А.П. Ершова, В.В. Голобородько

ГЕОМЕТРИЯ

10

Самостоятельные и контрольные работы

ИЛЕКСА

А.П. Ершова, В.В. Голобородько

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 10 КЛАССА

6-е издание, исправленное

Рекомендовано
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для общеобразовательных
учебных учреждений

Москва
ИЛЕКСА
2013

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21-26+74.202
Е80

Рецензенты:

Ю.В. Гандель, доктор физико-математических наук, профессор Харьковского Национального университета им. В.Н. Каразина;

Е.Е. Харик, Заслуженный учитель Украины, преподаватель математики ФМЛ № 27 г. Харькова

Ершова А.П., Голобородько В.В.

Е80 Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 10 класса.— 6-е изд., испр.— М.: ИЛЕКСА, — 2013, — 208 с.

ISBN 978-5-89237-326-5

Пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по всем важнейшим темам курса геометрии 10 класса.

Работы состоят из 6 вариантов трех уровней сложности.

Дидактические материалы предназначены для организации дифференцированной самостоятельной работы учащихся.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21-26+74.202

ISBN 978-5-89237-326-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основные особенности предлагаемого сборника самостоятельных и контрольных работ:

1. Сборник содержит *полный набор самостоятельных и контрольных работ по всему курсу геометрии 10 класса*, как основному, так и углубленному.

   Контрольные работы рассчитаны на один урок, самостоятельные работы — на 35–45 минут, в зависимости от темы и уровня подготовки учащихся.

   Внимание! **Поскольку специфика оформления решений геометрических задач во многом зависит от требований учителя, советуем учителям в некоторых работах при необходимости сокращать предлагаемые варианты, ослаблять требования к оформлению решений или проводить работы за 1,5–2 урока.**

2. Сборник позволяет осуществить дифференцированный контроль знаний, так как задания распределены по трем уровням сложности А, Б и В. Уровень А соответствует обязательным программным требованиям, Б — среднему уровню сложности, задания уровня В предназначены для учеников, проявляющих повышенный интерес к математике, а также для использования в классах, школах, гимназиях и лицеях с углубленным изучением математики. Для каждого уровня приведено 2 расположенных рядом равноценных варианта (как они обычно записываются на доске), поэтому на уроке достаточно одной книги на парте.

3. В книгу включены *домашние самостоятельные работы*, содержащие творческие, нестандартные задачи по каждой изучаемой теме, а также задачи повышенной сложности. Эти задания могут в полном объеме или частично предлагаться

учащимся в качестве зачетных, а также использоваться как дополнительные задания для проведения контрольных работ. По усмотрению учителя выполнение нескольких или даже одного такого задания может оцениваться отличной оценкой.

Ответы к контрольным и домашним самостоятельным работам приводятся в конце книги.

4. Тематика и содержание работ охватывают требования учебников «Геометрия – 10–11» Л. С. Атанасяна и др. и «Геометрия» А. В. Погорелова. Задачи в наборах к каждому из учебников не повторяются, поэтому по каждой теме в книге приведено два варианта работ. Для удобства пользования книгой приводится таблица тематического распределения работ.

Наш адрес в Интернете: www.ilexa.ru

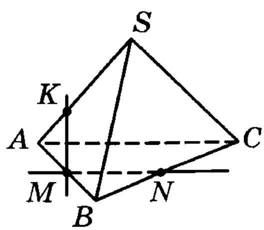
Работы по учебнику Л. С. Атанасяна и др.

ВВЕДЕНИЕ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

СА-1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Вариант А1 | **Вариант А2**

1



Пользуясь данным рисунком, назовите:

а) четыре точки, лежащие

А1: в плоскости SAB;

А2: в плоскости ABC;

б) плоскость, в которой лежит

А1: прямая MN;

А2: прямая KM;

в) прямую, по которой пересекаются плоскости

А1: ASC и SBC.

А2: SAC и CAB.

Вариант А1

2

Точка C — общая точка плоскостей α и β. Прямая l проходит через точку C. Верно ли, что плоскости α и β пересекаются по прямой l? Ответ объясните.

3

Через прямую a и точку A можно провести две различ-

Вариант А2

2

Плоскости α и β имеют три общие точки. Верно ли, что эти плоскости совпадают? Ответ объясните.

3

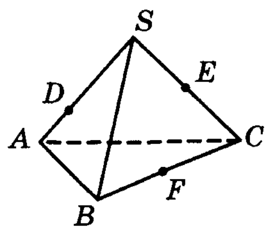
Через точки A, B и C можно провести две различные плосные плоскости. Каково взаимное расположение прямой a и точки A? Ответ объясните.

кости. Каково взаимное расположение точек A, B и C? Ответ объясните.

Вариант Б1

Вариант Б2

1



Пользуясь данным рисунком, назовите:

а) две плоскости, содержащие

прямую DE;

прямую EF;

б) прямую, по которой пересекаются плоскости

AEF и SBC;

BDE и SAC;

в) две плоскости, которые пересекает

прямая SB.

прямая AC.

Вариант Б1

2

Прямые a, b и c имеют общую точку. Верно ли, что данные прямые лежат в одной плоскости? Ответ объясните.

3

Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Каково взаимное расположение прямых a и l? Ответ объясните.

Вариант Б2

2

Прямые a, b и c попарно пересекаются. Верно ли, что данные прямые лежат в одной плоскости? Ответ объясните.

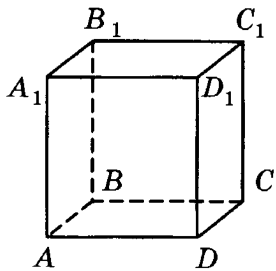
3

Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает прямую l. Каково взаимное расположение прямой a и плоскости β? Ответ объясните.

Вариант В1

Вариант В2

1



Пользуясь данным рисунком, назовите:

а) три плоскости, содержащие

В1: прямую B_1C;

В2: прямую AB_1;

б) прямую, по которой пересекаются плоскости

В1: B_1CD и AA_1D_1;

В2: ADC_1 и A_1B_1B;

в) плоскость, не пересекающуюся

В1: с прямой CD_1.

В2: с прямой BC_1.

Вариант В1

2

Четыре прямые попарно пересекаются. Верно ли, что если любые три из них лежат в одной плоскости, то все четыре прямые лежат в одной плоскости? Ответ объясните.

3

Вершина C плоского четырехугольника $ABCD$ лежит в плоскости α, а точки A, B иD не лежат в этой плоскости. Прямые AB и AD пересекают плоскость α в точках B_1 и D_1 соответственно. Каково взаимное расположение точек C, B_1 и D_1? Ответ объясните.

Вариант В2

2

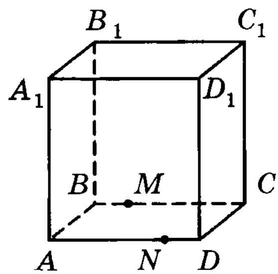
Три различные плоскости имеют общую точку. Верно ли, что данные плоскости имеют общую прямую? Ответ объясните.

3

Точка D не лежит в плоскости α. Прямые a и b проходят через точку D и пересекают плоскость α в точках A и B соответственно. Прямая l не проходит через точку D, пересекается с a и b и пересекает плоскость α в точке L. Каково взаимное расположение точек A, B и L? Ответ объясните.

СА-2. ПРОСТЕЙШИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1



По данным рисунка постройте:

а) точки пересечения

Вариант А1

прямой MN с плоскостью AA_1B_1 и прямой A_1N с плоскостью CDD_1;

Вариант А2

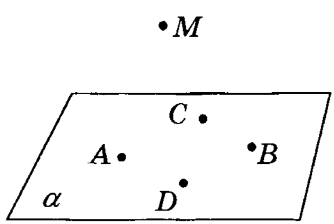
прямой MN с плоскостью CC_1D_1 и прямой C_1M с плоскостью ABB_1;

б) линию пересечения

Вариант А1: плоскости C_1MN с плоскостью BB_1C_1.

Вариант А2: плоскости A_1MN с плоскостью DAA_1.

2



На данном рисунке плоскость α содержит точки *A*, *B*, *C* и *D*, но не содержит точку *M*.

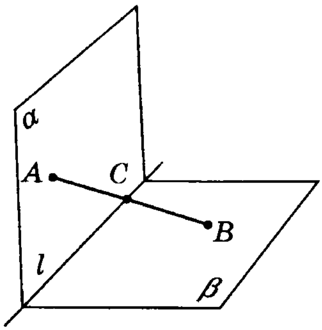
а) Постройте точку *K* — точку пересечения

Вариант А1: прямой AB и плоскости MCD.

Вариант А2: прямой CD и плоскости MAB.

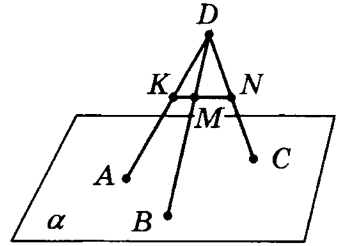
б) Лежит ли точка *K* в плоскости α? Ответ объясните.

3



На данном рисунке $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $C \in l$. Верно ли, что $C \in AB$? Почему?

3

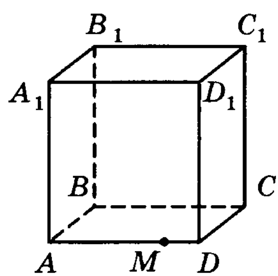


На данном рисунке точки A, B и C лежат в плоскости α, $K \in AD$, $M \in BD$, $N \in CD$. Верно ли, что $M \in KN$? Почему?

Вариант Б1

Вариант Б2

1



По данным рисунка постройте:

а) точки пересечения

Б1: прямой BM с плоскостью AA_1C_1 и прямой D_1M с плоскостью A_1DB;

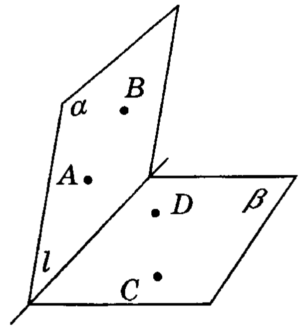
Б2: прямой CM с плоскостью BB_1D_1 и прямой A_1M с плоскостью D_1AC;

б) линию пересечения

Б1: плоскости B_1AC с плоскостью BDD_1.

Б2: плоскости C_1BD с плоскостью A_1AC.

2



На данном рисунке точки A и B лежат в плоскости α, а точки C и D — в плоскости β.

а) Постройте линии пересечения

плоскости ABD с плоскостями α и β.

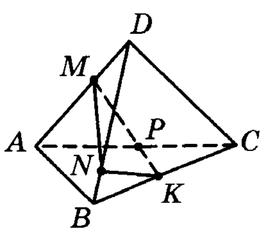
плоскости CDA с плоскостями α и β.

б) Определите, при каком расположении

точки D в плоскости β линия пересечения плоскостей ABD и β совпадает с прямой l. Ответ объясните.

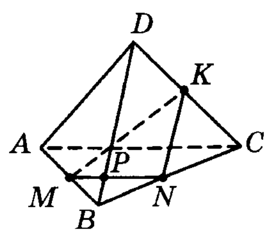
точки A в плоскости α линия пересечения плоскостей CDA и α совпадает с прямой l. Ответ объясните.

3



На данном рисунке вершины треугольника MNK лежат на отрезках AD, BD и BC, а точка P — на отрезке AC. Лежит ли точка P на отрезке MK? Почему?

3

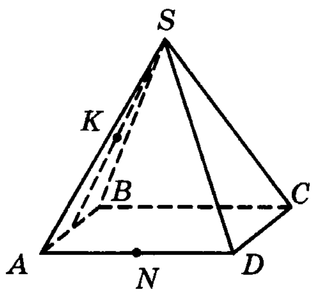


На данном рисунке вершины треугольника MNK лежат на отрезках AB, BC и CD, а точка P — на отрезке MN. Лежит ли точка P на отрезке DB? Почему?

Вариант В1

Вариант В2

❶



На данном рисунке точка K лежит в плоскости ASB, а точка N — на отрезке AD. Постройте:

а) точки пересечения

В1: прямой BN с плоскостью ASC и прямой CK с плоскостью SBD;

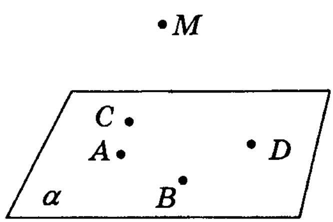
В2: прямой CN с плоскостью SBD и прямой DK с плоскостью ASC;

б) линию пересечения

В1: плоскости SKC с плоскостью SBN.

В2: плоскости SKD с плоскостью SCN.

❷



На данном рисунке точки A, B, C и D лежат в плоскости α, а $M \notin \alpha$.

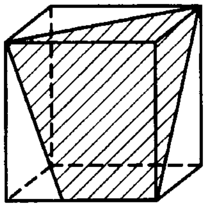
а) Постройте линию пересечения

В1: плоскостей MAB и MCD.

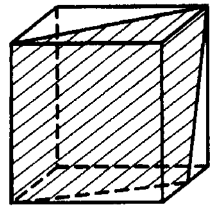
В2: плоскостей MAC и MBD.

б) Определите, при каком взаимном расположении точек A, B, C и D линия пересечения данных плоскостей не будет пересекаться с плоскостью α.

❸



❸



На данном рисунке изображено сечение куба плоскостью. В чем ошибка данного рисунка? Дайте объяснение.

СА-3. ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЙ В ЗАДАЧАХ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Вариант А1

❶

Стороны AB и AC треугольника ABC лежат в плоскости α. Докажите, что и медиана AM этого треугольника лежит в плоскости α.

❷

Прямая a лежит в плоскости α. Прямая b пересекает плоскость α в точке B, не лежащей на прямой a. Докажите, что прямые a и b не пересекаются.

❸

Докажите, что через две точки можно провести две различные плоскости. Сколько существует таких плоскостей?

Вариант А2

❶

Точки A, B и C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что данные точки лежат на одной прямой.

❷

Прямые AB и CD не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AC и BD не пересекаются.

❸

Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости. Сколько существует таких плоскостей?

Вариант Б1

1

Докажите, что если через прямую a и точку A можно провести единственную плоскость, то $A \notin a$.

2

Из точки A, не лежащей в плоскости α, проведены три луча, пересекающие плоскость α в точках B, C и D. Прямая b пересекает эти лучи в трех различных точках. Докажите, что точки B, C и D лежат на одной прямой.

3

Прямые a и b пересекаются. Докажите, что существует плоскость, содержащая только одну из двух данных прямых. Сколько существует таких плоскостей?

Вариант Б2

1

Докажите, что если через три точки можно провести единственную плоскость, то эти точки не лежат на одной прямой.

2

Плоскость α и плоскость треугольника ABC имеют общую точку A. Точка D — середина отрезка AC. Прямые BC и BD пересекают плоскость α в точках C_1 и D_1. Докажите, что точки A, C_1 и D_1 лежат на одной прямой.

3

Прямая a и плоскость α пересекаются. Докажите, что существует плоскость, пересекающая и прямую a, и плоскость α. Сколько существует таких плоскостей?

Вариант В1

1

Из четырех данных точек одна не лежит в плоскости, определяемой тремя другими. Докажите, что этим свойством обладают и три другие данные точки.

Вариант В2

1

Дано n точек ($n > 4$), среди которых любые четыре лежат в одной плоскости. Докажите, что все n данных точек лежат в одной плоскости.

❷

Даны плоскости α, β и γ. Докажите, что если линия пересечения плоскостей α и β пересекается с линией пересечения плоскостей α и γ, то плоскости α, β и γ имеют ровно одну общую точку.

❸

Три прямые пересекаются попарно, но не имеют общей точки. Докажите, что существует плоскость, пересекающая все три данные прямые. Всякая ли плоскость обладает таким свойством?

❷

Даны плоскости α, β и γ. Докажите, что если линия пересечения плоскостей α и β пересекает плоскость γ, то плоскости α, β и γ имеют ровно одну общую точку.

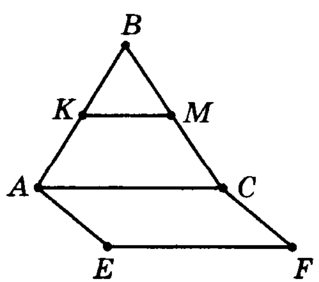
❸

Три прямые имеют общую точку. Докажите, что существует плоскость, пересекающая все три данные прямые. Всякая ли плоскость обладает таким свойством?

СА-4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вариант А1

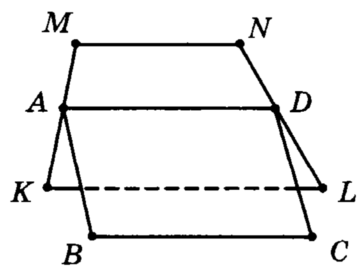
❶



Треугольник ABC и квадрат $AEFC$ не лежат в одной плоскости (см. рисунок).

Вариант А2

❶



Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ не лежат в одной плоскости (см. рисунок).

Точки K и M — середины отрезков AB и BC соответственно.
а) Докажите, что $KM \parallel EF$.
б) Найдите KM, если $AE = 8$ см.

2

Отрезок AB не пересекается с плоскостью α. Через концы отрезка AB и его середину — точку M — проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и M_1 соответственно.
а) Докажите, что точки A_1, B_1 и M_1 лежат на одной прямой.
б) Найдите AA_1, если $BB_1 = 12$ см, $MM_1 = 8$ см.

3

Прямая c пересекает параллельные прямые a и b. Докажите, что прямые a, b и c лежат в одной плоскости.

Точки A и D — середины отрезков KM и NL соответственно.
а) Докажите, что $KL \parallel BC$.
б) Найдите BC, если $KL = 10$ см, $MN = 6$ см.

2

Через конец A отрезка AB проведена плоскость α. Через точку M — середину отрезка AB — и точку B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках M_1 и B_1 соответственно.
а) Докажите, что точки A, B_1 и M_1 лежат на одной прямой.
б) Найдите BB_1, если $MM_1 = 4$ см.

3

Даны пересекающиеся прямые a и b. Прямая c параллельна прямой a и пересекает прямую b. Докажите, что прямые a, b и c лежат в одной плоскости.

Вариант Б1

1

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Точки E, F, M, K — середины отрезков AB, BC, CD и AD соответственно.

Вариант Б2

1

Точка A не лежит в плоскости треугольника BCD. Точки P, R, S и T — середины отрезков AB, AD, CD и BC соответственно.

а) Докажите, что $EFMK$ — параллелограмм.
б) Найдите периметр $EFKM$, если $AC = 6$ см, $BD = 8$ см.

❷

Отрезок AB пересекает плоскость α в точке C. Через точки A и B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1.

а) Докажите, что точки A_1, B_1 и C лежат на одной прямой.
б) Найдите AB, если $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 3$ см, $AC = 6$ см.

❸

Докажите, что все прямые, пересекающие каждую из двух параллельных прямых, лежат в одной плоскости.

а) Докажите, что $PRST$ — параллелограмм.
б) Найдите AC, если $BD = 6$ см, а периметр $PRST$ равен 14 см.

❷

Через конец A отрезка AB проведена плоскость α. Через точку B и точку C, лежащую на отрезке AB, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1.
а) Докажите, что точки A, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.
б) Найдите CB, если $BB_1 = 12$ см, $CC_1 = 4$ см, $AC = 5$ см.

❸

Докажите, что все прямые, параллельные одной из двух пересекающихся прямых и пересекающие другую, лежат в одной плоскости.

Вариант В1

❶

Точка M, лежащая вне плоскости треугольника ABC, соединена с его вершинами. Точки D и E — точки пересечения медиан треугольников MAB и MBC соответственно.

Вариант В2

❶

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Точки K и M — точки пересечения медиан треугольников ADB и DBC соответственно.

а) Докажите, что $ADEC$ — трапеция.
б) Найдите DE, если $AC = 12$ см.

а) Докажите, что $KM \parallel AC$.
б) Найдите AC, если $KM = 6$ см.

2

Дан параллелограмм $ABCD$ и плоскость α, не пересекающая его. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1 и D_1.

Найдите DD_1, если $AA_1 = 12$ см, $BB_1 = 7$ см, $CC_1 = 6$ см.

Найдите AA_1, если $BB_1 = 5$ см, $CC_1 = 4$ см, $DD_1 = 7$ см.

3

Через прямую a проведена плоскость α, а через прямую b — плоскость β. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Докажите, что если c не пересекается с a и b, то $a \parallel b$.

3

Прямая c не имеет общих точек с плоскостью γ. Через прямую c проведены плоскости α и β, пересекающиеся с плоскостью γ по прямым a и b соответственно. Докажите, что $a \parallel b$.

СА-5. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Вариант А1

1

Плоскость α проходит через основание AD трапеции $ABCD$. Точки E и F — середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что $EF \parallel \alpha$.

Вариант А2

1

Плоскость α проходит через сторону AC треугольника ABC. Точки D и E — середины отрезков AB и BC соответственно. Докажите, что $DE \parallel \alpha$.

❷

В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D такая, что $BD : BA = 1 : 3$. Плоскость, параллельная прямой AC и проходящая через точку D, пересекает отрезок BC в точке D_1.

а) Докажите подобие треугольников DBD_1 и ABC.

б) Найдите AC, если $DD_1 = 4$ см.

❸

Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Плоскость γ, параллельная прямой c, пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно. Докажите, что $a \parallel \beta$ и $b \parallel \alpha$.

❷

Точка D лежит на отрезке AB, причем $BD : BA = 1 : 4$. Через точку A проведена плоскость α, а через точку D — отрезок DD_1, параллельный α. Прямая BD_1 пересекает плоскость α в точке C.

а) Докажите подобие треугольников DBD_1 и ABC.

б) Найдите DD_1, если $AC = 12$ см.

❸

Параллельные прямые a и b лежат в плоскости γ. Через прямую a проведена плоскость α, а через прямую b — плоскость β так, что плоскости α и β пересекаются по прямой c. Докажите, что $c \parallel \gamma$.

Вариант Б1

❶

Точка A лежит в плоскости α, параллельной прямой a. Через точку A проведена прямая b, параллельная прямой a. Докажите, что прямая b лежит в плоскости α.

❷

На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка A_1 так, что $DA_1 = 4$ см. Плоскость, параллельная диагонали AC, проходит через точку A_1 и пересекает сторону CD в точке C_1.

Вариант Б2

❶

Прямые a и b параллельны. Через точку B, лежащую на прямой b, проведена плоскость α, параллельная прямой a. Докажите, что плоскость α проходит через прямую b.

❷

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка C_1 так, что $C_1B = 3$ см. Плоскость, параллельная диагонали AC, проходит через точку C_1 и пересекает сторону AB в точке A_1.

а) Докажите подобие треугольников C_1DA_1 и ABC.
б) Найдите AC, если $BC = 10$ см, $A_1C_1 = 6$ см.

3

Докажите, что если каждая из двух пересекающихся плоскостей параллельна данной прямой, то линия их пересечения также параллельна этой прямой.

а) Докажите подобие треугольников ADC и C_1BA_1.
б) Найдите AD, если $A_1C_1 = 4$ см, $AC = 12$ см.

3

Точка S не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что линия пересечения плоскостей SAB и SCD параллельна плоскости параллелограмма.

Вариант В1

1

Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 не лежат в одной плоскости и пересекаются в точке O, являющейся серединой каждого из них. Докажите, что прямая AB параллельна плоскости A_1CB_1.

2

Точка M не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. На отрезке AM выбрана точка E так, что $ME : EA = 2 : 3$.
а) Постройте точку F — точку пересечения прямой MB с плоскостью CDE.
б) Найдите AB, если $EF = 10$ см.

Вариант В2

1

Через точку O — точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ — проведена прямая KM, не лежащая в плоскости ABC, причем O — середина отрезка KM. Докажите, что прямая KB параллельна плоскости AMD.

2

Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$. На отрезке BM выбрана точка F так, что $MF : FB = 1 : 3$.
а) Постройте точку K — точку пересечения прямой MC с плоскостью AFD.
б) Найдите FK, если $AD = 16$ см.

3

Плоскости α, β и γ попарно пересекаются. Докажите, что если существует прямая, параллельная двум из данных плоскостей и пересекающая третью плоскость, то плоскости α, β и γ имеют только одну общую точку (рассмотрите три случая взаимного расположения плоскостей).

3

Плоскости α, β и γ попарно пересекаются. Докажите, что если не существует прямой, параллельной каждой из данных плоскостей, то плоскости α, β и γ имеют только одну общую точку (рассмотрите три случая взаимного расположения плоскостей).

СА-6. СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

Вариант А1	Вариант А2

1

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Среди прямых, проходящих через любые две из данных точек, укажите прямую, которая является скрещивающейся

Вариант А1	Вариант А2
с прямой AB.	с прямой BC.

Ответ обоснуйте.

2

Прямые a и b — скрещивающиеся. Известно, что прямая a

Вариант А1	Вариант А2
лежит в плоскости α.	параллельна плоскости α.

Определите, может ли прямая b:

а) лежать в плоскости α;

б) быть параллельной плоскости α;

в) пересекать плоскость α.

Ответы подтвердите чертежами или обоснованиями.

❸

Прямая a параллельна плоскости α. Постройте прямую, лежащую в плоскости α и скрещивающуюся с прямой a.

❸

Точка A не лежит на прямой a. Постройте прямую, проходящую через точку A и скрещивающуюся с прямой a.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите три прямые, проходящие

Б1: через точку D и скрещивающиеся с прямой AB_1.

Б2: через точку B_1 и скрещивающиеся с прямой A_1D.

Дайте обоснование ответа.

❷

Сформулируйте утверждение, обратное признаку скрещивающихся прямых. Будет ли оно верным? Почему?

❷

Сформулируйте утверждение, обратное утверждению о существовании плоскости, проходящей через одну из двух скрещивающихся прямых параллельно другой прямой. Будет ли оно верным? Почему?

❸

Даны пересекающиеся прямые a и b и точка C, не принадлежащая им. Постройте прямую, проходящую через точку C и скрещивающуюся с a и b.

❸

Даны параллельные прямые a и b и точка C, не принадлежащая им. Постройте прямую, проходящую через точку C и скрещивающуюся с a и b.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите в данном кубе количество пар

скрещивающихся ребер.

скрещивающихся диагоналей граней.

Дайте обоснование взаимного расположения для одной из этих пар.

❷

Плоскости α и β пересекаются по прямой l, которая является скрещивающейся с прямой a. Докажите, что прямая a пересекает хотя бы одну из плоскостей α и β.

❷

Плоскости α, β и γ имеют только одну общую точку. Докажите, что любая прямая, параллельная линии пересечения плоскостей α и β, является скрещивающейся хотя бы с одной из двух других прямых пересечения данных плоскостей.

❸

Прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α в точке, не лежащей на прямой a. Постройте прямую, проходящую через данную точку пространства M и скрещивающуюся с прямыми a и b. Для любой ли точки M такое построение возможно?

❸

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, точка M не лежит ни на одной из них. Постройте прямую, проходящую через точку M и пересекающую a и b. При каком расположении точки M относительно a и b это возможно?

СА-7*. НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ В НЕСТАНДАРТНЫХ ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 **Вариант 2**

❶

Докажите, что четырехугольник является плоским, если

его диагонали пересекаются.

продолжения двух его противолежащих сторон пересекаются.

Верно ли обратное утверждение? Ответ объясните.

2

***ABCDE* — замкнутая пространственная ломаная.**

Середины четырех ее звеньев лежат в одной плоскости. Лежит ли в этой плоскости середина пятого звена? Ответ объясните.

Середины всех ее звеньев лежат в одной плоскости. Сколько вершин данной ломаной лежит в той же плоскости? Ответ объясните.

3

Через точки B и C, лежащие на прямой l, проведены прямые B_1B и C_1C, перпендикулярные к l, причем точки B_1 и C_1 выбраны так, что отрезки B_1B и C_1C равны.

Определите, могут ли прямые

BC и B_1C_1

B_1C и C_1B

а) быть параллельными;

б) пересекаться;

в) быть скрещивающимися.

Для каждого возможного случая опишите условия, при которых он реализуется.

4

Дана прямая l и точки A и B, не принадлежащие ей. Постройте плоскость, проходящую через A и B и параллельную l. Сколько существует таких плоскостей в зависимости от расположения A, B и l?

4

Даны прямые a и b и точка C, не принадлежащая им. Постройте плоскость, проходящую через точку C и параллельную a и b. Сколько существует таких плоскостей в зависимости от расположения a, b и C?

5

Каждая из плоскостей α, β и γ пересекается с двумя другими. Определите, возможно ли в этом случае выполнение следующих условий:

а) любая прямая, пересекающая одну из данных плоскостей, пересекает две другие;

б) любая прямая, параллельная двум данным плоскостям, параллельна третьей плоскости или лежит в ней;

в) существует прямая, пересекающая все три данные плоскости;

г) существует прямая, параллельная двум данным плоскостям и пересекающая третью.

а) любая прямая, пересекающая две данные плоскости, пересекает и третью;

б) любая прямая, параллельная одной из данных плоскостей, параллельна двум другим или лежит хотя бы в одной из них;

в) существует прямая, параллельная всем данным плоскостям;

г) существует прямая, пересекающая две данные плоскости и параллельная третьей.

Утвердительные ответы проиллюстрируйте, отрицательные ответы обоснуйте.

КА-1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТИ

Вариант А1

1

Прямые a и b пересекаются. Прямая c является скрещивающейся с прямой a. Могут ли прямые b и c быть параллельными?

Вариант А2

1

Прямые a и b пересекаются. Прямые a и c параллельны. Могут ли прямые b и c быть скрещивающимися?

2

Плоскость α проходит через середины боковых стороны AB и CD трапеции $ABCD$ — точки M и N.
а) Докажите, что $AD \parallel \alpha$.
б) Найдите BC, если $AD = 10$ см, $MN = 8$ см.

3

Прямая MA проходит через вершину квадрата $ABCD$ и не лежит в плоскости квадрата.

а) Докажите, что MA и BC — скрещивающиеся прямые.

б) Найдите угол между прямыми MA и BC, если $\angle MAD = 45°$.

2

Плоскость α проходит через основание AD трапеции $ABCD$. Точки M и N — середины боковых сторон трапеции.
а) Докажите, что $MN \parallel \alpha$.
б) Найдите AD, если $BC = 4$ см, $MN = 6$ см.

3

Прямая CD проходит через вершину треугольника ABC и не лежит в плоскости ABC. Точки E и F — середины отрезков AB и BC.

а) Докажите, что CD и EF — скрещивающиеся прямые.

б) Найдите угол между прямыми CD и EF, если $\angle DCA = 60°$.

Вариант Б1

1

Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b лежит в плоскости α. Определите, могут ли прямые a и b:

а) быть параллельными;

б) пересекаться;

в) быть скрещивающимися.

2

Точка M не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$).

Вариант Б2

1

Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α. Определите, могут ли прямые a и b:

а) быть параллельными;

б) пересекаться;

в) быть скрещивающимися.

2

Треугольник ABC и трапеция $KMNP$ имеют общую среднюю линию EF, причем $KP \parallel MN$, $EF \parallel AC$.

а) Докажите, что треугольники MAD и MBC имеют параллельные средние линии.

б) Найдите длины этих средних линий, если $AD : BC = 5 : 3$, а средняя линия трапеции равна 16 см.

3

Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая KA, не лежащая в плоскости квадрата.

а) Докажите, что KA и CD — скрещивающиеся прямые.

б) Найдите угол между прямыми KA и CD, если $\angle AKB = 85°$, $\angle ABK = 45°$.

а) Докажите, что $AC \parallel KP$.

б) Найдите KP и MN, если $KP : MN = 3 : 5$, $AC = 16$ см.

3

Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$.

а) Докажите, что MC и AD — скрещивающиеся прямые.

б) Найдите угол между прямыми MC и AD, если $\angle MBC = 70°$, $\angle BMC = 65°$.

Вариант В1

1

Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямая a параллельна прямой l и является скрещивающейся с прямой b. Определите, могут ли прямые a и b:

а) лежать в одной из данных плоскостей;

б) лежать в разных плоскостях α и β;

в) пересекать плоскости α и β.

В случае утвердительного ответа укажите взаимное расположение прямых l и b.

Вариант В2

1

Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямые l и a пересекаются, а прямые l и b параллельны. Определите, могут ли прямые a и b:

а) лежать в одной из данных плоскостей;

б) лежать в разных плоскостях α и β;

в) пересекать плоскости α и β.

В случае утвердительного ответа укажите взаимное расположение прямых a и b.

❷

Плоскость α пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно, причем $AM : MB = 3 : 4$, $CN : BC = 3 : 7$.

а) Докажите, что $AC \parallel \alpha$.
б) Найдите AC, если $MN = 16$ см.

❸

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Найдите угол между прямыми AC и BD, если $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, а расстояние между серединами отрезков AD и BC равно 5 см.

❷

Плоскость α проходит через сторону AC треугольника ABC. Прямая пересекает стороны AB и BC данного треугольника в точках M и N соответственно, причем $BN : NC = 2 : 3$, $AM : AB = 3 : 5$.
а) Докажите, что $MN \parallel \alpha$.
б) Найдите MN, если $AC = 30$ см.

❸

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Найдите угол между прямыми AB и CD, если $AB = CD = 6$ см, а расстояние между серединами отрезков AD и BC равно 3 см.

СА-8. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Вариант А1 / Вариант А2

❶

Через вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и C_1C, не лежащие в плоскости параллелограмма. Докажите параллельность

плоскостей A_1AB и C_1CD. (А1)

плоскостей A_1AD и C_1CB. (А2)

❷

Параллельные прямые a и b пересекают одну из двух параллельных плос-

костей в точках A_1 и B_1, а другую — в точках A_2 и B_2 соответственно.

а) Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.
б) Найдите $\angle A_2A_1B_1$, если $\angle A_1A_2B_2 = 140°$.

❸

Основания трапеции параллельны некоторой плоскости. Верно ли, что боковые стороны трапеции также параллельны этой плоскости? Ответ объясните.

а) Докажите, что $A_1B_1 = A_2B_2$.
б) Найдите $\angle B_1B_2A_2$, если $\angle B_1A_1A_2 = 50°$.

❸

Боковые стороны трапеции параллельны некоторой плоскости. Верно ли, что основания трапеции также параллельны этой плоскости? Ответ объясните.

Вариант Б1

❶

Параллелограммы $ABCD$ и A_1B_1CD не лежат в одной плоскости. Докажите параллельность плоскостей BCB_1 и ADA_1.

Вариант Б2

❶

Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 не лежат в одной плоскости. Докажите параллельность плоскостей CBC_1 и DAD_1.

❷

Точки A и B лежат в плоскости α, а точки C и D — в плоскости β, причем $\alpha \parallel \beta$, $AB = CD$, а отрезки AC и BD пересекаются.

а) Докажите, что $AB \parallel CD$.
б) Один из углов четырехугольника $ABCD$ равен 65°. Найдите остальные углы.

❸

Точка M не лежит в плоскости α. Докажите, что все прямые, проходящие через точку M

а) Докажите, что $AD \parallel BC$.
б) Один из углов четырехугольника $ABCD$ равен 130°. Найдите остальные углы.

❸

Плоскости α и β параллельны. Прямая a лежит в плоскости α. Через точку B, лежащую в и параллельные плоскости α, лежат в одной плоскости.

плоскости β, проведена прямая b, параллельная a. Докажите, что b лежит в плоскости β.

Вариант В1

1

Каждая из двух прямых параллельна плоскостям α и β. При каком взаимном расположении данных прямых можно гарантированно утверждать, что $\alpha \parallel \beta$? Ответ объясните.

2

Концы двух равных пересекающихся отрезков AC и BD лежат на двух параллельных плоскостях.
а) При каком дополнительном условии пересечения отрезков $ABCD$ — прямоугольник?
б) Докажите, что если $ABCD$ не является прямоугольником, то $ABCD$ — равнобедренная трапеция.

Вариант В2

1

Прямая a лежит в плоскости α и параллельна плоскости β. Прямая b параллельна плоскостям α и β. При каком взаимном расположении данных прямых можно гарантированно утверждать, что $\alpha \parallel \beta$? Ответ объясните.

2

Концы двух перпендикулярных отрезков AC и BD лежат на двух параллельных плоскостях.
а) При каком дополнительном условии пересечения отрезков $ABCD$ — ромб?
б) Докажите, что если $ABCD$ не является ромбом, то $ABCD$ — трапеция, в которой высота равна средней линии.

3

Две скрещивающиеся прямые пересекают три параллельные плоскости в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3.

В1: Известно, что $A_1A_2 = 3$ см, $B_2B_3 = 12$ см, $A_2A_3 = B_1B_2$. Найдите A_1A_3 и B_1B_3.

В2: Известно, что $A_1A_2 = B_2B_3$, $A_2A_3 = 16$ см, $B_1B_2 = 4$ см. Найдите A_1A_3 и B_1B_3.

СА-9. ТЕТРАЭДР. СЕЧЕНИЯ ТЕТРАЭДРА

Вариант А1

1

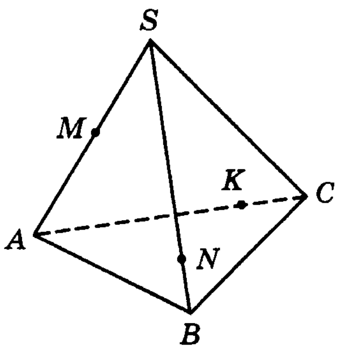
В тетраэдре $DABC$ точки A_1, B_1 и C_1 — середины ребер DA, DB и DC соответственно.

а) Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

б) Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 44 см^2.

2

Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью MNK.



3

В тетраэдре $DABC$ точки M и N — середины ребер DA и DB. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точки M и N параллельно прямой DC. Определите вид построенного сечения.

Вариант А2

1

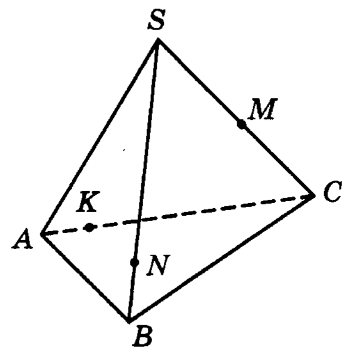
В тетраэдре $DABC$ точки B_1, C_1 и D_1 — середины ребер AB, AC и AD соответственно.

а) Докажите подобие треугольников $B_1C_1D_1$ и BCD.

б) Найдите площадь треугольника BCD, если площадь треугольника $B_1C_1D_1$ равна 12 см^2.

2

Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью MNK.



3

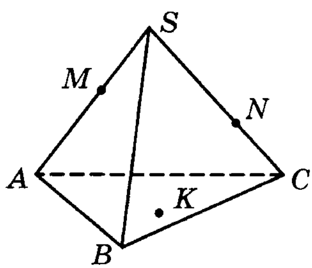
В тетраэдре $DABC$ точки M и K — середины ребер DA и BC. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точки M и K параллельно прямой DC. Определите вид построенного сечения.

Вариант Б1

1

В тетраэдре $DABC$ все ребра равны a. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины ребер DA, DB и DC соответственно.
а) Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точку C_1 параллельно плоскости BA_1C.
б) Найдите площадь построенного сечения.

2



В тетраэдре $SABC$ точка K лежит в плоскости ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

3

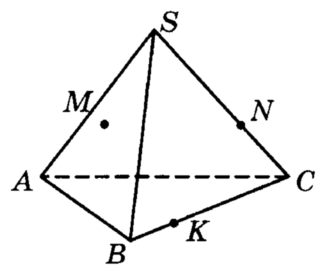
В тетраэдре $DABC$ точка E лежит на ребре AD. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точку E параллельно прямым AC и DB. Определите вид построенного сечения.

Вариант Б2

1

В тетраэдре $DABC$ все ребра равны a. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины ребер DA, DB и DC соответственно.
а) Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точку B_1 параллельно плоскости AC_1B.
б) Найдите площадь построенного сечения.

2



В тетраэдре $SABC$ точка M лежит в плоскости ASB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

3

В тетраэдре $DABC$ точка F лежит на ребре BC. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точку F параллельно прямым AB и CD. Определите вид построенного сечения.

Вариант В1

1

В тетраэдре $DABC$ все ребра равны a. Точка M лежит на

Вариант В2

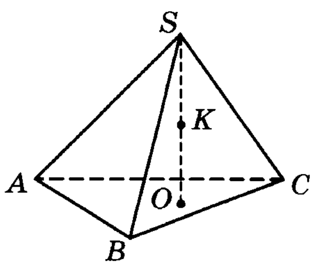
1

В тетраэдре $DABC$ все ребра равны a. Точка M — середиребре AB, причем $AM : MB = 1 : 3$, точка N — середина ребра CD.

а) Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точки M и N параллельно прямой AC.

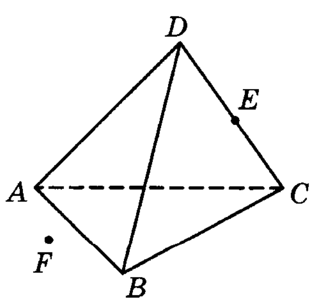
б) Найдите площадь построенного сечения.

2



В тетраэдре $SABC$ точка O лежит в плоскости ABC, а точка K — на отрезке SO. Постройте сечение тетраэдра плоскостью ACK.

3



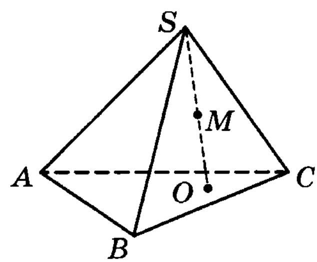
В тетраэдре $DABC$ точка E — середина ребра CD, точка F лежит в плоскости ABC. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точки E и F

на ребра BD, точка N лежит на ребре AC, причем $CN : NA = 3 : 1$.

а) Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точки M и N параллельно прямой AB.

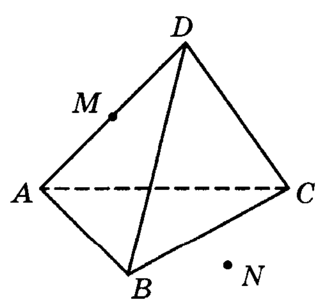
б) Найдите площадь построенного сечения.

2



В тетраэдре $SABC$ точка O лежит в плоскости ABC, а точка M — на отрезке SO. Постройте сечение тетраэдра плоскостью BMC.

3



В тетраэдре $DABC$ точка M — середина ребра AD, точка N лежит в плоскости ABC. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точки M и N

параллельно прямой AD. При каких дополнительных условиях такое сечение будет параллелограммом?

параллельно прямой BD. При каких дополнительных условиях такое сечение будет параллелограммом?

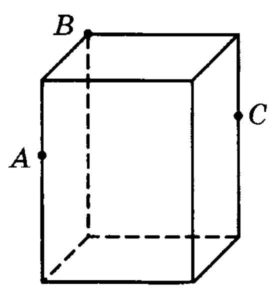
СА-10. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД. СЕЧЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Вариант А1

❶ Докажите параллельность прямых AB_1 и DC_1.

❷



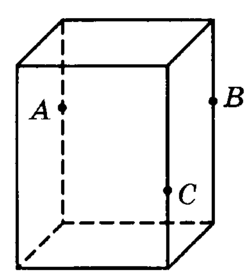
Постройте сечение данного параллелепипеда плоскостью ABC.

❸ В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра BB_1. Постройте сечение, проходящее через прямую AM параллельно прямой A_1C_1.

Вариант А2

❶ Докажите параллельность прямых B_1C и A_1D.

❷



Постройте сечение данного параллелепипеда плоскостью ABC.

❸ В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра AD. Постройте сечение, проходящее через прямую KB параллельно прямой CD_1.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

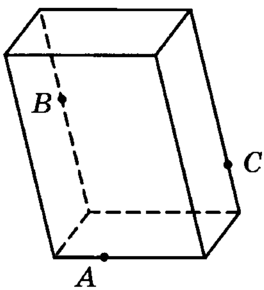
В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали равны.

Б1. Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью AB_1D — прямоугольник.

Б2. Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью CDA_1 — прямоугольник.

Б1.

2



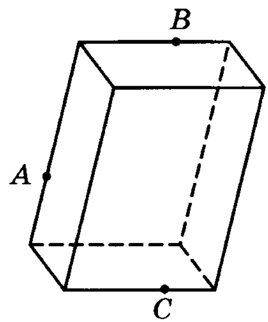
Постройте сечение данного параллелепипеда плоскостью ABC.

3

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте сечение, проходящее через прямую BD параллельно прямой A_1C.

Б2.

2



Постройте сечение данного параллелепипеда плоскостью ABC.

3

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте сечение, проходящее через прямую A_1C_1 параллельно прямой B_1D.

Вариант В1

1

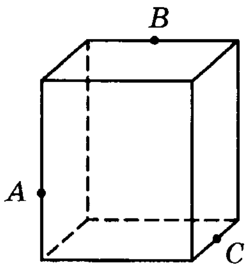
Все грани параллелепипеда — ромбы. Каково наибольшее количество пар перпендикулярных диагоналей в таком параллелепипеде?

Вариант В2

1

В параллелепипеде существует три пары перпендикулярных диагоналей. Определите вид граней параллелепипеда и углы, которые образует боковое ребро с ребрами оснований.

❷

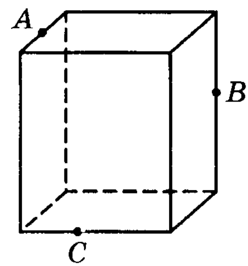


Постройте сечение данного параллелепипеда плоскостью ABC.

❸

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра CD. Постройте сечение, проходящее через точку K параллельно прямым BC и B_1D.

❷



Постройте сечение данного параллелепипеда плоскостью ABC.

❸

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра A_1D_1. Постройте сечение, проходящее через точку M параллельно прямым BD_1 и A_1B_1.

СА-11*. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ФИГУРЫ. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

❶

Дана параллельная проекция равнобедренной трапеции. Постройте изображение высоты трапеции, проведенной из вершины тупого угла.

Вариант 2

❶

Дана параллельная проекция трапеции, диагональ которой равна большему основанию. Известно, что около трапеции можно описать окружность. Постройте изображение центра этой окружности.

❷

Дана параллельная проекция окружности. Постройте изображение центра окружности.

❸

Точки A и B — параллельные проекции вершин правильного треугольника, точка O — проекция его центра. Постройте изображение данного треугольника.

❹

Даны параллельные проекции сторон AB и BC правильного шестиугольника $ABCDEF$. Постройте изображение этого шестиугольника.

❺

Дано изображение прямоугольного треугольника, катеты которого относятся как 2 : 3. Постройте изображение высоты треугольника, проведенной к гипотенузе.

❷

Дана параллельная проекция окружности с центром O. Постройте изображение двух перпендикулярных диаметров.

❸

Точки A и B — параллельные проекции вершин квадрата $ABCD$, точка O — проекция его центра. Постройте изображение данного квадрата.

❹

Даны параллельные проекции стороны AB и диагонали AD правильного шестиугольника $ABCDEF$. Постройте изображение этого шестиугольника.

❺

Дано изображение прямоугольника, стороны которого относятся как 1 : 2. Постройте изображение перпендикуляра, проведенного из его вершины к диагонали.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

СА-12. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ К ПЛОСКОСТИ

Вариант А1

1

В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Точка D не лежит в плоскости ABC, причем $DC \perp AC$.

а) Докажите, что прямая AC перпендикулярна к плоскости DCB.

б) Верно ли, что прямая DC перпендикулярна к плоскости ABC?

2

Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее в точках A_1 и B_1 соответственно.

Найдите AB, если $A_1B_1 = 12$ см, $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 11$ см.

3

Через вершины A и B прямоугольника $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и

Вариант А2

1

$ABCD$ — квадрат. Вне плоскости квадрата выбрана точка K, причем $KA \perp AB$.

а) Докажите, что прямая AB перпендикулярна к плоскости AKD.

б) Верно ли, что прямая AD перпендикулярна к плоскости AKB?

2

Найдите A_1B_1, если $AB = 13$ см, $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 8$ см.

3

Через вершины A и B ромба $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и B_1B, не ле-

B_1B, не лежащие в плоскости прямоугольника. Известно, что $A_1A \perp AB$ и $A_1A \perp AD$. Найдите B_1B, если $B_1D = 25$ см, $AB = 12$ см, $AD = 16$ см.

жащие в плоскости ромба. Известно, что $B_1B \perp AB$, $B_1B \perp BC$. Найдите AA_1, если $A_1C = 13$ см, $BD = 16$ см, $AB = 10$ см.

Вариант Б1

1

Точка K не лежит в плоскости ромба $ABCD$. Известно, что $KB \perp AB$, $KB \perp BD$.

а) Докажите, что прямая AC перпендикулярна к плоскости KBD.

б) Верно ли, что прямая BD перпендикулярна к плоскости KAC?

Вариант Б2

1

В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, AH — высота треугольника. Вне плоскости ABC выбрана точка D, причем $DB \perp BC$, $DB \perp AB$.

а) Докажите, что прямая AH перпендикулярна к плоскости DBC.

б) Верно ли, что прямая CH перпендикулярна к плоскости DAB?

2

Отрезок AB пересекает плоскость α в точке O. Прямые AA_1 и BB_1 перпендикулярны к плоскости α и пересекают ее в точках A_1 и B_1 соответственно.

Б1: Найдите AB, если $A_1A = 4$ см, $\angle A_1AO = 60°$, $A_1O : OB_1 = 1 : 2$.

Б2: Найдите AB, если $B_1B = 3\sqrt{2}$ см, $\angle OBB_1 = 45°$, $A_1A : B_1B = 1 : 3$.

3 (Б1)

Прямая KA перпендикулярна к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите перпендикулярность прямых KB и BC.

3 (Б2)

Прямая MB перпендикулярна к плоскости квадрата $ABCD$. Докажите перпендикулярность прямых MC и CD.

Вариант В1

1

Квадраты $ABCD$ и $AECF$ расположены так, что $BD \perp EF$.

а) Докажите, что прямая EF перпендикулярна к плоскости ABC.

б) Найдите угол между прямыми AC и ED.

Вариант В2

1

Квадраты $ABCD$ и $ABEF$ расположены так, что $AD \perp AF$.

а) Докажите, что прямая BC перпендикулярна к плоскости AEF.

б) Найдите угол между прямыми AE и BD.

2

Через вершины B и D прямоугольника $ABCD$ проведены прямые B_1B и D_1D, перпендикулярные к плоскости прямоугольника.

В1:

а) Докажите параллельность плоскостей ABB_1 и CDD_1.

б) Известно, что $BB_1 = DD_1 = 12$ см. Отрезок B_1D_1 пересекает плоскость ABC. Найдите его длину, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см.

В2:

а) Докажите параллельность плоскостей CBB_1 и DAA_1.

б) Отрезок B_1D_1 пересекает плоскость ABC, причем $BB_1 = DD_1 = 12$ см, $B_1D_1 = 26$ см. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $AB : BC = 3 : 4$.

3 (В1)

Одна из диагоналей ромба лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости α. Докажите, что вторая диагональ ромба параллельна плоскости α или лежит в этой плоскости.

3 (В2)

Сторона AB прямоугольника $ABCD$ лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости α. Докажите, что если вершина D лежит в плоскости α, то сторона AD также лежит в плоскости α.

СА-13. РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ, ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ К ПЛОСКОСТИ

❶

Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC.

Вариант А1

а) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если $AB = 20$ см, $AC = 15$ см, а длины проекций AB и AC на плоскость α относятся как $16 : 9$.

б) Определите, лежат ли обе наклонные и их проекции в одной плоскости, если $BC = 22$ см.

❷

Концы отрезка AB лежат в двух параллельных плоскостях. Найдите длину отрезка AB, если он образует со своей проекцией на одну из данных плоскостей угол $45°$, а расстояние между данными плоскостями равно $4\sqrt{2}$ дм.

❸

Отрезок KA — перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$, площадь которого равна 36 см^2. Обоснуйте и найдите расстояние между прямыми KA и BC.

Вариант А2

а) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если $AB : AC = 13 : 15$, а длины проекций AB и AC на плоскость α равны 5 см и 9 см.

б) Определите, лежат ли проекции данных наклонных в плоскости ABC, если $BC = 10$ см.

❷

Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 4 дм. Точки A и B лежат в данных плоскостях, а угол между отрезком AB и его проекцией на одну из плоскостей равен $30°$. Найдите AB.

❸

Отрезок MB — перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$. Обоснуйте и найдите расстояние между прямыми MB и CD, если $AC = 8\sqrt{2}$ см.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Из точки к плоскости α проведены две наклонные. Найдите расстояние от данной точки до плоскости, если

наклонные имеют равные длины по $3\sqrt{2}$ см, угол между ними равен 60°, а угол между их проекциями — прямой.

угол между данными наклонными равен 60°, а их проекции равны по 3 см каждая и взаимно перпендикулярны.

2

Два отрезка упираются концами в две параллельные плоскости. Длина одного из отрезков равна длине проекции другого отрезка.

Найдите расстояние между плоскостями, если длины отрезков равны 5 см и $\sqrt{41}$ см.

Найдите расстояние между плоскостями, если проекции отрезков равны 3 см и 5 см.

3

Отрезок KA — перпендикуляр к плоскости правильного треугольника ABC. Найдите расстояние между прямыми BC и KA, если периметр треугольника равен 24 см.

3

Отрезок KB — перпендикуляр к плоскости равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$). Найдите расстояние между прямыми KB и AC, если $AB + BC = 4\sqrt{2}$ см.

Вариант В1

Вариант В2

1

Из точки к плоскости проведены две наклонные, образующие со своими проекциями на данную плоскость углы, сумма которых

равна 90°. Найдите расстояние от точки до плоскости,

если проекции наклонных равны 3 см и 12 см.

❷

Два равных взаимно перпендикулярных отрезка упираются концами в две параллельные плоскости. Найдите расстояние между плоскостями, если расстояния между концами отрезков, лежащими в одной плоскости, равны 4 см и 8 см.

❸

В плоскости α к окружности с центром O и радиусом 6 см в точке A проведена касательная l. Через точку окружности B перпендикулярно к плоскости α проведена прямая k. Найдите расстояние между прямыми l и k, если $\angle AOB = 60°$.

если длины наклонных равны 15 см и 20 см.

❷

Два равных отрезка, пересекающихся под углом 60°, упираются концами в две параллельные плоскости. Найдите расстояние между плоскостями, если расстояния между концами отрезков, лежащими в одной плоскости, равны 6 см и 12 см.

❸

Через середину хорды AB окружности радиуса 25 см проведена прямая l, перпендикулярная к плоскости окружности. Найдите расстояние между этой прямой и диаметром AC, если $BC = 40$ см.

СА-14. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Вариант А1

❶

В треугольнике ABC $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Через точку B к плоскости треугольника проведен перпендикуляр BD длиной 15 см.

Вариант А2

❶

Отрезок KA длиной 3 см — перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$, в котором $AB = 5$ см, $BD = 6$ см.

а) Укажите проекцию треугольника DAC на плоскость ABC.
б) Найдите расстояние от точки D до прямой AC.

2

Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок SO — перпендикуляр к плоскости квадрата, $SO = 4\sqrt{2}$ см.

а) Докажите равенство углов, образуемых прямыми SA, SB, SC и SD с плоскостью квадрата.
б) Найдите эти углы, если периметр $ABCD$ равен 32 см.

3

Вершины A и D параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α. Докажите, что прямые BA и CD образуют с плоскостью α равные углы.

а) Укажите проекцию треугольника KBC на плоскость ромба.
б) Найдите расстояние от точки K до прямой BD.

2

Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок SO — перпендикуляр к плоскости квадрата, $SO = 4$ см. Точки K, L, M, N — середины сторон квадрата.
а) Докажите равенство углов, образуемых прямыми SK, SL, SM и SN с плоскостью квадрата.
б) Найдите эти углы, если площадь $ABCD$ равна 64 см^2.

3

Вершины A и B прямоугольника $ABCD$ лежат в плоскости α. Докажите, что прямые CA и DB образуют с плоскостью α равные углы.

Вариант Б1

1

Отрезок SA длиной 15 см — перпендикуляр к плоскости прямоугольника $ABCD$, в котором $AC = 10$ см, $AB = 6$ см.

а) Докажите, что проекции треугольников SBC и SDC на плоскость прямоугольника имеют равные площади.

Вариант Б2

1

Отрезок SA длиной 6 см — перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$, в котором $AC = 8\sqrt{2}$ см.

а) Докажите, что проекции треугольников SBC и SDC на плоскость квадрата равны.

б) Найдите расстояние от точки S до прямой CD.

2

В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $CB = a$. Точка D не лежит в плоскости ABC, причем $DC \perp CA$, $DC \perp CB$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC, если перпендикуляр, проведенный из точки D к прямой AB, образует с плоскостью ABC угол β.

3

В тетраэдре $ABCD$ DO — перпендикуляр к плоскости ABC. Докажите, что если ребра DA, DB и DC образуют одинаковые углы с плоскостью ABC, то точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите расстояние от точки S до прямой BC.

2

В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AB = a$. Точка D не лежит в плоскости ABC, причем $DB \perp BC$, $DB \perp AB$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC, если перпендикуляр, проведенный из точки D к прямой AC, образует с плоскостью ABC угол β.

3

В тетраэдре $ABCD$ DO — перпендикуляр к плоскости ABC. Докажите, что если перпендикуляры, проведенные из точки D к сторонам треугольника ABC, образуют равные углы с плоскостью ABC, то точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Вариант В1

1

Отрезок DC — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Отрезок DM — расстояние от точки D до прямой AB.

а) Сравните площади проекций треугольников DAM и DBM, если $\angle A > 45°$.

Вариант В2

1

Отрезок DC — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Отрезок CM — высота треугольника ABC.

а) Сравните площади проекций треугольников DAM и DBM, если $\angle B < 45°$.

б) Найдите DM, если $AC = 15$ см, $BC = 20$ см, $DC = 16$ см.

2

Вершины A и D ромба $ABCD$ лежат в плоскости α. Диагональ ромба BD равна $4\sqrt{2}$ см и наклонена к плоскости α под углом 45°. Найдите угол между диагональю AC и плоскостью α, если периметр ромба равен $8\sqrt{6}$ см.

3

Через вершину прямого угла проведена прямая, образующая со сторонами этого угла углы, равные 60°. Найдите угол между данной прямой и плоскостью прямого угла.

б) Найдите DM, если $AC = 30$ см, $AB = 50$ см, $DC = 7$ см.

2

Через сторону BC ромба $ABCD$ проведена плоскость α, образующая с диагональю AC угол 30°. Найдите угол между диагональю BD и плоскостью α, если $BD = 4\sqrt{2}$ см, а площадь ромба равна $16\sqrt{2}$ см^2.

3

Прямая, проходящая через вершину прямого угла, образует с его сторонами углы 45° и 60°. Найдите угол между данной прямой и плоскостью прямого угла.

СА-15. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

Вариант А1

1

Двугранный угол равен 60°. Точка, выбранная на одной из граней, удалена от ребра угла на $6\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от данной точки до второй грани.

Вариант А2

1

Двугранный угол равен 45°. Точка на одной из граней угла удалена от второй грани на $5\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние от данной точки до ребра угла.

❷

Равнобедренный треугольник ABC и правильный треугольник ADC не лежат в одной плоскости. Отрезок BD является перпендикуляром к плоскости ADC. Найдите двугранный угол $BACD$, если $AB = BC = 2\sqrt{5}$ см, $AC = 4$ см.

❸

В тетраэдре $SABC$ $\angle ABC = 90°$, отрезок SO — перпендикуляр к плоскости ABC, причем точка O лежит на отрезке AC. Постройте линейный угол двугранного угла $SABO$.

❷

Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC, равное 12 см. Отрезок BD является перпендикуляром к плоскости ADC. Найдите двугранный угол $BACD$, если $AB = BC = 2\sqrt{21}$ см, а $\angle ADC = 90°$.

❸

В тетраэдре $SABC$ $\angle BAC = 90°$, отрезок SO — перпендикуляр к плоскости ABC, причем точка O лежит на отрезке AB. Постройте линейный угол двугранного угла $SACO$.

Вариант Б1

❶

Прямая, лежащая в одной из граней двугранного угла, параллельна его ребру. Найдите величину двугранного угла, если расстояние между данной прямой и ее проекцией на вторую грань равно расстоянию от проекции до ребра угла.

❷

Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют площади 15 см^2 и 40 см^2, а их общее основание AC имеет длину 10 см. Найдите BD, если двугранный угол $BACD$ равен 60°.

Вариант Б2

❶

Прямая, лежащая в одной из граней двугранного угла, параллельна его ребру. Найдите величину двугранного угла, если расстояние от данной прямой до второй грани вдвое меньше расстояния от данной прямой до ребра угла.

❷

Боковые стороны равнобедренных треугольников ABC и ADC равны 10 см и $\sqrt{61}$ см, а их общее основание AC равно 12 см. Найдите BD, если двугранный угол $BACD$ равен 60°.

❸

Вершина A ромба $ABCD$ лежит в плоскости α, а $BD \parallel \alpha$. Постройте линейный угол двугранного угла с гранями ABC и α.

❸

Вершина B правильного треугольника ABC лежит в плоскости α, а $AC \parallel \alpha$. Постройте линейный угол двугранного угла с гранями ABC и α.

Вариант В1

❶

На разных гранях двугранного угла выбраны точки, удаленные от ребра угла на 20 см и 30 см. Одна из точек удалена от противолежащей грани на 24 см. Найдите расстояние от второй точки до противолежащей грани.

❷

Квадрат и прямоугольник, площади которых соответственно равны 64 см^2 и 24 см^2, имеют общую сторону. Расстояние между сторонами этих фигур, противолежащими их общей стороне, равно 7 см. Найдите угол между плоскостями квадрата и прямоугольника.

❸

Точка K равноудалена от вершин квадрата $ABCD$ и не лежит в плоскости квадрата. Постройте линейный угол двугранного угла с гранями AKB и CKD.

Вариант В2

❶

На разных гранях двугранного угла выбраны точки, удаленные от противолежащих им граней на 10 см и 25 см. Одна из точек удалена от ребра угла на 24 см. Найдите расстояние от второй точки до ребра угла.

❷

Квадрат и прямоугольник с периметрами 20 см и 26 см соответственно имеют общую сторону. Найдите угол между плоскостями данных фигур, если расстояния между их сторонами, противолежащими общей стороне, равно 7 см.

❸

Точка M равноудалена от сторон квадрата $ABCD$ и не лежит в плоскости квадрата. Постройте линейный угол двугранного угла с гранями BMC и AMD.

СА-16. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Вариант А1

❶

Прямая DA проходит через вершину треугольника ABC, причем $DA \perp AB$ и $DA \perp AC$. Докажите перпендикулярность плоскостей DAC и ABC.

❷

Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание, а двугранный угол $BACD$ — прямой. Найдите BD, если $AC = 6$ см, а боковые стороны треугольников равны $3\sqrt{2}$ см и 5 см.

❸

Ромб $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей O перегнули по диагонали BD так, что $AO \perp OC$. Докажите, что плоскости ABC и ADC перпендикулярны.

Вариант А2

❶

Прямая SA проходит через вершину квадрата $ABCD$, причем $SA \perp AD$. Докажите, что плоскость квадрата перпендикулярна к плоскости SAB.

❷

Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общий катет AB, равный 4 см, а двугранный угол $CABD$ — прямой. Найдите CD, если известны длины гипотенуз $BC = 5$ см и $BD = \sqrt{23}$ см.

❸

Правильный треугольник ABC перегнули по высоте AD так, что $BD \perp DC$. Докажите, что плоскости BAD и CAD перпендикулярны.

Вариант Б1

❶

Прямая SO перпендикулярна к плоскости ромба $ABCD$ и проходит через точку O пересечения его диагоналей. Докажите перпендикулярность плоскостей ASC и BSD.

Вариант Б2

❶

Прямая SA перпендикулярна к плоскости квадрата $ABCD$. Докажите перпендикулярность плоскостей SAB и SAD.

❷

Стороны AB и AC правильного треугольника ABC лежат в двух перпендикулярных плоскостях. Найдите площадь треугольника, если точки B и C удалены от прямой пересечения плоскостей на $3\sqrt{2}$ см.

❸

Докажите, что если две различные плоскости β и γ перпендикулярны к одной прямой a, то $\beta \parallel \gamma$.

❷

Стороны AB и AC равнобедренного треугольника ABC равны 5 см и лежат в двух перпендикулярных плоскостях. Точки B и C удалены от прямой пересечения плоскостей на $4\sqrt{2}$ см. Найдите площадь треугольника.

❸

Докажите, что если плоскость α и не лежащая в ней прямая a перпендикулярны к одной плоскости β, то $a \parallel \alpha$.

Вариант В1

❶

Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$, причем $AM = CM$, $BM = DM$. Докажите перпендикулярность плоскостей AMC и BMD.

❷

Концы отрезка AB лежат в двух перпендикулярных плоскостях и удалены от прямой их пересечения на 6 см и 7 см. Найдите длину отрезка AB, если расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек A и B к прямой пересечения плоскостей, равно 6 см.

Вариант В2

❶

Точка M равноудалена от вершин квадрата $ABCD$. Докажите перпендикулярность плоскостей AMC и BMD.

❷

Концы отрезка AB, равного $\sqrt{41}$ см, лежат в двух перпендикулярных плоскостях и удалены от прямой их пересечения на 3 см и 4 см. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек A и B к прямой пересечения плоскостей.

❸

Докажите, что если три плоскости попарно перпендикулярны, то линии их пересечения также попарно перпендикулярны.

❸

Докажите, что если линии пересечения трех плоскостей попарно перпендикулярны, то и сами плоскости попарно перпендикулярны.

СА-17. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Вариант А1

❶

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 25 см, а диагональ одной из его граней — 24 см. Найдите длину ребра, перпендикулярного к данной грани.

❷

Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя его гранями, имеющими общее ребро, равные углы. Докажите, что грань, перпендикулярная к общему ребру, — квадрат.

❸

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через точки B_1, A и C, и найдите его площадь.

Вариант А2

❶

Диагональ одной из граней прямоугольного параллелепипеда равна 15 см, а ребро, перпендикулярное к этой грани, имеет длину 8 см. Найдите диагональ параллелепипеда.

❷

Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя его ребрами, выходящими из одной вершины, равные углы. Докажите, что две грани параллелепипеда — квадраты.

❸

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ равна d. Постройте сечение куба, проходящее через точки A, B и C_1, и найдите его площадь.

Вариант Б1

1

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 11 см, а его измерения относятся как 6 : 6 : 7. Найдите диагонали граней параллелепипеда.

2

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 4 см, 4 см и 2 см. Найдите расстояние от наименьшего ребра до наибольшей скрещивающейся с ним диагонали грани.

3

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через точки B_1, D и середину ребра A_1A, и найдите его площадь.

Вариант Б2

1

Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 11 см, 19 см и 20 см. Найдите диагональ параллелепипеда.

2

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 6 см, 6 см и 7 см. Найдите расстояние от наибольшего ребра до наименьшей скрещивающейся с ним диагонали грани.

3

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ равна d. Постройте сечение куба, проходящее через точку A и середины ребер BB_1 и DD_1, и найдите его площадь.

Вариант В1

1

Периметры трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 20 см, 32 см и 36 см. Найдите диагональ параллелепипеда.

2

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 2 см и $2\sqrt{2}$ см. Найдите расстояния между диагональю

Вариант В2

1

Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 24 см^2, 48 см^2 и 72 см^2. Найдите диагональ параллелепипеда.

2

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны $10\sqrt{2}$ см, $10\sqrt{2}$ см и 15 см. Найдите расстояния между параллелепипеда и скрещивающейся с ней наименьшей диагональю грани.

❸

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через точку A_1 и середины ребер CD и AD, и найдите его площадь.

диагональю параллелепипеда и скрещивающейся с ней наименьшей диагональю грани.

❸

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через точку B_1 и середины ребер AD и AB, и найдите его площадь.

СА-18*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЯХ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

❶

Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных точек.

❷

Точка S, не лежащая в плоскости прямоугольника $ABCD$, равноудалена от его сторон. Найдите площадь $ABCD$, если $AC = 4\sqrt{2}$ см.

❸

Вершины A и D параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α. Известно, что $BC =$

Вариант 2

❶

Отрезок AB — общее основание равнобедренных треугольников. Найдите фигуру, которую образуют третьи вершины таких треугольников.

❷

Точка S, не лежащая в плоскости ромба $ABCD$, равноудалена от его вершин. Найдите площадь $ABCD$, если $BD =$ 8 см.

❸

Сторона AB ромба $ABCD$ лежит в плоскости α, а сторона CD удалена от нее на 21 см.

$= 19$ см, $AB = 15$ см, а проекции диагоналей на плоскость α равны 20 см и 22 см. Найдите расстояние между прямой BC и плоскостью α.

4

Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух параллельных прямых.

5

Двугранный угол равен 135°. Точка A находится внутри угла и удалена от его ребра на 10 см. Найдите расстояния от точки A до граней угла, если они относятся как $1 : 3\sqrt{2}$.

6

Точка, не лежащая в плоскости равнобедренной трапеции с основаниями 16 см и 30 см, удалена от каждой из сторон трапеции на 11 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости трапеции.

7

В тетраэдре $DABC$ все ребра равны. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра DA перпендикулярно к плоскости ABC и к ребру AC.

Найдите проекции сторон AD и BC на плоскость α, если проекции диагоналей AC и BD равны 31 см и 39 см.

4

Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

5

Точка A находится внутри двугранного угла, равного 150°, и удалена от его граней на 11 см и $8\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от точки A до ребра угла.

6

Основания прямоугольной трапеции равны 10 см и 15 см. Точка, не лежащая в плоскости трапеции, удалена от каждой из ее сторон на 10 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости трапеции.

7

В тетраэдре $DABC$ ребра DA, DB и DC взаимно перпендикулярны и равны. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра DC перпендикулярно к плоскости ABC и к ребру AC.

8

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба, проходящее через прямую AB_1 перпендикулярно к плоскости D_1DB, и найдите его площадь, если диагональ куба равна d.

8

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через прямую A_1B перпендикулярно к плоскости C_1CA, и найдите его площадь.

КА-2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Вариант А1

1

Отрезок KA — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $KB \perp BC$.

а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

б) Докажите перпендикулярность плоскостей KAC и ABC.

в) Найдите KA, если $AC = 13$ см, $BC = 5$ см, $\angle KBA = 45°$.

2

Основание AC равнобедренного треугольника лежит в плоскости α. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AB = 20$ см, $AC = 24$ см, а двугранный угол между плоскостями ABC и α равен $30°$.

Вариант А2

1

Отрезок KA — перпендикуляр к плоскости параллелограмма $ABCD$, $KD \perp CD$.

а) Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

б) Докажите перпендикулярность плоскостей KAD и ABC.

в) Найдите AC, если $KA = 8$ см, $KD = 10$ см, $\angle CAD = 60°$.

2

Катет AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) лежит в плоскости α. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $AC = = 17$ см, $AB = 15$ см, а двугранный угол между плоскостями ABC и α равен $45°$.

3

Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, образующие с плоскостью α равные углы. Известно, что $BC = AB$. Найдите углы треугольника ABC.

3

Из точки A к плоскости проведены перпендикуляр AO и две равные наклонные AB и AC. Известно, что $BC = BO$. Найдите углы треугольника BOC.

Вариант Б1

1

Отрезок KA — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC. Точка M — середина стороны BC, $KM \perp BC$.
а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.
б) Докажите перпендикулярность плоскостей KBC и KAM.
в) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle BKC = 60°$, $BC = 6$ см, $KA = 3\sqrt{2}$ см.

2

Точка S удалена от каждой из вершин правильного треугольника ABC на $\sqrt{13}$ см. Найдите двугранный угол $SABC$, если $AB = 6$ см.

3

Прямая AB — ребро двугранного угла, равного $90°$. Прямые AA_1 и BB_1 принадлежат разным граням данного угла и перпендикулярны к прямой AB. Докажите, что $AA_1 \perp BB_1$.

Вариант Б2

1

Отрезок KA — перпендикуляр к плоскости параллелограмма $ABCD$. Точка O — точка пересечения AC и BD, $KO \perp BD$.
а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.
б) Докажите перпендикулярность плоскостей KBD и KOA.
в) Найдите площадь $ABCD$, если $\angle BKD = 90°$, $BD = 10$ см, $KA = 3$ см.

2

Точка S удалена от каждой из сторон правильного треугольника ABC на $\sqrt{39}$ см. Найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC, если $AB = 6$ см.

3

Прямые AA_1 и BB_1 — перпендикуляры к ребру AB двугранного угла, принадлежащие разным граням угла.
Докажите, что если $AA_1 \perp BB_1$, то данный двугранный угол прямой.

Вариант В1

1

Точка O лежит на биссектрисе угла ABC, равного $60°$. Отрезок DO — перпендикуляр к плоскости ABC.

а) Докажите, что точка D равноудалена от сторон угла ABC.

б) Пусть DA и DC — расстояния от точки D до сторон угла. Докажите перпендикулярность плоскостей DAC и DOB.

в) Найдите DB, если $AC = 6$ см, $DO = 4$ см.

2

Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC, а двугранный угол $BACD$ — прямой. Найдите углы, образуемые прямой BD с плоскостями треугольников, если $\angle ABC = 60°$, а $\angle ADC = 90°$.

3

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте и найдите линейный угол двугранного угла между плоскостями сечений AB_1C_1D и CB_1A_1D.

Вариант В2

1

Отрезок DO — перпендикуляр к плоскости угла ABC, равного $120°$, причем точка O лежит внутри угла, а точка D равноудалена от его сторон.

а) Докажите, что BO — биссектриса угла ABC.

б) Пусть DA и DC — расстояния от точки D до сторон угла. Докажите перпендикулярность плоскостей DOB и DAC.

в) Найдите DO, если $AC = 6$ см, $DB = 8$ см.

2

Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC, а двугранный угол $BACD$ — прямой. Найдите тангенс двугранного угла $BADC$, если $\angle ABC = 60°$, а $\angle ADC = 90°$.

3

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте и найдите линейный угол двугранного угла между плоскостями сечений CD_1A_1B и DA_1B_1C.

МНОГОГРАННИКИ

СА-19. ПРИЗМА

Вариант А1

❶

Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а диагональ боковой грани равна 10 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы.

❷

Основание прямой призмы — ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

❸

Все боковые грани наклонного параллелепипеда — ромбы с острым углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его высота равна $2\sqrt{2}$ см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°.

Вариант А2

❶

Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 9 см, а диагональ боковой грани равна 15 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы.

❷

Основание прямой призмы — ромб с острым углом 60°. Боковое ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности — 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

❸

Две боковые грани наклонной треугольной призмы — ромбы с острым углом 30°, а третья боковая грань — квадрат. Высота призмы равна $4\sqrt{2}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Вариант Б1

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами 15 см и 20 см. Большая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы.

2

Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы имеет площадь 16 дм^2. Диагональ основания призмы равна $4\sqrt{2}$ дм. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через диагонали двух смежных боковых граней, имеющие общую вершину.

3

В наклонном параллелепипеде основание и боковая грань — квадраты, плоскости которых образуют угол 30°, а площадь каждого из них равна 36 см^2. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Вариант Б2

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 см и катетом 20 см. Меньшая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы.

2

Высота правильной четырехугольной призмы равна 1 дм, а площадь боковой поверхности равна 16 дм^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через диагональ нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания.

3

Основание и две боковые грани наклонного параллелепипеда — квадраты, а две другие боковые грани — ромбы с острым углом 30°. Высота параллелепипеда равна 4 см. Найдите площадь его полной поверхности.

Вариант В1

1

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник

Вариант В2

1

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с боковой стороной 6 см и углом при вершине 120°. Диагональ наибольшей боковой грани образует с плоскостью основания призмы угол 60°. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы.

❷

Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна Q. Сечение призмы, проходящее через диагональ нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания, образует с плоскостью основания призмы угол α. Найдите площадь сечения.

❸

Основание наклонной призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 6 см. Боковое ребро, исходящее из вершины прямого угла, равно 8 см и образует с катетами треугольника равные углы 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.

с основанием $6\sqrt{3}$ см и углом при основании 30°. Диагональ меньшей боковой грани образует с плоскостью основания призмы угол 45°. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы.

❷

Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна S. Сечение призмы, проходящее через середину бокового ребра и диагональ основания, не пересекающую данное ребро, образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь сечения.

❸

Основание наклонной призмы — правильный треугольник со стороной 6 см. Одно из боковых ребер призмы, равное 8 см, образует с прилежащими сторонами основания равные углы 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.

СА-20. ПИРАМИДА. ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Вариант А1

❶

Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см

Вариант А2

❶

Основание пирамиды — ромб с диагоналями 10 см и 18 см.

и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

2

Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а высота — $\sqrt{13}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3

В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно l, а плоский угол при вершине — α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Меньшее боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите большее боковое ребро пирамиды.

2

Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5 см, а высота — $\sqrt{13}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3

Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна l, а плоский угол при вершине — α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант Б1

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 15 см и 20 см. Высота пирамиды равна 16 см и проходит через вершину прямого угла. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через ее высоту перпендикулярно к гипотенузе основания.

2

В правильной треугольной пирамиде апофема образует с высотой угол 30°. Найдите

Вариант Б2

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через середину гипотенузы основания. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через ее высоту и вершину прямого угла основания.

2

Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если отрезок, соединяющий середину высоты с серединой апофемы, равен $\sqrt{3}$ см.

3

Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно l и образует с ребром основания пирамиды угол α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

площадь боковой поверхности пирамиды, если расстояние от середины высоты пирамиды до ее апофемы равно 3 см.

3

В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна H.

Вариант В1

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой 65 см и катетом 25 см. Высота пирамиды проходит через вершину прямого угла основания и равна 80 см. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через меньший катет основания перпендикулярно к большему боковому ребру.

2

Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если отрезок, соединяющий точки пересечения медиан двух ее боковых граней, равен m.

Вариант В2

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой 39 см и катетом 15 см. Высота пирамиды проходит через вершину прямого угла основания и равна 20 см. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через больший катет основания перпендикулярно к среднему боковому ребру.

2

Апофема правильной треугольной пирамиды образует угол α с ее высотой. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если отрезок, соединяющий середину бокового ребра с серединой апофемы противолежащей боковой грани, равен m.

❸

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна H, а плоский угол при вершине — α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

❸

В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна l, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

СА-21. ПИРАМИДЫ, В КОТОРЫХ ВЫСОТА ПРОЕКТИРУЕТСЯ В ЦЕНТР ОПИСАННОЙ ИЛИ ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ ОСНОВАНИЯ

Вариант А1

❶

Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 12 см и 16 см. Все боковые ребра пирамиды равны 26 см.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания.
б) Найдите высоту пирамиды.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

Вариант А2

❶

Основание пирамиды — прямоугольник, одна из сторон которого равна 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны 13 см, а ее высота равна 12 см.
а) Докажите, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания.
б) Найдите площадь основания пирамиды.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом при основании α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β, а ее высота равна H.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание.

б) Докажите, что проекции на плоскость основания высот боковых граней, проведенных из вершины пирамиды, равны, и найдите высоту пирамиды.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание.

б) Докажите, что высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны, и найдите основание равнобедренного треугольника.

Вариант Б1

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом $4\sqrt{3}$ см и противолежащим углом 60°. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину гипотенузы основания.

б) Найдите боковые ребра пирамиды.

2

Основание пирамиды — ромб с острым углом α. Высота пирамиды равна H, а все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант Б2

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Высота пирамиды равна 4 см и образует со всеми боковыми ребрами углы 45°.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину гипотенузы основания.

б) Найдите площадь основания пирамиды.

2

Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, наклонены к плоскости основания под углом β.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант В1

1

Основание пирамиды — треугольник с углами α и β. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы, равные γ. Высота пирамиды равна H.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь основания пирамиды.

2

Основание пирамиды — равнобедренная трапеция с основаниями 4 см и 16 см. Все боковые грани пирамиды образуют с ее высотой углы, равные 30°.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант В2

1

Основание пирамиды — треугольник с углами α и β. Все боковые ребра пирамиды равны l и наклонены к плоскости основания под углом γ.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь основания пирамиды.

2

Основание пирамиды — прямоугольная трапеция с боковыми сторонами 30 см и 50 см. Все боковые грани пирамиды удалены от основания ее высоты на 12 см.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

СА-22. ПИРАМИДЫ, В КОТОРЫХ ОДНА ИЛИ ДВЕ БОКОВЫЕ ГРАНИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ К ПЛОСКОСТИ ОСНОВАНИЯ

Вариант А1

1

Основание пирамиды — квадрат со стороной 6 см. Высота пирамиды проходит через одну из вершин основания и равна 8 см.

Вариант А2

1

Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 9 см и 16 см. Высота пирамиды проходит через одну из вершин основания и равна 12 см.

а) Докажите, что боковые грани пирамиды — попарно равные прямоугольные треугольники.
б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2

Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна к плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину одной из сторон основания.
б) Найдите высоту пирамиды.

а) Докажите, что боковые грани пирамиды — прямоугольные треугольники.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2

Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Боковая грань, содержащая гипотенузу основания, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β.
а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину гипотенузы основания.
б) Найдите высоту пирамиды.

Вариант Б1

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 9 см и 12 см. Боковые грани пирамиды, содержащие меньший катет и гипотенузу основания, перпендикулярны к плоскости основания. Наибольшее боковое ребро равно $\sqrt{369}$ см.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь наибольшей боковой грани пирамиды.

Вариант Б2

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник. Боковые грани пирамиды, не содержащие больший катет основания, перпендикулярны к плоскости основания. Два бóльших боковых ребра пирамиды равны 10 см и $2\sqrt{41}$ см.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь боковой грани пирамиды, не перпендикулярной к плоскости основания.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник. Боковая грань, содержащая его гипотенузу, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Высота пирамиды равна H.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

❷

Основание пирамиды — правильный треугольник. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна к плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Высота пирамиды равна H.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Вариант В1

❶

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 15 см и 20 см. Боковые грани пирамиды, содержащие эти катеты, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом 60°.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

❷

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Боковая грань, содержащая гипотенузу, перпендикулярна

Вариант В2

❶

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 см и высотой 12 см. Боковые грани пирамиды, не содержащие гипотенузу, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом 60°.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

❷

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α. Боковая грань, содержащая вток плоскости основания, а две другие боковые грани наклонены к ней под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

рой катет, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие боковые грани наклонены к ней под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

СА-23. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Вариант А1

1

Правильная треугольная пирамида, все ребра которой равны 12 см, пересечена плоскостью, параллельной основанию пирамиды и проходящей через середину ее высоты. Найдите высоту и апофему полученной усеченной пирамиды.

2

Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 3 см и 7 см, а острый угол боковой грани — 45°.

Вариант А2

1

Правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 18 см, пересечена плоскостью, параллельной основанию пирамиды и проходящей через середину бокового ребра. Найдите высоту и апофему полученной усеченной пирамиды.

2

Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 3 см и 11 см, а боковое ребро — 5 см.

Вариант Б1

1

Площади оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 см^2 и 64 см^2, а боковое ребро обра-

Вариант Б2

1

Диагонали оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны $3\sqrt{2}$ см и $9\sqrt{2}$ см, а боковое зует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь диагонального сечения пирамиды.

❷

Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды, в которой высоты оснований равны 6 см и 9 см, а двугранный угол при основании — 60°.

ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь диагонального сечения пирамиды.

❷

Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды, в которой площади оснований равны $9\sqrt{3}$ см^2 и $36\sqrt{3}$ см^2, а двугранный угол при основании — 60°.

Вариант В1

❶

Площади оснований усеченной пирамиды равны 18 см^2 и 128 см^2. Найдите площадь сечения, параллельного основаниям и делящего высоту пирамиды в отношении 2 : 3, считая от меньшего основания.

❷

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 3 см и 6 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.

Вариант В2

❶

Высота усеченной пирамиды разделена на три равные части. Найдите площади сечений, параллельных основаниям и проходящих через точки деления, если площади оснований равны 2 см^2 и 32 см^2.

❷

Площади оснований и сечения правильной четырехугольной усеченной пирамиды, проходящего через центры оснований и середину одного из ребер основания, равны 72 см^2, 392 см^2 и 60 см^2 соответственно. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

СА-24. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Вариант А1

1

Высота правильного тетраэдра равна 6 см. Найдите ребро тетраэдра.

2

Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ B_1D и вершину A_1. Будет ли плоскость сечения плоскостью симметрии куба?

3

Расстояние между двумя противолежащими вершинами правильного октаэдра равно d. Найдите площадь поверхности октаэдра.

Вариант А2

1

Диагональ куба равна $6\sqrt{3}$ см. Найдите площадь грани куба.

2

Постройте сечение правильного тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через ребро DA и середину ребра BC. Будет ли плоскость сечения плоскостью симметрии тетраэдра?

3

Сечение правильного октаэдра, плоскость которого является плоскостью симметрии октаэдра, имеет площадь S. Найдите площадь поверхности октаэдра.

Вариант Б1

1

Площадь сечения правильного тетраэдра $DABC$, проходящего через ребро AC и середину ребра DB, равна $9\sqrt{2}$ см^2. Найдите площадь полной поверхности тетраэдра.

2

Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее

Вариант Б2

1

Площадь сечения правильного тетраэдра $DABC$, проходящего через вершину D и высоту треугольника ABC, равна $4\sqrt{2}$ см^2. Найдите площадь полной поверхности тетраэдра.

2

Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер A_1B_1 и B_1C_1. Будет ли плоскость симметрии данного сечения плоскостью симметрии куба?

3

Середины ребер правильного тетраэдра являются вершинами правильного октаэдра. Найдите площадь поверхности октаэдра, если высота тетраэдра равна H.

через середину ребра AD и прямую A_1C_1. Будет ли ось симметрии данного сечения осью симметрии куба?

3

Середины ребер правильного тетраэдра являются вершинами правильного октаэдра. Найдите площадь поверхности тетраэдра, если расстояние между противолежащими вершинами октаэдра равно d.

Вариант В1

1

Сечение правильного тетраэдра, проходящее через середины четырех его ребер, имеет площадь 9 см^2. Найдите площадь полной поверхности тетраэдра.

2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что многогранник BA_1C_1D — правильный тетраэдр. Сколько общих плоскостей симметрии он имеет с данным кубом?

3

Докажите, что центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба. Найдите отношение площадей поверхностей октаэдра и куба.

Вариант В2

1

Сечение правильного тетраэдра $DABC$, проходящее через середины ребер DA и BC параллельно ребру AB, имеет площадь 36 см^2. Найдите площадь полной поверхности тетраэдра.

2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что многогранник AB_1CD_1 — правильный тетраэдр. Сколько общих плоскостей симметрии он имеет с данным кубом?

3

Докажите, что центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра. Найдите отношение площадей поверхностей октаэдра и куба.

СА-25*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О МНОГОГРАННИКАХ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Площадь основания и площади боковых граней прямой треугольной призмы соответственно равны 30 см^2, 128 см^2, 200 см^2 и 312 см^2. Найдите высоту призмы.

2

Диагонали правильной шестиугольной призмы равны 7 см и 8 см. Найдите высоту призмы.

3

Основание прямого параллелепипеда — ромб. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны P и Q.

4

Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

Вариант 2

1

Диагонали боковых граней прямой призмы равны 8 см, 14 см и 16 см. Найдите высоту призмы, если ее основание — прямоугольный треугольник.

2

Диагонали смежных боковых граней правильной шестиугольной призмы, проведенные из одной вершины, взаимно перпендикулярны. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна 4 см.

3

Диагональное сечение правильной четырехугольной призмы имеет площадь Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

4

Докажите, что сумма квадратов площадей диагональных сечений параллелепипеда равна сумме квадратов площадей боковых граней.

5

Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите площадь сечения тетраэдра, проходящего через одно из ребер и делящего пополам двугранный угол при этом ребре.

6

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Высота пирамиды равна H, а все двугранные углы при основании равны. Точка высоты пирамиды равноудалена от ее вершины и стороны основания, причем перпендикуляр, проведенный из этой точки к стороне основания, образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

7

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 6 см и 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если расстояние от вершины меньшего основания до противолежащей стороны большего основания равно 7 см.

5

Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите площадь сечения тетраэдра, проходящего через центр его основания перпендикулярно к боковому ребру.

6

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Все двугранные углы при основании пирамиды равны. Точка высоты пирамиды, удаленная на расстояние b от ее вершины, равноудалена от боковой грани и плоскости основания. Отрезок, соединяющий эту точку с серединой основания треугольника, образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

7

Диагональ правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 15 см и делит отрезок, соединяющий центры оснований, на части, равные 2 см и 3 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

КА-3. МНОГОГРАННИКИ

Вариант А1

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее наибольшая боковая грань — квадрат.

2

Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 4 см и образует с плоскостью основания пирамиды угол 45°.

а) Найдите высоту пирамиды.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3

Ребро правильного тетраэдра *DABC* равно *a*. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра *DA* параллельно плоскости *DBC*, и найдите площадь этого сечения.

Вариант А2

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см и катетом 12 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее наименьшая боковая грань — квадрат.

2

Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{6}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.

а) Найдите боковое ребро пирамиды.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3

Ребро правильного тетраэдра *DABC* равно *a*. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через середины ребер *DA* и *AB* параллельно ребру *BC*, и найдите площадь этого сечения.

Вариант Б1

1

Основание прямого параллелепипеда — ромб с диагоналями

Вариант Б2

1

Основание прямого параллелепипеда — ромб с меньшей

10 см и 24 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

❷

Основание пирамиды — правильный треугольник с площадью $9\sqrt{3}$ см^2. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а третья — наклонена к ней под углом 30°.

а) Найдите длины боковых ребер пирамиды.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

❸

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через прямую B_1C и середину ребра AD, и найдите площадь этого сечения.

диагональю 12 см. Большая диагональ параллелепипеда равна $16\sqrt{2}$ см и образует с боковым ребром угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $4\sqrt{2}$ см. Боковые грани, содержащие катеты треугольника, перпендикулярны к плоскости основания, а третья грань наклонена к ней под углом 45°.

а) Найдите длины боковых ребер пирамиды.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

❸

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через точку C и середину ребра AD параллельно прямой DA_1, и найдите площадь этого сечения.

Вариант В1

❶

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами 15 см и 20 см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если ее

Вариант В2

❶

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием 24 см и боковой стороной 13 см. Наименьшее сечение призмы, проходящее наименьшее сечение, проходящее через боковое ребро, — квадрат.

❷

Основание пирамиды — ромб с большей диагональю d и острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

❸

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через середины ребер AA_1, B_1C_1 и CD, и найдите площадь этого сечения.

через ее боковое ребро, является квадратом. Найдите площадь полной поверхности призмы.

❷

Основание пирамиды — ромб с тупым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна H.

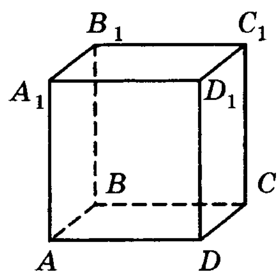
❸

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через середины ребер A_1B_1, CC_1 и AD, и найдите площадь этого сечения.

ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

СА-26. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ. РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

1



Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок). Назовите:

Вариант А1

а) вектор с началом в точке C, равный вектору $\overrightarrow{DA_1}$;

б) вектор с концом в точке D, противоположно направленный с вектором $\overrightarrow{BB_1}$.

в) Найдите $\left|\overrightarrow{DC_1}\right|$, если ребро куба равно $4\sqrt{2}$.

2

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны. Верно ли, что $\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$? Ответ объясните.

Вариант А2

а) вектор с началом в точке B_1, равный вектору $\overrightarrow{D_1D}$;

б) вектор с концом в точке C, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{A_1D_1}$.

в) Найдите $\left|\overrightarrow{BC_1}\right|$, если $\left|\overrightarrow{B_1B}\right| = 4\sqrt{2}$.

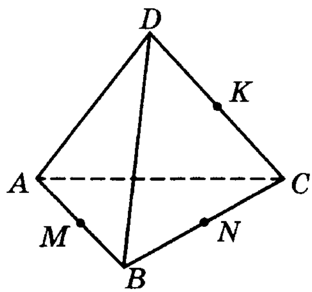
2

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Верно ли, что $\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$? Ответ объясните.

Вариант Б1

Вариант Б2

1



Дан правильный тетраэдр *DABC* (см. рисунок). Точки *M*, *N* и *K* — середины ребер *AB*, *BC* и *CD* соответственно. Назовите:

Б1

а) вектор с началом в точке A, равный вектору $\overrightarrow{MB}$;

б) вектор с концом в точке K, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{BD}$.

в) Найдите $|\overrightarrow{MN}|$, если $|\overrightarrow{DM}| = \sqrt{3}$.

Б2

а) вектор с началом в точке D, равный вектору $\overrightarrow{KC}$;

б) вектор с концом в точке N, противоположно направленный с вектором $\overrightarrow{CA}$.

в) Найдите $|\overrightarrow{AK}|$, если $|\overrightarrow{MN}| = 4\sqrt{3}$.

Б1 — 2

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны. Сравните длины и направления этих векторов, если $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|$.

Б2 — 2

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Сравните длины и направления этих векторов, если $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{AB}|$.

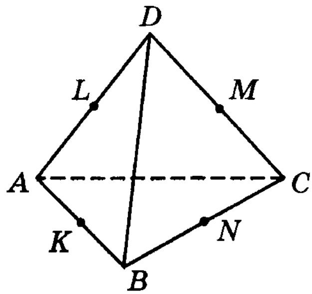
Вариант В1

Вариант В2

1

Дан правильный тетраэдр *DABC* (см. рисунок). Точки *K*, *L*, *M* и *N* —

середины ребер AB, AD, DC и BC соответственно.



Назовите:

а) вектор, равный вектору $\overrightarrow{KN}$;

б) два вектора, коллинеарные вектору $\overrightarrow{KL}$ и имеющие противоположные направления.

в) Найдите $|\overrightarrow{AC}|$, если $|\overrightarrow{KM}| = 3\sqrt{2}$.

❷

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, причем $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{AC}|$.

Сравните длины и направления данных векторов.

а) вектор, равный вектору $\overrightarrow{MN}$;

б) два вектора, коллинеарные вектору $\overrightarrow{ML}$ и имеющие противоположные направления.

в) Найдите $|\overrightarrow{NL}|$, если $|\overrightarrow{BD}| = 3\sqrt{2}$.

❷

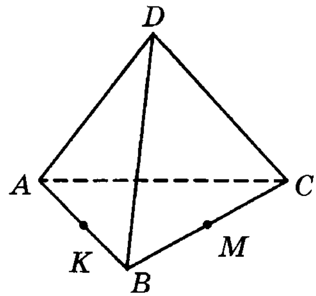
Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны, причем $|\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{AC}|$.

Сравните длины и направления данных векторов.

СА-27. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Вариант А1 **Вариант А2**

1



$DABC$ — треугольная пирамида (см. рисунок). Точки K и M — середины ребер AB и BC соответственно. Назовите вектор с началом и концом в вершинах пирамиды или данных точках, равный:

Вариант А1:

а) $2\overrightarrow{BK}$;

б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$;

в) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AK}$;

г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}$.

Вариант А2:

а) $2\overrightarrow{MC}$;

б) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$;

в) $\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AM}$;

г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CD}$.

2

Дан квадрат $ABCD$ и произвольная точка O. Докажите, что

Вариант А1:

а) $\left|\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{CO}\right|$;

б) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Вариант А2:

а) $\left|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{CO}\right|$;

б) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

3

Определите взаимное расположение на прямой точек A, B и C, если

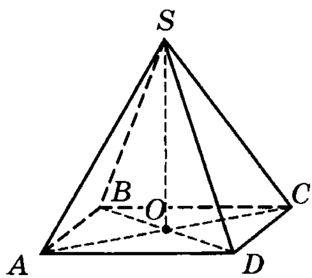
$\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1



SABCD **— правильная четырехугольная пирамида (см. рисунок). Точка *O* — центр основания пирамиды. Назовите вектор с началом и концом в данных точках, равный:**

Вариант Б1:

а) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CD}$;

б) $2\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OD}\right)$;

в) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}\right) + \overrightarrow{OB}$;

г) $\overrightarrow{SO} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right)$.

Вариант Б2:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SO}$;

б) $2\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OC}\right)$;

в) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right) + \overrightarrow{OC}$;

г) $\overrightarrow{SA} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right)$.

2

Точки *A*, *B*, *C* и *D* не лежат в одной плоскости. Докажите, что

Вариант Б1:

а) $\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}\right)\right|$;

б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Вариант Б2:

а) $\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right)\right|$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

3

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Докажите коллинеарность векторов

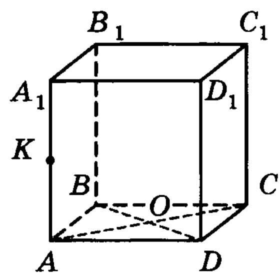
$\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$.

$\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

Вариант В1

Вариант В2

1



В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок) точка K — середина ребра AA_1, точка O — центр $ABCD$. Назовите вектор с началом и концом в вершинах куба или данных точках, равный:

Вариант В1:

а) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{B_1C}\right)$;

б) $2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{DK}$;

в) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{D_1A_1}$;

г) $2\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{BA}$.

Вариант В2:

а) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{C_1D}\right)$;

б) $\overrightarrow{KD_1}-2\overrightarrow{KA_1}$;

в) $\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{BC}$;

г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{DA}$.

2

Точка O равноудалена от вершин прямоугольника $ABCD$. Докажите, что

Вариант В1:

а) $\left|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DA}\right|$;

б) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$.

Вариант В2:

а) $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AB}\right|$;

б) $\overrightarrow{BO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3

Определите, может ли равняться нулевому вектору сумма трех векторов, длины которых равны

2, 5 и 9.

1, 3 и 5.

Ответ объясните.

СА-28. КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Вариант А1

Вариант А2

1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите, являются ли компланарными векторы:

Вариант А1:

а) $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{B_1D}$;

б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

Вариант А2:

а) $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$ и $\overrightarrow{BD}$;

б) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DB_1}$.

Ответ объясните.

2

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите вектор, начало и конец которого являются вершинами куба, равный сумме векторов:

Вариант А1:

а) $\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AA_1}$.

Вариант А2:

а) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$;

б) $\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1B}$.

3

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ разложите:

Вариант А1:

а) вектор $\overrightarrow{AC_1}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$;

Вариант А2:

а) вектор $\overrightarrow{D_1B}$ по векторам $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1D}$;

б) вектор $\overrightarrow{AA_1}$ по векторам $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1C}$.

б) вектор $\overrightarrow{BB_1}$ по векторам $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{B_1D}$.

4

Даны некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Известно, что

$\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

$\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$.

Найдите разложение по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вектора $\vec{d_1}$, если

векторы $\vec{d}$ и $\vec{d_1}$ сонаправлены, а длина вектора $\vec{d_1}$ в три раза больше длины вектора $\vec{d}$.

векторы $\vec{d}$ и $\vec{d_1}$ противоположно направлены, а длина вектора $\vec{d_1}$ вдвое больше длины вектора $\vec{d}$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор с началом и концом в вершинах куба, который вместе с двумя данными векторами составлял бы тройку компланарных векторов:

Б1:

а) $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$;
б) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$.

Б2:

а) $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CC_1}$;
б) $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите вектор с началом и концом в вершинах параллелепипеда, равный сумме векторов:

Б1:

а) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BB_1}$;

Б2:

а) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1}$;

б) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DC}$.

б) $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{CB}$.

3

В тетраэдре $DABC$ точки M и N — середины ребер DA и DC соответственно.

Разложите:

а) вектор $\overrightarrow{MC}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BC}$;

б) вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{DN}$ и $\overrightarrow{DB}$.

а) вектор $\overrightarrow{NA}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BC}$;

б) вектор $\overrightarrow{BC}$ по векторам $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{DN}$ и $\overrightarrow{DB}$.

4

Даны некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Известно, что

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.

Найдите разложение вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$.

$\vec{d} = 5\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{e} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Найдите разложение вектора $\vec{b}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор с началом и концом в вершинах куба, который вместе с любыми двумя из трех данных векторов составлял бы тройку некомпланарных векторов:

а) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$;

б) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$.

а) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{DC}$;

б) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$.

2

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите вектор с началом и концом в вершинах параллелепипеда, равный сумме векторов:

а) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{D_1A}$;

б) $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1B}$.

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{C_1D}$;

б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{C_1A}$.

3

В правильном тетраэдре $DABC$ точка O — центр треугольника ABC, точки M и N — середины ребер AD и CD соответственно.

Разложите:

а) вектор $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$;

б) вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BA}$.

а) вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{CO}$ и $\overrightarrow{AB}$;

б) вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

4

Даны некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что векторы $\vec{l}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$ компланарны, и разложите один из них по двум другим, если

$\vec{l}=2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$,

$\vec{m}=2\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}$,

$\vec{n}=2\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$.

$\vec{l}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$,

$\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$,

$\vec{n}=\vec{c}$.

СА-29*. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1	Вариант 2

1

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общую точку пересечения медиан.

Известно, что

Вариант 1	Вариант 2
$\overrightarrow{A_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B_1B} = \vec{b}$.	$\overrightarrow{B_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1B} = \vec{b}$.

Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{CC_1}$.

2

Известно, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. Определите, при каких значениях k векторы

Вариант 1	Вариант 2
$k\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{b} + k\vec{c}$	$k\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$ и $k\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$

также будут некомпланарными.

3

Дан тетраэдр $ABCD$ и точки K, L, M и N на его ребрах, причем

Вариант 1	Вариант 2
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$,	$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$,
$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CL} = y\overrightarrow{CD}$,	$\overrightarrow{KD} = y\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$,
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$.	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$.

Найдите x и y.

❹

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Докажите, что

диагональ AC_1 проходит через точку пересечения медиан треугольника A_1BD и делится этой точкой в отношении $1:2$.

диагональ B_1D проходит через точку пересечения медиан треугольника AD_1C и делится этой точкой в отношении $2:1$.

❺

A, B, C, A_1, B_1, C_1 — точки пространства, удовлетворяющие условиям $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\overrightarrow{B_1C_1}$ ($\lambda \neq 0$). Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 лежат на одной прямой.

❺

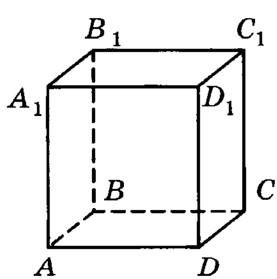
Используя векторы, докажите, что отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

КА-4. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вариант А1

Вариант А2

❶



Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок).

а) Назовите вектор

с началом в точке D_1, равный вектору $\overrightarrow{AB}$.

с концом в точке C_1, равный вектору $\overrightarrow{AD}$.

б) Назовите вектор, равный

$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1D}$.

$\overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{C_1D}$.

в) Назовите вектор, равный

$\overrightarrow{D_1D} - \overrightarrow{D_1B}$.

$\overrightarrow{A_1C} - \overrightarrow{A_1C_1}$.

г) Назовите вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству

$\overrightarrow{DA} + \vec{x} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB_1}$.

$\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \vec{x} = \overrightarrow{B_1D}$.

2

В правильном тетраэдре $DABC$ с ребром a точка O — центр треугольника ABC.

а) Постройте вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ и найдите его длину.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OC}\right|$.

а) Постройте вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ и найдите его длину.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}\right|$.

3

Отрезок MA — перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{MC}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$.

3

Отрезок MB — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC. Разложите вектор $\overrightarrow{MC}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MB}$.

4

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Найдите значения k, при которых векторы $\vec{c} = k\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} + k\vec{b}$ коллинеарны.

4

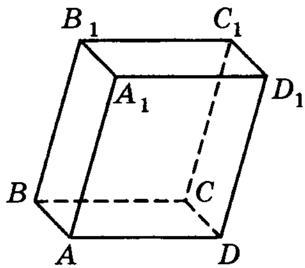
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Найдите значения k, при которых векторы $\vec{c} = k\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} + k\vec{b}$ коллинеарны.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок).



а) Назовите вектор

Б1: с началом в точке D, равный $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$.

Б2: с концом в точке B_1, равный $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA_1}$.

б) Назовите вектор, равный

Б1: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA_1}$.

Б2: $\overrightarrow{C_1D}+\overrightarrow{CB}$.

в) Назовите вектор, равный

Б1: $\overrightarrow{A_1D}-\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{AA_1}$.

Б2: $\overrightarrow{B_1A}-\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{BB_1}$.

г) Назовите вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству

Б1: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB_1}-\vec{x}$.

Б2: $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C}-\vec{x}$.

2

В правильном тетраэдре $DABC$ с ребром a точка O — центр треугольника ABC.

Б1: а) Постройте вектор $\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$ и найдите его длину.

Б2: а) Постройте вектор $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)-\overrightarrow{DO}$ и найдите его длину.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{DO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\right|$.

❸

Точка O не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

❹

Даны параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1. Докажите, что векторы $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$ и $\overrightarrow{AB}$ компланарны.

б) Найдите $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}\right|$.

❸

Точка O не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{OC}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AO}$.

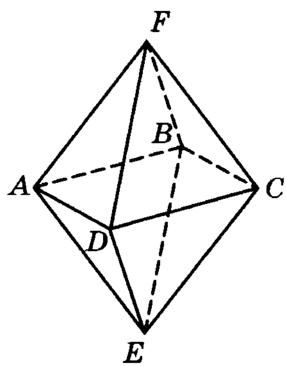
❹

Даны параллелограммы $ABCD$ и A_1B_1CD. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ компланарны.

Вариант В1

Вариант В2

❶



Дан правильный октаэдр *EABCDF* (см. рисунок).

а) Назовите вектор

с началом в точке B, равный $\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{FC}$.

с концом в точке C, равный $\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EA}$.

б) Назовите вектор, равный

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}$.

в) Назовите вектор, равный

$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$.

$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FB}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

г) Назовите вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BF}=\vec{x}+\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}=\vec{x}+\overrightarrow{FD}$.

❷

В правильном тетраэдре *DABC* с ребром *a* точка *P* — центр треугольника *ABC*, точка *Q* — центр треугольника *BDC*.

а) Постройте вектор $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{PQ}$ и найдите его длину.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{AQ}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right|$.

а) Постройте вектор $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{QP}$ и найдите его длину.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{DP}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\right|$.

❸

Точка S равноудалена от вершин прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$). Отрезок SO — перпендикуляр к плоскости ABC. Разложите вектор $\overrightarrow{SO}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{SB}$.

❸

Точка S равноудалена от сторон ромба $ABCD$. Отрезок SO — перпендикуляр к плоскости ромба. Разложите вектор $\overrightarrow{SO}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

❹

Точки M и N — середины ребер BD и AC правильного

❹

Точки M и N — середины ребер AD и BC правильного тетраэдра $DABC$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ компланарны.

тетраэдра $DABC$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ компланарны.

КА-5. ГОДОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант А1

1

Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AC = 13$ см и катетом $BC = 5$ см. Отрезок SA, равный 12 см, — перпендикуляр к плоскости ABC.

а) Найдите $\left|\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CB}\right|$.

б) Найдите угол между прямой SB и плоскостью ABC.

2

В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна $8\sqrt{2}$ см, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину D и середины ребер AA_1 и A_1B_1. Определите вид многоугольника, полученного в сечении.

Вариант А2

1

Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 16$ см и $BC = 12$ см. Отрезок SC, равный 20 см, — перпендикуляр к плоскости ABC.

а) Найдите $\left|\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA}\right|$.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC.

2

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна $4\sqrt{3}$ см, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через прямую AB и середину ребра B_1C_1. Определите вид многоугольника, полученного в сечении.

Вариант Б1

1

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок SA — перпендикуляр к плоскости ромба, $SA = 3\sqrt{3}$ см, $AC = 6$ см, $BD = 8$ см.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна к плоскости SAO.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right)\right|$.

в) Найдите двугранный угол $SDBA$.

2

В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°. Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой бокового ребра, равен 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение правильного тетраэдра $DABC$, проходящее через середины ребер AD и BC параллельно ребру DB, и определите вид многоугольника, полученного в сечении.

Вариант Б2

1

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок SA — перпендикуляр к плоскости ромба, $AB = 5$ см, $BD = 8$ см, $SO = 6$ см.

а) Докажите перпендикулярность плоскостей SBD и SAO.

б) Найдите $\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{OS}\right|$.

в) Найдите угол между прямой SO и плоскостью ABC.

2

В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен 60°. Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой апофемы, равен 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3

Постройте сечение правильного тетраэдра $DABC$, проходящее через середины ребер AD и AB параллельно ребру AC, и определите вид многоугольника, полученного в сечении.

Вариант В1

1

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Отрезок SB — перпендикуляр к плоскости ABC. Двугранный угол $SACB$ равен 45°.

а) Докажите перпендикулярность плоскостей SBA и SBC.

б) Точка M — точка пересечения медиан треугольника SAC. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

в) Найдите углы наклона прямых SA и SC к плоскости ABC.

2

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Боковые грани пирамиды, содержащие данный катет и гипотенузу основания, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Вариант В2

1

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Отрезок SB — перпендикуляр к плоскости ABC. Прямые SA и SC образуют с плоскостью ABC угол 30°.

а) Докажите перпендикулярность плоскостей SAC и SBD, если D — середина AC.

б) Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Разложите вектор $\overrightarrow{SM}$ по векторам $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

в) Найдите двугранный угол $SACB$.

2

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

❸

Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, проходящее через середины ребер основания AD и CD параллельно боковому ребру SD.

❸

Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, проходящее через середины ребра основания AD и бокового ребра SB параллельно прямой AC.

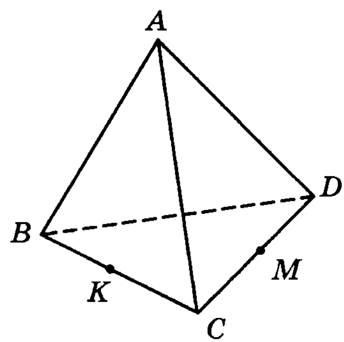
Работы по учебнику А. В. Погорелова

АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ

СП-1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Вариант А1 | **Вариант А2**

1



Пользуясь данным рисунком, назовите:

а) две точки, не принадлежащие

А1: плоскости *ABC*;

А2: плоскости *ABD*;

б) прямую, по которой пересекаются плоскости

А1: *BCD* и *ABM*;

А2: *ABC* и *ADK*;

в) плоскость, проходящую через прямые

А1: *AM* и *CD*.

А2: *DK* и *BC*.

Вариант А1

2

Даны две прямые, через которые нельзя провести плоскость. Могут ли эти прямые пересекаться? Ответ объясните.

Вариант А2

2

Даны две плоскости, которые не пересекаются. Могут ли эти плоскости иметь общую точку? Ответ объясните.

❸

Плоскости α и β имеют общие точки A, B и C. Верно ли, что эти плоскости обязательно совпадают? Ответ объясните.

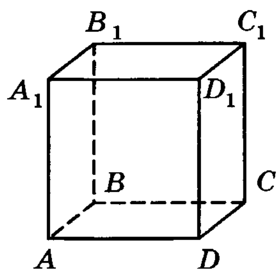
❸

Прямая a пересекается с каждой из прямых b и c. Верно ли, что прямые a, b и c обязательно лежат в одной плоскости? Ответ объясните.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶



Пользуясь данным рисунком, назовите:

а) три плоскости, содержащие

Б1: точку B;

Б2: точку D_1;

б) прямую, по которой пересекаются плоскости

Б1: $A_1B_1C_1$ и B_1BD;

Б2: BCD и A_1AC;

в) плоскость, проходящую через прямые

Б1: AD и C_1A.

Б2: BD_1 и D_1A_1.

❷

Прямые a, b и c не лежат в одной плоскости, но пересекаются в одной точке. Сколько различных плоскостей можно провести через эти прямые, беря их попарно? Ответ объясните.

❷

Три различные плоскости α, β и γ имеют общую точку, но не имеют общей прямой. Сколько различных прямых можно получить при попарном пересечении этих плоскостей? Ответ объясните.

❸

Сформулируйте утверждение, обратное

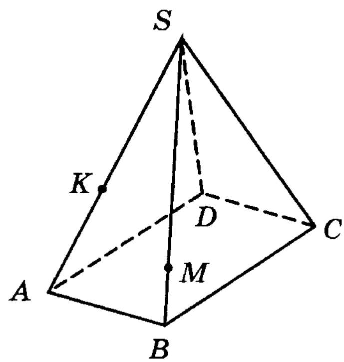
аксиоме C_2. аксиоме C_3.

Будет ли оно верным? Почему?

Вариант В1

Вариант В2

❶



Пользуясь данным рисунком, назовите:

а) три различные плоскости, не содержащие

точку A; точку C;

б) прямую, по которой пересекаются плоскости

CMK и SBC; DKM и SAB;

в) плоскость, проходящую через прямые

SA и KC. SB и MD.

❷

Точка D является общей для двух различных плоскостей α и β и прямой a. Как может располагаться прямая a относительно α и β? Укажите все возможные случаи.

❷

Точка D является общей для двух различных прямых a и b и плоскости α. Как могут располагаться прямые a и b относительно плоскости α? Укажите все возможные случаи.

❸

Каждая из трех различных прямых пересекается с двумя другими. Сколько различных плоскостей можно провести через данные прямые, взятые попарно? Укажите и обоснуйте все возможные варианты.

❸

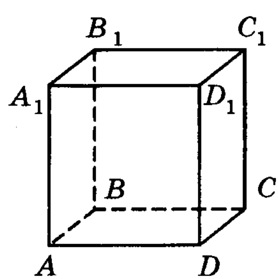
Три различные плоскости имеют общую точку. Сколько различных прямых может образоваться при пересечении этих плоскостей? Укажите и обоснуйте все возможные варианты.

СП-2. ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ

Вариант А1

Вариант А2

❶



Пользуясь данным рисунком, выполните задания:

а) назовите плоскость, проходящую через

А1: точку B_1 и прямую A_1C_1,

А2: точку A и прямую BD,

и укажите две прямые, принадлежащие этой плоскости;

б) укажите точку пересечения

А1: прямой AC_1 с плоскостью D_1DC.

А2: прямой BD_1 с плоскостью A_1AD.

❷

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Выбирая из данных точек по три, постройте две плоскости, которые пересекались бы

по прямой BC. | по прямой AD.

Какие аксиомы и теоремы при этом использовались?

❸

Известно, что через точки A, B и C можно провести бесконечно много различных плоскостей. Каким образом нужно выбрать точку D, чтобы плоскость, проходящая через A, B, C и D, была единственной? Ответ объясните.

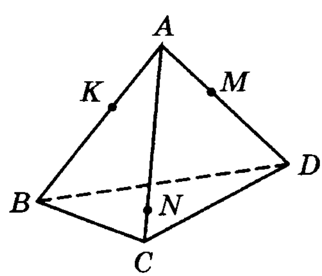
❸

Известно, что через прямую a и точку A можно провести бесконечно много различных плоскостей. Каким образом нужно выбрать точку B, чтобы плоскость, проходящая через прямую a и точки A и B, была единственной? Ответ объясните.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶



Пользуясь данным рисунком, выполните задания:

а) назовите плоскость, проходящую через

прямую MN и точку B, | прямую KN и точку D,

и укажите прямую ее пересечения

с плоскостью ABD; | с плоскостью ADC;

б) постройте точку пересечения

прямой KN с плоскостью BCD. | прямой MN с плоскостью BCD.

2

Прямые a и b пересекаются в точке C. Выберите в пространстве точку D, которая вместе с данными прямыми определяла бы две плоскости,

пересекающиеся по прямой CD. | пересекающие плоскость данных прямых.

Какие аксиомы и теоремы при этом использовались?

3

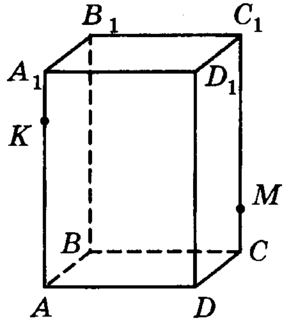
Точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Каким образом должны располагаться эти точки,

чтобы через A, B и C можно было провести плоскость, не содержащую точку D? | чтобы любая плоскость, проходящая через B и C, содержала бы A и D?

Почему другое расположение точек не обеспечивает выполнение данного условия?

Вариант В1 | Вариант В2

1



Пользуясь данным рисунком, выполните задания:

а) назовите плоскость, проходящую

через точку K и прямую A_1C_1,

через точку M и прямую AC,

и укажите прямую ее пересечения

с плоскостью ABC;

с плоскостью $B_1C_1D_1$;

б) постройте точку пересечения

прямой MK с плоскостью BCD.

прямой KM с плоскостью $A_1B_1C_1$.

2

Прямая l проходит через точку A, но не проходит через точку B. Выберите в пространстве точку C, которая

вместе с данной прямой, а также вместе с двумя данными точками определяла бы две плоскости, пересекающиеся по прямой AC.

вместе с двумя данными точками определяла бы плоскость, пересекающую плоскость, содержащую l и B, по прямой AB.

Какие аксиомы и теоремы при этом использовались?

3

Точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Рассмотрите все случаи их взаимного расположения и укажите те случаи, при которых

через точки B и C можно провести плоскость, не содержащую точек A и D.

через точки A и B нельзя провести плоскость, не содержащую ни точки C, ни точки D.

Почему другое расположение точек не обеспечивает выполнение данного условия?

СП-3. ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЙ В ЗАДАЧАХ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Вариант А1

1

Прямые AB и CD пересекаются. Докажите, что прямые AD и BC лежат в одной плоскости.

2

Прямые AB и l не лежат в одной плоскости. Плоскость α содержит прямую l и точку B. Докажите, что точка A не лежит в плоскости α.

Вариант А2

1

Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Точки K и M лежат на отрезках AC и BC соответственно. Докажите, что прямые KM и AB лежат в одной плоскости.

2

Прямые AB, AC и AD не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые BC и AD не пересекаются.

3

Докажите, что

(А1) через любые три точки можно провести плоскость

(А2) через любую прямую и точку можно провести плоскость

(в доказательстве рассмотрите два случая).

Вариант Б1

1

Три вершины квадрата лежат в плоскости α. Докажите, что и четвертая вершина квадрата также лежит в плоскости α.

Вариант Б2

1

Две соседние вершины и точка пересечения диагоналей трапеции лежат в плоскости α. Докажите, что и две другие вершины трапеции лежат в плоскости α.

❷

Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая l пересекает плоскость α в точке A, а плоскость β — в точке B (точки A и B не лежат на прямой m). Докажите, что прямые m и l не пересекаются.

❸

Прямые a и b пересекаются. Докажите, что существует прямая c, пересекающая каждую из двух данных прямых, но не лежащая с ними в одной плоскости.

❷

Точки A и B — общие точки плоскостей α и β. Прямая a лежит в α, не лежит в β и проходит через точку A. Прямая b лежит в β, не лежит в α и проходит через точку B. Докажите, что прямые a и b не пересекаются.

❸

Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Докажите, что существует плоскость γ, не совпадающая с α и β и содержащая прямую l.

Вариант В1

❶

Середины сторон пятиугольника лежат в одной плоскости. Докажите, что все его вершины лежат в той же плоскости.

❷

Плоскость α пересекает прямые MA, MB и MC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что данные прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Вариант В2

❶

Середины всех диагоналей пятиугольника лежат в одной плоскости и не совпадают. Докажите, что вершины пятиугольника лежат в той же плоскости.

❷

Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Точки A и B лежат в плоскостях α и β соответственно. Докажите, что отрезок AB пересекается с прямой l тогда и только тогда, когда один из его концов лежит на прямой l.

❸

Концы отрезка AB лежат в двух различных плоскостях, пересекающихся по прямой a. Докажите, что существует плоскость, содержащая прямую a, относительно которой точки A и B лежат в разных полупространствах.

❸

Четыре точки не лежат в одной плоскости. Докажите, что существует плоскость, проходящая через две из них так, что две другие точки лежат относительно нее в разных полупространствах.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

СП-4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Вариант А1	Вариант А2

❶

Известно, что точки *A*, *B*, *C* и *D*

Вариант А1	Вариант А2
лежат в одной плоскости.	не лежат в одной плоскости.

Определите, могут ли прямые *AB* и *CD*:

а) быть параллельными;

б) пересекаться;

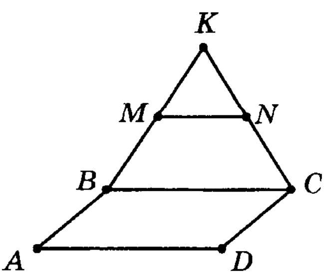
в) быть скрещивающимися.

Ответы подтвердите ссылками на соответствующие теоретические факты.

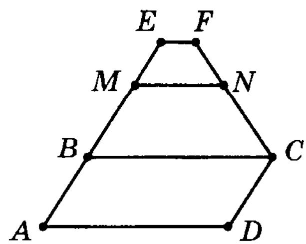
Вариант А1	Вариант А2
❷ Даны параллельные прямые a и b и прямая c, пересекающая a, но не пересекающая b.	**❷** Даны пересекающиеся прямые a и b и прямая c, параллельная a, но не пересекающая b.

Докажите, что b и c — скрещивающиеся прямые.

❸



❸



Треугольник BKC и прямоугольник $ABCD$ не лежат в одной плоскости (см. рисунок). Точки M и N — середины отрезков BK и KC соответственно.

а) Докажите, что $AD \parallel MN$.

б) Найдите AD, если $MN = 4$ см.

Квадрат $ABCD$ и трапеция $BEFC$ (BC и EF — основания) не лежат в одной плоскости (см. рисунок). Точки M и N — середины отрезков BE и FC соответственно.

а) Докажите, что $MN \parallel AD$.

б) Найдите MN, если $AB = 8$ см, $EF = 4$ см.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Известно, что

Б1: прямые a и b пересекаются, а прямые b и c параллельны.

Б2: прямые a и b — скрещивающиеся, а прямые b и c параллельны.

Определите, могут ли прямые a и c:

а) быть параллельными;

б) пересекаться;

в) быть скрещивающимися.

Утвердительные ответы подтвердите рисунком; отрицательные ответы аргументируйте.

2 (Б1)

В параллелограмме $ABCD$ через вершину B проведена прямая l, не лежащая в плоскости параллелограмма. Докажите, что прямые l и AD — скрещивающиеся.

2 (Б2)

В треугольнике ABC через вершину B проведена прямая l, не лежащая в плоскости треугольника. Докажите, что прямые l и AC — скрещивающиеся.

3

Точка M лежит на отрезке AB.

Отрезок AB пересекается с плоскостью α

в точке B. Через точки A и M проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках A_1 и M_1.

в точке M. Через точки A и B проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках A_1 и B_1.

а) Докажите, что точки

A_1, M_1 и B лежат на одной прямой.

A_1, M и B_1 лежат на одной прямой.

б) Найдите длину отрезка *AB*, если

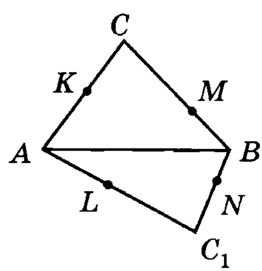
$AA_1 : MM_1 = 3 : 2$, $AM = 6$ см.

$AA_1 : BB_1 = 3 : 2$, $AM = 6$ см.

Вариант В1

Вариант В2

❶



Треугольники *ABC* и ABC_1 не лежат в одной плоскости. Точки *K*, *M*, *N*, *L* лежат на отрезках *AC*, *CB*, BC_1, AC_1 соответственно (см. рисунок).

Определите, могут ли

отрезки KL и MN

отрезки KN и ML

а) быть параллельными;

б) пересекаться;

в) лежать на скрещивающихся прямых.

Утвердительные ответы подтвердите рисунком; отрицательные ответы аргументируйте.

❷

Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Плоскость γ пересекает данные плоскости по двум параллельным прямым a и b соответственно. Докажите, что прямая c параллельна каждой из этих прямых.

❷

Даны две параллельные прямые a и b и точка M, не лежащая в плоскости этих прямых. Через a и M проведена плоскость α, а через b и M — плоскость β. Докажите, что прямая пересечения α и β параллельна каждой из данных прямых.

❸

Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена плоскость α. Через точки B, C и D проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках B_1, C_1 и D_1 соответственно.

Найдите DD_1, если $BB_1 = 4$ см, $CC_1 = 12$ см.

Найдите CC_1, если $BB_1 = 3$ см, $DD_1 = 7$ см.

СП-5. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Вариант А1

Вариант А2

❶

Известно, что прямая a параллельна плоскости α, а прямая b

пересекает плоскость α.

лежит в плоскости α.

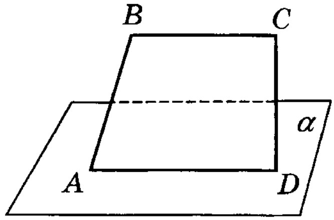
Определите, могут ли прямые a и b:

а) пересекаться;

б) быть параллельными;

в) быть скрещивающимися.

❷



Через сторону AD четырехугольника $ABCD$ проведена плоскость α (см. рисунок). Известно, что

$\angle BCA = \angle CAD$.

$\angle ABC + \angle DAB = 180°$.

Докажите, что $BC \parallel \alpha$.

❸

Дан треугольник ABC. Постройте плоскость, параллельную плоскости данного треугольника.

❸

Дан квадрат $ABCD$. Постройте плоскость, параллельную плоскости данного квадрата.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Известно, что прямые a и b — скрещивающиеся, а прямая c

параллельна a. Плоскость α определяется параллельными прямыми a и c.

пересекается с a. Плоскость α определяется пересекающимися прямыми a и c.

Определите, может ли прямая b:

а) быть параллельной плоскости α;

б) пересекаться с плоскостью α;

в) лежать в плоскости α.

❷

Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая AM, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что прямая BC параллельна плоскости MAD.

❷

Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BK, не лежащая в плоскости квадрата. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости ABK.

3

Прямая a параллельна плоскости α. Постройте плоскость β, параллельную α и проходящую через прямую a.

3

Постройте плоскость, параллельную плоскости двух параллельных прямых a и b.

Вариант В1

Вариант В2

1

Известно, что плоскости α и β пересекаются по прямой c. Прямая l параллельна

прямой c.

плоскости β и является скрещивающейся с c.

Определите, может ли прямая l:

а) быть параллельной плоскости α;

б) пересекаться с плоскостью α;

в) лежать в плоскости α.

2

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Точка M — середина отрезка AD. Докажите, что плоскость MDC параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AB и BC.

2

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Точка M — середина отрезка AD. Через прямую BM и середину отрезка DC проведена плоскость. Докажите, что эта плоскость параллельна прямой AC.

3

Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 не лежат в одной плоскости и пересекаются в точке K, которая является серединой каждого из них.

Докажите, что плоскости AB_1C_1 и A_1BC параллельны.

Докажите, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

СП-6. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

Вариант А1	Вариант А2

1

Даны параллельные плоскости α и β. Параллельные прямые a и b пересекают плоскость α в точках A и B, а плоскость β — в точках A_1 и B_1.

Вариант А1	Вариант А2
Докажите, что $AB = A_1B_1$.	Докажите, что $\angle BAA_1 = \angle A_1B_1B$.

2

Перечислите геометрические фигуры, которые могут быть параллельными проекциями:

Вариант А1	Вариант А2
а) отрезка; б) параллелограмма.	а) луча; б) трапеции.

3

Определите, могут ли

Вариант А1	Вариант А2
две пересекающиеся прямые	две скрещивающиеся прямые

проектироваться:

а) в две пересекающиеся прямые;

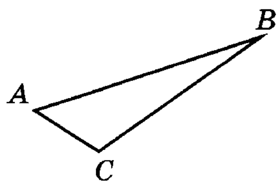
б) в две параллельные прямые;

в) в одну прямую;

г) в прямую и точку.

4

Треугольник ABC — параллельная проекция равнобедренного треугольника (AC — проекция основания).



Постройте проекцию

средней линии треугольника, соединяющей середины его боковых сторон.

биссектрисы треугольника, проведенной из вершины, противолежащей основанию.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Даны параллельные плоскости α и β.

В плоскости α проведена прямая a. Через точку B плоскости β проведена прямая b, параллельная a.

В плоскости β выбрана точка B, и через нее проведена прямая b, параллельная плоскости α.

Докажите, что прямая b лежит в плоскости β.

❷

Перечислите геометрические фигуры, которые могут быть параллельными проекциями:

а) окружности;
б) двух скрещивающихся прямых.

а) треугольника;
б) двух пересекающихся прямых.

❸

Определите, может ли при параллельном проектировании

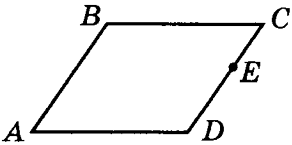
прямоугольника

ромба

получиться:

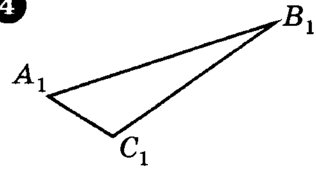
а) параллелограмм; **б) квадрат;**
в) трапеция; **г) отрезок.**

4



Параллелограмм $ABCD$ — параллельная проекция ромба. Постройте проекцию перпендикуляра, проведенного из точки E к прямой AC.

4



Треугольник $A_1B_1C_1$ — параллельная проекция равнобедренного треугольника ABC (A_1C_1 — проекция основания). Постройте проекцию перпендикуляра, проведенного из середины боковой стороны к основанию треугольника.

Вариант В1

Вариант В2

1

Даны параллельные плоскости α и β. Точки A и B лежат в плоскости α, а точки C и D — в плоскости β. Известно, что

В1: отрезки AB и CD равны, а отрезки AD и BC пересекаются. Определите, в каком отношении отрезки AD и BC делятся точкой пересечения.

В2: Отрезки AD и BC пересекаются и равны, а $AB = CD$. Найдите величину угла ACD.

2

Перечислите геометрические фигуры, которые могут быть параллельными проекциями:

В1:
а) двух параллельных отрезков;
б) острого угла.

В2:
а) двух параллельных прямых;
б) тупого угла.

3

Укажите расположение плоскости данного

правильного треугольника | квадрата

относительно плоскости проекции, если направление проектирования перпендикулярно плоскости проекции, а проекцией является:

а) равнобедренный треугольник;
б) правильный треугольник;
в) треугольник с высотой, равной высоте данного треугольника;
г) отрезок.

а) прямоугольник;
б) квадрат;
в) ромб;
г) отрезок.

4

Дана параллельная проекция окружности с центром в точке *O*. Постройте изображение

квадрата, описанного около данной окружности.

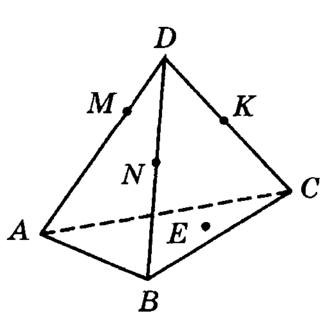
правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

СП-7*. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

Вариант 2

1



Точка *E* лежит в плоскости *ABC*.

Постройте точку пересечения

прямой DE с плоскостью MNK.

прямой DE с плоскостью BMC.

❷

Точка M не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Постройте линию пересечения

плоскостей ABM и CDM.

плоскостей BCM и ADM.

❸

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что

середины шести отрезков с концами в этих точках являются вершинами трех параллелограммов.

прямые, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, пересекаются в одной точке.

❹

Через середины двух медиан треугольника проведена плоскость, не совпадающая с плоскостью треугольника. Докажите, что проведенная плоскость параллельна одной из сторон треугольника.

❹

В плоскости α выбраны точки A и B, а в параллельной ей плоскости β — точки C и D, причем середины отрезков AC и BD не совпадают. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BD, параллельна плоскостям α и β.

❺

Дана параллельная проекция равнобокой описанной трапеции. Постройте проекции точек касания сторон трапеции со вписанной окружностью.

❺

Дана параллельная проекция равнобедренного прямоугольного треугольника. Постройте проекцию квадрата, вписанного в данный треугольник так, что две вершины квадрата лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах.

6

Дана параллельная проекция правильного шестиугольника *ABCDEF*.

Постройте проекции:

а) биссектрисы угла ABD;
б) биссектрисы угла между AC и BE.

а) биссектрисы угла BDE;
б) биссектрисы угла между CE и AD.

КП-1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Вариант А1 / Вариант А2

1

Даны параллельные плоскости α и β и прямая l, которая

А1: параллельна плоскости α.

А2: пересекает плоскость α.

Определите, может ли прямая l:

а) быть параллельной плоскости β;

б) пересекать плоскость β;

в) лежать в плоскости β.

2 (Вариант А1)

Две соседние вершины и точка пересечения диагоналей квадрата лежат в плоскости α. Докажите, что и две другие вершины квадрата лежат в той же плоскости.

2 (Вариант А2)

Сторона AB и диагональ BD прямоугольника $ABCD$ лежат в плоскости α. Докажите, что и вершина C прямоугольника лежит в той же плоскости.

3

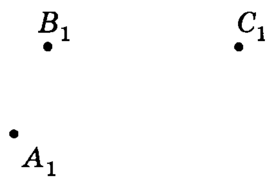
Плоскость, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает

сторону AB в точке A_1, а сторону BC — в точке C_1.

Найдите A_1C_1, если $AC = 12$ см, $BA_1 : BA = 1 : 3$.

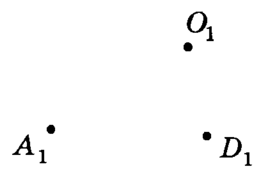
Найдите AC, если $A_1C_1 = 3$ см, $BC : BC_1 = 4 : 1$.

4



Точки A_1, B_1 и C_1 — параллельные проекции вершин A, B и C ромба $ABCD$ на данную плоскость. Постройте проекцию вершины D на эту плоскость.

4



Точки A_1, D_1 и O_1 — параллельные проекции вершин A и D квадрата $ABCD$ и точки пересечения его диагоналей O на данную плоскость. Постройте проекции вершин B и C на эту плоскость.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Прямая a и плоскость α

Б1: параллельны прямой b.

Б2: параллельны плоскости β.

Определите, может ли прямая a:

а) быть параллельной плоскости α;

б) пересекать плоскость α;

в) лежать в плоскости α.

2

Докажите, что

Б1: каждая из двух параллельных прямых

Б2: каждая из двух пересекающихся прямых

не может пересекать каждую из двух скрещивающихся прямых.

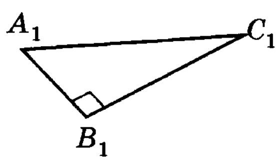
3

Точки A_1 и B_1 лежат в плоскости α, а точки A_2 и B_2 — в плоскости β, параллельной α, причем отрезки A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются в точке C.

Найдите A_1A_2, если $B_1B_2 = 18$ см, $B_1C = 8$ см, $CA_2 = 5$ см.

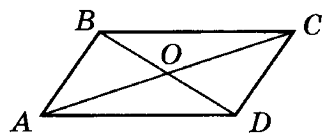
Найдите B_1B_2, если $A_1A_2 = 20$ см, $CA_2 = 12$ см, $B_1C = 6$ см.

4



Треугольник $A_1B_1C_1$ — проекция прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC, в котором $AB : BC = 1 : 3$. Постройте проекцию биссектрисы прямого угла этого треугольника.

4



Параллелограмм $ABCD$ — проекция ромба с острым углом 60° (углы B и D — проекции тупых углов ромба). Постройте проекцию перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к стороне ромба.

Вариант В1

Вариант В2

1

Плоскости α и β параллельны. Плоскость γ пересекает эти плоскости по прямым a и b соответственно, а прямая l

параллельна прямой a.

пересекается с прямой a.

Определите, может ли прямая l:

а) быть параллельной плоскостям β и γ;

б) пересекаться с плоскостями β и γ;

в) лежать хотя бы в одной из плоскостей β и γ.

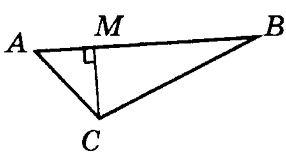
2

Докажите, что две различные прямые параллельны, если любая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую.

3

Плоскость α пересекает стороны угла ACB в точках A_1 и B_1, а параллельная ей плоскость β — в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите B_1B_2, если $CB_1 = 14$ см, $CA_1 : A_1B_1 = 2 : 5$, $A_1A_2 = A_1B_1$.

4



Треугольник ABC — проекция равнобедренного треугольника, причем AC — проекция его основания, а CM — высоты. Постройте проекцию центра окружности, описанной около треугольника.

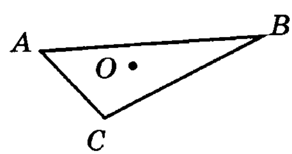
2

Докажите, что две различные плоскости параллельны, если любая прямая, пересекающая одну из них, пересекает и другую.

3

Из точки D, не лежащей ни в одной из двух параллельных плоскостей α и β, проведены два луча, пересекающие плоскость α в точках A_1 и A_2, а плоскость β — в точках B_1 и B_2 соответственно. Найдите A_1A_2, если $DB_2 : B_2A_2 = 2 : 3$, $DA_2 = 20$ см, $B_1B_2 = A_2B_2$.

4



Треугольник ABC — проекция треугольника, точка O — проекция центра описанной окружности. Постройте проекции высот треугольника.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

СП-8. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Вариант А1 | **Вариант А2**

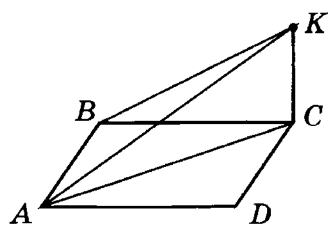
1

Прямые a и b перпендикулярны одной и той же прямой c. Могут ли прямые a и b

А1: пересекаться?

А2: быть скрещивающимися?

2



Прямая KC перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$ (см. рисунок).

А1: Найдите KB, если $KA = = \sqrt{34}$ см, $AC = 3\sqrt{2}$ см.

А2: Найдите KA, если $BC = 2$ см, $KB = \sqrt{21}$ см.

3

А1: Через точку O — точку пересечения диагоналей ромба $ABCD$ — проведена прямая SO, перпендикулярная плоскости ромба. Докажите, что прямая AC перпендикулярна плоскости BSD.

3

А2: Через вершину C прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB проведена прямая MC, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что прямая AC перпендикулярна плоскости MBC.

4

Через сторону AB прямоугольника $ABCD$ проведена плоскость α, перпендикулярная стороне BC. Докажите, что $AD \perp \alpha$.

4

Плоскость α перпендикулярна сторонам AD и BC четырехугольника $ABCD$, причем $AD \neq BC$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Через вершины A и B параллелограмма $ABCD$ проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, причем

$AA_1 \perp AD$.

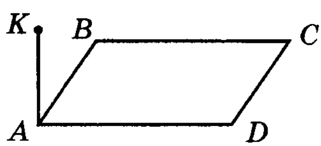
$BB_1 \perp BC$.

Определите взаимное расположение

а) прямых BB_1 и BC;
б) плоскостей A_1AD и B_1BC.

а) прямых AA_1 и AD;
б) плоскостей A_1AD и B_1BC.

2



Прямая KA перпендикулярна плоскости ромба $ABCD$ (см. рисунок).

Найдите KC, если $KB = \sqrt{19}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle D = 120°$.

Найдите KB, если $KC = \sqrt{57}$ см, $BD = 4$ см, $\angle C = 60°$.

3

Точка M не принадлежит плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $MA = MB = MC = MD$ и O — точка пересечения AC и BD. Докажите, что $MO \perp (ABC)$.

3

Точка M не принадлежит плоскости квадрата $ABCD$. Известно, что $\angle AMO = \angle CMO$, $\angle BMO = \angle DMO$, где O — точка пересечения диагоналей ромба. Докажите, что $MO \perp (ABC)$.

4

Даны три попарно перпендикулярных отрезка DA, DB и DC. Прямая l параллельна линии пересечения плоскостей ADC и DBC. Докажите, что $l \perp (DBA)$.

4

Прямоугольные треугольники ABC и ABD ($\angle ABC = \angle ABD = 90°$) имеют общий катет и не лежат в одной плоскости. Прямая l перпендикулярна прямым DC и BC. Докажите, что $l \parallel AB$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Даны две перпендикулярные прямые a и b и плоскость α. Возможно ли такое их взаимное расположение, при котором

В1:

а) обе прямые параллельны α?

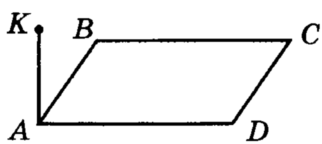
б) обе прямые параллельны одной и той же прямой, лежащей в α?

В2:

а) одна из прямых параллельна α, а другая перпендикулярна α?

б) обе прямые перпендикулярны α?

2



Прямая AK перпендикулярна плоскости прямоугольника $ABCD$ (см. рисунок).

В1: Найдите KA, если $KB = 13$ см, $KC = 12\sqrt{3}$ см, $KD = 12\sqrt{2}$ см.

В2: Найдите KC, если $KB = 12\sqrt{2}$ см, $KD = 13$ см, $BD = \sqrt{407}$ см.

3

Точка O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, прямая MA перпендикулярна

3

Точка D — середина стороны AC правильного треугольника ABC, прямая BK

плоскости квадрата. Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости AMO.

4

Плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b соответственно, а плоскость δ пересекает плоскости α, β и γ. Известно, что $a \perp \delta$. Докажите, что $b \perp \delta$.

перпендикулярна плоскости треугольника. Докажите, что прямая AC перпендикулярна плоскости BKD.

4

Плоскость γ пересекает две пересекающиеся плоскости α и β. Прямая l, по которой пересекаются α и β, и прямая k, не лежащая ни в одной из данных плоскостей, перпендикулярны плоскости γ. Докажите, что прямая k параллельна плоскостям α и β.

СП-9. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ. СВОЙСТВА ТОЧКИ, РАВНОУДАЛЕННОЙ ОТ ВЕРШИН МНОГОУГОЛЬНИКА

Вариант А1

Вариант А2

1

Из точки S к плоскости α проведены перпендикуляр SO и наклонные SA и SB.

Вариант А1. Найдите SB, если $SA = 20$ см, $AO = 16$ см, $OB = 5$ см.

Вариант А2. Найдите OA, если $SB = 17$ см, $OB = 15$ см, $SA = 10$ см.

2

Вариант А1. Точка S находится на расстоянии 4 см от плоскости правильного треугольника и равноудалена от всех его вершин. Периметр треугольника равен $9\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние

Вариант А2. Точка S удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$ на 13 см. Площадь квадрата равна 288 см^2. Найдите расстояние от точки S до плоскости квадрата.

от точки S до вершин треугольника.

❸

Отрезки AB, CD и EF упираются концами в две параллельные плоскости. Известно, что

проекция отрезка AB на одну из данных плоскостей больше проекции отрезка CD, но меньше проекции EF.

$AB > CD > EF$.

Сравните длины

отрезков AB, CD и EF.

проекций данных отрезков на одну из плоскостей.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Из точки к плоскости проведены две наклонные. Известно, что

разность длин наклонных равна 5 см, а их проекции равны 7 и 18 см.

длины наклонных 25 и 30 см, а разность длин их проекций — 11 см.

Найдите расстояние от данной точки до плоскости.

❷

Площадь прямоугольного треугольника — 24 см^2, а разность длин его катетов равна 2 см. Точка, удаленная от плоскости треугольника на 12 см, равноудалена от всех его вершин. Найдите расстояние от данной точки до вершин треугольника.

❷

Один из катетов прямоугольного треугольника на 4 см меньше гипотенузы, а второй катет равен 12 см. Точка вне плоскости треугольника удалена от каждой из его вершин на 26 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости треугольника.

3

Отрезки AB, CD и EF упираются концами в две параллельные плоскости. Отрезки AB_1, CD_1 и EF_1 — их проекции на одну из этих плоскостей. Известно, что

$\angle ABB_1 > \angle CDD_1 > \angle EFF_1$.

$\angle BAB_1 < \angle DCD_1 < \angle FEF_1$.

Сравните длины отрезков AB, CD и EF.

Вариант В1

1

Из точки к плоскости проведены две наклонные. Известно, что

одна из них имеет длину $4\sqrt{5}$ см, а длина ее проекции — 8 см. Угол между проекциями равен 60°, а отрезок, соединяющий основания наклонных, равен 7 см. Найдите длину второй наклонной.

Сколько решений имеет задача?

2

Точка, расположенная на расстоянии 60 см от плоскости равнобокой трапеции, равноудалена от всех ее вершин. Диагональ трапеции перпендикулярна ее боковой стороне, равной 30 см. Высота трапеции равна 24 см. Найдите расстояние от данной точки до вершин трапеции.

Вариант В2

1

одна из них имеет длину 11 см, а длина ее проекции — $2\sqrt{30}$ см. Угол между наклонными равен 60°, а отрезок, соединяющий основания наклонных, равен $\sqrt{97}$ см. Найдите длину проекции второй наклонной.

Сколько решений имеет задача?

2

Точка удалена от каждой из вершин равнобокой трапеции на 65 см. Диагональ трапеции равна 40 см и перпендикулярна боковой стороне, а проекция диагонали на большее основание трапеции равна 32 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости трапеции.

❸

Отрезки AB, CD и EF упираются концами в две параллельные плоскости. Известно, что $\cos\alpha > \cos\beta > \cos\gamma$, где α, β и γ —

углы между данными отрезками и их проекциями на одну из данных плоскостей соответственно.

углы между данными отрезками и перпендикулярами, проведенными из точек A, C и E соответственно на плоскость, содержащую точки B, D и F.

Сравните длины отрезков AB, CD и EF.

КП-2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Вариант А1

❶

Наклонная, проведенная из точки к плоскости, равна 10 см и образует со своей проекцией на данную плоскость угол 30°. Найдите расстояние от точки до плоскости.

❷

Через вершины A и B треугольника ABC проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, причем $AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AC$. Докажите, что $BB_1 \perp BC$.

Вариант А2

❶

Из точки, удаленной от плоскости на 8 см, к плоскости проведены наклонная и перпендикуляр, угол между которыми равен 60°. Найдите длину наклонной.

❷

Через вершины A и B треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1, причем $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AC$, $BB_1 \perp AB$, $BB_1 \perp BC$. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

3

Точка S не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$ и равноудалена от всех его вершин.

Найдите расстояние от точки S до плоскости прямоугольника, если стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см, а $SA =$ $= 13$ см.

Найдите расстояние от точки S до вершин прямоугольника, если расстояние от точки S до плоскости ABC равно 24 см, $AB = 12$ см, $BC = 16$ см.

4

Вершина A треугольника ABC является основанием перпендикуляра AD к плоскости треугольника. Докажите, что

если $\angle BDA = \angle CDA$, то $\angle DBC = \angle DCB$.

если $\angle DBA = \angle DCA$, то $\angle DBC = \angle DCB$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Через сторону AC треугольника ABC проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью треугольника. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если

стороны AB и BC соответственно равны 23 см и 33 см, а их проекции на плоскость α относятся как 2 : 3.

$AB : BC = 13 : 15$, а их проекции на плоскость α равны 10 см и 18 см.

2 (Б1)

Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AM, перпендикулярная прямым AD и AC. Докажите, что $AB \perp (AMD)$.

2 (Б2)

Прямая CK перпендикулярна катету AC и высоте CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Докажите, что $BC \perp (ACK)$.

3

Точка удалена от каждой из вершин равнобедренного треугольника на 65 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости треугольника, если его основание и боковая сторона соответственно равны 48 см и 40 см.

3

Площадь равнобедренного треугольника с основанием 48 см равна 768 см^2. На расстоянии 60 см от плоскости треугольника выбрана точка, находящаяся на одинаковом расстоянии от всех вершин треугольника. Найдите это расстояние.

4

Вершина *A* треугольника *ABC* является серединой отрезка *DE*, перпендикулярного плоскости треугольника. Докажите, что

$DB = BE$.

$DC = CE$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Отрезки *AB* и *CD* упираются концами в две параллельные плоскости, причем отрезок *AB* равен проекции отрезка *CD* на одну из плоскостей.

Найдите расстояние между плоскостями, если больший из отрезков равен 7 см, а меньшая из проекций — 1 см.

Найдите расстояние между плоскостями, если меньшая из проекций равна 3 см, а больший из отрезков — $\sqrt{41}$ см.

2

Через точку, не лежащую на прямой l, проведены две плоскости, одна из которых параллельна l, а другая — перпендикулярна l, а также прямая m,

2

Через точку, не лежащую на прямой l, проведены две различные плоскости, параллельные l, и прямая m, перпендикулярная l. Как расположена параллельная l. Как расположена прямая m по отношению к линии пересечения плоскостей?

прямая m по отношению к линии пересечения плоскостей?

❸

Точка вне плоскости квадрата удалена от каждой из его вершин на 40 см. Другая точка удалена от данной точки и от каждой из вершин квадрата на 25 см. Найдите площадь квадрата.

❸

Точка удалена от плоскости правильного треугольника на 32 см и равноудалена от всех его вершин. Другая точка удалена от вершин треугольника и от данной точки на 25 см. Найдите площадь данного треугольника.

❹

Определите геометрическое место точек, равноудаленных

от данной плоскости и от прямой, лежащей в этой плоскости (без доказательства).

от данной плоскости и от точки, лежащей в этой плоскости (без доказательства).

СП-10. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Вариант А1

❶

Отрезок MA — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB. Докажите, что $MC \perp BC$.

❷

Катет BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$)

Вариант А2

❶

Отрезок MA — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC. На стороне BC выбрана точка D, причем $MD \perp BC$. Докажите, что AD — высота треугольника ABC.

❷

Основание AC равнобедренного треугольника ABC лежит в лежит в плоскости α. Из вершины A к плоскости α проведен перпендикуляр AO. Найдите BC, если $OB = 6$ см, $OC = 10$ см.

плоскости α. Из вершины B к плоскости α проведен перпендикуляр BO. На стороне AC выбрана точка D так, что $OD \perp AC$. Найдите BD, если $AB = BC = 26$ см, $AC = 48$ см.

❸

Отрезок *KB* — перпендикуляр к плоскости квадрата *ABCD*. Постройте расстояние

от точки K до прямой AD.

от точки K до прямой AC.

Вариант Б1

❶

Отрезок B_1B — перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите перпендикулярность прямой AC и плоскости B_1OB.

❷

Из точки к плоскости прямоугольного треугольника с катетами 15 см и 20 см проведен перпендикуляр длиной 16 см. Основание перпендикуляра — вершина прямого угла треугольника. Найдите расстояние от данной точки до гипотенузы.

Вариант Б2

❶

Отрезок C_1C — перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите перпендикулярность прямой BD и плоскости C_1OC.

❷

Из точки к плоскости треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см проведен перпендикуляр, основание которого — вершина угла, противолежащего стороне 14 см. Расстояние от данной точки до этой стороны равно 20 см. Найдите расстояние от точки до плоскости треугольника.

❸

Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$. MK — перпендикуляр к плоскости квадрата. Постройте расстояние

от точки M до прямой AC.

от точки M до прямой BD.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите перпендикулярность

прямой AC и плоскости B_1BD.

прямой BD и плоскости C_1CA.

❷ (В1)

Из точки M к плоскости ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр AM длиной 8 см. Известно, что расстояние от точки M до прямой BC равно 10 см, $\angle B = 120°$. Найдите расстояние от точки M до прямой BD.

❷ (В2)

Из точки M к плоскости ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр BM. Известно, что $BD = 6$ см, $\angle A = 60°$, а расстояние от точки M до прямой CD равно 6 см. Найдите расстояние от точки M до прямой AC.

❸

Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). К плоскости трапеции проведен перпендикуляр KM (точка M лежит на стороне CD).

Диагональ BD является биссектрисой угла CDA. Постройте расстояние от точки K до прямой BD.

Диагональ AC является биссектрисой угла BCD. Постройте расстояние от точки K до прямой AC.

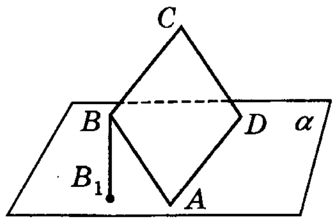
СП-11. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ. СВОЙСТВА ТОЧКИ, РАВНОУДАЛЕННОЙ ОТ СТОРОН МНОГОУГОЛЬНИКА

Вариант А1

Вариант А2

1

Через сторону AD квадрата $ABCD$ проведена плоскость α. Из вершины B на эту плоскость опущен перпендикуляр BB_1 (см. рисунок).



Вариант А1. Найдите проекцию диагонали BD на плоскость α, если $BD = 6\sqrt{2}$ см, $\angle B_1DA = 60°$.

Вариант А2. Найдите диагональ квадрата, если $B_1A = 2\sqrt{2}$ см, $\angle DB_1A = 45°$.

2

Вариант А1. Площадь правильного треугольника равна $27\sqrt{3}$ см², а расстояние от данной точки до каждой из сторон треугольника равно 5 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости треугольника.

Вариант А2. Точка удалена от каждой из сторон правильного треугольника на 10 см, а от плоскости треугольника — на 8 см. Найдите площадь данного треугольника.

3

Вариант А1. Перпендикуляр DD_1 проведен из точки D к плоскости угла ABC. Точка D_1 лежит на бис-

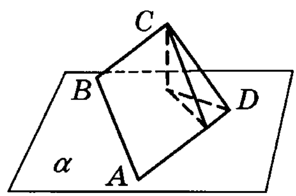
Вариант А2. Точка D не лежит в плоскости угла ABC и находится на одинаковом расстоянии от сторон сектрисе этого угла. Докажите, что точка D равноудалена от сторон угла.

этого угла. Отрезок DD_1 — перпендикуляр к плоскости ABC. Докажите, что точка D_1 лежит на биссектрисе угла ABC.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶



Через большее основание AD равнобокой трапеции $ABCD$ проведена плоскость α (см. рисунок).

Б1. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 10 см и 20 см, сторона BC удалена от плоскости α на 12 см, а угол между проекциями высоты и боковой стороны трапеции равен 45°.

Б2. Найдите расстояние от прямой BC до плоскости α, если боковая сторона и высота трапеции соответственно равны 13 см и 12 см, а угол между их проекциями на плоскость α равен 45°.

❷ (Б1)

Точка равноудалена от всех сторон прямоугольного треугольника с катетами 9 см и 12 см и находится на расстоянии 4 см от плоскости треугольника. Найдите расстояние от данной точки до сторон треугольника.

❷ (Б2)

Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника соответственно равны 12 см и 15 см. Расстояния от данной точки до каждой из сторон треугольника равны 5 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости треугольника.

❸

Из точки к плоскости равнобедренного треугольника с основанием 30 см и площадью 300 $см^2$ проведен перпендикуляр длиной 5 см, основание которого лежит на основании треугольника. Данная точка находится на одинаковом расстоянии от боковых сторон треугольника. Найдите это расстояние.

❸

Из точки к плоскости равнобедренного треугольника проведен перпендикуляр, основание которого лежит на основании треугольника. Основание и боковая сторона треугольника равны 30 см и 25 см. Данная точка удалена от каждой из боковых сторон треугольника на 15 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости треугольника.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость α. Найдите расстояние от прямой BC до плоскости α, если

В1: площадь ромба равна 20 $см^2$, сторона — 5 см, а угол между проекциями стороны CD и высоты CH ($H \in AD$) равен 45°.

В2: площадь ромба равна 80 $см^2$, высота — 8 см, а угол между проекцией стороны CD и прямой AD равен 45°.

❷

Из точки, удаленной от плоскости квадрата на 36 см, к сторонам квадрата проведены равные перпендикуляры. Другая точка того же полупространства удалена от этих перпендикуляров и от плоскости квадрата на 10 см. Найдите площадь квадрата.

❷

Перпендикуляры, проведенные из данной точки к сторонам правильного треугольника, равны. Другая точка того же полупространства удалена от этих перпендикуляров и от плоскости треугольника на 10 см, а от первой точки — на 26 см. Найдите площадь треугольника.

3

Диагональ прямоугольника равна 20 см, а его площадь — 192 см^2. Из точки вне плоскости прямоугольника, удаленной от каждой из его больших сторон на $6\sqrt{5}$ см, к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр, основание которого лежит на меньшей стороне. Найдите расстояния от данной точки до меньших сторон прямоугольника.

3

Диагональ прямоугольника равна 20 см. Из точки, удаленной от каждой из меньших сторон прямоугольника на $8\sqrt{5}$ см, к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр длиной 16 см, основание которого лежит на одной из больших сторон. Найдите расстояния от данной точки до больших сторон прямоугольника.

СП-12. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Вариант А1	Вариант А2

1

Прямая SA проходит через вершину прямоугольника $ABCD$ и перпендикулярна его сторонам AB и AD. Докажите перпендикулярность плоскостей

SAD и ABC.	SAB и ABC.

2

Плоскости равнобедренных треугольников ABD и ABC с общим основанием AB перпендикулярны.

Найдите CD, если $AD = \sqrt{31}$ см, $AB = 6$ см, $\angle ACB = 60°$.	Найдите CD, если $AD = 10$ см, $AB = 16$ см, $\angle CAB = 45°$.

❸

Даны две перпендикулярные плоскости α и β.

Точка A удалена от плоскости α на 8 см, а от линии пересечения плоскостей — на 17 см. Найдите расстояние от точки A до плоскости β.

Точка A удалена от линии пересечения этих плоскостей на $8\sqrt{2}$ см и находится на одинаковом расстоянии от α и β. Найдите это расстояние.

Вариант Б1

❶

Точка S равноудалена от всех вершин квадрата $ABCD$. Докажите перпендикулярность плоскостей SAC и SBD.

Вариант Б2

❶

Прямая SO проходит через точку пересечения диагоналей ромба $ABCD$ и перпендикулярна каждой из них. Докажите перпендикулярность плоскостей SAC и SBD.

❷

Квадрат $ABCD$ и прямоугольник AB_1C_1D с общей стороной AD лежат в двух перпендикулярных плоскостях.

Найдите площадь квадрата, если $AB_1 = 8$ см, $CB_1 = 10$ см.

Найдите площадь прямоугольника, если площадь квадрата равна 9 см^2, а $BC_1 = \sqrt{43}$ см.

❸

Плоскости α и β перпендикулярны и пересекаются по прямой c. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по параллельным прямым a и b соответственно.

Найдите расстояние между прямыми a и c, если расстояние

Найдите расстояние между прямыми b и c, если расстоямежду a и b равно 30 см, а между b и c — 24 см.

ние между a и c равно 12 см, а между a и b — 20 см.

Вариант В1

1

Прямая MD перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$. Докажите перпендикулярность плоскостей MBC и MDC.

2

Прямоугольник $ABCD$ перегнули по диагонали BD так, что плоскости ABD и CBD оказались перпендикулярными. Найдите расстояние между точками A и C, если AB = 30 см, BC = 40 см.

Вариант В2

1

Прямая DA перпендикулярна плоскости треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Докажите перпендикулярность плоскостей DAC и DBC.

2

Прямоугольник $ABCD$ перегнули по диагонали AC так, что плоскости ABC и ADC оказались перпендикулярными. Найдите расстояние между точками B и D, если AB = 20 см, AC = 25 см.

3

Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. Отрезок AB лежит в плоскости α и не пересекает плоскость β. Прямая b лежит в плоскости β и параллельна c. Точка M — середина отрезка AB. Найдите

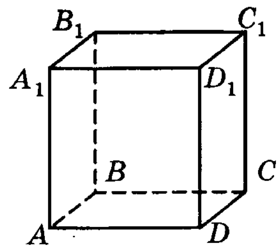
В1: расстояние от точки M до прямой b, если точка A удалена от прямой b на 13 см, а расстояния от точек A и B до прямой c равны 5 см и 27 см соответственно.

В2: расстояние от точки B до прямой c, если точки A и M удалены от прямой b на 13 см и 20 см соответственно, а расстояние от точки A до прямой c равно 5 см.

СП-13*. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Вариант А1 **Вариант А2**

1



Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Постройте общий перпендикуляр скрещивающихся прямых

Вариант А1

а) A_1A и CD;
б) A_1B и C_1D.

Вариант А2

а) C_1C и AB;
б) AC и B_1D_1.

2

Вариант А1

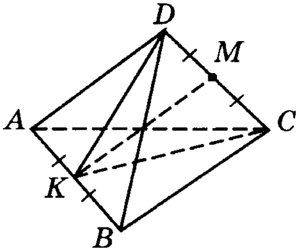
Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена прямая l, перпендикулярная плоскости треугольника. Периметр треугольника равен $24\sqrt{3}$ м. Найдите расстояние между:
а) прямой l и высотой BD;
б) прямой l и стороной BC.

Вариант А2

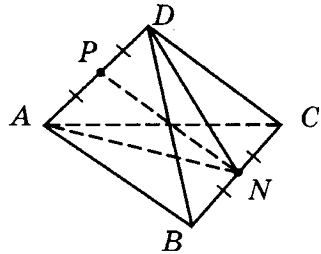
Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая l, перпендикулярная плоскости квадрата. Площадь квадрата равна 18 м^2. Найдите расстояние между:
а) прямой l и стороной AD;
б) прямой l и диагональю AC.

3

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Расстояние между любыми двумя из данных точек равно a (см. рисунок).



$AK = KB = DM = MC$.
Докажите, что отрезок KM — расстояние между AB и CD, и найдите его длину.

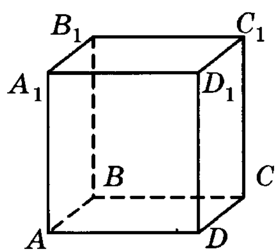


$AP = PD = BN = NC$.
Докажите, что отрезок PN — расстояние между AD и BC, и найдите его длину.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶



Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Постройте общий перпендикуляр скрещивающихся прямых:

Вариант Б1:

а) B_1D и C_1C;
б) AC и B_1D.

Вариант Б2:

а) A_1C и D_1D;
б) BD и A_1C.

❷ (Б1)

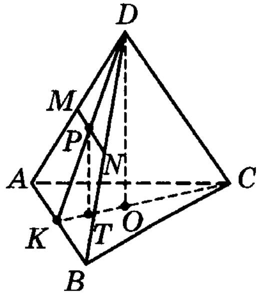
Через середину N катета AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) проведена прямая MN, перпендикулярная плоскости ABC. Найдите расстояние от прямой MN до гипотенузы AC, если $AB =$ $= 40$ см, $AC = 50$ см.

❷ (Б2)

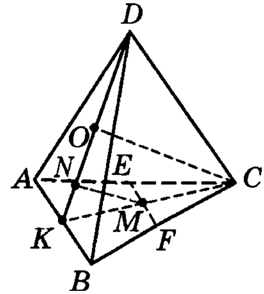
Гипотенуза AC прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α, отстоящей от вершины B на 36 см. Найдите расстояние между AC и прямой, проходящей через точку B перпендикулярно α, если $AB = 75$ см, $BC = 100$ см.

❸

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Расстояние между любыми двумя из данных точек равно a (см. рисунок).



Отрезок DO — перпендикуляр к плоскости ABC. Точки K, M и N — середины отрезков AB, AD и BD соответственно, $PT \parallel DO$. Докажите, что отрезок PT — расстояние между MN и CK, и найдите его длину.



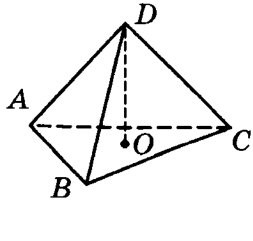
Отрезок CO — перпендикуляр к плоскости ADB. Точки E, F и K — середины отрезков AC, BC и AB соответственно, $MN \parallel CO$. Докажите, что отрезок MN — расстояние между EF и DK, и найдите его длину.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Дан правильный тетраэдр $ABCD$ (все грани — правильные треугольники). Точка O — центр треугольника ABC (см. рисунок).



Постройте общий перпендикуляр скрещивающихся прямых:

а) DO и AB;
б) AD и BC.

а) DO и BC;
б) AB и DC.

❷

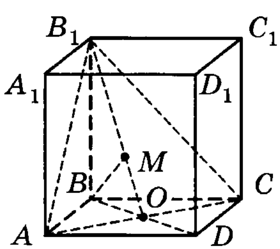
Точки M и N — середины сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$. Прямоугольник перегнули по прямой MN так, чтобы плоскости MNA и MNC были перпендикулярны. Найдите расстояние между прямыми AC и MN, если диагональ прямоугольника равна 5 см, а $MN = \sqrt{17}$ см.

❷

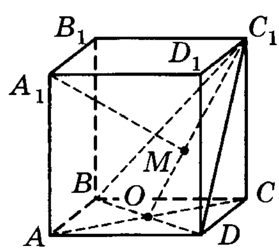
Точки M и N — середины сторон BC и AD квадрата $ABCD$. Квадрат перегнули по прямой MN так, чтобы плоскости MNB и MND были перпендикулярны. Найдите расстояние между прямыми MN и BD, если диагональ квадрата равна $4\sqrt{2}$ см.

❸

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a (см. рисунок).



Точка M — центр треугольника AB_1C, точка O — центр квадрата $ABCD$. Докажите, что отрезок MO — расстояние между BM и AC, и найдите его длину.



Точка M — центр треугольника BC_1D, точка O — центр квадрата $ABCD$. Докажите, что отрезок MO — расстояние между A_1M и BD, и найдите его длину.

СП-14*. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 / Вариант 2

1

Решите задачи на доказательство.

а) Докажите, что

Вариант 1: если прямая параллельна плоскости, то расстояния от данной прямой до всех прямых плоскости, не параллельных данной, одинаковы.

Вариант 2: расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки пересечения одной из прямых с перпендикулярной ей плоскостью до проекции второй прямой на эту плоскость.

б) Докажите, что

Вариант 1: если вершины параллелограмма, не пересекающего плоскость, не принадлежат данной плоскости, то суммы расстояний от противолежащих вершин параллелограмма до данной плоскости равны.

Вариант 2: если вершины правильного треугольника, не пересекающего плоскость, не принадлежат данной плоскости, то расстояние от центра треугольника до нее равно среднему арифметическому расстояний от вершин треугольника до этой плоскости.

в) Из точки A к плоскости проведены наклонные AB и AC и перпендикуляр AD. Докажите, что

Вариант 1: если $\angle ABD + \angle ACD = 90°$, то $AD^2 = DB \cdot DC$.

Вариант 2: если $\angle BAD + \angle CAD = 90°$, то $DB : DC = AB^2 : AC^2$.

2

Найдите геометрическое место:

а) прямых, проходящих через данную точку прямой перпендикулярно этой прямой;
б) прямых, проходящих через точку вне данной плоскости параллельно этой плоскости;

в) точек, делящих пополам отрезки с одним концом в данной точке, а другим — на данной плоскости, не содержащей эту точку.

а) прямых, проходящих через данную точку вне прямой перпендикулярно данной прямой;
б) прямых, пересекающих одну из двух скрещивающихся прямых и параллельных второй прямой;
в) середин отрезков, концы которых лежат на каждой из двух данных параллельных плоскостей.

3

Решите задачи на построение.

а) Даны две скрещивающиеся прямые и точка, не принадлежащая им. Постройте прямую, проходящую через данную точку и пересекающую данные прямые.
б) На данном изображении прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, постройте изображение центра окружности и точек ее касания со сторонами трапеции, если острый угол трапеции равен 60°.
в) Даны две пересекающиеся плоскости и две точки, каждая из которых лежит в одной из данных плоскостей и не лежит в другой. Постройте плоскость, проходящую через данные точки и параллельную линии пересечения данных плоскостей.

а) Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Постройте прямую, пересекающую две из данных прямых и параллельную третьей прямой.

б) На данном изображении равнобокой трапеции, в которую можно вписать окружность, постройте изображение центра окружности и точек ее касания со сторонами трапеции, если тупой угол трапеции равен 120°.
в) Даны две параллельные плоскости и по одной точке в каждой из них. Постройте плоскость, проходящую через данные точки и перпендикулярную данным плоскостям.

4

Решите вычислительные задачи.

а) Точка вне плоскости параллелограмма удалена от каждой из его вершин на 10 см и от каждой из его сторон — на 8 см. Найдите площадь параллелограмма и расстояние от данной точки до его плоскости.

б) Точка вне плоскости правильного треугольника удалена от каждой из его вершин на $4\sqrt{7}$ см. Периметр треугольника равен 36 см. Найдите расстояние от стороны треугольника до прямой, проходящей через противолежащую вершину треугольника и данную точку.

в) Из точки к плоскости прямоугольного треугольника с катетами 21 см и 28 см на равных расстояниях от катетов проведен перпендикуляр, основание которого лежит на гипотенузе. Из той же точки к меньшему катету проведен перпендикуляр длиной 15 см. Другая точка на первом перпендикуляре равноудалена от второго перпендикуляра и от плоскости треугольника. Найдите расстояние между данными точками.

а) Точка вне плоскости треугольника удалена от каждой из его вершин на 5 см и от каждой из его сторон — на 4 см. Найдите площадь треугольника и расстояние от данной точки до его плоскости.

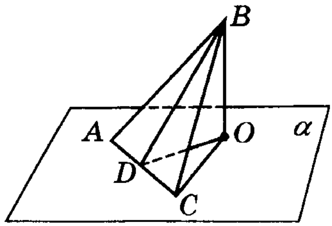
б) Точка вне плоскости квадрата удалена от каждой из его вершин на $6\sqrt{2}$ см. Площадь квадрата равна 16 см^2. Найдите расстояние от стороны квадрата до прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно противолежащей стороне квадрата.

в) Катет прямоугольного треугольника равен 21 дм, а гипотенуза — 35 дм. Из точки вне плоскости треугольника, равноудаленной от катетов, к плоскости треугольника проведен перпендикуляр длиной 9 дм с основанием на гипотенузе. Другая точка прямой, содержащей данный перпендикуляр, равноудалена от первой точки и данного катета. Найдите расстояние между данными точками.

КП-3. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Вариант А1

❶



Плоскость α проходит через основание AC равнобедренного треугольника ABC, $BO \perp \alpha$, BD — высота треугольника (см. рисунок).

а) Докажите перпендикулярность прямой AC и плоскости BDO.

б) Докажите перпендикулярность плоскостей BCO и α.

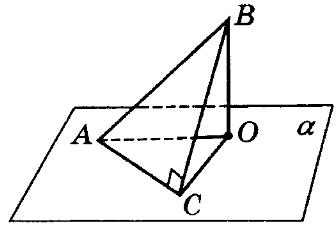
в) Найдите периметр ABC, если $BO = 3$ см, $DO = \sqrt{7}$ см, $CO = 4$ см.

❷

Точка, удаленная от плоскости квадрата на 8 см, равноудалена от всех его сторон. Площадь квадрата равна 144 см^2. Найдите расстояния от данной точки до сторон квадрата.

Вариант А2

❶



Плоскость α проходит через катет AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), $BO \perp \alpha$ (см. рисунок).

а) Докажите перпендикулярность прямой AC и плоскости BOC.

б) Докажите перпендикулярность плоскостей BAO и α.

в) Найдите периметр ABC, если $AC = 12$ см, $CO = 4$ см, $BO = 3$ см.

❷

Точка удалена от каждой из сторон квадрата на 13 см. Диагональ квадрата равна $10\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости квадрата.

❸

Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой *l*. Отрезки *OA* и

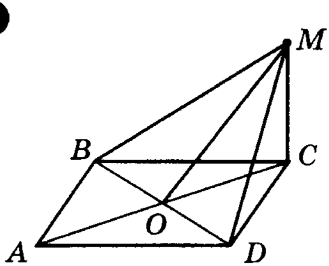
OB, лежащие в плоскостях α и β соответственно, перпендикулярны прямой l, а их общий конец — точка O — лежит на прямой l.

Найдите длину отрезка AB, если $OA = 20$ см, а $OB : AB = 12 : 13$.

Найдите длины отрезков OA и OB, если $AB = 40$ см, а $OA : OB = 3 : 4$.

Вариант Б1

1



Через вершину C ромба $ABCD$ проведена прямая MC, перпендикулярная сторонам ромба BC и CD. Точка O — точка пересечения диагоналей ромба (см. рисунок).

а) Докажите перпендикулярность прямой BD и плоскости MOC.

б) Докажите перпендикулярность плоскостей MBD и MOC.

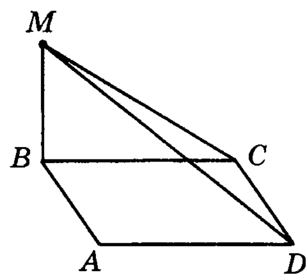
в) Найдите площадь ромба, если $MB = 10$ см, $MO = 8$ см, $BD : AC = 2 : 3$.

2

Стороны треугольника равны 25 см, 29 см и 36 см. Точка вне плоскости треугольника удалена от каждой из его сто-

Вариант Б2

1



Через вершину B прямоугольника $ABCD$ проведена прямая MB, перпендикулярная сторонам прямоугольника AB и BC (см. рисунок).

а) Докажите перпендикулярность прямой CD и плоскости MBC.

б) Докажите перпендикулярность плоскостей MCD и MBC.

в) Найдите площадь прямоугольника, если $MD = 13$ см, $MC = 12$ см, $AD : CD = 8 : 5$.

2

Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Точка, равноудаленная от всех сторон треугольника, находится рон на 17 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости треугольника.

на расстоянии 3 см от плоскости треугольника. Найдите расстояния от данной точки до сторон треугольника.

3

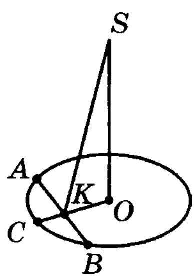
Концы отрезка принадлежат двум перпендикулярным плоскостям.

Сумма расстояний от концов отрезка до данных плоскостей равна 22 см, а его проекции на плоскости равны 20 см и 24 см. Найдите длину отрезка.

Сумма проекций отрезка на данные плоскости равна 44 см, а его концы удалены от этих плоскостей на 7 см и 15 см. Найдите длину отрезка.

Вариант В1

1



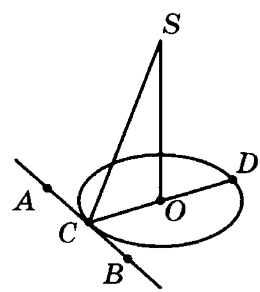
Отрезок SO — перпендикуляр к плоскости окружности, проходящий через ее центр — точку O. Через середину хорды AB — точку K — проведен радиус OC (см. рисунок).

а) Докажите перпендикулярность прямой AB и плоскости SCO.

б) Докажите перпендикулярность плоскостей SAB и SCO.

Вариант В2

1



Отрезок SO — перпендикуляр к плоскости окружности, проходящий через ее центр — точку O. В плоскости окружности через точку C проведена касательная AB (см. рисунок).

а) Докажите перпендикулярность прямой AB и плоскости SCD.

б) Докажите перпендикулярность плоскостей SAB и SCD.

в) Найдите угол ACB, если $SK = 4$ см, $SB = 5$ см, $OC = 6$ см.

2

Из точки к плоскости прямоугольного треугольника с катетами 21 см и 28 см проведен перпендикуляр длиной 9 см. Основание перпендикуляра лежит на гипотенузе треугольника, а расстояния от данной точки до катетов одинаковы. Найдите эти расстояния.

в) Найдите угол ADC, если $SA = 10$ см, $SC = 8$ см, $OC = 3$ см.

2

Из точки к плоскости прямоугольного треугольника с катетами 24 см и 32 см проведен перпендикуляр, основание которого лежит на большем катете. Меньший катет и гипотенуза треугольника удалены от данной точки на 20 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости треугольника.

3

Концы отрезка принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Известно, что

проекции отрезка на данные плоскости равны. Середина отрезка удалена от прямой пересечения плоскостей на $2\sqrt{2}$ см. Найдите расстояния от концов отрезка до прямой пересечения плоскостей.

расстояния от концов отрезка до прямой пересечения плоскостей равны $2\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние от середины отрезка до прямой пересечения плоскостей.

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

СП-15. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вариант А1	Вариант А2

❶

Даны точки: $A(2;-4;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;-1)$, $D(-4;0;-2)$, $E(3;4;5)$.

Укажите среди них точки, которые лежат

Вариант А1	Вариант А2
а) на оси z;	а) на оси y;
б) в плоскости xy.	б) в плоскости xz.

в) Найдите расстояние

Вариант А1	Вариант А2
от точки E до плоскости xz.	от точки A до плоскости yz.

г) Определите, пересекается ли с плоскостью xy

Вариант А1	Вариант А2
отрезок CE.	отрезок DE.

❷

Даны точки

Вариант А1	Вариант А2
$A(2;-1;0)$ и $B(-4;2;2)$.	$A(-1;4;3)$ и $B(5;-2;0)$.

а) Найдите координаты середины отрезка AB.

б) Точка B — середина отрезка AC. Найдите координаты точки C.

в) Найдите длину отрезка AB.

❸

Дан треугольник ABC с вершинами в точках

Вариант А1	Вариант А2
$A(7;3;-2)$, $B(1;3;6)$, $C(0;0;-1)$.	$A(2;0;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;4;0)$.

а) Найдите длину средней линии треугольника, параллельной

стороне AB. | стороне BC.

б) Докажите, что треугольник ABC —

равнобедренный, и укажите его основание. | прямоугольный, и укажите его гипотенузу.

4

Точка C является серединой отрезка AB, причем

точка A лежит в плоскости yz, а точка B — на оси x. | точка A лежит на оси z, а точка B — в плоскости xy.

Найдите координаты концов отрезка и его длину, если

$C(2;6;3)$. | $C(3;2;6)$.

Вариант Б1 | Вариант Б2

1

Даны точки $A(1;-2;3)$, $B(-1;2;-3)$, $C(-1;-2;3)$, $D(-1;-2;-3)$, $E(4;4;3)$.

Укажите среди них точки, которые

а) определяют прямую, параллельную оси x;
б) лежат ниже плоскости xy.

а) определяют прямую, параллельную оси y;
б) лежат выше плоскости xy.

в) Найдите расстояние

от точки E до оси абсцисс. | от точки E до оси ординат.

г) Определите, какие координатные плоскости пересекают

отрезок AD. | отрезок BC.

2

Даны точки

$A(-2;3;5)$ и $C(3;-1;2)$. | $A(1;2;2)$ и $C(4;-2;-1)$.

а) Точка C — середина отрезка AB. Найдите координаты точки B.

б) Найдите точку, равноудаленную от A и C и лежащую на оси

аппликат. | абсцисс.

в) Точки A_1 и C_1 — основания перпендикуляров, проведенных из точек A и C

к плоскости yz. | к плоскости xy.

Найдите A_1C_1.

3

Дан треугольник ABC с вершинами в точках

$A(4;0;-2)$, $B(-16;8;-18)$, $C(2;-4;-6)$. | $A(3;5;0)$, $B(3;1;0)$, $C(0;-6;0)$.

а) Найдите длину медианы, проведенной из вершины C.

б) Найдите координаты точки D, если $ABCD$ — параллелограмм.

4

Докажите, что точки

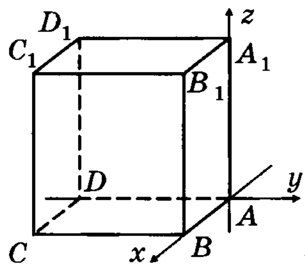
$M(1;7;5)$, $N(-5;4;-7)$, $K(-3;5;-3)$ | $M(6;-1;0)$, $N(3;1;-1)$, $K(0;3;-2)$

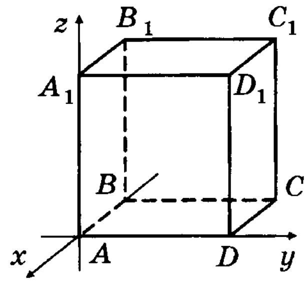
лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

Вариант В1 | Вариант В2

1

Одна из вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ совпадает с началом координат, а три его ребра лежат на координатных осях (см. рисунок).





Ребро куба равно 1.

а) Найдите координаты точек A_1, B, D_1, C_1.

б) Запишите уравнения плоскостей $A_1B_1C_1$ и C_1CD.

в) Найдите длину диагонали DB_1.

г) Укажите координаты какой-либо точки E, если отрезок C_1E пересекает

плоскости xz и yz, но не пересекает плоскость xy.

плоскости xy и yz, но не пересекает плоскость xz.

❷

Даны точки

$C(-2;4;2)$ и $D(4;0;-2)$.

$C(4;1;-1)$ и $D(0;5;5)$.

а) Точки C и D делят отрезок AB на три равные части. Найдите координаты концов отрезка AB.

б) Найдите целочисленные координаты какой-либо точки M, которая

лежит в плоскости xz и равноудалена от C и D.

лежит в плоскости yz и равноудалена от C и D.

❸

Даны точки

$E(1;2;1)$, $F(2;4;-4)$, $K(4;1;-1)$.

$E(8;2;-2)$, $F(4;8;-8)$, $K(2;4;2)$.

Эти точки являются серединами сторон треугольника ABC. Найдите координа-

ты вершин треугольника ABC и укажите вершину, ближайшую

к плоскости yz. | к плоскости xz.

4

Составьте уравнение сферы с диаметром MN, если

$M(3;-2;3)$, $N(-1;2;5)$. | $M(-3;4;3)$, $N(5;-2;-1)$.

СП-16. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ (СИММЕТРИЯ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС, ПОДОБИЕ)

Вариант А1 | Вариант А2

1

Даны точки $A(-1;3;2)$ и $B(5;-1;4)$. Запишите координаты точек, симметричных

точке A | точке B

относительно:

а) начала координат;

б) точки B; | б) точки A;

в) плоскости yz; | в) плоскости xy;

г) оси x. | г) оси z.

2

Параллельный перенос в пространстве задан формулами:

$x' = x + 2,\ y' = y - 1,\ z' = z - 3.$ | $x' = x - 4,\ y' = y + 2,\ z' = z - 1.$

а) В какую точку при таком переносе переходит точка $A(1;0;-2)$?

б) Какая точка при таком переносе переходит в точку $B'(3;4;-5)$?

3

При гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом k треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$.

а) Найдите $\angle C_1$, если

$\angle A = 72°$, $\angle B_1 = 38°$. | $\angle A_1 = 100°$, $\angle B = 28°$.

б) Найдите координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$, если

$k=3$, $A(0;0;-2)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$. | $k=2$, $A(4;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;2)$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Даны точки

$A(-2;1;4)$ и $B(6;-3;2)$. | $A(3;-2;8)$ и $B(-1;4;0)$.

Запишите координаты точек, симметричных середине отрезка AB относительно:

Вариант Б1:
а) плоскости xz;
б) оси ординат;
в) точки A;
г) прямой AB.

Вариант Б2:
а) плоскости yz;
б) оси аппликат;
в) точки B;
г) прямой AB.

2

При параллельном переносе точка

$A(-3;-2;1)$ | $A(2;-4;3)$

переходит в точку

$B(1;0;3)$. | $B(-3;1;8)$.

а) В какую точку при таком переносе переходит точка $C(1;-1;2)$?

б) Какая точка при таком переносе переходит в начало координат?

3

Из точки S проведены три луча, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1, а параллельную ей плоскость β — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно.

а) Докажите подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$

по двум углам. | по трем сторонам.

б) Найдите неизвестные стороны треугольников, если

$A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 9$ см, $A_2C_2 = 22$ см, $A_2B_2 = 12$ см. | $B_1C_1 = 3$ см, $A_1C_1 = 5$ см, $A_2C_2 = 15$ см, $A_2B_2 = 18$ см.

Вариант В1 | Вариант В2

1

Даны точки

$A(-4;3;1)$ и $B(2;-1;5)$. | $A(6;-2;1)$ и $B(2;4;-3)$.

Запишите координаты точек, симметричных точке C — середине отрезка AB — относительно:

В1:
а) точки $K(-2;1;-3)$;
б) середины отрезка AC;
в) плоскости $x = 1$;
г) прямой пересечения плоскостей $x = y$ и $z = 0$.

В2:
а) точки $K(2;-1;3)$;
б) середины отрезка CB;
в) плоскости $y = 2$;
г) прямой пересечения плоскостей $x = y$ и $z = 0$.

2

Отрезок OA — радиус сферы с центром в точке O, где

$O(1;-1;3)$, $A(-1;3;-1)$. | $O(2;-3;4)$, $A(4;1;0)$.

При параллельном переносе центр сферы переходит в точку, диаметрально противоположную точке A.

а) Составьте уравнение сферы, полученной в результате такого переноса.

б) В какую точку при таком переносе переходит середина отрезка AO?

3

Через точку S, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены три прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1, а плоскость β — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно.

а) Докажите подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$

по трем сторонам.

по двум сторонам и углу между ними.

б) Найдите стороны треугольника $A_2B_2C_2$, если

$A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 8$ см, $\angle A_2 = 60°$, а периметр треугольника $A_2B_2C_2$ равен 60 см.

$B_1C_1 = 7$ см, $A_1B_1 = 8$ см, $\angle B_2 = 120°$, а периметр треугольника $A_2B_2C_2$ равен 84 см.

СП-17. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ. УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Вариант А1

Вариант А2

1

Из точки S к плоскости α проведена наклонная SA.

Найдите длину наклонной и ее проекции, если точка S

Найдите длину проекции наклонной и расстояние от точудалена от плоскости α на 6 см, а наклонная образует с плоскостью угол 30°.

2

Через гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α. Найдите угол наклона катета BC к плоскости α, если $AC = 24$ дм, $AB = 26$ дм, а точка C удалена от плоскости α на 5 дм.

3

Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена плоскость, параллельная стороне BC. Докажите, что стороны AB и AC образуют с этой плоскостью равные углы.

4*

Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая, образующая со стороной BC угол 30°. Найдите угол между данной прямой и прямой AD.

ки S до плоскости α, если наклонная равна 6 см и образует с плоскостью угол 60°.

2

Через катет AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90°$) проведена плоскость α. Найдите угол наклона гипотенузы к плоскости α, если $AC = 6$ дм, $AB = 8$ дм, а точка C удалена от плоскости α на 5 дм.

3

Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена плоскость, параллельная диагонали BD. Докажите, что стороны AB и AD образуют с этой плоскостью равные углы.

4*

Через вершину A трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD проведена прямая под углом 45° к стороне AD. Найдите угол между этой прямой и прямой BC.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Из точки к плоскости проведены две наклонные.

Найдите расстояние от данной точки до плоскости, если наклонные образуют с плоскос-

Найдите расстояние между основаниями наклонных, если данная точка удалена от плостью углы, равные 30°, между собой — угол 60°, а расстояние между основаниями наклонных равно 8 дм.

❷

Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная основанию AC. Найдите углы наклона боковых сторон к этой плоскости, если основание AC равно 12 см и удалено от данной плоскости на 5 см, а площадь треугольника равна 48 см^2.

❸

Докажите, что если точка вне плоскости треугольника равноудалена от всех его вершин, то отрезки, соединяющие эту точку с вершинами треугольника, одинаково наклонены к плоскости треугольника.

кости на $2\sqrt{2}$ дм, а наклонные образуют с плоскостью углы, равные 45°, а между собой — прямой угол.

❷

Через вершину A ромба $ABCD$ проведена плоскость, параллельная диагонали BD. Найдите углы наклона сторон AB и AD к этой плоскости, если диагональ BD равна 16 см и удалена от данной плоскости на 5 см, а площадь ромба равна 96 см^2.

❸

Докажите, что если наклонные, соединяющие данную точку с вершинами треугольника, одинаково наклонены к плоскости треугольника, то данная точка равноудалена от всех вершин треугольника.

❹*

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы между прямыми

а) AB и C_1D;
б) AB_1 и BC.

а) A_1B и C_1D;
б) CD и D_1A.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Через сторону AC равностороннего треугольника ABC проведена плоскость α. BO — перпендикуляр к плоскости α.

а) Обоснуйте угол между прямой *BO* и плоскостью *ABC*.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если прямая BO образует с плоскостью ABC угол 30°, а точка O удалена от плоскости ABC на 3 см.

б) Найдите расстояние от точки O до плоскости ABC, если прямая BO образует с плоскостью ABC угол 60°, а площадь треугольника ABC равна $16\sqrt{3}$ см^2.

2

Через вершину A ромба $ABCD$ проведена плоскость, параллельная диагонали BD. Найдите углы наклона прямых CB и CD к этой плоскости, если прямая BD удалена от данной плоскости на 4 дм, а периметр ромба равен 32 дм.

2

Плоскость проходит через вершину B квадрата $ABCD$ параллельно диагонали AC. Найдите углы наклона прямых DA и DC к данной плоскости, если прямая AC удалена от нее на 2 дм, а площадь квадрата равна 8 дм^2.

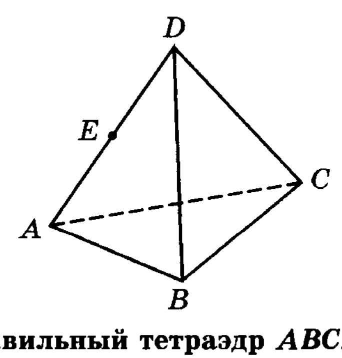
3

Через вершину прямого угла проведен луч, образующий с его сторонами углы, равные 60°. Найдите угол, который образует этот луч с плоскостью данного угла.

3

Три луча с общим началом попарно образуют углы, равные 60°. Найдите угол наклона одного из лучей к плоскости двух других.

4*



Дан правильный тетраэдр *ABCD* (все грани — правильные треугольники).

Точка E — середина AD (см. рисунок). Найдите углы между прямыми

а) AC и BD;
б) AB и CE.

а) AB и DC;
б) BE и AC.

СП-18. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ. ПЛОЩАДЬ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКА

Вариант А1

❶

Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Найдите угол между α и β, если

точка, лежащая в плоскости α, удалена от плоскости β на $2\sqrt{2}$ м, а от прямой c — на 4 м.

❷

Ортогональной проекцией прямоугольного треугольника с катетами 12 см и 16 см является треугольник. Угол между плоскостями треугольников равен 60°. Найдите площадь проекции.

Вариант А2

❶

точка, лежащая в плоскости β, удалена от прямой c на 6 м, а от плоскости α — на 3 м.

❷

Ортогональной проекцией данного треугольника является правильный треугольник со стороной $4\sqrt{3}$ см. Угол между плоскостями треугольников равен 30°. Найдите площадь данного треугольника.

❸

Два равнобедренных треугольника имеют общее основание и не лежат

в одной плоскости. Основанием перпендикуляра, проведенного из вершины первого треугольника к плоскости второго, является вершина второго треугольника.

Боковая сторона и основание второго треугольника равны 5 см и 6 см соответственно, а угол между плоскостями треугольников равен 60°. Найдите площадь первого треугольника.

Боковая сторона и высота первого треугольника равны 10 см и 8 см соответственно, а угол между плоскостями треугольников равен 60°. Найдите площадь второго треугольника.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Прямая d параллельна прямой c. Найдите угол между α и β, если

прямая d лежит в плоскости α, и расстояние между прямыми d и c в два раза больше расстояния от прямой d до плоскости β.

прямая d лежит в плоскости β, и отношение расстояний от нее до прямой c и до плоскости α равно $\sqrt{2}$.

❷

Квадрат со стороной 8 см и треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см лежат в плоскости α. Ортогональная проекция квадрата на плоскость β — параллелограмм с площадью 32 см^2. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника на плоскость β.

❷

Ромб с периметром 52 см и диагональю 10 см и прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см лежат в плоскости α. Ортогональная проекция треугольника на плоскость β — треугольник с площадью 12 см^2. Найдите площадь ортогональной проекции ромба на плоскость β.

3

Два равнобедренных треугольника имеют общее основание длиной 20 см. Угол между плоскостями треугольников равен 60°, а их площади равны 60 см^2 и 160 см^2. Найдите расстояние между вершинами треугольников. Сколько решений имеет задача?

3

Два равнобедренных треугольника имеют общее основание длиной 16 см, а их плоскости образуют угол 60°. Боковая сторона одного треугольника равна 17 см, а другого — $8\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние между вершинами треугольников. Сколько решений имеет задача?

Вариант В1

Вариант В2

1

Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Найдите угол между α и β, если

точка, удаленная от каждой из плоскостей на 3 см, удалена от прямой c на 6 см.

проекции на плоскости α и β точки, удаленной от прямой c на 12 см, удалены от прямой c на $6\sqrt{3}$ см.

2

Ортогональной проекцией квадрата, одна из сторон которого параллельна плоскости проекции, является прямоугольник со сторонами 6 см и $3\sqrt{3}$ см. Найдите угол между плоскостями квадрата и прямоугольника.

2

Ортогональной проекцией прямоугольника со сторонами 8 см и $4\sqrt{3}$ см на плоскость, параллельную одной из его сторон, является квадрат. Найдите угол между плоскостями прямоугольника и квадрата.

3

Меньшее основание трапеции, равное 24 см, является основанием равнобедренного треугольника, плоскость ко-

3

Основание равнобедренного треугольника, равное 8 см, является стороной ромба, плоскость которого составляторого составляет угол 60° с плоскостью трапеции. Боковая сторона треугольника равна 13 см, а большее основание и площадь трапеции — 32 см и 84 см^2. Найдите расстояние от вершины треугольника до большего основания трапеции. Сколько решений имеет задача?

ет угол 60° с плоскостью треугольника. Площади треугольника и ромба равны 12 см^2 и 40 см^2 соответственно. Найдите расстояние от вершины треугольника до стороны ромба, параллельной плоскости треугольника. Сколько решений имеет задача?

СП-19. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вариант А1	Вариант А2

1

Даны точки $A(3;-1;2)$ и $B(5;1;1)$.

а) Найдите координаты и модуль

Вариант А1	Вариант А2
вектора $\overline{AB}$.	вектора $\overline{BA}$.

б) Найдите координаты точки C, если

Вариант А1	Вариант А2
$\overline{AC}(-4;0;2)$.	$\overline{BC}(3;-2;1)$.

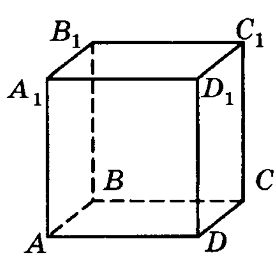
в) Точка D лежит

Вариант А1	Вариант А2
на оси y.	на оси x.

Найдите ее координаты, если

Вариант А1	Вариант А2
$\lvert\overline{BD}\rvert=\sqrt{26}$.	$\lvert\overline{AD}\rvert=\sqrt{5}$.

2



Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок).

Назовите:

а) вектор с началом в точке A_1, равный вектору $\overline{AB}$;

б) сумму векторов $\overline{A_1C_1}$ и $\overline{C_1C}$;

в) разность векторов $\overline{BD_1}$ и $\overline{B_1D_1}$.

а) вектор с началом в точке D, равный вектору $\overline{D_1C_1}$;

б) сумму векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BB_1}$;

в) разность векторов $\overline{AC_1}$ и $\overline{CC_1}$.

3

Даны векторы $\overline{a}(-2;3;1)$ и $\overline{b}(4;-1;2)$.

а) Найдите вектор

$2\overline{a}-\overline{b}$.

$\overline{a}+3\overline{b}$.

б) При каком значении y и z вектор $\overline{c}(8;y;z)$

и вектор $\overline{a}$ коллинеарны?

и вектор $\overline{b}$ коллинеарны?

в) Определите, совпадают ли в этом случае

направления векторов $\overline{a}$ и $\overline{c}$.

направления векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

г) Найдите координаты вектора $\overline{d}$, если

векторы $\overline{b}$ и $\overline{d}$ сонаправлены и $|\overline{d}|=2|\overline{b}|$.

векторы $\overline{a}$ и $\overline{d}$ противоположно направлены и $|\overline{d}|=3|\overline{a}|$.

4

Дан вектор $\overline{m}(-6;4;12)$.

Найдите вектор $\overline{n}$, который

сонаправлен с $\overline{m}$ и имеет модуль, равный 7.

противоположно направлен с $\overline{m}$ и имеет модуль, равный 28.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Даны точки $A(-1;-3;2)$, $B(5;-1;-1)$, $C(3;0;2)$.

а) Найдите координаты и модуль

Б1: вектора $\overline{BA}$.

Б2: вектора $\overline{CA}$.

б) Найдите координаты точки D, если

Б1: $\overline{AD} = \overline{BC}$.

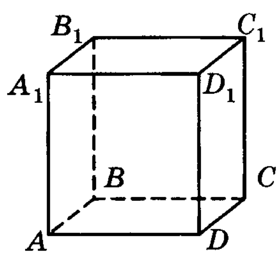
Б2: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

в) Найдите координаты точки F,

Б1: лежащей на оси z, если $|\overline{AF}| = |\overline{BC}|$.

Б2: лежащей на оси y, если $|\overline{CF}| = |\overline{AB}|$.

2



Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок).

Найдите:

Б1:

а) вектор с началом в точке C_1, равный вектору $\overline{B_1A}$;

б) сумму векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AA_1}$;

в) разность векторов $\overline{B_1C}$ и $\overline{AD}$.

Б2:

а) вектор с началом в точке D, равный вектору $\overline{CB_1}$;

б) сумму векторов $\overline{CD}$, $\overline{CB}$ и $\overline{CC_1}$;

в) разность векторов $\overline{AC_1}$ и $\overline{DD_1}$.

❸

Даны векторы $\bar{a}(4;-8;2)$ и $\bar{b}(-6;9;3)$.

а) Найдите вектор

$2\bar{a}-\frac{1}{3}\bar{b}.$

$2\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{a}.$

б) Найдите значения x и y, при которых

векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}+\bar{d}$ коллинеарны, если $\bar{c}(x;2;1)$, $\bar{d}(-1;y;5)$.

векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}-\bar{d}$ коллинеарны, если $\bar{c}(-1;y;-6)$, $\bar{d}(x;3;-2)$.

в) Сравните направления и длины векторов

$\bar{b}$ и $\bar{c}+\bar{d}$.

$\bar{a}$ и $\bar{c}-\bar{d}$.

г) Найдите вектор $\bar{e}$, удовлетворяющий равенству

$0,5\bar{e}-2\bar{a}+\bar{b}=0.$

$2\bar{e}-3\bar{a}-2\bar{b}=0.$

❹

Не вычисляя длин отрезков, определите, лежат ли на одной прямой точки

$M(6;-1;0)$, $N(3;1;-1)$, $K(0;3;-2)$.

$M(1;7;5)$, $N(-5;4;-7)$, $K(2;8;6)$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Даны точки

$A(-1;2;0)$ и $B(3;6;-2)$.

$A(3;0;-1)$ и $B(1;-4;3)$.

а) Найдите координаты точки O, удовлетворяющей равенству

$\overline{AO}=\overline{OB}.$

$\overline{BO}=\overline{OA}.$

б) Найдите координаты и модуль

вектора $\overline{AO}$.

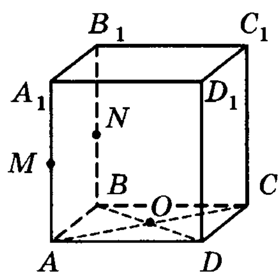
вектора $\overline{BO}$.

в) $ABCD$ — параллелограмм. Найдите координаты точек C и D, если

точка C лежит на оси z, а точка D — в плоскости xy.

точка C лежит в плоскости xz, а точка D — на оси y.

2



Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. M и N — середины отрезков AA_1 и BB_1 (см. рисунок).
Постройте:

а) вектор с началом в точке A_1, равный вектору $\overline{MO}$;

б) сумму векторов $\overline{AN}$, $\overline{MD_1}$ и $\overline{B_1B}$;

в) разность векторов $\frac{1}{2}\overline{DD_1}$ и $\overline{A_1C_1}$.

а) вектор с началом в точке D, равный вектору $\overline{ON}$;

б) сумму векторов $\overline{BD}$, $\overline{CN}$ и $\overline{MB_1}$;

в) разность векторов $2\overline{AM}$ и $\overline{DN}$.

3

Даны векторы
$\bar{a}(-4; 0; 6)$, $\bar{b}(9; -3; -3)$, $\bar{c}(1; -1; 3)$.

а) Найдите

$\left|2\bar{a}-\frac{1}{3}\bar{b}-\bar{c}\right|$.

$\left|\frac{1}{2}\bar{a}-\bar{b}+3\bar{c}\right|$.

б) Найдите вектор $\bar{d}$,

перпедикулярный оси y, если векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{c}-\bar{d}$ коллинеарны.

перпедикулярный оси x, если векторы $\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{c}+\bar{d}$ коллинеарны.

в) Сравните направления и длины векторов

$\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{c}-\bar{d}$.

$\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{c}+\bar{d}$.

г) Найдите вектор $\bar{e}$, если

$3\bar{e}-0,5\bar{a}=4\bar{c}+\bar{e}$.

$2\bar{e}+\frac{1}{3}\bar{b}=3\bar{c}-\bar{e}$.

4

Даны точки

$M(1;y;5)$, $N(x;8;6)$, $K(-5;4;7)$.

$M(0;3;-2)$, $N(x;1;-1)$, $K(6;y;0)$.

Найдите x и y, если известно, что данные точки лежат на одной прямой.

СП-20. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вариант А1

Вариант А2

1

Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

а) $\bar{a}(2;-1;4)$, $\bar{b}(3;2;-1)$;

а) $\bar{a}(-2;3;1)$, $\bar{b}(-1;-1;4)$;

б) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \frac{1}{6}$.

б) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = 0{,}1$.

❷

Найдите значение m, при котором векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, если

$\bar{a}(2;-4;m)$, $\bar{b}(3;-1;5)$.

$\bar{a}(3;2;-1)$, $\bar{b}(2;m;-2)$.

❸

Даны точки $A(3;-2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(1;3;-2)$. Найдите угол между векторами

$\overline{BA}$ и $\overline{BC}$.

$\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

❹

Известно, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Найдите

$\left(\bar{a} + 2\bar{b}\right)\left(4\bar{a} - \bar{b}\right)$.

$\left(\bar{a} - 3\bar{b}\right)\left(2\bar{a} - \bar{b}\right)$.

❺

Дан треугольник ABC с вершинами

$A(2;2;2)$, $B(2;2;0)$, $C(2;0;2)$.

$A(6;-4;2)$, $B(3;2;3)$, $C(3;-5;-1)$.

Докажите, что данный треугольник — прямоугольный, и назовите его прямой угол.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Найдите скалярное произведение векторов

а) $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 4$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 60°$;

б) $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, если $A(2;-1;0)$, $B(-3;2;4)$, $C(0;1;5)$.

а) $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 8$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 30°$;

б) $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$, если $A(3;4;-1)$, $B(2;0;1)$, $C(-1;-1;0)$.

❷

Даны векторы $\bar{a}(1;2;m)$ и $\bar{b}(-2;-1;2m)$. Найдите значения m, при которых

векторы $\bar{a}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ перпендикулярны.

векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}-\bar{a}$ перпендикулярны.

❸

Даны точки $A(3;-2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(1;3;-2)$.

Найдите угол BAC.

Найдите угол CAB.

❹

Найдите $|\bar{a}-\bar{b}|$, если

$|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 60°$.

$|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 8$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 120°$.

❺

Даны точки $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(1;3;5)$, $D(4;2;0)$. Докажите, что

прямая AD перпендикулярна плоскости ABC.

прямая BC перпендикулярна плоскости ABD.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

а) $\bar{a}(2;-1;-2), |\bar{b}| = 8, (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 120°$;

б) $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 2, |\bar{a}-\bar{b}| = 6$.

а) $|\bar{a}| = 4, \bar{b}(5;1;-1), (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 150°$;

б) $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1, |\bar{a}+\bar{b}| = 4$.

2

Даны векторы $\bar{a}(2;-2;4)$ и $\bar{b}(-1;1;2)$. Найдите значения λ, при котором вектор $\bar{a}+\lambda\bar{b}$

перпендикулярен вектору $\bar{a}$.

перпендикулярен вектору $\bar{b}$.

3

Треугольник *ABC* имеет вершины в точках *A*(3;–2;1), *B*(–2;1;3), *C*(1;3;–2). Найдите внешний угол треугольника

при вершине *C*.

при вершине *A*.

4

Найдите угол между единичными векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если

векторы $0,4\bar{a}-2\bar{b}$ и $3\bar{a}-\bar{b}$ перпендикулярны.

векторы $\bar{a}-3\bar{b}$ и $\bar{a}-0,2\bar{b}$ перпендикулярны.

5

Найдите площадь

треугольника *ABC*, если *A*(5;3;–2), *B*(4;–1;2), *C*(1;3;–2).

параллелограмма *ABCD*, если *A*(–1;2;6), *B*(0;4;4), *C*(–2;3;2), *D*(–3;1;4).

СП-21*. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1	Вариант 2

1

Найдите длины отрезков, на которые

Вариант 1	Вариант 2
плоскость xz делит отрезок AB, если $A(-1;4;3)$, $B(2;-2;9)$.	плоскость yz делит отрезок AB, если $A(-6;3;-1)$, $B(2;-5;3)$.

2

Отрезок AE разделен точками B, C и D на четыре равных части. Найдите неизвестные координаты точек, если

Вариант 1	Вариант 2
$A(-3;2;5)$, $D(6;-1;-4)$.	$B(-4;1;6)$, $E(5;-2;0)$.

3

Запишите уравнение сферы с центром в точке $O(5;12;9)$, касающейся

Вариант 1	Вариант 2
а) плоскости yz; б) оси аппликат.	а) плоскости xy; б) оси абсцисс.

4

Найдите центр и радиус окружности, по которой сфера $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ пересекается

Вариант 1	Вариант 2
с плоскостью $x = -3$.	с плоскостью $y = -5$.

5

Разложите вектор

Вариант 1	Вариант 2
$\overline{n}(1;-8;2)$	$\overline{n}(-5;8;9)$

а) по единичным векторам $\overline{e}_1(1;0;0)$, $\overline{e}_2(0;1;0)$, $\overline{e}_3(0;0;1)$;

б) по векторам
$\bar{a}(4;-3;-5), \bar{b}(1;3;-2), \bar{c}(-1;1;3)$.

6

Известно, что

$|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{19}$.

$|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, |\bar{a} - \bar{b}| = 3$.

Вычислите:

а) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

б) $|2\bar{a} - \bar{b}|$.

б) $|\bar{a} - 3\bar{b}|$.

7

Найдите углы, образуемые

вектором $\bar{a}(1;-1;\sqrt{2})$

вектором $\bar{a}(\sqrt{2};1;-1)$

с координатными лучами Ox, Oy и Oz.

8

Используя свойства векторов, докажите для любых чисел x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3

неравенство Коши-Буняковского:

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \le \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

неравенство Минковского:

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2} \le \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

9

Составьте уравнение плоскости:

а) проходящей через

ось абсцисс и точку $M(3;1;-2)$;

ось ординат и точку $M(-1;2;3)$;

б) проходящей через

точки $K(2;-5;1)$ и $N(-1;2;-5)$ и параллельной оси ординат;

точки $K(1;3;-4)$ и $N(0;1;5)$ и параллельной оси аппликат;

в) параллельной плоскости

$2x - y - 3z + 7 = 0$ и проходящей через точку $B(2;1;-1)$;

$x + 4y - 2z - 5 = 0$ и проходящей через точку $B(-1;2;-3)$;

г) перпендикулярной вектору $\overline{AB}$ и проходящей

через точку A, если $A(2;3;-4)$, $B(-1;2;2)$.

через точку B, если $A(-2;1;3)$, $B(1;-2;4)$.

10

Дан вектор $\bar{a}(6;-12;m)$ и плоскость α, заданная уравнением

$2x - 4y + 6z - 3 = 0$.

$-3x + 6y - 2z - 5 = 0$.

Определите, при каком значении m вектор $\bar{a}$ и плоскость α:

а) перпендикулярны;

б) параллельны.

11

Плоскость β задана уравнением

$5x + y - 3z - 15 = 0$.

$4x - 3y + 2z - 12 = 0$.

Найдите отрезки, отсекаемые плоскостью β на осях координат, и постройте линии пересечения плоскости β с координатными плоскостями.

12

Найдите расстояние от начала координат до плоскости

$6x - 2y + 3z + 49 = 0$

$x - 2y + 2z - 9 = 0$

и точку, симметричную началу координат относительно данной плоскости.

СП-22*. УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 | **Вариант 2**

1

Наклонная образует с плоскостью угол α. В данной плоскости через основание наклонной проведена прямая, образующая

Вариант 1: с наклонной угол β. Найдите угол, который образует эта прямая с проекцией наклонной.

Вариант 2: с проекцией наклонной угол β. Найдите угол между наклонной и данной прямой.

2

Точка S удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$ на расстояние, равное стороне квадрата. Найдите угол между плоскостями:

Вариант 1:
а) SAB и SBC;
б) SAB и ABC.

Вариант 2:
а) SAB и SCD;
б) SCD и BCD.

3

Треугольник ABC ортогонально спроектирован на плоскость α, после чего полученная проекция ортогонально спроектирована на плоскость ABC. В результате получен треугольник $A_1B_1C_1$. Найдите угол между плоскостями ABC и α, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ составляет

Вариант 1: 75 % площади треугольника ABC.

Вариант 2: 25 % площади треугольника ABC.

4

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Найдите угол между прямыми

A_1D и C_1O.

A_1O и B_1C.

5

Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и ADC имеют общую гипотенузу AC, равную 4 см. Ортогональной проекцией пространственного четырехугольника $ABCD$ на плоскость α является равнобедренный треугольник AD_1C, в котором $AD_1 = D_1C = \sqrt{6}$ см (точка D проектируется в точку D_1). Найдите двугранный угол, грани которого содержат данные треугольники. Сколько решений имеет задача?

5

Равносторонние треугольники ABC и ADC имеют общую сторону AC, равную 4 см. Ортогональной проекцией пространственного четырехугольника $ABCD$ на плоскость a является равнобедренный треугольник AB_1C, в котором $AB_1 = B_1C = \sqrt{7}$ см (точка B проектируется в точку B_1). Найдите двугранный угол, грани которого содержат данные треугольники. Сколько решений имеет задача?

КП-4. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вариант А1

Вариант А2

1

Дан треугольник ABC с вершинами

$A(11;-2;-9)$, $B(2;6;-4)$, $C(8;-6;-8)$.

$A(11;-2;-9)$, $B(2;6;-4)$, $C(14;2;-10)$.

а) Найдите координаты середины отрезка BC.

б) Найдите координаты и модуль вектора $\overline{BC}$.

в) Найдите вектор $\overline{AB} + \overline{BC}$.

г) Докажите перпендикулярность векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

❷

Дан вектор $\bar{a}(2;1;-2)$.

а) Известно, что $\bar{a} = \overline{EF}$.

Найдите координаты

точки E, если $F(4;-1;-2)$. | точки F, если $E(2;0;3)$.

б) Найдите значения m и n, при которых векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, если

$\bar{b}(-4;m;n)$. | $\bar{b}(m;n;-4)$.

в) Найдите координаты и модуль вектора $\bar{c}$, если

$\bar{c} = 2\bar{a}$. | $\bar{c} = -3\bar{a}$.

❸

Даны векторы

$\bar{a}(-3;0;4)$ и $\bar{b}(1;-2;2)$. | $\bar{a}(-2;-2;1)$ и $b(0;-4;3)$.

а) Найдите вектор

$\bar{c} = \frac{1}{2}\bar{a} - 3\bar{b}$. | $\bar{c} = 4\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b}$.

б) Найдите $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \cdot \left(\bar{a} - \bar{b}\right)$.

в) Найдите косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

❹

Докажите, что четырехугольник *ABCD* — параллелограмм, и найдите центр его симметрии, если

$A(-2;-4;1)$, $B(-5;-6;-1)$, $C(4;10;3)$, $D(7;12;5)$. | $A(-1;4;3)$, $B(-3;6;-5)$, $C(3;0;-5)$, $D(5;-2;3)$.

Вариант Б1	Вариант Б2

1

Даны точки $A(3;-1;2)$ и $B(2;1;-4)$.

а) Найдите координаты точки D, если

Вариант Б1	Вариант Б2
A — середина отрезка BD.	B — середина отрезка AD.

б) Сравните модули векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$, если

Вариант Б1	Вариант Б2
$C(1;5;-2)$.	$C(-4;3;2)$.

в) Найдите вектор

Вариант Б1	Вариант Б2
$\frac{1}{2}\left(\overline{BA}+\overline{BC}\right)$.	$\frac{1}{2}\left(\overline{AC}+\overline{AB}\right)$.

г) На оси x найдите точку M такую, что треугольник ABM — прямоугольный

Вариант Б1	Вариант Б2
с гипотенузой AM.	с гипотенузой BM.

2

Дан вектор $\bar{a}(4;2;-4)$.

а) Известно, что

Вариант Б1	Вариант Б2
$\bar{a}=2\overline{AB},\ A(1;2;-3)$.	$\bar{a}=-\frac{1}{2}\overline{AB},\ B(3;-2;1)$.

Найдите координаты

Вариант Б1	Вариант Б2
точки B.	точки A.

б) Найдите координаты вектора $\bar{c}$,

Вариант Б1	Вариант Б2
противоположно направленного с вектором $\bar{a}$, если $\lvert\bar{c}\rvert=3$.	сонаправленного с вектором $\bar{a}$, если $\lvert\bar{c}\rvert=12$.

в) Найдите модуль вектора $\bar{b}$, если

Вариант Б1	Вариант Б2
$\bar{a}\cdot\bar{b}=6,\ \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=60^\circ$.	$\bar{a}\cdot\bar{b}=12\sqrt{3},\ \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=30^\circ$.

3

Даны векторы

Вариант Б1	Вариант Б2
$\bar{a}(1;-1;2)$ и $\bar{b}(6;0;4)$.	$\bar{a}(-4;2;-8)$ и $\bar{b}(-1;1;2)$.

а) Найдите

$\left|3\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}\right|$.

$\left|\frac{1}{2}\bar{a}+2\bar{b}\right|$.

б) Найдите $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-3\bar{b})$

в) Сравните угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с прямым углом.

4

Докажите, что четырехугольник *ABCD* — прямоугольник, и найдите точку пересечения осей его симметрии, если

$A(4;-4;3)$, $B(1;2;4)$, $C(-2;1;1)$, $D(1;-5;0)$.

$A(-1;5;-4)$, $B(3;2;4)$, $C(6;-2;1)$, $D(2;1;-7)$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Даны точки $A(-3;2;1)$ и $B(5;-2;7)$.

а) Найдите на отрезке *AB* точку *M* такую, что

$AM : MB = 3 : 1$.

$AM : MB = 1 : 3$.

б) Найдите координаты точки *C*, если $|\overline{AC}|=|\overline{BC}|$ и точка *C* лежит

на оси абсцисс.

на оси ординат.

в) Найдите вершину *D* треугольника *ABD*, если

середина стороны AD лежит на оси z, а середина стороны BD — в плоскости xy.

середина стороны AD лежит в плоскости yz, а середина стороны BD — на оси x.

г) Найдите вектор

$\frac{1}{2}(\overline{DA}-\overline{DB})$.

$\frac{1}{2}(\overline{DB}-\overline{DA})$.

2

Дан вектор $\bar{a}(-1;2;2)$.

а) Найдите координаты точек A и B, если

$\overline{AB} = 2\bar{a}$, и середина отрезка AB — точка $O(0;-1;3)$.

$\overline{AB} = -2\bar{a}$, и середина отрезка AB — точка $O(-2;1;0)$.

б) Найдите координаты вектора $\bar{b}$, коллинеарного вектору $\bar{a}$, если

$\bar{a} \cdot \bar{b} = -18.$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 27.$

в) Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$, если

$\bar{a} \cdot \bar{c} = -3\sqrt{3}$, $|\bar{c}| = 2.$

$\bar{a} \cdot \bar{c} = -6$, $|\bar{c}| = 4.$

3

Даны векторы $\bar{a}(2;-2;1)$ и $\bar{b}(8;4;1)$.

а) Найдите вектор $\bar{c}$, если

$2\bar{c} + 3\bar{a} - 5\bar{b} = 0$.

$5\bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c} = 0$.

б) Найдите

$(3\bar{a} - \bar{b})^2$.

$(\bar{a} - 2\bar{b})^2$.

в) Найдите площадь

параллелограмма,

треугольника,

построенного на векторах

$\bar{a}$ и $2\bar{b}$.

$2\bar{a}$ и $\bar{b}$.

4

Докажите, что четырехугольник *ABCD* —

равнобокая трапеция, если $A(6;-4;2)$, $B(1;-1;4)$, $C(-1;4;1)$, $D(2;6;-4)$.

прямоугольная трапеция, если $A(10;-6;4)$, $B(14;-4;5)$, $C(17;-8;1)$, $D(16;-14;-4)$.

КП-5. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Вариант А1 / Вариант А2

1

Через вершину A к плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр MA.

Вариант А1. Угол между прямой MC и плоскостью квадрата равен $45°$, а $MA = 4\sqrt{2}$ см. Найдите площадь квадрата.

Вариант А2. Диагональ квадрата равна $2\sqrt{2}$ см, а прямая MB наклонена к плоскости квадрата под углом $45°$. Найдите расстояние от точки M до плоскости квадрата.

2

Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Через точку M, лежащую на прямой c, в данных плоскостях проведены отрезки AM и BM, перпендикулярные прямой c.

Вариант А1. Найдите AM, если $AB = BM = 2$ дм, а угол между плоскостями α и β равен $60°$.

Вариант А2. Отрезки AM и AB равны. Найдите их длины, если $BM = 4$ дм, а угол между плоскостями α и β равен $60°$.

3

Вариант А1. Гипотенуза AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α. Угол между плоскостями ABC и α равен $45°$, а ортогональная проекция треугольника ABC на плоскость α имеет площадь $16\sqrt{2}$ см^2. Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

3

Вариант А2. Сторона AC равностороннего треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина B удалена от этой плоскости на 3 см. Угол между плоскостями ABC и α равен $30°$. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость α.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Из точки, удаленной от данной плоскости на 6 см, к плоскости проведены две наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если

Б1: наклонные образуют с плоскостью углы 45° и 60°, а между собой — прямой угол.

Б2: наклонные образуют с плоскостью углы 30° и 45°, а угол между их проекциями — прямой.

2

Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Через точку M, лежащую на прямой c, в плоскости α проведен отрезок MA.

Б1: Найдите его длину, если точка A удалена от плоскости β на $\sqrt{2}$ см, угол между отрезком MA и прямой c равен 45°, а угол между данными плоскостями равен 30°.

Б2: Найдите расстояние от точки A до прямой c, если угол между данными плоскостями равен 30°, а отрезок MA имеет длину $8\sqrt{2}$ см и составляет с плоскостью β угол 45°.

3 (Б1)

Сторона AD квадрата $ABCD$ лежит в плоскости α, а плоскость квадрата составляет с плоскостью α угол 60°. Найдите расстояние от прямой BC до плоскости α, если ортогональная проекция квадрата на плоскость α имеет площадь 18 м^2.

3 (Б2)

Сторона AD прямоугольника $ABCD$ лежит в плоскости α, составляющей с плоскостью прямоугольника угол 60°. Прямая BC удалена от плоскости α на $4\sqrt{3}$ дм. Найдите площадь данного прямоугольника, если его ортогональная проекция на плоскость α — квадрат.

Вариант В1

Вариант В2

1

Из точки к плоскости проведены две наклонные, образующие с данной плоскостью углы, один из которых вдвое больше другого. Найдите расстояние от данной точки до плоскости, если

В1: длины наклонных равны 6 см и $2\sqrt{3}$ см.

В2: проекции наклонных на эту плоскость равны $\sqrt{3}$ см и $3\sqrt{3}$ см.

2

В1: Ортогональной проекцией ромба с диагоналями 5 дм и 10 дм на плоскость, содержащую одну из его вершин, является квадрат. Найдите угол между плоскостями ромба и квадрата.

В2: Ортогональной проекцией квадрата на плоскость, содержащую одну из его вершин, является ромб с диагоналями $2\sqrt{2}$ дм и $4\sqrt{2}$ дм. Найдите угол между плоскостями ромба и квадрата.

3

Плоскости α и β пересекаются по прямой c под углом 45°. Через точку M, лежащую на прямой c, в плоскостях α и β проведены два луча.

В1: Найдите угол между этими лучами, если один из них перпендикулярен прямой c, а другой образует с ней угол 45°, если искомый угол — острый.

В2: Угол между этими лучами равен 60°. Один из лучей перпендикулярен прямой c. Найдите угол между прямой c и вторым лучом.

КП-6. ГОДОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант А1 / Вариант А2

1

Точки *A*, *B*, *C* и *D* не лежат в одной плоскости. Докажите, что

Вариант А1. прямая, проходящая через середины отрезков DA и DB, параллельна плоскости ABC.

Вариант А2. прямая, проходящая через середины отрезков AB и AC, параллельна плоскости DBC.

2

Из точки к плоскости проведены две наклонные.

Вариант А1. Одна из наклонных равна 10 см и имеет проекцию длиной 8 см. Найдите длину второй наклонной, если она образует с данной плоскостью угол 30°.

Вариант А2. Одна из наклонных равна 16 см и образует с данной плоскостью угол 30°. Найдите длину второй наклонной, если ее проекция на данную плоскость равна 6 см.

3

Вариант А1. Отрезок SC — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$). Найдите расстояние от точки S до прямой AB, если $AC = 13$ см, $AB = 5$ см, $SC = 16$ см.

Вариант А2. Отрезок SA — перпендикуляр к плоскости прямоугольника $ABCD$. Найдите его длину, если $AB = 5$ см, $BD = 13$ см, а точка S удалена от прямой CD на 15 см.

4

Вариант А1. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая a, перпендикулярная прямой c. Дока-

Вариант А2. Прямая l лежит в плоскости α. Прямая b не лежит в плоскости α и пересекается под прямым углом с прямой l.

жите, что угол между плоскостями α и β равен углу наклона прямой a к плоскости β.

Через прямые b и l проведена плоскость β. Докажите, что угол между прямой b и плоскостью α равен углу между плоскостями α и β.

Вариант Б1

1

Прямоугольник $ABCD$ и треугольник ABM не лежат в одной плоскости. Точки E и F — середины отрезков AM и BM соответственно. Определите вид четырехугольника $DEFC$.

Вариант Б2

1

Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$. Точки E и F — середины отрезков MB и MC соответственно. Определите вид четырехугольника $AEFD$.

2

Из точки к плоскости проведены две наклонные, образующие с данной плоскостью углы 30° и 45°. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если

большая наклонная равна $2\sqrt{6}$ см, а угол между наклонными — прямой.

проекция меньшей наклонной равна 3 см, а угол между проекциями наклонных — прямой.

3

Точка удалена от каждой из вершин правильного треугольника на 10 см, а от каждой из его сторон — на $\sqrt{73}$ см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости треугольника.

3

Точка удалена от каждой из вершин квадрата на $\sqrt{41}$ см, а от каждой из его сторон — на 5 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости квадрата.

4

Прямая MA перпендикулярна стороне AB и диагонали AC ромба $ABCD$. Найдите угол между плоскостями MAB и MAD, если диагональ ромба BD равна его стороне.

4

Прямая MB перпендикулярна стороне AB и высоте BK ромба $ABCD$. Найдите угол между плоскостями MAB и MBC, если точка K — середина стороны AD.

Вариант В1

Вариант В2

1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите параллельность плоскостей

В1: AB_1D_1 и BDC_1.

В2: AD_1C и A_1C_1B.

2

Из точки к плоскости проведены две наклонные.

В1: Одна из них равна 6 см и образует с данной плоскостью угол 60°, а вторая имеет длину $2\sqrt{13}$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если угол между их проекциями равен 120°.

В2: Одна из них имеет проекцию $3\sqrt{2}$ см и наклонена к данной плоскости под углом 45°. Проекция второй наклонной равна $\sqrt{46}$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если угол между наклонными равен 60°.

3

Точка M равноудалена от сторон равностороннего треугольника ABC.

В1: Найдите угол между плоскостями MAB и ABC, если прямая MA наклонена к плоскости ABC под углом α.

В2: Найдите угол наклона прямой MC к плоскости ABC, если угол между плоскостями MBC и ABC равен α.

4

Через центр O окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$), проведена прямая MO, не лежащая в плоскости ABC и перпендикулярная катетам треугольника. Найдите угол между плоскостями AMO и CMO.

4

Через вершину A треугольника ABC проведена прямая MA, не лежащая в плоскости ABC и перпендикулярная стороне BC и медиане AK. Найдите угол между плоскостями MAB и MAC, если $BC = 2AK$.

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ К РАБОТАМ ПО УЧЕБНИКУ Л.С. АТАНАСЯНА И ДР.

КА-1	А1	А2	Б1
1а)	Да	Да	Да
1б)			Нет
1в)			Да
2б)	6 см	8 см	6 см; 10 см
3б)	45°	60°	50°

КА-1	Б2	В1	В2
1а)	Нет	Нет	Да, пересекаются
1б)	Да	Да, пересекаются	Да, скрещиваются
1в)	Да	Нет	Нет
2б)	6 см; 10 см	28 см	12 см
3б)	45°	90°	60°

КА-2	А1	А2	Б1	Б2
1в)	12 см	12 см	9 см^2	40 см^2
2	8 см	$4\sqrt{2}$ см	30°	60°
3	60°; 60°; 60°	60°; 60°; 60°	—	—

КА-2	В1	В2
1в)	8 см	4 см
2	30°; 60°	$\sqrt{6}$
3	120°	120°

КА-3	А1	А2	Б1
1	240 см^2	150 см^2	760 см^2
2	а) $2\sqrt{2}$ см; б) $16\sqrt{3}$ см^2	а) $2\sqrt{2}$ см; б) $4\sqrt{7}$ см^2	а) 3 см; $3\sqrt{5}$ см; $3\sqrt{5}$ см; б) 36 см^2
3	$\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$	$\frac{9}{8}a^2$

КА-3	Б2	В1	В2
1	832 см^2	1020 см^2	370 см^2
2	а) $2\sqrt{2}$ см; $2\sqrt{6}$ см; $2\sqrt{6}$ см; б) $16\sqrt{2}$ см^2	$\frac{d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}\right)$	$\frac{4H^2\operatorname{ctg}^2\beta}{\sin\alpha}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}\right)$
3	$\frac{9}{8}a^2$	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

КА-4	А1	А2	Б1
1а)	$\overrightarrow{D_1C_1}$	$\overrightarrow{B_1C_1}$	$\overrightarrow{DC_1}$
1б)	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{AB_1}$
1в)	$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{C_1C}$	$\overrightarrow{BD_1}$
1г)	$\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{D_1D}$	$\overrightarrow{BB_1}$
2а)	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$
2б)	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$	$\frac{a}{2}$
3	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}$	$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}$
4	± 2	± 3	—

КА-4	Б2	В1	В2
1а)	$\overrightarrow{CB_1}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BC}$
1б)	$\overrightarrow{C_1A}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{DB}$
1в)	$\overrightarrow{CA_1}$	$\overrightarrow{DF}$	$\overrightarrow{FA}$
1г)	$\overrightarrow{C_1C}$	$\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{BA}$
2а)	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$

КА-4	Б2	В1	В2
2б)	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$
3	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AB}\right)$
4	—	—	—

КА-5	А1	А2	Б1	Б2
1а)	12 см	20 см	—	—
1б)	45°	45°	6 см	$3\sqrt{3}$ см
1в)	—	—	60°	60°
2	192 см^2	192 см^2	$36\sqrt{3}$ см^2	$81\sqrt{3}$ см^2
3	Трапеция	Прямоугольник	Квадрат	Квадрат

КА-5	В1	В2
1б)	$\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BS}\right)$	$\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$
1в)	$\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}$
2	$\frac{a^2(\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta+\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cos\beta}$	$\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\beta\times$ $\times\left(\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{1}{\sin\beta}\right)$

СА-7*	Вариант 1	Вариант 2
1	Нет (контрпример – плоский невыпуклый четырехугольник)	Нет (контрпример – параллелограмм)
2	Да	5
3а)	Да, если $BB_1 \parallel CC_1$ и B_1 и C_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC	Да, если $BB_1 \parallel CC_1$ и B_1 и C_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC

СА-7*	Вариант 1	Вариант 2
3б)	Да, если $BB_1 \parallel CC_1$ и B_1 и C_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC	Да, если $BB_1 \parallel CC_1$ и B_1 и C_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC
3в)	Да, если BB_1 и CC_1 не параллельны	Да, если BB_1 и CC_1 не параллельны
4	Бесконечно много, если $AB \parallel l$; одна, если AB и l — скрещивающиеся прямые; ни одной, если прямые AB и l пересекаются	Бесконечно много, если $a \parallel b$ и C лежит в плоскости a и b; одна, если $a \parallel b$ или a и b пересекаются и C не лежит в плоскости a и b; или если a и b — скрещивающиеся и $C \notin \gamma_1$ и $C \notin \gamma_2$; ни одной, если a пересекается с b и C лежит в плоскости a и b или если a и b — скрещивающиеся и $C \in \gamma_1$ или $C \in \gamma_2$; γ_1 и γ_2 — плоскости, параллельные одной из прямых a и b и содержащие другую
5а)	Нет	Нет
5б)	Да	Нет
5в)	Да	Да
5г)	Да	Да

СА-18*	Вариант 1	Вариант 2
1	Плоскость, перпендикулярная к отрезку с концами в данных точках и проходящая через его середину	Плоскость, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину M (без точки M)
2	16 см²	32 см²
3	12 см	20 см
4	Плоскость, проходящая через его середину общего перпендикуляра данных прямых и перпендикулярная к нему	Две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых, и перпендикулярные к плоскости данных прямых

СА-18*	Вариант 1	Вариант 2
5	$\sqrt{2}$ см; 6 см	14 см
6	1 см	8 см
8	$\frac{d^2\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

СА-25*	Вариант 1	Вариант 2
1	16 см	2 см
2	2 см	$96\sqrt{2}$ см^2
3	$2\sqrt{P^2 + Q^2}$	$2\sqrt{2}\,Q$
5	$\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$	$\frac{a^2\sqrt{2}}{9}$
6	$\frac{H^2\text{ctg}^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)} \times$ $\times \left(1 + \text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^2 \text{tg}\alpha$	$\frac{4b^2\cos^4\beta\ \text{ctg}^2\,2\beta\text{ctg}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos 2\beta}$
7	54 см^2	$20\sqrt{26}$ см^2

СА-29*	Вариант 1	Вариант 2
1	$\vec{a} + \vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b}$
2	$k \neq -2;\ k \neq 1$	$k \neq 1$
3	$x = \frac{1}{3};\ y = \frac{2}{3}$	$x = \frac{1}{4};\ y = -\frac{1}{4}$

ОТВЕТЫ К РАБОТАМ ПО УЧЕБНИКУ А.В. ПОГОРЕЛОВА

КП-1	А1	А2	Б1	Б2	В1	В2
1а)	Да	Нет	Да	Да	Да	Нет
1б)	Нет	Да	Нет	Нет	Нет	Да
1в)	Да	Нет	Да	Да	Да	Да
3	4 см	12 см	9 см	15 см	35 см	30 см

КП-2	А1	А2	Б1	Б2
1	5 см	16 см	9 см	24 см
3	12 см	26 см	60 см	65 см

КП-2	В1	В2
1	$2\sqrt{6}$ см	4 см
2	Перпендикулярно	Перпендикулярно
3	1152 см^2	$432\sqrt{3}$ см^2
4	Плоскость, проходящая через данную прямую перпендикулярно данной плоскости	Прямая, проходящая через данную точку перпендикулярно данной плоскости

КП-3	А1	А2	Б1	Б2	В1	В2
1в)	16 см	30 см	108 см^2	40 см^2	150°	45°
2	10 см	12 см	15 см	5 см	15 см	16 см
3	52 см	24 см, 32 см	25 см	25 см	4 см	2 см

КП-4	А1	А2	Б1
1а)	(5;0;−6)	(8;4;−7)	$D(4;-3;8)$
1б)	$\overline{BC}(6;-12;-4)$, $\lvert\overline{BC}\rvert = 14$	$\overline{BC}(12;-4;-6)$, $\lvert\overline{BC}\rvert = 14$	$\lvert\overline{AC}\rvert > \lvert\overline{BC}\rvert$
1в)	$\overline{AC}(-3;-4;1)$	$\overline{AC}(3;4;-1)$	(0;1;4)
1г)	—	—	$M(-24;0;0)$
2а)	$E(2;-2;0)$	$F(4;1;1)$	$B(3;3;-5)$

КП-4	А1	А2	Б1
2б)	$m=-2,\ n=4$	$m=4,\ n=2$	$\bar{c}(-2;-1;2)$
2в)	$\bar{c}(4;2;-4), \lvert\bar{c}\rvert=6$	$\bar{c}(-6;-3;6), \lvert\bar{c}\rvert=9$	2
3а)	$\bar{c}(-4,5;6;-4)$	$\bar{c}\left(-8;-9\frac{1}{3};5\right)$	5
3б)	16	−16	−178
3в)	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{15}$	$\left(\widehat{\bar{a}\bar{b}}\right)<90^\circ$
4	(1;3;2)	(1;2;−1)	(1;−1,5;2)

КП-4	Б2	В1	В2
1а)	$D(1;3;-10)$	$M(3;-1;5,5)$	$M(-1;1;2,5)$
1б)	$\lvert\overline{AC}\rvert<\lvert\overline{BC}\rvert$	$C(4;0;0)$	$C(0;-8;0)$
1в)	(−4;3;−3)	$D(3;-2;-7)$	$D(3;2;-7)$
1г)	$M(17;0;0)$	$\overline{(-4;2;-3)}$	$\overline{(4;-2;3)}$
2а)	$A(11;2;-7)$	$A(1;-3;1);\ B(-1;1;5)$	$A(-3;3;2);\ B(-1;-1;-2)$
2б)	$\bar{c}(8;4;-8)$	$\bar{b}(2;-4;-4)$	$\bar{b}(-3;6;6)$
2в)	4	150°	120°
3а)	5	$\bar{c}(17;13;1)$	$\bar{c}(-2;6;-1)$
3б)	86	108	297
3в)	$\left(\widehat{\bar{a}\bar{b}}\right)>90^\circ$	$36\sqrt{2}$	$18\sqrt{2}$
4	(2,5;1,5;−1,5)	—	—

КП-5	А1	А2	Б1	Б2	В1	В2
1	16 см²	2 см	$2\sqrt{30}$ см	12 см	3 см	3 см
2	2 дм	4 дм	4 см	16 см	60°	60°
3	4 см	18 см²	$3\sqrt{3}$ м	32 дм²	60°	45°

КП-6	А1	А2	Б1
1	—	—	Трапеция
2	12 см	10 см	6 см
3	20 см	9 см	8 см
4	—	—	60°

КП-6	Б2	В1	В2
1	Трапеция	—	—
2	6 см	7 см	$2\sqrt{13}$ см
3	3 см	$\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$
4	120°	135°	90°

СП-13*	А1	А2	Б1	Б2	В1	В2
2а)	$4\sqrt{3}$ м	$3\sqrt{2}$ м	12 см	48 см	1см	$\sqrt{2}$ см
2б)	12 м	3 м				
3	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$

СП-14*	Вариант 1	Вариант 2
2а)	Плоскость, перпендикулярная данной прямой	Плоскость, перпендикулярная данной прямой
2б)	Плоскость, параллельная данной	Плоскость, проходящая через первую прямую параллельно второй
2в)	Плоскость, параллельная данной	Плоскость, параллельная данным
4а)	144 см², $4\sqrt{7}$ см	$9\sqrt{3}$ см², $\sqrt{13}$ см
4б)	$12\sqrt{\frac{3}{7}}$ см	$\frac{16}{\sqrt{17}}$ см
4в)	5 см	12,5 дм

СП-21*	Вариант 1	Вариант 2
1	6 и 3	9 и 3
2	$B(0;1;2)$; $C(3;0;-1)$; $E(9;-2;-7)$	$A(-7;2;8)$; $C(-1;0;4)$; $D(2;-1;2)$
3а)	$(x-5)^2+(y-12)^2+(z-9)^2=25$	$(x-5)^2+(y-12)^2+(z-9)^2=81$
3б)	$(x-5)^2+(y-12)^2+(z-9)^2=169$	$(x-5)^2+(y-12)^2+(z-9)^2=225$
4	$(-3;-2;3)$, $R=3$	$(1;-5;3)$, $R=4$
5а)	$\bar{n}=\bar{e}_1-8\bar{e}_2+2\bar{e}_3$	$\bar{n}=-5\bar{e}_1+8\bar{e}_2+9\bar{e}_3$
5б)	$\bar{n}=\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c}$	$\bar{n}=-\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c}$
6а)	60°	180°
6б)	$\sqrt{13}$	7
7	60°; 120°; 45°	45°; 60°; 120°
9а)	$2y+z=0$	$3x+z=0$
9б)	$2x-z-3=0$	$2x-y+1=0$
9в)	$2x-y-3z-6=0$	$x+4y-2z-13=0$
9г)	$3x+y-6z-33=0$	$3x-3y+z-13=0$
10а)	18	4
10б)	-10	-45
11	3; 15; 5; $5x+y=15$; $y-3z=15$; $5x-3z=15$	3; 4; 6; $4x-3y=12$; $-3y+2z=12$; $4x+2z=12$
12	7; $(-12; 4;-6)$	3; $(2; -4; 4)$

СП-22*	Вариант 1	Вариант 2
1	$\arccos\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)$	$\arccos(\cos\alpha\cos\beta)$
2а)	$\pi-\arccos\dfrac{1}{3}$	$\arccos\dfrac{1}{3}$
2б)	$\text{arcos}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
3	30°	60°
4	$\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$	30°
5	45° или 135°	30° или 150°

Литература

1. *Л. С. Атанасян и др.* Геометрия 10–11. М., 1992.
2. *А. В. Погорелов.* Геометрия 7–11. М., 1992.
3. *И. Ф. Шарыгин.* Геометрия 10–11. М., 1999.
4. *Л. М. Лоповок.* Сборник задач по геометрии для 10–11 классов. К., 1993.
5. *Л. М. Лоповок.* Факультативные занятия по геометрии для 7–11 классов. К., 1990.
6. *О. Н. Цубербиллер.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., 1955.

Содержание

Алла Петровна Ершова
Вадим Владимирович Голобородько

Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 10 класса

Подписано в печать 31.10.2012. Формат 60×88/16.
Усл.-печ. л. 12,71. Тираж 10 000 экз. Заказ № 2020.

ООО «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д. 30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: 8(495) 964-35-67

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpk.ru, E-mail: marketing@chpk.ru,
факс 8(496) 726-54-10, телефон 8(495) 988-63-87