2-x<2,\\ x^2-x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2<0,\\ x^2-x+2>0,\\ x(x-1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<2,\\ x\neq 0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Ответ: $x\in(-1;\,0)\cup(0;\,1)\cup(1;\,2)$.

II с п о с о б

$$1<3^{\left|x^2-x\right|}<9 \;\Leftrightarrow\; 0<\left|x^2-x\right|<2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|x^2-x\right|\cdot\left(\left|x^2-x\right|-2\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)^2\left(\left(x^2-x\right)-2\left(x^2-x+2\right)\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x+1)(x-2)<0\Leftrightarrow x\in(-1;\,0)\cup(0;1)\cup(1;\,2).$$

Ответ: $x\in(-1;\,0)\cup(0;\,1)\cup(1;\,2)$.

9.266* $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25$.

Решение

I способ

$$5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 5^2 \Leftrightarrow \log_x \frac{8-12x}{x-6} > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x \frac{8-12x}{x-6} > \log_x x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{8-12x}{x-6} < x^2, \\ \dfrac{8-12x}{x-6} > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{8-12x}{x-6} > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right)(x-6) > 0, \\ \left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x-6) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right)(x-6) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ (x-2)^3(x-6) > 0, \\ \left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x-6) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ (x-2)^3(x-6) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{3} < x < 1, \\ 2 < x < 6. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right) \mathbf{U} \left(2; 6\right)$.

II с п о с о б

$$5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25 \Leftrightarrow \log_x \frac{8-12x}{x-6} > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{8-12x}{x-6} - x^2\right)(x-1) > 0; \\ \dfrac{8-12x}{x-6} > 0; \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(8-12x-x^3+6x^2\right)(x-1)}{x-6} > 0; \\ \dfrac{2-3x}{x-6} > 0; \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)^3(x-1)}{x-6} < 0; \\ \dfrac{2}{3} < x < 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \ \dfrac{2}{3} < x < 1$ или $2 < x < 6$.

Ответ: $x \in \left(\dfrac{2}{3};1\right) \mathbf{U} (2;6)$.

9.267* $\left(2^x + 3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$.

Решение

I с п о с о б

$$\left(2^x + 3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > \left(2^x + 3\cdot 2^{-x}\right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2^x + 3\cdot 2^{-x} < 1, \\ 2\log_2 x - \log_2(x+6) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x + 3\cdot 2^{-x} > 1, \\ 2\log_2 x - \log_2(x+6) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{2x} - 2^x + 3 < 0, \\ 2^{2x} + 3 > 0, \\ \log_2 x^2 < \log_2(x+6), \\ x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{2x} - 2^x + 3 > 0, \\ \log_2 x^2 > \log_2(x+6), \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ \begin{cases} x^2 > x+6, \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < -2, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

II с п о с о б

$$\left(2^x + 3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^x + 3\cdot \dfrac{1}{2^x}\right)^{\log_2 \frac{x^2}{x+6}} > 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2}{x+6}\left(2^x + \dfrac{3}{2^x} - 1\right) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - (x+6)\right)\left(2^{2x} - 2^x + 3\right) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

9.268*. $\log_{|x-4|}\left(2x^2-9x+4\right)>1$.

Решение

I способ

$$\log_{|x-4|}\left(2x^2-9x+4\right)>\log_{|x-4|}|x-4|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<|x-4|<1,\\ 2x^2-9x+4<|x-4|,\\ 2x^2-9x+4>0;\end{cases}\\ \begin{cases}|x-4|>1,\\ 2x^2-9x+4>|x-4|,\\ 2x^2-9x+4>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x-4<1,\\ x-4\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x-4>2x^2-9x+4,\\ x-4<-2x^2+9x-4,\end{array}\right.\\ 2x^2-9x+4>0;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-4>1,\\ x-4<-1,\end{array}\right.\\ x-4<2x^2-9x+4,\\ x-4>-2x^2+9x-4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3<x<5,\\ x\neq 4,\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-10x+8<0,\\ 2x^2-8x<0,\end{array}\right.\\ 2x^2-9x+4>0;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>5,\\ x<3,\end{array}\right.\\ 2x^2-10x+8>0,\\ 2x^2-8x>0,\\ 2x^2-9x+4>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}3<x<5,\\ x\neq 4,\\ \left[\begin{array}{l}1<x<4,\\ 0<x<4,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x>5,\\ x<3,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<1,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<0,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>4,\\ -x<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0,\\ x>5.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$.

II способ

$$\log_{|x-4|}\left(2x^2-9x+4\right)>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(2x^2-9x+4-|x-4|\right)\cdot\left(|x-4|-1\right)>0,\\ 2x^2-9x+4>0,\\ |x-4|\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(\left(2x^2-9x+4\right)^2-(x-4)^2\right)\cdot\left((x-4)^2-1\right)>0,\\ 2x^2-9x+4>0,\\ x\neq 4\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2x^2-9x+4-x+4\right)\left(2x^2-9x+4+x-4\right)\left(x-4-1\right)\left(x-4+1\right)>0,\\ x<\dfrac{1}{2}\ \text{или}\ x>4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-1\right)\cdot\left(x-4\right)^2\cdot x\cdot\left(x-5\right)\left(x-3\right)>0,\\ x<\dfrac{1}{2}\ \text{или}\ x>4\end{cases}\Leftrightarrow\ x<0\ \text{или}\ x>5.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(5;+\infty\right)$.

9.271*. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-3\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(x+3\right)-\log_{\frac{x+3}{x-3}}2>0$.

Решение

I способ

$$\text{ОДЗ}\begin{cases}x\text{-}3>0,\\ x+3>0,\\ \dfrac{x+3}{x-3}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\ x\in\left(3;\ +\infty\right),$$

$$-\log_2\left(x-3\right)+\log_2\left(x+3\right)-\frac{1}{\log_2\dfrac{x+3}{x-3}}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2\frac{x+3}{x-3}-\frac{1}{\log_2\dfrac{x+3}{x-3}}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_2\dfrac{x+3}{x-3}-1}{\log_2\dfrac{x+3}{x-3}}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\log_2\frac{x+3}{x-3}-1\right)\log_2\frac{x+3}{x-3}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\log_2\frac{x+3}{x-3}-1\right)\left(\log_2\frac{x+3}{x-3}+1\right)\log_2\frac{x+3}{x-3}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<\log_2\dfrac{x+3}{x-3}<0,\\ \log_2\dfrac{x+3}{x-3}>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<\dfrac{x+3}{x-3}<1,\\ \dfrac{x+3}{x-3}>2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+3}{x-3}>\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{x+3}{x-3}<1;\end{array}\right.\\ \dfrac{x+3}{x-3}-2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+9}{x-3}>0,\\ \dfrac{6}{x-3}<0;\end{array}\right.\\ \dfrac{x-9}{x-3}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(x+9)(x-3)>0,\\ x-3<0;\end{array}\right.\\ (x-9)(x-3)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x-3<0,\\ x+9<0;\end{array}\right.\\ (x-9)(x-3)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-9),\\ x\in(3;9).\end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ имеем $x\in(3;9)$

Ответ: $x\in(3;9)$.

II способ

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-\log_{\frac{x+3}{x-3}}2>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2(x+3)-\log_2(x-3)-\frac{1}{\log_2\dfrac{x+3}{x-3}}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(\log_2 \dfrac{x+3}{x-3} - 1\right)\left(\log_2 \dfrac{x+3}{x-3} + 1\right)}{\log_2 \dfrac{x+3}{x-3}} > 0; \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{x+3}{x-3} - 2\right)\left(\dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{x+3}{x-3} - 1} > 0; \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(9-x)(x+9)}{x-3} > 0; \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (9-x)(x+9) > 0; \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 9.$$

Ответ: $x \in (3;\, 9)$.

9.272*. $\left|2^{4x^2-1} - 5\right| \le 3$.

Решение

I способ

$$\left|2^{4x^2-1} - 5\right| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2^{4x^2-1} - 5 \le 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \le 2^{4x^2-1} \le 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \le 4x^2 - 1 \le 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \le 4x^2 \le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \mathbf{U} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$

II способ

$$\left|2^{4x^2-1} - 5\right| \le 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{4x^2-1} - 5 - 3\right) \cdot \left(2^{4x^2-1} - 5 + 3\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{4x^2-1} - 2^3\right) \cdot \left(2^{4x^2-1} - 2^1\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2 - 1 - 3\right)\left(4x^2 - 1 - 1\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot (x+1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \mathbf{U} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right].$$

Ответ: $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \mathbf{U} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right].$

9.273*. $9\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+1}\ge 9^{\sqrt{x}}$.

Решение

I способ

Представим данное неравенство в виде

$$9\cdot 3^{\sqrt{x}}\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}+9\cdot 3^{2\cdot\sqrt[4]{x}}-3^{2\sqrt[2]{x}}\ge 0.$$

Разделим его на $3^{2\sqrt[4]{x}}$. Тогда

$$\frac{3^{2\sqrt[2]{x}}}{3^{2\sqrt[4]{x}}}-9\cdot\frac{3^{\sqrt{x}}\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}}{3^{2\sqrt[4]{x}}}-9\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}\right)^2-9\cdot 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}-9\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}+1\right)\left(3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}-9\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}-9\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}\le 3^2\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2\le 0\Leftrightarrow$$

Ответ: $x\in[0;16]$.

II способ

$$9\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+1}\ge 9^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{\sqrt{x}}\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}+9\cdot\left(3^{\sqrt[4]{x}}\right)^2-\left(3^{\sqrt{x}}\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}+\left(3^{\sqrt{x}}\right)^2\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left(3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt[4]{x}}\right)-3^{\sqrt{x}}\cdot\left(3^{\sqrt[4]{x}}+3^{\sqrt{x}}\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt[4]{x}}\right)\left(9\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}-3^{\sqrt{x}}\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2+\sqrt[4]{x}}-3^{\sqrt{x}}\geq 0\Leftrightarrow 2+\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2\leq 0\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x}-2\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}-2\leq 0\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}\leq 2\Leftrightarrow 0\leq x\leq 16$$

Ответ: $x\in[0;16]$.

9.274*. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\geq\left(x^2+x+1\right)^3$.

Решение

I способ

$$\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\geq\left(x^2+x+1\right)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x^2+x+1\leq 1,\\ \dfrac{x+5}{x+2}\leq 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x+1\geq 1,\\ \dfrac{x+5}{x+2}\geq 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x+1>0,\\ x^2+x+1<1,\\ \dfrac{x+5}{x+2}-3\leq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x\geq 0,\\ \dfrac{x+5}{x+2}-3\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in R, \\ x(x+1) \le 0, \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x+2) \ge 0, \\ x \ne -2; \end{cases} \\ \begin{cases} x(x+1) \ge 0, \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x+2) \le 0, \\ x \ne -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \le x \le 0, \\ -2 < x \le -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-2;\ -1] \cup \left[-\dfrac{1}{2};\ 0\right]$.

II с п о с о б

$$\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \ge \left(x^2+x+1\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+5}{x+2}-3\right)\cdot\left(\left(x^2+x+1\right)-1\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(-2x-1)\cdot x\cdot(x+1)}{x+2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-2;-1] \cup [-0,5;0]$$

.

Ответ: $x \in (-2;\ -1] \cup [-0{,}5;\ 0]$.

9.275*. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{(x-3)^2} < 0$.

Решение

I с п о с о б

$$\frac{x^2-7|x|+10}{(x-3)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7|x|+10 < 0, \\ x \ne 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ x^2+7x+10<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 0,\ x\ne 3, \\ x^2-7x+10<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ -5<x<-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 0, \\ x\ne 3, \\ 2<x<5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-5;\,-2)\cup(2;\,3)\cup(3;\,5).$$

Ответ: $x\in(-5;\,-2)\cup(2;\,3)\cup(3;\,5)$.

II способ

$$\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0 \Leftrightarrow \frac{|x|^2-7|x|+10}{(x-3)^2}<0 \Leftrightarrow \frac{(|x|-2)(|x|-5)}{(x-3)^2}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-2^2)(x^2-5^2)}{(x-3)^2}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)(x-5)(x+5)}{(x-3)^2}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x\in(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5).$$

Ответ: $x\in(-5;\,-2)\cup(2;\,3)\cup(3;\,5)$.

9.301*. $\dfrac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)}>3\quad 0<a;\ a\ne 1$.

Решение

I способ

$$\log_{5-x}(35-x^3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<5-x<1, \\ 35-x^3<(5-x)^3, \\ 35-x^3>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 5-x>1, \\ 35-x^3>(5-x)^3, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4 < x < 5,\\ x^2 - 5x + 6 > 0,\\ x < \sqrt[3]{35},\end{cases}\\ \begin{cases}x < 4,\\ x^2 - 5x + 6 < 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4 < x < 5,\\ \left[\begin{array}{l}x > 3,\\ x < 2,\end{array}\right.\\ x < \sqrt[3]{35},\end{cases}\\ \begin{cases}x < 4,\\ 2 < x < 3,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \in \varnothing,\\ 2 < x < 3\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (2;\, 3)$.

II способ

$$\frac{\log_a\left(35 - x^3\right)}{\log_a(5 - x)} > 3 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_{5-x}\left(35 - x^3\right) > 3,\\ a > 0,\\ a \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\left(35 - x^3\right) - (5 - x)^3\right)\cdot\left((5 - x) - 1\right) > 0,\\ 35 - x^3 > 0,\\ 5 - x > 0,\\ a > 0, a \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(15x^2 - 75x + 90\right)(4 - x) < 0,\\ x^3 < 35,\\ x < 5,\\ a > 0, a \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0;\\ x < \sqrt[3]{35},\\ a > 0, a \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Ответ: $x \in (2;\, 3)$.

4 ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1 Неравенства с модулями

Решить неравенства.

1. $\left|x^2+4x\right|<5.$

2. $\dfrac{1}{\log_2(-x)}<\dfrac{1}{\log_4(-2x)}.$

3. $\left|4x^2-x-1\right|\le 2.$

4. $\left|2x^2-7x+9\right|\ge 3\,.$

5. $\left|x^2-4x-45\right|<\left|2x-18\right|.$

6. $\left|x^2+12x-64\right|>\left|3x-12\right|\,.$

7. $\left|2x^2-3x+1\right|\le\left|3x-3\right|\,.$

8. $\left|10x^2-15x+25\right|>\left|33x-29\right|\,.$

9. $x^2-6x+9>3\left|3x-3\right|.$

10. $x^2+20x+100<\left|7x+70\right|.$

11. $\left|\dfrac{x+4}{x-6}\right|\ge 2\,.$

12. $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\le 3\,.$

13. $\dfrac{2x^2-3x-2}{|x|-3}>0\,.$

14. $\dfrac{x^2-6x+5}{|x|-6}<0\,.$

15. $\dfrac{|x|-5}{x^2-6x-7}\le 0\,.$

16. $\dfrac{x^2-2x-3}{|x|-1}\ge 0$.

17. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-7}<0$.

18. $\dfrac{x+8}{x^2-7|x|+10}>0$.

19. $\dfrac{|x^2-4x+3|}{x^2-x+2}\le 1$.

20. $\dfrac{|x^2-5x+4|}{x^2-x+1}\ge 1$.

21. $\dfrac{19x-2}{|x^2+5x+4|}>2$.

22. $\dfrac{19x+53}{|x^2-4x+3|}<-1$.

23. $\dfrac{|3x-2|-|2x-3|}{|x^2+x-8|-|x^2-x|}\le 0$.

24. $\dfrac{|2x^2-11x+10|-x^2}{|6x^2-11x+4|-1}\ge 0$.

25. $\dfrac{||x^2-x|-1|-1}{||4x+3|-2|-1}\ge 0$.

26. $\dfrac{|2x^2-x-3|-x^2-2x-1}{|3x^2+x-2|-x^2-2x-1}\le 0$.

27. $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}.$

28. $\dfrac{|x-2{,}5|-|x+2|}{|x-1|-|x+0{,}5|}<\dfrac{|x-1|+|x+0{,}5|}{|x+2|}.$

29. $\dfrac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|}<\dfrac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}.$

30. $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-6x-5|-|x^2-2x-5|}\le 0.$

31. $\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{|x^2-7x+6|-|x^2-x-2|}\ge 0.$

32. $\dfrac{1}{|x+1|-1}\ge\dfrac{2}{|x+1|-2}.$

33. $(|x|-8)(|x|-2)>0.$

34. $x^2-5|x|+6<0.$

35. $\dfrac{(|x+5|-|x-2|)(|x+3|-|x|)}{|x-7|-|x+2|}\le 0.$

36. $\dfrac{|7x-22|-|5x-14|}{(x-3)(x-4)}\ge 0.$

37. $\dfrac{|7x-36|-|5x-24|}{(x-5)(x-6)}\ge 0.$

38. $\dfrac{|x^2-3x+2|-x^2+2x-1}{|x|-|x-1|}\le 0.$

39. $\dfrac{|x^2+x-1|-|x^2-x+1|}{|x-1|-|x+1|}\ge 0.$

40. $x^2-2x\le|x-1|-1.$

4.2 Иррациональные неравенства

Решить неравенства.

1. $(x^2+2x-24)\sqrt{x^2-4x-5}\geq 0$.

2. $(x^2+4x-5)\sqrt{x^2-4}\leq 0$.

3. $(x^2-6x+5)\sqrt{x^2-10x+24}\geq 0$.

4. $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-x-12}\geq 0$.

5. $(x^2+4x-12)\sqrt{x^2-2x-3}\geq 0$.

6. $(x^2-9x+14)\sqrt{x-5}\geq 0$.

7. $(x-3)\sqrt{x^2-6x+5}\geq 0$.

8. $(x^2-8x+12)\sqrt{x^2-10x+21}\geq 0$.

9. $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}>0$.

10. $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6}\geq 0$.

11. $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$.

12. $(x^2-1)(x-3)(x+10)\sqrt{x-6}\geq 0$.

13. $\dfrac{6-x}{\sqrt{x^2-8x+7}}\geq 0$.

14. $\sqrt{-25x^2+15x-2}\cdot(8x^2-6x+1)\geq 0$.

15. $(x^2+2x-8)\sqrt{x^2+x-2}\leq 0$.

16. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}-6}>0$.

17. $\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-5}>0$.

18. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{3x^2+5x-2}<0.$

19. $\dfrac{\sqrt{2x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+3x+3}}{\sqrt[3]{3x^2+10x+5}+\sqrt[3]{3x^2 7x}}\geq 0.$

20. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{3x^2-x-4}<0.$

21. $\dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt[3]{3x^2+x-4}}\geq 0.$

22. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{3x-2}}-\sqrt{x+\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}}<0.$

23. $\dfrac{23-3x+\sqrt{x^2-25}}{x-9}<-1.$

24. $\dfrac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x}\leq 0.$

4.3 Показательные неравенства

Решить неравенства.

1. $25^x - 25\cdot 5^{x-1}+6\leq 0.$
2. $9^{2x} - 2\cdot 9^{x+1}+32\leq 0.$
3. $16^x-8\cdot 4^{x-1}-3\leq 0.$
4. $4^x+4\cdot 2^{x-1}-3\leq 0.$
5. $16^x-5\cdot 4^x+4\leq 0.$
6. $9^x-3^{x+1}-4\leq 0.$
7. $3\cdot 3^{\frac{2}{x}}+3^{\frac{1}{x}+1}\geq 18.$
8. $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3\leq 0.$

9. $(x-1)(2^x-2)>0$.

10. $(x^2+4x+3)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-8\right)\le 0$.

11. $\frac{2^x-4}{4^x-1}\ge 0$.

12. $\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}<0$.

13. $\frac{x-2\sqrt{x}-8}{2^x-4}\ge 0$.

14. $\frac{\sqrt{3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1}}{x^2-x-6}\le 0$.

15. $\frac{1}{3^x+5}\le\frac{1}{3^{x+1}-1}$.

16. $\frac{2^{x+1}-22}{2^x-2}\ge 1$.

17. $\frac{4^x}{2^x-1}\le\frac{2^x+12}{3}$.

18. $\frac{2^x+8}{2^x-1}>2^x$.

19. $\frac{2^{-x}}{1-2^{1-x}}+2^x<0$.

20. $\frac{9^{x+0,5}+1}{3-3^{2x}}\le 3^{2x}+1$.

21. $\frac{15-16^{x+1}}{4^{2x}-4}\ge 2^{4x+1}-3$.

22. $\frac{9}{2^{1/x}+1}\ge\frac{4}{2^{1/x}-\frac{2}{3}}$.

23. $\dfrac{3^{1/x}+12}{3^{1/x}-1} \geq \dfrac{4\cdot 3^{1/x}}{3}$.

24. $\dfrac{1}{4^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}}2} < \dfrac{1}{6}$.

25. $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8}$ >1.

26. $\dfrac{3x^2-x-14}{5-2^x}$ >0.

27. $\dfrac{3^x-2}{5x^2+22x-15}$ >0.

28. $\dfrac{3-x}{1-3^x}$ <0.

29. $(1–5^x)\ (5x–1) <0$.

30. $\dfrac{3^{2x^2-3x+4}-(\frac{1}{3})^{3x^2-4x-2}}{2^x-1}$ ≤0.

31. $\dfrac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x+1}}{5^x-1} \leq 0$.

32. $(x^2–x+1)^{\ 2-x} \geq 1$.

33. $(1–\dfrac{2x}{5})^{\ 7+11x-6x^2}$ ≥1.

34. $(3^{(3x+1)}-1)(\sqrt{9\cdot 3^{(3x+1)}-8}-1) \geq 0$.

4.4 Логарифмические неравенства

Решить неравенства.

1. $\dfrac{\log x^2(4-x)}{(x-2)(x-3)}$ ≥ 0.

2. $\dfrac{\log^2{}_{x+1}(3-x)}{(x-1)(x-2)} \geq 0.$

3. $\dfrac{\log^2{}_{2-x}(x+2)}{x^2+x} \geq 0.$

4. $\dfrac{\log^2{}_{1-x}(x+3)}{x^2+3x+2} \geq 0.$

5. $\dfrac{\log_2(4x)}{\log_2 x^4} \geq \dfrac{1}{2}.$

6. $\dfrac{\log_3 x^2}{\log_3(3x)} \geq 1.$

7. $\dfrac{\log_4 x^2}{\log_8(2x^4)} \leq \dfrac{3}{2}.$

8. $\dfrac{\log_3(2x^2)}{\log_3(0{,}5x)} \leq 1.$

9. $\dfrac{\log_8 x^2}{\log_2(4x)} \geq \dfrac{1}{3}.$

10. $\dfrac{\log_5(2x^2)}{\log_5 x8} \leq \dfrac{1}{2}.$

11. $\dfrac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)} \leq 2.$

12. $\dfrac{\log_2(2x+4)}{\log_2(x+1)^2} \leq 1.$

13. $\dfrac{\log_5(5x-4)}{\log_5(7x-8)} \leq 2.$

14. $\dfrac{2\log_2(x+1)}{\log_2(3x+1)} \leq 1.$

15. $\dfrac{\log_5(2x-\frac{8}{3})}{\log_5(x-1)} \geq 2.$

16. $\dfrac{\log_2(3x+1.5)}{2\log_2(x+1)} \geq 1.$

17. $\dfrac{1}{\log_2(1-\frac{1}{x})} \leq \dfrac{1}{\log_2(x+1)}.$

18. $\dfrac{1}{\log_3 \frac{x}{x+1}} \leq \dfrac{1}{\log_3(x+2)}.$

19. $\dfrac{1}{\log_4(\frac{x+1}{x+2})} \leq \dfrac{1}{\log_4(x+3)}.$

20. $\dfrac{1}{\log_5(\frac{x-3}{x-2})} \leq \dfrac{1}{\log_5(x-1)}.$

21. $\dfrac{1}{\log_6(\frac{x-4}{x-3})} \leq \dfrac{1}{\log_6(x-2)}.$

22. $\dfrac{1}{\log_3(\frac{x-5}{x-4})} \leq \dfrac{1}{\log_3(x-3)}.$

23. $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+3}} \leq \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}.$

24. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)} \leq \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}.$

25. $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{4x-7}} \leq \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)}.$

26. $\dfrac{1}{\log_2(x+\frac{1}{5})} \le \dfrac{1}{\log_4 x}$.

27. $\dfrac{1}{\log_2 x} \le \dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}$.

28. $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{3x-5}} \le \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}(2-x)}$.

29. $(4^x - 9\cdot 2^x + 7)\lg(1-3x) \ge \lg\dfrac{1}{1-3x}$.

30. $(x^2-4)\lg(x-0{,}5) \ge \lg\dfrac{1}{x-0{,}5}$.

31. $(3-x^2)\lg(5-4x) \ge 3x\lg(5-4x)^2$.

32. $(x^2-1)\lg(x+0{,}5) \ge \lg\sqrt{x+0{,}5}$.

33. $(x^2-3)\lg x^2 \ge x\lg x^4$.

34. $(2x-2)\lg(2x-1) \ge (x^2-4x+5)\lg(2x-1)^2$.

35. $\log_{x-2}\dfrac{2}{3}(4-x) \le 0$.

36. $\log_{\frac{1}{x-2}}(6x-15) \le 0$.

37. $\log_{2-x}\dfrac{4}{11}(x+1) \le 0$.

38. $\log_{2x+3}(16x+20) \ge 0$.

39. $\log_{-(x+1)}(\dfrac{2}{3}x+2)^{-1} \ge 0$.

40. $\log_{x+\frac{1}{2}}(7x+\dfrac{1}{10}) \ge 0$.

41. $\log_{x+1}(2x+\dfrac{1}{2}) \ge 1$.

42. $\log_{2x}(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})\le 1$.

43. $\log_{2x-1}\frac{x}{2}\ge 1$.

44. $\log_{\sqrt{x}}(x-\frac{1}{2})\le 1$.

45. $\log_{x-1}(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4})\le 1$.

46. $\log_{x-2}(2x-1)\le 2$.

47. $\log_{1\text{-x}}(5-2x)\le 2$.

48. $\log_{3\text{-2x}}(9-4x)\le 2$.

49. $\log_{x-1}(2x+1)\le 2$.

50. $\log_{3-x}(9-2x)\le 2$.

51. $\log_{2x-3}(4x-3)\le 2$.

52. $\log_{7x-1}(5x+1)\le 2$.

53. $\log_{(x+1)^2}(2x+4)\le 1$.

54. $\log_{7x-8}(5x-4)\le 2$.

55. $2\log_{3x+1}(x+1)\le 1$.

56. $\log_{x-1}\sqrt{2x-\frac{8}{3}}\ge 1$.

57. $\log_{x+1}\sqrt{3x+1.5}\ge 1$.

58. $\log_{3-x}\sqrt{10-4x}\ge 1$.

59. $\log_{1-2x}\sqrt{2-7x}\le 1$.

60. $\log_{x-1}\sqrt{4x-5}\ge 1$.

61. $\log_{1-2x}\sqrt{3-8x}\le 1$.

62. $\log_{2x-1}\sqrt{7x-5}\le 1$.

63. $\log_{x+1}\sqrt{4x+3}\ge 1$.

64. $\log_x \dfrac{2x-3}{x-2} \le -1$.

65. $\log_x \dfrac{12-4x}{4-x} \le 1$.

66. $\log_x \dfrac{3x-8}{x-3} \ge 1$.

67. $\log_x \dfrac{4x-15}{x-4} \le 1$.

68. $\log_x \dfrac{4-5x}{1-x} \le 1$.

69. $\log_x \dfrac{3x-2}{x-1} \ge 1$.

70. $\log_x \dfrac{x+7}{16-2x} \ge 1$.

71. $\log_x \dfrac{x-3}{x-1} \le -1$.

72. $\log_x \dfrac{x-5}{2x-3} \ge -1$.

73. $\log_x \dfrac{1-4x}{|2x-1|} \ge 1$.

74. $\log_x \dfrac{4x^2-1}{|x-1|} \le 0$.

75. $\log_{x^2} \dfrac{4x-5}{|x-2|} \ge \dfrac{1}{2}$.

76. $\log_{x^2} \dfrac{|5x-1|}{2x-1} \le \dfrac{1}{2}$.

77. $\log_{(x-2,5)}(x-3) \ge \log_{x-2,5} \dfrac{x+6}{2(x-1)}$.

78. $\log_{x-\sqrt{2}} \dfrac{x+7}{x-2} \le \log_{x-\sqrt{2}} 2x$.

79. $\log_{x+\frac{1}{2}} \dfrac{2(x+1)}{x+8} \le \log_{x+\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x-1}$.

80. $\log_{x-4,5} \dfrac{x+4}{2(x-3)} \le \log_{x-4,5} (x-5)$.

81. $\log_{x-5,5} \dfrac{x-6}{x+3} \ge \log_{x-5,5} \dfrac{1}{2(x-4)}$.

82. $\log_{x-6,5} \dfrac{x+2}{2(x-7)} \le \log_{x-6,5} (x-5)$.

83. $\log_{\frac{1}{x-1}} \dfrac{2(x+1)}{(x+8)(x+2)} \ge 1$.

84. $\log_{\frac{1}{x+2}} \dfrac{2x}{x^2-9} \ge 1$.

85. $\log_{4x} \dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x+5)} \ge 1$.

86. $(\dfrac{1}{2}) \log_{x+2} \dfrac{2(x^2-1)}{x+8} \ge \dfrac{1}{2}$.

87. $2^{\log_{x-6} \frac{2(x-7)(x-9)}{x}} \ge 2$.

88. $(\dfrac{1}{3})^{\log_{x-1} \frac{2(x-2)(x-4)}{x+5}} \le \dfrac{1}{3}$.

89. $\log_{x+1} \dfrac{x^2+6x+9}{2(x+1)} \le 1$.

90. $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \dfrac{24-2x-x^2}{14} \ge 1$.

91. $\log_{x+2} \dfrac{x^2-9}{2x} \ge 1$.

92. $\log_{3+x}\dfrac{x^2+2x-8}{2x+2}\le 1$.

93. $\log_{x+1}\dfrac{x^2-2x-10}{2(x-1)}\ge 1$.

94. $\log_{x-1}\dfrac{x^2-6x}{2(x-3)}\le 1$.

95. $\log_{x-2}\dfrac{x^2-8x+7}{2(x-4)}\ge 1$.

96. $\log_{x-3}\dfrac{x^2-10x+25}{2(x+5)}\le 1$.

97. $\log_x(2x^2-8x+6)\ge\log_x(x^2+6x)$.

98. $\log_{x-4}((x+2)(x-4))\le\log_{x-4}(2(x-5)(x-7))$.

99. $\log_{x+1}(2x^2-4x)\ge\log_{x+1}(x^2+6x+7)$.

100. $\log_x(0{,}5x(x+6))\le\log_x((x-1)(x-3))$.

101. $\log_{x-3}(2(x^2-10x+24))\ge\log_{x-3}(x^2-9)$.

102. $\log_{x+2}(2x^2-2)\ge\log_{x+2}(x^2+10x+16)$.

103. $\log_{x+3}(x-2)\log_{x-2}(x^2+x)\le\log_{x+3}(6x+12-x^2)$.

104. $\log_{1-\frac{x}{4}}(x-1)\log_{x-1}(5+4x-x^2)\ge\log_{1-\frac{x}{4}}(3x^2-4x+8)$.

105. $\log_{x+2}(2x^2-x-1)\le\dfrac{\log_{x-1}(x^2+2x+3)}{\log_{x-1}(x+2)}$.

106. $\log_{x+2}(x-4)\le 1+\log_{x-4}(x^2+4x+4)$.

107. $(x+1)\log_2(x^2+1)>0$.

108. $(x^2-4x-5)\log_2(x^2-4x+4)\ge 0$.

109. $(x-4)\log_2(x-3)>0$.

110. $(x-3)\log_2(x-2)\le 0$.

111. $(x^2-5x+6)\log_2(x^2-3x+3)<0$.

112. $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{2}} x-4}{\log_{\frac{1}{2}} x-1} \le 0$.

113. $\log_{x+1}(x^2-4x+1) > 1$.

114. $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

115. $\log_{x+2}(x^2-3x) \le \log_{x+2} x$.

116. $(x+2)\log_{1,5}(4-x) \ge 0$.

117. $(4x^2-16x+7)\log_2(x-3) > 0$.

118. $\dfrac{\log_{0,1}(x+2)}{\sqrt{5-4x-x^2}} \le 0$.

119. $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2+\log_{0,5}(x+1)} \ge 0$.

120. $\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{8-2x-x^2}} \le 0$.

121. $\dfrac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,5}(x^2+1)} \ge 0$.

122. $(2^x-3^x)\log_x(x^2-5x+7) > 0$.

123. $\left|\log_{x+5}(x+2)^2\right| - 2 \le 0$.

124. $\log_x(1-2x) < 1$.

125. $\log_{3-2x} x < 2$.

126. $\log_x(x^2-2x-3) < 0$.

127. $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$.

128. $\log_{x+3}(x^2-x) < 1$.

129. $\log_{x+1}(x^2-x+1) > 1$.

130. $\log_{2x+1} 16 > 2 + \log_{2x+1} 25$.

131. $\log_{x-2}(1-5x^3+x^5)<0$.

132. $\log_x(20x+3x^2-x^3)\geq 3$.

133. $\log_{x^2-\frac{3}{2}x}(3-2^x)>0$.

134. $\log_{-5x^2-6x}6^k>0$.

135. $\log_{1/x}(\frac{5}{2}x-1)\geq -2$.

136. $\log_{2x}(x-4)\log_{x-1}(6-x)<0$.

137. $\log_{x+1}(2-x)\log_{3x}(2x-1)\geq 0$.

138. $\log_x 9\cdot\log_3\dfrac{1-5x}{6x-4}\geq 2$.

139. $\log_x 3\cdot\log_9\dfrac{5-12x}{12x-8}\leq\dfrac{1}{2}$.

140. $\dfrac{2-x}{\log_2 x}>0$.

141. $\dfrac{\log_{2/3}x}{2-3x}<0$.

142. $\dfrac{\log_{1/\sqrt{7}}(x-2)}{\log_p(\frac{7}{2}-x)}>0$.

143. $\dfrac{\log_{1/\pi}(x+4)}{\log_{\sqrt{5}}(-\frac{5}{2}-x)}>0$.

144. $\dfrac{\log_2(4x+3)}{\log_3(3x+4)}\leq 0$.

145. $\dfrac{\log_{0,5}\dfrac{1}{2x+3}+\log_2(-x)}{\log_5(2x+3)+\log_{0,2}\dfrac{-1}{2x+1}}\geq 0$.

146. $\log_{x} 2 < \log_{6-x} 2$.

147. $\log_{x+1}(x^2+3x-10) > 2$.

148. $\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \ge -2$.

149. $\dfrac{\log_3(3^{2x+1}-16\cdot 3^x+16)}{x+1} \le 1$.

150. $\dfrac{\log_2(4x+3)\log_5(2x+5)}{(\log_3 6x)\cdot\log_4 x} \ge 0$.

151. $\dfrac{\log_2(2x^2-13x+20)-1}{\log_3(x+7)} \le 0$.

152. $\dfrac{\log_2 x}{\log_2(4x+7)} < 1$.

153. $\dfrac{1-\log_{2/3}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{13-x}}{\left|x^2+2x-15\right|-\left|3x^2-24x+45\right|} \ge 0$.

154. $\dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)} \le 0$.

155. $\dfrac{\log_{0,5}\dfrac{1}{2x-1}+\log_2(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}} \ge 0$.

156. $\log_{4-x} 3 < \log_x 3$.

157. $\log_{x+2}(x^2+5x-6) > 2$.

158. $\dfrac{1}{\log_{1/15}(2x^2-1)} > \dfrac{1}{\log_{1/5} x} + \dfrac{1}{\log_{1/3} x}$.

159. $\dfrac{\log_2(2^{2x+1}-11\cdot 2^x+9)}{x+3} \le 1$.

160. $\dfrac{\log_5(5x+4)\cdot\log_3(3x+7)}{(\log_3 10x)\log_2 x} \ge 0$.

161. $\dfrac{\log_3 x}{\log_3(2x+5)}<1$.

162. $\log_{\left(\frac{2}{3x+1}\right)}\left(\dfrac{2}{4x-1}\right)\geq 1$.

163. $\dfrac{\log_3 8}{\log_3(x^2-8)}\geq\dfrac{\log_2(x^2+6x+8)}{\log_2(x^2-8)}$.

164. $\log_{24x-4x^2-27}(11x-2x^2-9)\geq\log_{2x-3}(x-1)$.

165. $\log_{\left(4-\frac{x^2}{2}\right)}\left(55-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}\right)\leq\dfrac{2}{\log_{5+\sqrt{3}}2+\log_{5+\sqrt{3}}(14+5\sqrt{3})}$.

166. $\dfrac{1}{3}\log_x(x^3-0{,}8x^2+1{,}1x-0{,}3)\leq 1$.

167. $\log_3^2|x|-9\log_3|x|+2|x|\cdot\log_3|x|-4|x|+14\geq 0$.

5 ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

5.1 Вариант 11 самостоятельной работы с решениями

Пример 1. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+2x+2}}{9-x^2}\leq 0$.

Решение

Дискриминанты трехчленов $3x^2+2x+1$ и $2x^2+2x+2$ отрицательны, а первые коэффициенты положительны. Значит эти трехчлены положительны при всех значениях x:

$$\frac{\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+2x+2}}{9-x^2}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(3x^2+2x+1\right)-\left(2x^2+2x+2\right)}{9-x^2}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2-9} \geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$x \in (-\infty;-3) \cup [-1;1] \cup (3;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;-3) \cup [-1;1] \cup (3;+\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt[3]{-2-5x-3x^2}-\sqrt[3]{4x^2+4x-4}}{2x^2+5x-18} \geq 0$.

Решение $\quad \dfrac{\sqrt[3]{4x^2+4x-4}-\sqrt[3]{3x^2+5x+2}}{2x^2+5x-18} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+4x-4-3x^2-5x-2}{2x^2+5x-18} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{2x^2+5x-18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{2\left(x+\frac{9}{2}\right)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{(2x+9)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-2)(x+4{,}5)(x-3) \geq 0 \\ x \neq -4{,}5;\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty;-4{,}5) \cup [-2;2) \cup [3;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;-4{,}5) \cup [-2;2) \cup [3;+\infty)$

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt[3]{-7x^3-x}+2x}{-3x-\sqrt[3]{-27x^3+x^2-6x-7}} \geq 0$.

Решение

$$\frac{\sqrt[3]{8x^3}-\sqrt[3]{7x^3+x}}{\sqrt[3]{27x^3-x^2+6x+7}-\sqrt[3]{27x^3}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x^3-7x^3-x}{27x^3-x^2+6x+7-27x^3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-x}{x^2-6x-7} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-7)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [1; 7)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [1; 7)$.

Пример 4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{17x^2-176x+259}-\sqrt[3]{x^2-48x+3}}{x^2-4x-5} \le 0.$$

Решение

$$\frac{\sqrt[3]{17x^2-176x+259}-\sqrt[3]{x^2-48x+3}}{x^2-4x-5} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{17x^2-176x+259-\left(x^2-48x+3\right)}{x^2-4x-5} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{(x+1)(x-5)} \le 0 \Leftrightarrow x \in (-1;\ 5).$$

Ответ: $x \in (-1;\ 5)$.

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{27x+16}-4x-4}{\sqrt{4x+4}-2} \le 0$.

Решение

$$\frac{\sqrt{27x+16}-4x-4}{\sqrt{4x+4}-2} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{27x+16-(4x+4)^2}{4x+4-2^2} \le 0, \\ x \ge -\dfrac{16}{27} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16x^2+5x}{x} \geq 0, \\ x \geq -\dfrac{16}{27} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5}{16};\, 0\right) \mathbf{U} \left(0;\, +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{5}{16}; 0\right) \mathbf{U} \left(0; +\infty\right).$

Пример 6. Решите неравенство $\dfrac{4^x - 16}{x^2 + x - 2} \geq 0$.

Решение

$$\frac{4^x - 4^2}{x^2 + x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x-1)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-2;1) \mathbf{U} [2;+\infty).$$

Ответ: $x \in (-2;1) \mathbf{U} [2;+\infty)$.

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{\left(4-2^x\right)\left(4^x-256\right)}{\left(5^x-5\right)\left(14^x+9\right)} \geq 0$.

Решение

$$\frac{\left(4-2^x\right)\left(4^x-256\right)}{\left(5^x-5\right)\left(14^x+9\right)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(2^x-2^2\right)\left(4^x-4^4\right)}{5^x-5} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-4)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;1) \mathbf{U} [2;4].$$

Ответ: $x \in (-\infty;\, 1) \mathbf{U} [2;\; 4]$.

Пример 8. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9^{0,5x^2-1} > 9, \\ 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 \leq 0. \end{cases}$

Решение

$$\begin{cases} 9^{0,5x^2-1} > 9 \\ 4^x - 20\cdot 2^x + 64 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{0,5x^2-1} - 9^1 > 0, \\ \left(2^x - 4\right)\left(2^x - 16\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5x^2 - 1 - 1 > 0, \\ (x-2)(x-4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-2)(x+2) > 0, \\ (x-2)\,(x-4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;4].$$

Ответ: $x \in (2;4]$.

Пример 9. Решите неравенство $2^{2\sqrt{x}} + 64 > 2^{\sqrt{x}+6} + 2^{\sqrt{x}}$.

Решение

$$2^{2\sqrt{x}} + 64 > 2^{\sqrt{x}+6} + 2^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{x}} - 1\right)\left(2^{\sqrt{x}} - 2^6\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 0\right)\left(\sqrt{x} - 6\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-0)(x-36) > 0, \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (36;+\infty).$$

Ответ: $x \in (36;+\infty)$.

Пример 10. Решите неравенство $9\cdot 5^x - 15^x + 5\cdot 3^x < 45$.

Решение

$$9\cdot 5^x - 45 - 5^x\cdot 3^x + 5\cdot 3^x < 0 \Leftrightarrow 9\left(5^x - 5\right) - 3^x\left(5^x - 5\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(9 - 3^x\right)\left(5^x - 5\right) < 0 \Leftrightarrow \left(3^x - 3^2\right)\left(5^x - 5\right) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty;1) \mathbf{U} (2;\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty;1) \mathbf{U} (2;+\infty)$.

Пример 11. Решите неравенство $\dfrac{1}{3^x+13} \geq \dfrac{2}{3^{x+1}-1}$.

Решение

$$\frac{1}{3^x+13} \geq \frac{2}{3^{x+1}-1} \Leftrightarrow \frac{3^x-27}{\left(3^x+13\right)\left(3\cdot 3^x-1\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^x-3^3}{3^x-3^{-1}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup [3; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

Пример 12. Решите неравенство $x^2 \cdot 4^x + 144 > 16x^2 + 9 \cdot 4^x$.

Решение

$$x^2 \cdot 4^x + 144 > 16x^2 + 9 \cdot 4^x \Leftrightarrow \left(x^2-9\right)\left(4^x-4^2\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3;\ 2) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-3;\ 2) \cup (3; +\infty)$.

Пример 13. Решите неравенство $\dfrac{x^2-x-12}{\lg(x+1)} \leq 0$.

Решение

$$\frac{x^2-x-12}{\lg(x+1)-\lg 1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+3)(x-4)}{x+1-1} \leq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+3)(x-4)}{x} \leq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 4].$$

Ответ: $x \in (0; 4]$.

Пример 14. Решите неравенство $\dfrac{2}{\log_2 x-1}\le 1$.

Решение

$$\frac{2}{\log_2 x-1}-1\le 0\Leftrightarrow \frac{2-\log_2 x+1}{\log_2 x-1}\le 0\Leftrightarrow \frac{\log_2 x-3}{\log_2 x-1}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x-\log_2 8}{\log_2 x-\log_2 2}\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-8}{x-2}\ge 0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;2)\cup[8;+\infty).$$

Ответ: $x\in(0;\ 2)\cup[8;\ +\infty)$.

Пример 15. Решите неравенство $\dfrac{\lg(16x^2-27x+12)}{\lg x}>2$.

Решение

$$\frac{\lg(16x^2-27x+12)}{\lg x}>2\Leftrightarrow \frac{\lg(16x^2-27x+12)-2\lg x}{\lg x}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(16x^2-27x+12)-\lg x^2}{\lg x-\lg 1}>0\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{16x^2-27x+12-x^2}{x-1}>0,\\ 16x^2-27x+12>0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{15x^2-27x+12}{x-1}>0,\\ 16x^2-27x+12>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{5x^2-9x+4}{x-1}>0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0{,}8;\ 1)\cup(1;+\infty).$$

Ответ: $x\in(0{,}8;1)\cup(1;\ +\infty)$.

Пример 16. Решите неравенство $\log_{x+2}\left(9x^2+17x-2\right)>2$.

Решение

$$\log_{x+2}\left(9x^2+17x-2\right)>2 \Leftrightarrow \frac{\log_2\left(9x^2+17x-2\right)}{\log_2(x+2)}-2>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(9x^2+17x-2\right)-\log_2(x+2)^2}{\log_2(x+2)-\log_2 1}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9x^2+17-2-x^2-4x-4}{x+2-1}>0, \\ 9x^2+17-2>0, \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8x^2+13x-6}{x+1}>0, \\ 9x^2+17-2>0, \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)\left(x-\dfrac{3}{8}\right)(x+1)>0, \\ (x+2)\left(x-\dfrac{1}{9}\right)>0, \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{8};+\infty\right).$$

Ответ: $x\in\left(\dfrac{3}{8};+\infty\right)$.

Пример 17. Решите неравенство $(6-x)(x+9)\log_3(x+7)\geq 0$.

Решение

$$(x-6)(x+9)\left(\log_3(x+7)-\log_3 1\right)\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x+9)(x+6)\leq 0, \\ x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-6;6].$$

Ответ: $x\in[-6;6]$.

Пример 18. Решите неравенство $\dfrac{4\lg x-15}{\lg x-3}>5$.

Решение

$$\frac{4\lg x-15}{\lg x-3}>5 \Leftrightarrow \frac{\lg x}{\lg x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{\lg x-\lg 1}{\lg x-\lg 1000}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-1000}<0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in (1;\ 1000).$$

Ответ: $x\in (1;\ 1000)$.

Пример 19. Решите неравенство $\dfrac{1}{|x-9|}\le |-9x+1|^{-1}$.

Решение

$$\frac{1}{|x-9|}\le |-9x+1|^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{|x-9|}\le \frac{1}{|9x-1|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|9x-1|-|x-9|}{|x-9||9x-1|}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(9x-1)^2-(x-9)^2}{(x-9)^2(9x-1)^2}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x-9)^2(9x-1)^2}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in \left[-1;\frac{1}{9}\right)\mathbf{U}\left(\frac{1}{9};1\right].$$

Ответ: $x\in \left[-1;\dfrac{1}{9}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{1}{9};1\right]$.

Пример 20. Решите неравенство $\frac{|3x-8|-|x-4|}{(x-2)(x-3)} \geq 0$.

Решение

$$\frac{|3x-8|-|x-4|}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-8)^2-(x-4)^2}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-8-x+4)(3x-8+x-4)}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-4)\ (4x-12)}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)\ (x-3)}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2(x-3)^2 \geq 0 \\ x \neq 2, x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2)\,\mathbf{U}\,(2;3)\,\mathbf{U}\,(3;+\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2)\,\mathbf{U}\,(2;3)\,\mathbf{U}\,(3;+\infty)$.

5.2 Варианты самостоятельных работ

Вариант 1

Решите неравенства.

1. $\frac{\sqrt{5x^2+x+2}-\sqrt{4x^2+x+3}}{4-x^2} \leq 0$.

2. $\frac{\sqrt[3]{x^2-4-3x}+\sqrt[3]{3x^2-9x+9}}{3x^2-x-10} \geq 0$.

3. $\frac{\sqrt[3]{-7x^3-16x}+2x}{-x-\sqrt[3]{-x^3+x^2-3x-28}} \geq 0$.

4. $\frac{\sqrt[3]{18x^2-36x+37}-\sqrt[3]{2x^2+12x+1}}{x^2-2x-3} \leq 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{15x+25}-2x-5}{\sqrt{3x+16}-4}\le 0.$

6. $\dfrac{7^x-49}{x^2+9x+20}\ge 0.$

7. $\dfrac{\left(36-6^x\right)\left(3^x-27\right)}{\left(8^x-8\right)\left(16^x+15\right)}\ge 0.$

8. $\begin{cases} 9^{0,5x^2-2}>1, \\ 4^x-10\cdot 2^x+16\le 0. \end{cases}$

9. $3^{2\sqrt{x}}+27>3^{\sqrt{x}+3}+3^{\sqrt{x}}$.

10. $16\cdot 3^x-12^x+3\cdot 4^x<48.$

11. $\dfrac{1}{5^x+31}\ge\dfrac{4}{5^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 2^x+36<4x^2+9\cdot 2^x$.

13. $\dfrac{x^2+2x-15}{\ln(x+3)}\le 0$.

14. $\dfrac{2}{\lg x+1}\le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(11x^2-16x+6\right)}{\lg x}>2$.

16. $\log_{x+3}\left(9x^2+23x-12\right)>2$.

17. $(4-x)(x+5)\log_3(x+3)\ge 0$.

18. $\dfrac{2\lg x-15}{\lg x-3}>5$.

19. $\dfrac{1}{|5x+8|}\le|8x+5|^{-1}$.

20. $\dfrac{|3x+10|-|x+2|}{(x+4)(x+3)}\ge 0$.

Вариант 2

Решите неравенства.

1. $\dfrac{\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+2x+2}}{25-x^2}\le 0$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{7-20x-4x^2}+\sqrt[3]{5x^2+13x+3}}{3x^2-2x-21}\ge 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{28x^3-4x}-3x}{-x-\sqrt[3]{-x^3+x^2-x-6}}\ge 0$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{11x^2-80x+67}-\sqrt[3]{2x^2-32x+3}}{x^2-7x+10}\le 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{45x+25}-5x-5}{\sqrt{x+1}-1}\le 0$.

6. $\dfrac{8^x-64}{x^2+9x+18}\ge 0$.

7. $\dfrac{\left(64-4^x\right)\left(3^x-243\right)}{\left(6^x-36\right)\left(14^x+11\right)}\ge 0$.

8. $\begin{cases}25^{0,5x^2-1}>25,\\ 4^x-20\cdot 2^x+64\le 0.\end{cases}$

9. $8^{2\sqrt{x}}+8>8^{\sqrt{x}+1}+8^{\sqrt{x}}$.

10. $81\cdot 4^x-12^x+3^x<81$.

11. $\dfrac{1}{2^x+7}\ge\dfrac{1}{2^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 3^x+4<x^2+4\cdot 3^x$.

13. $\dfrac{x^2-2x-8}{\ln\left(x-2\right)}\le 0$.

14. $\dfrac{2}{\log_{11} x+1} \le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(4x^2-5x+2\right)}{\lg x} > 2$.

16. $\log_{x+3}\left(9x^2+25x-6\right) > 2$.

17. $(8-x)(x+5)\log_5(x+1) \ge 0$.

18. $\dfrac{2\lg x-9}{\lg x-3} > 3$.

19. $\dfrac{1}{|x+2|} \le |2x+1|^{-1}$.

20. $\dfrac{|4x+3|-|2x+3|}{(x+1)x} \ge 0$.

Вариант 3

Решите неравенства.

1. $\dfrac{\sqrt{5x^2-x+3}-\sqrt{4x^2-x+7}}{9-x^2} \le 0$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{-13x-3x^2}+\sqrt[3]{4x^2+9x-5}}{4x^2+3x-7} \ge 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{2x^3-4x}-x}{2x-\sqrt[3]{8x^3+x^2-4x-12}} \ge 0$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{12x^2-25x+26}-\sqrt[3]{3x^2+5x+1}}{x^2-3x+2} \le 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{2x+16}-x-4}{\sqrt{x+9}-3} \le 0$.

6. $\dfrac{4^x-16}{x^2+3x+2}\ge 0$.

7. $\dfrac{\left(256-4^x\right)\left(2^x-32\right)}{\left(5^x-25\right)\left(12^x+9\right)}\ge 0.$

8. $\begin{cases}25^{0,5x^2-1}>25,\\ 4^x-18\cdot 2^x+32\le 0.\end{cases}$

9. $2^{2\sqrt{x}}+4>2^{\sqrt{x}+2}+2^{\sqrt{x}}$.

10. $25\cdot 4^x-20^x+5^x<25$.

11. $\dfrac{1}{5^x+1}\ge\dfrac{4}{5^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 4^x+16<4x^2+4\cdot 4^x$.

13. $\dfrac{x^2-x-20}{\ln(x+2)}\le 0$.

14. $\dfrac{4}{\log_9 x+3}\le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(7x^2-10x+4\right)}{\lg x}>2$.

16. $\log_{x+1}\left(9x^2+7x-2\right)>2$.

17. $(7-x)(x-2)\log_4(x-4)\ge 0.$

18. $\dfrac{\lg x-5}{\lg x-1}>5$.

19. $\dfrac{1}{|3x-5|}\le|-5x+3|^{-1}$.

20. $\dfrac{|3x+7|-|x+1|}{(x+3)(x+2)}\ge 0$.

Вариант 4

Решите неравенства.

1. $\dfrac{\sqrt{5x^2+x+1}-\sqrt{4x^2+x+5}}{16-x^2}\le 0$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{14x^2-12x+9}+\sqrt[3]{-5x^2-3x-5}}{3x^2+x-4}\ge 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{28x^3-9x}-3x}{2x-\sqrt[3]{8x^3+x^2-4x-21}}\ge 0$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{19x^2-21x+11}-\sqrt[3]{3x^2+3x+2}}{x^2+x-30}\le 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{2x+1}-2x-1}{\sqrt{2x+4}-2}\le 0$.

6. $\dfrac{7^x-49}{x^2+8x+15}\ge 0$.

7. $\dfrac{\left(27-3^x\right)\left(4^x-256\right)}{\left(6^x-6\right)\left(15^x+11\right)}\ge 0$.

8. $\begin{cases}16^{0{,}5x^2-1}>\dfrac{1}{4},\\ 9^x-30\cdot 3^x+81\le 0.\end{cases}$

9. $2^{2\sqrt{x}}+2>2^{\sqrt{x}+1}+2^{\sqrt{x}}$.

10. $5\cdot 7^x-35^x+5^x<5$.

11. $\dfrac{1}{3^x+4}\ge\dfrac{2}{3^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 4^x+4<x^2+4\cdot 4^x$.

13. $\dfrac{x^2+9x+18}{\ln(x+5)}\le 0$.

14. $\dfrac{3}{\log_5 x+1} \le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(3x^2-3x+1\right)}{\lg x} > 2$.

16. $\log_{x+4}\left(6x^2+21x-12\right) > 2$.

17. $(3-x)(x+8)\log_4(x+2) \ge 0$.

18. $\dfrac{3\lg x-4}{\lg x-1} > 4$.

19. $\dfrac{1}{|3x-8|} \le |-8x+3|^{-1}$.

20. $\dfrac{|4x+11|-|2x+7|}{(x+3)(x+2)} \ge 0$.

Вариант 5

Решите неравенства.

1. $\dfrac{\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+3x+3}}{25-x^2} \le 0$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3x+8}+\sqrt[3]{3x^2-13x+7}}{x^2+7x-18} \ge 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{-7x^3-9x}+2x}{3x-\sqrt[3]{27x^3+x^2-3x-18}} \ge 0$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{18x^2-24x+41}-\sqrt[3]{2x^2+24x+5}}{x^2-5x-6} \le 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{25x+25}-3x-5}{\sqrt{x+36}-6} \le 0$.

6. $\dfrac{6^x-36}{x^2+7x+12}\ge 0$.

7. $\dfrac{\left(16-2^x\right)\left(3^x-243\right)}{\left(4^x-4\right)\left(12^x+7\right)}\ge 0$.

8. $\begin{cases} 9^{0,5x^2-1}>\dfrac{1}{3}, \\ 16^x-20\cdot 4^x+64\le 0. \end{cases}$

9. $4^{2\sqrt{x}}+64>4^{\sqrt{x}+3}+4^{\sqrt{x}}$.

10. $64\cdot 5^x-20^x+4^x<64$.

11. $\dfrac{1}{4^x+5}\ge\dfrac{3}{4^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 2^x+8<2x^2+4\cdot 2^x$.

13. $\dfrac{x^2+3x-4}{\ln(x+3)}\le 0$.

14. $\dfrac{1}{\log_2 x-1}\le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(10x^2-15x+6\right)}{\lg x}>2$.

16. $\log_{x+3}\left(8x^2+23x-3\right)>2$.

17. $(5-x)(x+8)\log_2(x+6)\ge 0$.

18. $\dfrac{\lg x-4}{\lg x-1}>4$.

19. $\dfrac{1}{|5x+7|}\le|7x+5|^{-1}$.

20. $\dfrac{|5x-21|-|3x-11|}{(x-4)(x-5)}\ge 0$.

Вариант 6

Решите неравенства.

1. $\dfrac{\sqrt{3x^2+x+5}-\sqrt{2x^2+x+9}}{9-x^2}\le 0$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{7x^2-27x+13}+\sqrt[3]{-3x^2+11x+2}}{2x^2-5x+2}\ge 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{28x^3-4x}-3x}{x-\sqrt[3]{x^3+x^2-3x-10}}\ge 0$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{10x^2-117x+172}-\sqrt[3]{x^2-39x+3}}{x^2-5x-6}\le 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{10x+16}-2x-4}{\sqrt{4x+36}-6}\le 0$.

6. $\dfrac{8^x-64}{x^2+10x+24}\ge 0$.

7. $\dfrac{(16-4^x)(3^x-81)}{(6^x-6)(14^x+11)}\ge 0$.

8. $\begin{cases} 9^{0,5x^2-2}>1, \\ 4^x-18\cdot 2^x+32\le 0. \end{cases}$

9. $3^{2\sqrt{x}}+9>3^{\sqrt{x}+2}+3^{\sqrt{x}}$.

10. $4\cdot 3^x-6^x+2^x<4$.

11. $\dfrac{1}{3^x+1}\ge\dfrac{2}{3^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 2^x+4<x^2+4\cdot 2^x$.

13. $\dfrac{x^2-3x-4}{\lg(x-2)}\le 0$.

14. $\dfrac{2}{\log_7 x+1} \le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(7x^2-9x+3\right)}{\lg x} > 2$.

16. $\log_{x+4}\left(7x^2+27x-4\right) > 2$.

17. $(5-x)(x+4)\log_2(x+2) \ge 0$.

18. $\dfrac{\lg x-9}{\lg x-3} > 3$.

19. $\dfrac{1}{|4x-7|} \le |-7x+4|^{-1}$.

20. $\dfrac{|7x+17|-|x-1|}{(x+3)(x+2)} \ge 0$.

Вариант 7

Решите неравенства.

1. $\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+2x+6}}{9-x^2} \le 0$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{1-11x-3x^2}+\sqrt[3]{4x^2+7x+2}}{6x^2-17x+10} \ge 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{28x^3-4x}-3x}{2x-\sqrt[3]{8x^3+x^2-x-6}} \ge 0$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{7x^2-78x+173}-\sqrt[3]{3x^2-26x+4}}{x^2-3x-28} \le 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{36x+25}-4x-5}{\sqrt{3x+16}-4} \le 0$.

6. $\dfrac{8^x-64}{x^2+7x+6}\ge 0$.

7. $\dfrac{\left(64-4^x\right)\left(2^x-16\right)}{\left(5^x-25\right)\left(12^x+9\right)}\ge 0$.

8. $\begin{cases} 9^{0,5x^2-1}>\dfrac{1}{3}, \\ 4^x-34\cdot 2^x+64\le 0. \end{cases}$

9. $2^{2\sqrt{x}}+8>2^{\sqrt{x}+3}+2^{\sqrt{x}}$.

10. $3\cdot 2^x-6^x+3^x<3$.

11. $\dfrac{1}{4^x+1}\ge \dfrac{3}{4^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 3^x+12<3x^2+4\cdot 3^x$.

13. $\dfrac{x^2+4x-12}{\lg(x+3)}\le 0$.

14. $\dfrac{1}{\log_5 x-1}\le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(5x^2-7x+3\right)}{\lg x}>2$.

16. $\log_{x+1}\left(7x^2+3x-4\right)>2$.

17. $(2-x)(x+9)\log_5(x+1)\ge 0$.

18. $\dfrac{\lg x-16}{\lg x-4}>4$.

19. $\dfrac{1}{|x+3|}\le |3x+1|^{-1}$.

20. $\dfrac{|7x+10|-|x-2|}{(x+2)(x+1)}\ge 0$.

Вариант 8

Решите неравенства.

1. $\dfrac{\sqrt{2x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+2x+6}}{9-x^2}\le 0$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{1-11x}+\sqrt[3]{x^2+7x-6}}{4x^2-7x-36}\ge 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{2x^3-x}-x}{-3x-\sqrt[3]{-27x^3+x^2-5x-6}}\ge 0$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{18x^2-85x+293}-\sqrt[3]{2x^2+51x+4}}{x^2-8x+15}\le 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{31x+16}-4x-4}{\sqrt{3x+16}-4}\le 0$.

6. $\dfrac{6^x-36}{x^2+5x+4}\ge 0$.

7. $\dfrac{\left(8-2^x\right)\left(3^x-81\right)}{\left(4^x-16\right)\left(12^x+7\right)}\ge 0$.

8. $\begin{cases} 9^{0,5x^2-3}>\dfrac{1}{9}, \\ 4^x-20\cdot 2^x+64\le 0. \end{cases}$

9. $4^{2\sqrt{x}}+16>4^{\sqrt{x}+2}+4^{\sqrt{x}}$.

10. $16\cdot 3^x-12^x+4^x<16$.

11. $\dfrac{1}{4^x+21}\ge\dfrac{3}{4^{x+1}-1}$.

12. $x\quad -4^x+1<x^2+4^x$.

13. $\dfrac{x^2+x-12}{\ln\left(x+1\right)}\le 0$.

14. $\frac{4}{\log_5 x+3}\le 1$.

15. $\frac{\lg\left(9x^2-14x+6\right)}{\lg x}>2$.

16. $\log_{x+1}\left(9x^2+5x-4\right)>2$.

17. $(7-x)(x+3)\log_3(x-3)\ge 0$.

18. $\frac{3\lg x-8}{\lg x-2}>4$.

19. $\frac{1}{|x-5|}\le|-5x+1|^{-1}$.

20. $\frac{|7x+3|-|x-3|}{(x+1)x}\ge 0$.

Вариант 9

Решите неравенства.

1. $\frac{\sqrt{4x^2-2x+4}-\sqrt{3x^2-2x+5}}{25-x^2}\le 0$.

2. $\frac{\sqrt[3]{2x^2-6x+4}+\sqrt[3]{2x^2-2x-9}}{5x^2+4x-9}\ge 0$.

3. $\frac{\sqrt[3]{9x^3-x}-2x}{-3x-\sqrt[3]{-27x^3+x^2-4x-5}}\ge 0$.

4. $\frac{\sqrt[3]{18x^2-150x+229}-\sqrt[3]{2x^2-30x+4}}{x^2-3x-4}\le 0$.

5. $\frac{\sqrt{3x+9}-x-3}{\sqrt{2x+36}-6}\le 0$.

6. $\dfrac{7^x-49}{x^2+6x+5}\ge 0$.

7. $\dfrac{\left(27-3^x\right)\left(2^x-64\right)}{\left(4^x-4\right)\left(11^x+7\right)}\ge 0$.

8. $\begin{cases} 9^{0,5x^2-1}>9, \\ 4^x-34\cdot 2^x+64\le 0. \end{cases}$

9. $5^{2\sqrt{x}}+25>5^{\sqrt{x}+2}+5^{\sqrt{x}}$.

10. $5\cdot 4^x-20^x+5^x<5$.

11. $\dfrac{1}{2^x+1}\ge \dfrac{1}{2^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 2^x+9<x^2+9\cdot 2^x$.

13. $\dfrac{x^2-2x-15}{\lg(x+1)}\le 0$.

14. $\dfrac{4}{\log_4 x+1}\le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(13x^2-21x+9\right)}{\lg x}>2$.

16. $\log_{x+4}\left(9x^2+35x-4\right)>2$.

17. $(5-x)\,(x+9)\log_4(x+5)\ge 0$.

18. $\dfrac{\lg x-8}{\lg x-2}>4$.

19. $\dfrac{1}{|5x-8|}\le |-8x+5|^{-1}$.

20. $\dfrac{|5x+4|-|3x+4|}{(x+1)x}\ge 0$.

Вариант 10

Решите неравенства.

1. $\dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+5}}{16-x^2}\le 0$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{5x^2+2x+13}+\sqrt[3]{-x^2-14x-8}}{4x^2+x-18}\ge 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{-7x^3-x}+2x}{-x-\sqrt[3]{-x^3+x^2-4x-5}}\ge 0$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+18}-\sqrt[3]{3x^2+8x+2}}{x^2-9x+18}\le 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{14x+9}-3x-3}{\sqrt{2x+9}-3}\le 0$.

6. $\dfrac{5^x-25}{x^2+5x+6}\ge 0$.

7. $\dfrac{\left(81-3^x\right)\left(2^x-32\right)}{\left(4^x-16\right)\left(11^x+7\right)}\ge 0$.

8. $\begin{cases}25^{0,5x^2-1}>25,\\ 9^x-30\cdot 3^x+81\le 0.\end{cases}$

9. $6^{2\sqrt{x}}+6>6^{\sqrt{x}+1}+6^{\sqrt{x}}$.

10. $7\cdot 4^x-28^x+7^x<7$.

11. $\dfrac{1}{5^x+6}\ge\dfrac{4}{5^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 3^x+9<x^2+9\cdot 3^x$.

13. $\dfrac{x^2+5x-6}{\lg(x+4)}\le 0$.

14. $\dfrac{1}{\log_2 x-3}\le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(6x^2-8x+3\right)}{\lg x}>2$.

16. $\log_{x+4}\left(8x^2+31x-4\right)>2$.

17. $(6-x)(x+5)\log_2(x-2)\ge 0$.

18. $\dfrac{\lg x-12}{\lg x-3}>4$.

19. $\dfrac{1}{|6x-7|}\le|-7x+6|^{-1}$.

20. $\dfrac{|4x+7|-|2x+5|}{(x+2)(x+1)}\ge 0$.

Вариант 11

Решите неравенства.

1. $\dfrac{\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+2x+2}}{9-x^2}\le 0$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{-2-5x-3x^2}+\sqrt[3]{4x^2+4x-4}}{2x^2+5x-18}\ge 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{-7x^3-x}+2x}{-3x-\sqrt[3]{-27x^3+x^2-6x-7}}\ge 0$.

4. $\dfrac{\sqrt[3]{17x^2-176x+259}-\sqrt[3]{x^2-48x+3}}{x^2-4x-5}\le 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{27x+16}-4x-4}{\sqrt{4x+4}-2}\le 0$.

6. $\dfrac{4^x-16}{x^2+x-2}\ge 0$.

7. $\dfrac{\left(4-2^x\right)\left(4^x-256\right)}{\left(5^x-5\right)\left(14^x+9\right)}\ge 0$.

8. $\begin{cases} 9^{0,5x^2-1}>9, \\ 4^x-20\cdot 2^x+64\le 0. \end{cases}$

9. $2^{2\sqrt{x}}+64>2^{\sqrt{x}+6}+2^{\sqrt{x}}$.

10. $9\cdot 5^x-15^x+5\cdot 3^x<45$.

11. $\dfrac{1}{3^x+13}\ge \dfrac{2}{3^{x+1}-1}$.

12. $x^2\cdot 4^x+144<16x^2+9\cdot 4^x$.

13. $\dfrac{x^2-x-12}{\lg(x+1)}\le 0$.

14. $\dfrac{2}{\log_2 x-1}\le 1$.

15. $\dfrac{\lg\left(16x^2-27x+12\right)}{\lg x}>2$.

16. $\log_{x+2}\left(9x^2+17x-2\right)$.

17. $(6-x)(x+9)\log_3(x+7)\ge 0$.

18. $\dfrac{4\lg x-15}{\lg x-3}>5$.

19. $\dfrac{1}{|x-9|}\le |-9x+1|^{-1}$.

20. $\dfrac{|3x-8|-|x-4|}{(x-2)(x-3)}\ge 0$.

6 ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Сумма целых решений неравенства, принадлежащих отрезку $[-5;5]$:

1.1. $\left(|x-3|^2-4\right)\left(|x|-5\right)\leq 0$ равна:

1) –9; 2) –8; 3) 9; 4) 6; 5) –7;

1.2. $\left(|x-5|-|x-1|\right)\left(|x|-3\right)\geq 0$ равна:

1) 3; 2) –6; 3) –9; 4) 0; 5) 5;

1.3. $\dfrac{|x-1|-|x-2|}{x^2-2x-8}<0$ равна:

1) 5; 2) –5; 3) 7; 4) –6; 5) –7.

2. Количество целых решений неравенства, принадлежащих отрезку $[-4;4]$:

2.1. $\dfrac{|x^2-3x+2|-(x-1)^2}{|x|-|x-1|}\leq 0$ составляет:

1) 8; 2) 9; 3) 7; 4) 5; 5) 10;

2.2. $\dfrac{|x+2|-|x+1|}{|x^2+x|-(x+1)^2}\geq 0$ составляет:

1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) 4; 5) 2;

2.3. $\dfrac{|x+4|-|x-1|}{|x^2+5x|-|x^2+2|}\geq 0$ составляет:

1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 7; 5) 3.

3. Сумма двух наибольших целых решений неравенства:

3.1. $\sqrt{2-x}\left(3^{x^2-2x-3}-243\right)\geq 0$ равна:

1) –3; 2) –2; 3) 0; 4) 1; 5) 3;

3.2. $\sqrt{6-x}\left(2^{x^2-7{,}2x+3{,}9}-4\sqrt{2}\right)\geq 0$ равна:

1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) –1; 5) –3;

3.3. $\sqrt{2-x}\left(2^{\frac{x+3}{x-3}}-\frac{1}{16}\right)\geq 0$ равна:

1) 5; 2) 6; 3) 3; 4) 2; 5) 1.

4. Сумма натуральных решений неравенства:

4.1. $\frac{\left(3^x-27\right)\left(3^x-243\right)}{\left(2^x-0{,}125\right)}\leq 0$ составляет:

1) 3; 2) 6; 3) 10; 4) 12; 5) 18;

4.2. $\frac{\left(2^x-3\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-4\right)}{\left(2^x+1\right)\left(3^x-\frac{1}{27}\right)}\geq 0$ составляет:

1) 1; 2) 3; 3) 6; 4) 10; 5) 15;

4.3. $3^{x-1}\leq\frac{5\cdot 3^x-27}{3^x-3}$ составляет:

1) 1; 2) 3; 3) 6; 4) 10; 5) 15.

5. Сумма целых решений неравенства:

5.1. $\frac{\left(4^{2x}-0{,}0625\right)\left(3^x-81\right)}{\left(3^x-4\right)\left(2^x-0{,}125\right)}\leq 0$ равна:

1) 7; 2) 6; 3) 4; 4) 2; 5) 0;

5.2. $\frac{\left((0{,}5)^x-8\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-0{,}125\right)}{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x-243\right)\left(4^x-4\right)}\geq 0$ равна:

1) –5; 2) –2; 3) 0; 4) 2; 5) 5;

5.3. $\dfrac{\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\dfrac{1}{81}\right)\left((0{,}5)^x-0{,}25\right)}{\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-64\right)\left((0{,}2)^x-625\right)}\le 0$ равна:

1) –5; 2) 0; 3) 7; 4) 9; 5) 12.

6. Количество целых решений неравенства:

6.1. $5+2\cdot 10^x-10\cdot 2^x-5^x\le 0$ составляет:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4;

6.2. $12^x+12\le 3\cdot 4^x+4\cdot 3^x$ составляет:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4;

6.3. $6^x\le 3\sqrt{3}\cdot 2^x+32\cdot 2^x\cdot 3^x-64\sqrt{108}$ составляет:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.

7. Сумма целых решений неравенства:

7.1. $3x+12\cdot 3^{\sqrt{x}}\ge 4x\cdot 3^{\sqrt{x}}+9$ равна:

1) 1; 2) 3; 3) 6; 4) 10; 5) 15;

7.2. $5x^2\cdot 5^{x^2}+12\le 3x^2+20\cdot 5^{x^2}$ равна:

1) –3; 2) –1; 3) 0; 4) 1; 5) 2;

7.3. $x\cdot 5^{-\sqrt{x}}+10>2x+5^{1-\sqrt{x}}$ равна:

1) 3; 2) 6; 3) 10; 4) 15; 5) 21.

8. Наименьшее целое решение неравенства:

8.1. $7^{x^2}-7^x\cdot x^2\le 0$ составляет:

1) –7; 2) –1; 3) 0; 4) 1; 5) 7;

8.2. $x\cdot 2^{2+x}-x^2\cdot 2^x>0$ составляет:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4;

8.3. $x^2 \cdot (0.3)^x - 4 \cdot (0.3)^x < 0$ составляет:

1) –2; 2) –1; 3) 0; 4) 1; 5) 2.

9. Целое решение неравенства:

9.1. $\dfrac{4^x - 4}{3 - x} > 0$ равно:

1) –1; 2) 0; 3) 1; 4) 2; 5) 4;

9.2. $\dfrac{5 - 25^x}{x + 1} > 0$ равно:

1) –2; 2) –1; 3) 0; 4) 1; 5) 2;

9.3. $(x-6)(8^{x-6} - 64) < 0$ равно:

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9.

10. Наименьшее целое решение неравенства:

10.1. $\dfrac{\log_3 x - 2}{2x - 1} < 0$ составляет:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 8; 5) 9;

10.2. $\dfrac{3x - 4}{\log_{0.3} x} < 0$ составляет:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6;

10.3. $\dfrac{\log_{0.5} x + 2}{2x + 1} > 0$ составляет:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

11. Наибольшее целое решение неравенства:

11.1. $(x+2)\log_2 x - \dfrac{4}{\log_x 2} \le 0$ равно:

1) 6; 2) 4; 3) 4; 4) 3; 5) 2;

11.2. $x\log_4 x-\dfrac{3}{\log_x 4}\le 0$ равно:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6;

11.3. $x\log_2 x-\dfrac{5-x}{\log_x 2}\le 0$ равно:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.

12. Количество целых решений неравенства:

12.1. $\dfrac{9^{\sqrt{x}+1}}{x}>3^{2\left(\sqrt{x}-1\right)}$ составляет:

1) 1; 2) 80; 3) 81; 4) 26; 5) 27;

12.2. $\dfrac{5^{\sqrt{x}}}{x+1}>5^{\sqrt{x}-1}$ составляет:

1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8;

12.3. $\dfrac{3^{\sqrt{x-3}}}{3x+3}>3^{\sqrt{x-3}-3}$ составляет:

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.

13. Наибольшее целое решение неравенства:

13.1. $\dfrac{9^x-10\cdot 3^x+9}{1-x^2}\ge 0$ равно:

1) 0; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5;

13.2. $\dfrac{x^2-4x+4}{3^{-x}-27}\ge 0$ равно:

1) –2; 2) –1; 3) 0; 4) 1; 5) 2;

13.3. $\dfrac{3^x-27}{x-2}>\dfrac{3^x-27}{x-3}$ равно:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 4; 5) 5.

14. Наименьшее натуральное решение неравенства:

14.1. $\left(16x-4x^2-7\right)\cdot\log_{0,5}(x-3)>0$ составляет:

1) 2;   2) 3;   3) 4;   4) 5;   5) 6;

14.2. $\dfrac{x^2-4}{\log_{0,3}\left(x^2-1\right)}<0$ составляет:

1) 2;   2) 3;   3) 4;   4) 5;   5) 6;

14.3. $\dfrac{\log_{0,5}\left(3x^2-8x+5\right)}{x-5}\leq 0$ составляет:

1) 0;   2) 2;   3) 3;   4) 4;   5) 5.

15. Количество целых решений неравенства:

15.1 $\dfrac{\sqrt{5x-x^2}}{\log_{0,2}\left(2x^2-x\right)}\leq 0$ равно:

1) 1;   2) 2;   3) 3;   4) 4;   5) 5;

15.2. $\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_{0,5}\left(x^2-x-2\right)+2}<0$ равно:

1) 0;   2) 1;   3) 2;   4) 3;   5) 4;

15.3. $\sqrt{9-x^2}\left(\log_{0,5}\left(x^2-16x-4\right)+5\right)\leq 0$ равно:

1) 0;   2) 1;   3) 2;   4) 3;   5) 4.

16. Сумма целых решений неравенства:

16.1. $\dfrac{3\cdot 2^{\frac{x}{2}}-7\cdot 2^{\frac{x}{4}}-20}{\sqrt{x-3}}\leq 0$ составляет:

1) 20;   2) 25;   3) 30;   4) 36;   5) 42;

16.2. $\sqrt{6-x}\left(3^x-12\cdot 3^{\frac{x}{2}}+27\right)\leq 0$ составляет:

1) 9;   2) 15;   3) 7;   4) 22;   5) 5;

16.3. $\dfrac{5^{3x+1}+34\cdot 25^{x}-7\cdot 5^{x}}{\sqrt{4-x^2}}\geq 0$ составляет:

1) –1; 2) 0; 3) 1; 4) –3; 5) 3.

17. Все решения неравенства:

17.1. $\dfrac{\log_{0,2}\left(2x^2-\dfrac{1}{2}\right)}{2^{|x|+1}-2}\geq 0$ равны:

1) $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$; 2) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$; 3) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$;

4) $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\mathbf{U}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$; 5) $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\mathbf{U}\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$;

17.2. $\lg\left(3x^2-\dfrac{1}{3}\right)\log_{0.3}\left(1+x^2\right)>0$ равны:

1) $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$; 2) $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$; 3) $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$;

4) $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$; 5) $\left(-\infty;-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$;

17.3 $\dfrac{\log_{\sqrt{2}}\left(12x^2-\dfrac{1}{3}\right)}{1-(0.5)^{|x|}}>0$ равны:

1) $\left(-\dfrac{2}{3\sqrt{2}};-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}};\dfrac{2}{3\sqrt{2}}\right)$; 2) $\left(-\dfrac{1}{3\sqrt{2}};-\dfrac{1}{6}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)$;

3) $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$; 4) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{U}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

5) $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

18. Сумма целых решений неравенства:

18.1 $\dfrac{4^x-5\cdot 2^x+4}{x^2-3x-10}\le 0$ составляет:

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9;

18.2 $\dfrac{(0.25)^x-6\cdot 0.5^x+8}{3x^2-10x+3}\le 0$ составляет:

1) 6; 2) –3; 3) 3; 4) 0; 5) 2;

18.3 $\dfrac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x-2\right)(2^x-8)}{2x^2-5x+2}\ge 0$ составляет:

1) –2; 2) 2; 3) –1; 4) 1; 5) 0.

19. Количество целых решений неравенства:

19.1 $(3-x)(x-4)^2\log_3(x+2)\ge 0$ равно:

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9;

19.2 $(x+3)(5-x)\log_2(x+3)\ge 0$ равно:

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9;

19.3 $\dfrac{3x^2+14x-5}{\log_{0.3}(x+2)}\ge 0$ равно:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

20. Наименьшее целое решение неравенства:

20.1 $(x-3)\log_4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ge |x-3|$ составляет:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4;

20.2 $x\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2}-x\right)\leq|x|$ составляет:

1) 1; 2) 0; 3) –1; 4) –2; 5) –3.

20.3 $x\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-x\right)<|x|$ составляет:

1) –3; 2) –2; 3) –1; 4) 0; 5) –4.

ОТВЕТЫ

Тема «Неравенства с модулем»

1. $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.
2. $(-6; -3) \cup (-2; 1)$.
3. $[-0{,}75; 1)$.
4. $(-\infty; 1{,}5;] \cup [2; +\infty)$.
5. $(-7; -3)$.
6. $(-\infty; -19) \cup (-13; 4) \cup (4; +\infty)$.
7. $[-1; 2]$.
8. $(-\infty; -2) \cup (0{,}2; 1{,}8) \cup (3; +\infty)$.
9. $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.
10. $(-17; -10) \cup (-10; -3)$.
11. $\left[\frac{8}{3}; 6\right) \cup (6; 16]$.
12. $(-\infty; 0{,}5] \cup [2; +\infty)$.
13. $(-\infty; -3) \cup (-0{,}5; 2) \cup (3; +\infty)$.
14. $(-6; -1) \cup (5; 6)$.
15. $[-5; -1) \cup [5; 7)$.
16. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup [3; +\infty)$.
17. $(-\infty; -4) \cup (4; 7)$.
18. $(-8; -5) \cup (-2; 2) \cup (5; +\infty)$.
19. $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
20. $(-\infty; 0{,}75]$.
21. $(2; 2{,}5)$.
22. $(-8; -7)$.
23. $(-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; 4)$.
24. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{6}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup [10; +\infty)$.

25. $(-\infty;-1{,}5)\cup(-0{,}5;\ 0)\cup\{1\}\cup[2;\ +\infty)$.

26. $\left(\frac{1}{4};\frac{2}{3}\right]\cup\left(\frac{3}{2};\ 4\right]$.

27. $(3;\ 4)\cup(4;\ 7)$.

28. $(-6{,}5;-2)\cup(-2;-0{,}5)$.

29. $(-13;-4)\cup(-4;-1)$.

30. $\left(2+2\sqrt{2};6\ \right]\cup\{1\}$.

31. $\left[-2;\ 2-\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{4}{3};\ 3\right]$.

32. $(-3;\ -2)\cup\{-1\}\cup(0;\ 1)$.

33. $(-\infty;-8)\cup(-2;\ 2)\cup(8;+\infty)$.

34. $(-3;-2)\cup(2;3)$.

35. $\left\{-\frac{3}{2}\right\}\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

36. $(-\infty;3)\cup(3;4)\cup(4;+\infty)$.

37. $(-\infty;5)\cup(5;\ 6)\cup(6;+\infty)$.

38. 0.

39. $(-\infty;0)\cup(0;\ 1]$.

40. $[0;2]$.

Тема «Иррациональные неравенства»

1. $(-\infty;\ -6]\ \cup\ \{1\}\ \cup\ [5;\ +\infty)$.

2. $(-\infty;\ -5]\ \cup\ \{-2\}\ \cup\ [2;\ +\infty)$.

3. $(-\infty;\ 1]\ \cup\ \{4\}\ \cup\ [6;\ +\infty)$.

4. $(-\infty;\ -3]\ \cup\ \{4\}\ \cup\ [5;\ +\infty)$.

5. $(-\infty;\ -6]\ \cup\ \{-1\}\ \cup\ [3;\ +\infty)$.

6. $[7;\ +\infty)\cup\{\ 45\ \}$.

7. $[6;\ +\infty)\cup\{1\}$.

8. $(-\infty;\ 2]\cup[7;\ +\infty)\cup\{3\}$.

9. $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

10. $[1; 3] \cup \{-2\}$.

11. $(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$.

12. $[6; +\infty)$.

13. $(-\infty; -1)$.

14. $[\frac{1}{5}; \frac{1}{4}] \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

15. $[-4; -2] \cup [1; 2]$.

16. $[0; 1) \cup (4; +\infty)$.

17. $[0; 4) \cup (9; +\infty)$.

18. $(0; \frac{1}{3})$.

19. $(-\infty; -\frac{5}{2}) \cup \{-1\} \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$.

20. $(1; \frac{4}{3})$.

21. $(-\infty; -\frac{3}{2}) \cup \{0\} \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$.

22. $[\frac{3}{2}; \frac{13}{4})$.

23. $(-\infty; 5] \cup [5; 9) \cup (13; +\infty)$.

24. $[-2; \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{11}-1}{2}]$.

Тема «Показательные неравенства»

1. $[\log_5 2; \log_5 3]$.
2. $[\log_9 2; \log_9 16]$.
3. $(-\infty; \log_4 3]$.
4. $(-\infty; 0]$.

5. $[0; 1]$.
6. $(-\infty; \log_3 4]$.
7. $(-\infty; 0) \cup (0; \log_2 9)$.
8. $(-\infty; 0) \cup [0{,}5; +\infty)$.
9. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
10. $\{-3\} \cup [-1; +\infty)$.
11. $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.
12. $(-\infty; 2{,}5) \cup (\log_2 6; 3)$.
13. $[0; 2) \cup (16; +\infty)$.
14. $(-2; -1] \cup [0; 3)$.
15. $(-1; 1]$.
16. $(-\infty; 1) \cup [\log_2 20; +\infty)$.
17. $(-\infty; 0) \cup [\log_2 \frac{3}{2}; 2]$.
18. $(0; 2)$.
19. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$.
20. $(-\infty; 0] \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$.
21. $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$.
22. $(\log_{2/3} 2; 0) \cup (0; 1]$.
23. $[\log_4 3; +\infty)$.
24. $(0; 1) \cup (4; +\infty)$.
25. $[1; 5) \cup (10; +\infty)$.
26. $(-2; \log_2 5) \cup (\frac{7}{3}; +\infty)$.
27. $(-5; \frac{3}{5}) \cup (\log_3 2; +\infty)$.
28. $(0; 3)$.
29.: $(-\infty; 0) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)$.

30. $(-\infty; 0)\ \mathbf{U}\ [\frac{2}{5}; 1]$.

31. $(-\infty; -\frac{5}{2}]\ \mathbf{U}\ (0; \frac{1}{2}]$.

32. $(-\infty; 0]\ \mathbf{U}\ [1; 2]$.

33. $[-\frac{1}{2}; 0]\ \mathbf{U}\ [\frac{7}{3}; \frac{5}{2})$.

34. $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Тема «Логарифмические неравенства»

1. $(0; 1)\ \mathbf{U}\ (1; 2)\ \mathbf{U}\ (3; 4)$.

2. $(-1; 0)\ \mathbf{U}\ (0; 1)\ \mathbf{U}\ (2; 3)$.

3. $(-2; -1)\ \mathbf{U}\ (0; 1)\ \mathbf{U}\ (1; 2)$.

4. $(-3; -2)\ \mathbf{U}\ (-1; 0)\ \mathbf{U}\ (0; 1)$.

5. $[-4; -1)\ \mathbf{U}\ (1; 4]$.

6. $(-\infty; -3]\ \mathbf{U}\ (\frac{1}{3}; 0)\ \mathbf{U}\ (0; \frac{1}{3})\ \mathbf{U}\ [3; +\infty)$.

7. $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})\ \mathbf{U}\ [-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)\ \mathbf{U}\ (0; \frac{1}{\sqrt{2}}]\ \mathbf{U}\ (\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; +\infty)$.

8. $[-4; -2)\ \mathbf{U}\ (2; 4]$.

9. $(-\infty; -4]\ \mathbf{U}\ (-0{,}25; 0)\ \mathbf{U}\ (0; 0{,}25)\ \mathbf{U}\ [4; +\infty)$.

10. $(-\infty; -\sqrt{2}]\ \mathbf{U}\ (-1; 0)\ \mathbf{U}\ (0; 1)\ \mathbf{U}\ [-\sqrt{2}; +\infty)$.

11. $(\frac{1}{7}; \frac{2}{7})\ \mathbf{U}\ [\frac{19}{49}; +\infty)$.

12. $[-\sqrt{3}; -1)\ \mathbf{U}\ (-1; 0)\ \mathbf{U}\ [\sqrt{3}; +\infty)$.

13. $(\frac{8}{7}; \frac{9}{7})\ \mathbf{U}\ [\frac{68}{49}; +\infty)$.

14. $(-\frac{1}{3}; 0)$ **U** $(0; 1]$.

15. $(\frac{4}{3}; 2-\frac{\sqrt{3}}{3}]$ **U** $(2; 2+\frac{\sqrt{3}}{3}]$.

16. $(-0{,}5; \frac{1-\sqrt{3}}{2}]$ **U** $(0; \frac{1+\sqrt{3}}{2}]$.

17. $(1; +\infty)$.

18. $(0; +\infty)$.

19. $(-1; +\infty)$.

20. $(3; +\infty)$.

21. $(4; +\infty)$.

22. $(5; +\infty)$.

23. $(-\infty; -1)$ **U** $[1; +\infty)$.

24. $(1; 2)$ **U** $[3; +\infty)$.

25. $(1{,}75; 2)$ **U** $[4; +\infty)$.

26. $(0; \frac{3-\sqrt{5}}{10})$ **U** $[\frac{3+\sqrt{5}}{10}; 0{,}8)$ **U** $(1; +\infty)$.

27. $(0; 1)$ **U** $[2; +\infty)$.

28. $(\frac{5}{3}; \frac{7-\sqrt{13}}{2}]$.

29. $(-\infty; \frac{1}{3})$.

30. $(0{,}5; 1{,}5]$ **U** $[\sqrt{3}; +\infty)$.

31. $[-3-2\sqrt{3}; -3+2\sqrt{3}]$ **U** $[1; 1{,}25)$.

32. $(-0{,}5; 0{,}5)$ **U** $[\sqrt{1{,}5}; +\infty)$.

33. $(-\infty; 0)$ **U** $(0;1]$ **U** $[3; +\infty)$.

34. $(0{,}5; 1]$ **U** $[2; 3]$.

35. $(2; 2{,}5]$ **U** $(3;4)$.

36. $(2{,}5; \frac{8}{3}]$ **U** $(3; +\infty)$.

37. $(-1; 1)$ **U** $[1{,}75; 2)$.

38. $(-\frac{5}{4};\ -\frac{19}{16})$ **U** $(-1; +\infty)$.

39. $(-3; -2)$ **U** $[-\frac{3}{2}; -1)$.

40. $(-\frac{1}{70}; \frac{3}{70})$ **U** $[0,5; +\infty)$.

41. $(-0,25; 0)$ **U** $[0,5; +\infty)$.

42. $(0; \frac{1}{3}]$ **U** $(0,5; +\infty)$.

43. $[\frac{2}{3}; 1)$.

44. $(1;\ 1+0,5\sqrt{3})$.

45. $(1; \frac{5}{3}]$ **U** $(2; +\infty)$.

46. $(2; 3)$ **U** $[2; +\infty)$.

47. $(-\infty; -2]$ **U** $(0; 1)$.

48. $(-\infty; 0]$ **U** $(1; 1,5)$.

49. $(1; 2)$ **U** $[4; +\infty)$.

50. $(-\infty; 0]$ **U** $(2; 3)$.

51. $(1,5; 2)$ **U** $[3; +\infty)$.

52. $(\frac{1}{7}; \frac{2}{7})$ **U** $[\frac{19}{49}; +\infty)$.

53. $[-\sqrt{3}; -1)$ **U** $[-1; 0)$ **U** $[\sqrt{3}; +\infty)$.

54. $(\frac{8}{7}; \frac{9}{7})$ **U** $[\frac{68}{49}; +\infty)$.

55. $(-\frac{1}{3}; 0)$ **U** $(0; 1]$.

56. $(\frac{4}{3};\ 2-\frac{\sqrt{3}}{3}]$ **U** $(2;\ 2+\frac{\sqrt{3}}{3})$.

57. $(-\frac{1}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}]$ **U** $(0;\frac{1+\sqrt{3}}{2}]$.

58. $[1-\sqrt{2};2)$ **U** $[1+\sqrt{2};2,5)$.

59. $(-\infty; -1] \cup (0; 0{,}25]$.

60. $(1{,}25; 3-\sqrt{3}] \cup (2; 3+\sqrt{3}]$.

61. $(-\infty; -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup (0; \frac{\sqrt{3}-1}{2}]$.

62. $[0{,}75; 1) \cup [2; +\infty)$.

63. $(-0{,}75; 1-\sqrt{3}] \cup (0; 1+\sqrt{3}]$.

64. $(1; 1{,}5)$.

65. $(0; 1) \cup [2; 3) \cup [6; +\infty)$.

66. $(1; 2] \cup (3; 4]$.

67. $(0; 1) \cup [3; 3{,}75) \cup [5; +\infty)$.

68. $(0; 3-\sqrt{5}] \cup [3+\sqrt{5}; +\infty)$.

69. $[2-\sqrt{2}; \frac{2}{3}) \cup (1; 2+\sqrt{2}]$.

70. $[0{,}5; 1) \cup [7; 8)$.

71. $[2-\sqrt{3}; 1) \cup (3; 2+\sqrt{3}]$.

72. $(0; \frac{7-\sqrt{37}}{2}] \cup (1; \frac{3}{2}) \cup [\frac{7+\sqrt{37}}{2}; +\infty)$.

73. $\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

74. $[\frac{\sqrt{33}-1}{8}; 1)$.

75. $[\sqrt{6}-1; 2) \cup (2; 5]$.

76. $(0{,}5; 1) \cup [1{,}5+0{,}5\sqrt{7}; +\infty)$.

77. $(3; 3{,}5) \cup [4{,}5; +\infty)$.

78. $(2; 1+\sqrt{2}) \cup [3{,}5; +\infty)$.

79. $(1; 2{,}5]$.

80. $(5; 5{,}5) \cup [6{,}5; +\infty)$.

81. $(6; 6{,}5) \cup [7{,}5; +\infty)$.

82. $(7; 7{,}5) \cup [8{,}5; +\infty)$.

83. $(2;5+\sqrt{43}]$.
84. (–1; 0).
85. $(2;\,5+\sqrt{30}]$.
86. $(-2;\,5-\sqrt{43}]\,\mathbf{U}\,(1;\,5+\sqrt{43}]$.
87. $[13-\sqrt{43};\,7)\,\mathbf{U}\,[13+\sqrt{43};\,+\infty)$.
88. $[8-\sqrt{43};\,2)\,\mathbf{U}\,[8+\sqrt{43};\,+\infty)$.
89. $(-1;\,0)\,\mathbf{U}\,[1+\sqrt{8};\,+\infty)$.
90. $(-3;\,1]\,\mathbf{U}\,(3;\,4)$.
91. (–1; 0).
92. $(-3;\,-2)\,\mathbf{U}\,(2;+\infty)$.
93. (0; 1).
94. $(1;\,2)\,\mathbf{U}\,(6;+\infty)$.
95. (3; 4).
96. $(3;\,\sqrt{107}-7)\,\mathbf{U}\,(4;\,5)\,\mathbf{U}\,(5;\,+\infty)$.
97. $[7-\sqrt{43};\,1)\,\mathbf{U}\,[7+\sqrt{43};\,+\infty)$.
98. $[11-\sqrt{43};\;\;5)\,\mathbf{U}\,[11+\sqrt{43};\;\;+\infty)$.
99. $[6-\sqrt{43};\,0)\,\mathbf{U}\,[6+\sqrt{43};\,+\infty)$.
100. $[7-\sqrt{43};\,1)\,\mathbf{U}\,[7+\sqrt{43};\,+\infty)$.
101. $[10-\sqrt{43};\,4)\,\mathbf{U}\,[10+\sqrt{43};\,+\infty)$.
102. $[5-\sqrt{43};\,-1)\,\mathbf{U}\,[5+\sqrt{43};\,+\infty)$.
103. $(2;3)\,\mathbf{U}\,(3;4]$.
104. $[1{,}5;\,2)\,\mathbf{U}\,(2;\,4)$.
105. $(1;2)\,\mathbf{U}\,(2;4]$.
106. $(4;1+\sqrt{10})\,\mathbf{U}\,(5;+\infty)$.
107. $(-1;0)\,\mathbf{U}\,(0;+\infty)$.
108. $(-\infty;-1]\,\mathbf{U}\,[1;2)\,\mathbf{U}\,(2;3]\,\mathbf{U}\,[5;+\infty)$.
109. $(3;4)\,\mathbf{U}\,(4;+\infty)$.
110. $\{3\}$.
111. $(1;\,2)\,\mathbf{U}\,(2;3)$.

112. $[\frac{1}{4};\frac{1}{2})\cup[4;+\infty)$.

113. $(5;+\infty)$.

114. $(-\frac{3}{2};-1)\cup(-1;\ 3)$.

115. $(3;4]$.

116. $[-2;3]$.

117. $(3;\frac{7}{2})\cup(4;+\infty)$.

118. $[-1;1)$.

119. $[-0{,}5;3)$.

120. $[2;4)$.

121. $\{2\}$.

122. $(0;1)\cup(2;3)$.

123. $(-5;\frac{-7-\sqrt{5}}{2}]\cup[-\frac{7}{2};\frac{-7+\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{-7+\sqrt{13}}{2};+\infty)$.

124. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

125. $(0;1)\cup(1;1{,}5)$.

126. $(3;1+\sqrt{5})$.

127. $(0;\frac{1}{2})\cup(1;2)\cup(3;6)$.

128. $(-3;-2)\cup(-1;0)\cup(1;3)$.

129. $(2;\ +\infty)$.

130. $(-0{,}1;0)$.

131. $(\sqrt{5};\ 3)$.

132. $(1;4]$.

133. $(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2};\log_2 3)$.

134. $(-\frac{6}{5};\ -1)\cup(-\frac{1}{5};\ 0)$.

135. $[\frac{1}{2};\ 1)\cup[2;\ +\infty)$.

136. $(4;\ 5)\cup(5;\ 6)$.

137. 1.

138. $(\frac{1}{5};\ \frac{1}{3}]$.

139. $[\frac{1}{2};\ \frac{2}{3})$.

140. $(1;\ 2)$

141. $(\frac{2}{3};\ 1)$.

142. $(2;\ \frac{5}{2})\cup(3;\ \frac{7}{2})$.

143. $(-4;\ -\frac{7}{2})\cup(-3;\ -\frac{5}{2})$.

144. $(-\frac{3}{4};\ -\frac{1}{2})$.

145. $(-1{,}5;\ -1)$.

146. $(0;\ 1)\cup(3;\ 5)$.

147. $(11;\ +\infty)$.

148. $[\frac{4}{5};\ 1)$.

149. $(-\infty;\ -1)\cup[0;\ \log_3 4-1)\cup(\log_3 4;\ 2\log_3 4-1]$.

150. $(0;\ \frac{1}{6})\cup(1;\ +\infty)$.

151. $(-7;\ -6)\cup[2;\ 2{,}5)\cup(4;\ 4{,}5]$.

152. $(0;\ +\infty)$.

153. $(-1;\ 2{,}5)\cup(2{,}5;\ 3)\cup(3;\ 10)$.

154. $(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3})$.

155. $(0{,}5;\ 1)$.

156. $(1;\ 2)\cup(3;\ 4)$.

157. $(10;\ +\infty)$.

158. $(1;\ +\infty)$.

159. $(-\infty; -3) \cup [-1; 0) \cup (\log_2 9 - 1; \log_2 9]$.

160. $(0; 0{,}1) \cup (1; +\infty)$.

161. $(0; +\infty)$.

162. $(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$.

163. $[-6; -4) \cup (2\sqrt{2}; 3)$.

164. $(3 - \sqrt{2}; 2) \cup (2; 4] \cup (3 + \sqrt{2}; 4{,}5)$.

165. $(-\sqrt{8}; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; \sqrt{8})$.

166. $[\frac{3}{8}; 1) \cup (1; +\infty)$.

167. $(-\infty; -9] \cup [-3; 0) \cup (0; 3) \cup (9; +\infty)$.

Ответы к заданиям самостоятельной работы

Вариант 1

1. $(-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; +\infty)$.

2. $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

3. $(-\infty; -4) \cup (-4; 0] \cup [4; 7)$.

4. $(-1; 3)$.

5. $\left[-\frac{5}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

6. $(-5; -4) \cup [2; +\infty)$.

7. $(-\infty; 1) \cup [2; 3]$.

8. $(2; 3]$.

9. $(9; +\infty)$.

10. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

11. $(-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

12. $(-\infty; -3) \cup (2; 3)$.

13. $(-2; 3]$.

14. $\left(0; \frac{1}{10}\right) \mathbf{U} [10; +\infty)$.

15. $\left(\frac{3}{5}; 1\right) \mathbf{U} (1; +\infty)$.

16. $\left(\frac{7}{8}; +\infty\right)$.

17. $[-2; 4]$.

18. $(1; 1000)$.

19. $\left[-1; -\frac{5}{8}\right) \mathbf{U} \left(-\frac{5}{8}; 1\right]$.

20. $(-\infty; -4) \mathbf{U} (-4; -3) \mathbf{U} (-3; +\infty)$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -5) \mathbf{U} [-1; 1] \mathbf{U} (5; +\infty)$.

2. $\left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \mathbf{U} [2; 3) \mathbf{U} [5; +\infty)$.

3. $(-\infty; -2) \mathbf{U} (-2; 0] \mathbf{U} [2; 3)$.

4. $(2; 5)$.

5. $\left[-\frac{1}{5}; 0\right) \mathbf{U} (0; +\infty)$.

6. $(-6; -3) \mathbf{U} [2; +\infty)$.

7. $(-\infty; 2) \mathbf{U} [3; 5]$.

8. $(2; 4]$.

9. $(1; +\infty)$.

10. $(-\infty; 0) \mathbf{U} (4; +\infty)$.

11. $(-\infty; -1) \mathbf{U} [3; +\infty)$.

12. $(-\infty; -2) \mathbf{U} (0; 2)$.

13. $(3; 4]$.

14. $\left(0;\ \frac{1}{11}\right) \mathbf{U} \left[11; +\infty\right)$.

15. $\left(\frac{2}{3}; 1\right) \mathbf{U} \left(1; +\infty\right)$.

16. $\left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$.

17. $\left[0; 8\right]$.

18. $\left(1; 1000\right)$.

19. $\left[-1; -\frac{1}{2}\right) \mathbf{U} \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

20. $\left(-\infty; -1\right) \mathbf{U} \left(-1; 0\right) \mathbf{U} \left(0; +\infty\right)$.

Вариант 3

1. $\left(-\infty; -3\right) \mathbf{U} \left[-2; 2\right] \mathbf{U} \left[3; +\infty\right)$.

2. $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right) \mathbf{U} \left[-1; 1\right) \mathbf{U} \left[5; +\infty\right)$.

3. $\left(-\infty; -2\right) \mathbf{U} \left(-2; 0\right] \mathbf{U} \left[2; 6\right)$.

4. $\left(1; 2\right)$.

5. $\left[-6; 0\right) \mathbf{U} \left(0; +\infty\right)$.

6. $\left(-2; -1\right) \quad \mathbf{U} \left[2; +\infty\right)$.

7. $\left(-\infty; 2\right) \mathbf{U} \left[4; 5\right]$.

8. $\left(2; 4\right]$.

9. $\left(4; +\infty\right)$.

10. $\left(-\infty; 0\right) \mathbf{U} \left(2; +\infty\right)$.

11. $\left(-\infty; -1\right) \mathbf{U} \left[1; +\infty\right)$.

12. $\left(-\infty; -2\right) \mathbf{U} \left(1; 2\right)$.

13. $\left(-1; 5\right]$.

14. $\left(0;\ \frac{1}{729}\right) \mathbf{U} \left[9; +\infty\right)$.

15. $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$.

16. $\left(\frac{3}{8};+\infty\right)$.

17. $[5;7]$.

18. $(1;10)$.

19. $\left[-1;\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{5};1\right]$.

20. $(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$.

Вариант 4

1. $(-\infty;-4)\cup[-2;2]\cup(4;+\infty)$.

2. $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left[\frac{1}{3};1\right)\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$.

3. $(-\infty;-3)\cup(-3;0]\cup[3;7)$.

4. $(-6;5)$.

5. $\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;+\infty)$.

6. $(-5;-3)\cup[2;+\infty)$.

7. $(-\infty;1)\cup[3;4]$.

8. $(1;3]$.

9. $(1;+\infty)$

10. $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

11. $(-\infty;-1)\cup[2;+\infty)$.

12. $(-\infty;-2)\cup(0;2)$.

13. $(-4;-3]$.

14. $\left(0;\frac{1}{5}\right)\cup[25;+\infty)$.

15. $\left(\frac{1}{2};1\right)\mathbf{U}\,(1;+\infty)$.

16. $\left(\frac{7}{5};+\infty\right)$.

17. $[-1;3]$.

18. $(1;10)$.

19. $\left[-1;\frac{3}{8}\right)\mathbf{U}\left(\frac{3}{8};1\right]$.

20. $(-\infty;-3)\,\mathbf{U}\,(-3;-2)\,\mathbf{U}\,(-2;+\infty)$.

Вариант 5

1. $(-\infty;-5)\,\mathbf{U}\,[-1;1]\,\mathbf{U}\,(5;+\infty)$.

2. $(-\infty;-9)\,\mathbf{U}\left[\frac{3}{2};2\right)\mathbf{U}\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

3. $(-\infty;-3)\,\mathbf{U}\,(-3;0]\,\mathbf{U}\,[3;6)$.

4. $(-1;6)$.

5. $\left[-\frac{5}{9};0\right)\mathbf{U}\,(0;+\infty)$.

6. $(-4;-3)\,\mathbf{U}\,[2;+\infty)$.

7. $(-\infty;1)\,\mathbf{U}\,[4;5]$.

8. $(1;2]$.

9. $(9;+\infty)$.

10. $(-\infty;0)\,\mathbf{U}\,(3;+\infty)$.

11. $(-\infty;-1)\,\mathbf{U}\,[2;+\infty)$.

12. $(-\infty;-2)\,\mathbf{U}\,(1;2)$.

13. $(-2;1]$.

14. $(0;2)\,\mathbf{U}\,[4;+\infty)$.

15. $\left(\frac{2}{3};1\right)\mathbf{U}\,(1;+\infty)$.

16. $\left(\frac{4}{7};+\infty\right)$.

17. $[-5;5]$.

18. $(1;10)$.

19. $\left[-1;-\frac{5}{7}\right)\mathbf{U}\left(-\frac{5}{7};1\right]$.

20. $(-\infty;4)\,\mathbf{U}\,(4;5)\,\mathbf{U}\,(5;+\infty)$.

Вариант 6

1. $(-\infty;-3)\,\mathbf{U}\,[-2;2]\,\mathbf{U}\,(3;+\infty)$.

2. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\mathbf{U}\left[\frac{3}{2};2\right)\mathbf{U}\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

3. $(-\infty;-2)\,\mathbf{U}\,(-2;0]\,\mathbf{U}\,[2;5)$.

4. $(-1;6)$.

5. $\left[-\frac{3}{2};0\right)\mathbf{U}\,(0;+\infty)$.

6. $(-6;-4)\,\mathbf{U}\,[2;+\infty)$.

7. $(-\infty;1)\,\mathbf{U}\,[2;4]$.

8. $(2;4]$.

9. $(4;+\infty)$.

10. $(-\infty;0)\,\mathbf{U}\,(2;+\infty)$.

11. $(-\infty;-1)\,\mathbf{U}\,[1;+\infty)$.

12. $(-\infty;-2)\,\mathbf{U}\,(0;2)$.

13. $(3;4]$.

14. $\left(0;\frac{1}{7}\right)\mathbf{U}\,[7;+\infty)$.

15. $\left(\frac{1}{2};1\right)\mathbf{U}\,(1;+\infty)$.

16. $\left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

17. $[-1; 5]$.

18. $(1; 1\,000)$.

19. $\left[-1; \frac{4}{7}\right) \cup \left(\frac{4}{7}; +\infty\right)$.

20. $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Вариант 7

1. $(-\infty; -3) \cup [-2; 2] \cup (3; +\infty)$.

2. $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right) \cup [1; 2) \cup [3; +\infty)$.

3. $(-\infty; -2) \cup (-2; 0] \cup [2; 3)$.

4. $(-4; 7)$.

5. $\left[-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

6. $(-6; -1) \cup [2; +\infty)$.

7. $(-\infty; 2) \cup [3; 4]$.

8. $(1; 5]$.

9. $(9; +\infty)$.

10. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

11. $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$.

12. $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$.

13. $(-2; 2]$.

14. $(0; 5) \cup [25; +\infty)$.

15. $\left(\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

16. $\left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

17. $[0;\ 2]$.

18. $(1;\ 10\ 000)$.

19. $\left[-1;\ -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};\ 1\right]$.

20. $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$.

Вариант 8

1. $(-\infty;\ -3) \cup [-2;\ 2] \cup (3;\ +\infty)$.

2. $\left(-\infty;\ -\frac{9}{4}\right) \cup [-1;\ 4) \cup [5;\ +\infty)$.

3. $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0] \cup [1;\ 6)$.

4. $(3;\ 5)$.

5. $\left[-\frac{1}{16};\ 0\right) \cup (0;\ +\infty)$.

6. $(-4;\ -1) \cup [2;\ +\infty)$.

7. $(-\infty;\ 2) \cup [3;\ 4]$.

8. $(2;\ 4]$.

9. $(4;\ +\infty)$.

10. $(-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$.

11. $(-\infty;\ -1) \cup [3;\ +\infty)$.

12. $(-\infty;\ -1) \cup (0;\ 1)$.

13. $(0;\ 3]$.

14. $\left(0;\ \frac{1}{125}\right) \cup [5;\ +\infty)$.

15. $\left(\frac{3}{4};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$.

16. $\left(\frac{5}{8};\ +\infty\right)$.

17. $[4;\ 7]$.

18. $(1;100)$.

19. $\left[-1;\ \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5};1\right]$.

20. $(-\infty;-1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;+\infty)$.

Вариант 9

1. $(-\infty;-5) \cup [-1;1] \cup (5;+\infty)$.

2. $\left(-\infty;-\frac{9}{5}\right) \cup \left[-\frac{1}{2};1\right) \cup \left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

3. $(-\infty;-1) \cup (-1;\ 0] \cup [1;\ 5)$.

4. $(-1;\ 4)$.

5. $[-3;\ 0) \cup (0;+\infty)$.

6. $(-5;-1) \cup [2;+\infty)$.

7. $(-\infty;1) \cup [3;\ 6]$.

8. $(2;\ 5]$.

9. $(4;+\infty)$.

10. $(-\infty;\ 0) \cup (1;+\infty)$.

11. $(-\infty;-1) \cup [1;+\infty)$.

12. $(-\infty;-3) \cup (0;\ 3)$.

13. $(0;\ 5]$.

14. $\left(0;\ \frac{1}{4}\right) \cup [64;+\infty)$.

15. $\left(\frac{3}{4};1\right) \cup (1;+\infty)$.

16. $\left(\frac{5}{8};+\infty\right)$.

17. $[-4;\ 5]$.

18. $(1;\ 100)$.

19. $\left[-1;\ \frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8};\ 1\right]$.

20. $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Вариант 10

1. $(-\infty;\ -4) \cup [-2;\ 2] \cup (4;\ +\infty)$.

2. $\left(-\infty;\ -\frac{9}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2};\ 2\right) \cup \left[\frac{5}{2};\ +\infty\right)$.

3. $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0] \cup [1;\ 5)$.

4. $(3;\ 6)$.

5. $\left[-\frac{4}{9};\ 0\right) \cup (0;\ +\infty)$.

6. $(-3;\ -2) \cup [2;\ +\infty)$.

7. $(-\infty;\ 2) \cup [4;\ 5]$.

8. $(2;\ 3]$.

9. $(1;\ +\infty)$.

10. $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

11. $(-\infty;\ -1) \cup [2;\ +\infty)$.

12. $(-\infty;\ -3) \cup (0;\ 3)$.

13. $(-3;\ 1]$.

14. $(0;\ 8) \cup [16;\ +\infty)$.

15. $\left(\frac{3}{5};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$.

16. $\left(\frac{5}{7};\ +\infty\right)$.

17. $[3;\ 6]$.

18. $(1; 1000)$.

19. $\left[-1; \frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; 1\right]$.

20. $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Вариант 11

1. $(-\infty; -3) \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$.

2. $(-\infty; -4{,}5) \cup [-2; 2) \cup [3; +\infty)$.

3. $(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [1; 7)$.

4. $(-1; 5)$.

5. $\left[-\frac{5}{16}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

6. $(-2; 1) \cup [2; +\infty)$.

7. $(-\infty; 1) \cup [2; 4]$.

8. $(2; 4]$.

9. $(36; +\infty)$.

10. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

11. $(-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

12. $(-3; 2) \cup (3; +\infty)$.

13. $(0; 4]$.

14. $(0; 2) \cup [8; +\infty)$.

15. $\left(\frac{4}{5}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

16. $\left(\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

17. $[-6; 6]$.

18. $(1; 1000)$.

19. $\left[-1;\frac{1}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{9};1\right]$.

20. $(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$.

Ответы к тестовым заданиям

Номер задания	Номер ответа	Номер задания	Номер ответа	Номер задания	Номер ответа	Номер задания	Номер ответа
1.1	1	6.1	4	11.1	5	16.1	3
1.2	3	6.2	2	11.2	2	16.2	2
1.3	5	6.3	5	11.3	1	16.3	1
2.1	4	7.1	3	12.1	2	17.1	3
2.2	1	7.2	3	12.2	1	17.2	2
2.3	4	7.3	3	12.3	3	17.3	2
3.1	3	8.1	1	13.1	2	18.1	4
3.2	1	8.2	2	13.2	5	18.2	4
3.3	3	8.3	2	13.3	2	18.3	2
4.1	4	9.1	4	14.1	4	19.1	2
4.2	1	9.2	3	14.2	2	19.2	4
4.3	2	9.3	3	14.3	2	19.3	2
5.1	2	10.1	2	15.1	4	20.1	3
5.2	2	10.2	1	15.2	2	20.2	3
5.3	4	10.3	1	15.3	3	20.3	2

Список источников

1. *Азаров, А. И.* Математика: тематический тренажер: неравенства: функциональный метод решения уравнений и неравенств: для подготовки к централизованному тестированию / А. И. Азаров. — Минск : Аверсэв, 2008.

2. *Голубев, В. И.* Решение сложных и нестандартных задач по математике / В. И. Голубев. — М. : Илекса, 2007.

3. *Голубев, В. И.* Эффективные пути решения неравенств / В. И. Голубев. — Львов : Квантор, 1992. — 94 с.

4. *Куланин, Е. Д.* 5000 конкурсных задач по математике / Е. Д. Куланин. — М. : Аст, 1999.

5. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / под ред. М. И. Сканави. — Минск : Выш. шк., 1990.

6. *Фельдман, А. М.* Метод интервалов в школьном курсе математики / А. М. Фельдман // Матэматыка: праблемы выкладання. — 1999. — № 3. — С. 70—90.

7. *Шарапов, Ю. В.* Использование замены функций при решении неравенств / Ю. В. Шарапов // Матэматыка: праблемы выкладання. —2004. — № 1. — С. 44—55.

8. *Шарыгин, И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 класс / И. Ф. Шарыгин. — М. : Просвещение, 1991.

9. *Шестаков, С.* Замени функцию / С. Шестаков // Математика: еженед. учеб.-метод. прил. к газете «Первое сентября». — 2002. — № 8.

10. *Шестаков, С.* Некоторые логарифмические неравенства / С. Шестаков // Математика: еженед. учеб.-метод. прил. к газете «Первое сентября». — 2002. — № 33.

Учебное издание

Якубович Татьяна Романовна,
Шарапов Юрий Владимирович

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАМЕНЫ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ

**Учебно-методическое пособие
для учащихся старших классов
общеобразовательных школ и абитуриентов**

Технический редактор *М. Л. Потапчик*
Корректор *Е. В. Фатик*
Компьютерная верстка *О. В. Ваницкой, В. В. Кукреш*

Ответственный за выпуск *Е. Г. Хохол*

Подписано в печать 22.12.2009.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Отпечатано на ризографе.
Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 3,84.
Заказ 230. Тираж 110 экз.

ЛИ 02330/0133468 от 09.02.2005

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Барановичский государственный университет»,
225404, г. Барановичи, ул. Войкова, 21.