

Квадратичная функция в различных задачах

Дихтярь М.Б.

Основные сведения

1. *Квадратичной функцией (квадратным трёхчленом)* называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – заданные числа и $a \neq 0$.

2. Квадратичные функции $y = ax^2 + bx + c$ и $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ равны тогда и только тогда, когда выполняется система равенств $a = a_1, b = b_1, c = c_1$.

3. Два квадратных трёхчлена равны тогда и только тогда, когда они равны хотя бы в трёх точках.

4. *Областью определения* квадратичной функции является множество R .

5. Выделяя в квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ полный квадрат, квадратичную функцию запишем в виде

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0, \text{ где } x_0 = -b/2a, y_0 = (4ac - b^2)/4a.$$

Областью значений квадратичной функции является промежуток $[(4ac - b^2)/4a; \infty)$, если $a > 0$, и промежуток $(-\infty; (4ac - b^2)/4a]$, если $a < 0$.

6. Дана квадратичная функция $y(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Если $a > 0$, то функция $y(x)$ на любом промежутке $l \subset (-\infty; x_0]$ убывает, а на любом промежутке $l_1 \subset [x_0; \infty)$ возрастает;

если $a < 0$, то функция $y(x)$ на любом промежутке $l \subset (-\infty; x_0]$ возрастает, а на любом промежутке $l_1 \subset [x_0; \infty)$ убывает.

7. Графиком квадратичной функцией является *парабола*.

8. *Вершина* параболы имеет координаты $(-b/2a; (4ac - b^2)/4a)$.

9. Парабола касается оси абсцисс, если ордината вершины параболы равна нулю.

10. *Ветви* параболы направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.

11. *Осью симметрии* параболы является прямая $x = -b/2a$, параллельная оси ординат.

12. Значения x , при которых квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ обращается в ноль, называются *корнями* квадратичной функции. Для нахождения корней квадратичной функции надо решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

13. Если x_1, x_2 корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, то $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$.

14. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$. Если $x = x_0$ – ось симметрии, то $x_2 + x_1 = 2x_0$.

15. Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратичной функции.

16. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ *может* иметь рациональные (целые) корни только в случае, если дискриминант полный квадрат (полный квадрат целого числа).

17. График квадратичной функции пересекает ось абсцисс в двух точках (функция имеет два корня), если дискриминант $D > 0$; в одной точке (функция имеет один корень, график касается оси абсцисс), если $D = 0$.

18. График квадратичной функции не пересекает ось абсцисс (функция не имеет корней), если $D < 0$.

19. Если в некоторой точке $\alpha \in R$ значение функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, меньше нуля, то есть $f(\alpha) < 0$, то квадратный трёхчлен пересечёт ось абсцисс в двух точках.

Если в некоторой точке $\alpha \in R$ значение функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a < 0$, больше нуля, то есть $f(\alpha) > 0$, то квадратный трёхчлен пересечёт ось абсцисс в двух точках.

20. Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, имеет действительные корни x_1 и x_2 , то
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a. \end{cases}$$

21. Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют условиям
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a, \end{cases}$$
 то числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

22. График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс. График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси ординат.

23. Квадратичная функция сохраняет знак для всех $x \in R$ тогда и только тогда, когда дискриминант квадратичной функции отрицательный. В этом случае знак квадратичной функции для всех $x \in R$ совпадает со знаком коэффициента при x^2 .

24. Если функции f и φ в своих областях определения возрастают или убывают одновременно, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ возрастает в её области определения. Если одна из функций f или φ возрастают, а другая убывают в своих областях определения, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ убывает в её области определения.

25. Дана квадратичная функция $y(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Если $a > 0$ ($a < 0$), то функция $y(x)$ в точке $x = x_0$ принимает *наименьшее (наибольшее) значение*, равное y_0 .

26. Квадратичная функция $y(x) = ax^2 + bx + c$, если $a > 0$ ($a < 0$), принимает *наименьшее (наибольшее) значение* на отрезке $[c; d]$ на одном из концов отрезка или в точке x_0 , которая является абсциссой вершины параболы, заданной уравнением $y(x) = ax^2 + bx + c$. Поэтому при нахождении наименьшего значения (наибольшего значения) на отрезке $[c; d]$ надо рассмотреть функцию $y(x)$ при различных расположениях точки x_0 относительно отрезка $[c; d]$.

27. Квадратичная функция $y(x) = ax^2 + bx + c$, если $a > 0$ ($a < 0$), принимает *наибольшее (наименьшее) значение* на отрезке $[c; d]$, на одном из концов отрезка. Поэтому при нахождении наибольшего (наименьшего) значения на отрезке $[c; d]$ надо сравнить значения $y(c)$ и $y(d)$.

28. Обозначение: $\min_{[a; b]} f(x)$ – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$; $\max_{[a; b]} f(x)$ – наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$; $\min f(x)$ – наименьшее значение квадратичной функции $f(x)$; $\max f(x)$ – наибольшее значение квадратичной функции $f(x)$.

29. Если непрерывную функцию $f(x)$ на промежутке $[a; b]$ можно представить в виде $f(x) = \varphi(t(x))$, где $t(x)$ и $\varphi(t)$ – непрерывные функции на промежутках $[a; b]$ и $[c; d]$ соответственно, и $c = \min_{x \in [a; b]} t(x)$, $d = \max_{x \in [a; b]} t(x)$, то $\max_{x \in [a; b]} f(x) = \max_{t \in [c; d]} \varphi(t)$ и $\min_{x \in [a; b]} f(x) = \min_{t \in [c; d]} \varphi(t)$.

30. Наибольшее (наименьшее) значения функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ и $f(x) = \sqrt[n]{ax^2 + bx + c}$ на отрезке $[d_1; d_2]$ принимают в одной и той же

точке $x_1 \in [d_1; d_2]$ тогда и только тогда, когда $ax^2 + bx + c \geq 0$ для любого $x \in [d_1; d_2]$.

31. Если $a \neq 0$, то функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ и $f(x) = \sqrt[n+1]{ax^2 + bx + c}$ принимают экстремальное значение в точке $x_0 = -b/2a$.

32. Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ является квадратом линейной функции, если её можно представить виде $f(x) = (\sqrt{a}x - x_0)^2$.

33. Прямая $y = kx + d$ является касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$, если имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ y = kx + d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c = kx + d, \\ y = kx + d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + (b - k)x + (c - d) = 0, \\ y = kx + d. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение, если квадратное уравнение $ax^2 + (b - k)x + (c - d) = 0$ имеет единственное решение.

34. Если x_0 – абсцисса точки касания, то уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, где $k = f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной.

35. Пусть x_0 – абсцисса точки касания к графику функции $y = f(x)$. Если касательная образует с осью абсцисс угол, равный φ , то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$.

36. Прямые $y = k_1x + d_1$, $y = k_2x + d_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$.

37. Прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

38. Прямые $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k \cdot k_1 = -1$.

39. Если точка $(x_0; y_0)$ лежит над (под) прямой $y = kx + b$, то $y_0 > kx_0 + b$ ($y_0 < kx_0 + b$).

40. Пусть точка $(x_0; y_0)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$. Вершина параболы лежит над (под) прямой $y = kx + d$, если $y_0 > kx_0 + d \Leftrightarrow y_0 - kx_0 - d > 0$ ($y_0 < kx_0 + d \Leftrightarrow y_0 - kx_0 - d < 0$).

41. Пусть точка $(x_1; y_1)$ является вершиной параболы $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$, а точка $(x_2; y_2)$ является вершиной параболы $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

42. Вершины парабол лежат по одну сторону от прямой $y = kx + d$, если $(y_1 - y(x_1)) \cdot (y_2 - y(x_2)) > 0 \Leftrightarrow (y_1 - kx_1 - d) \cdot (y_2 - kx_2 - d) > 0$

43. Вершины парабол лежат по разные стороны от прямой $y = kx + d$, если $(y_1 - y(x_1)) \cdot (y_2 - y(x_2)) < 0 \Leftrightarrow (y_1 - kx_1 - d) \cdot (y_2 - kx_2 - d) < 0$

Задачи

Симметрия

1. Функция $f(x)$ определена для всех значений x и при всех x удовлетворяет условию $3f(x) + f(a-x) = x^2$. Найдите $f(x)$ и укажите значения параметра a , при котором осью симметрии является прямая $x = 3$.

Решение. 1. Так как функция $f(x)$ для всех значений x удовлетворяет условию $3f(x) + f(a-x) = x^2$, то, заменив x на $(a-x)$, получим

$$3f(a-x) + f(x) = (a-x)^2.$$

Найдём функцию $f(x)$ из системы

$$\begin{cases} f(a-x) + 3f(x) = x^2, \\ 3f(a-x) + f(x) = (a-x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3f(a-x) - 9f(x) = -3x^2, \\ 3f(a-x) + f(x) = (a-x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8f(x) = -3x^2 + (a-x)^2, \\ 3f(a-x) + f(x) = (a-x)^2; \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1/8(2x^2 + 2ax - a^2).$$

Итак, искомой функцией является квадратичная функция $f(x) = 1/8(2x^2 + 2ax - a^2)$.

2. Прямая $x = -0,5a$ является осью симметрии параболы $f(x) = 1/8(2x^2 + 2ax - a^2)$. Ось симметрии совпадает с прямой $x = 3$, если $-0,5a = 3 \Leftrightarrow a = -6$.

Ответ. $f(x) = 1/8(2x^2 + 2ax - a^2)$; $a = -6$.

2. Найдите значения a и c , при которых график квадратичной функции $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + ax + c - 2$ симметричен графику квадратичной функции $\varphi(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x + c + 4$ относительно оси абсцисс.

Решение. Так как функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ квадратичные, то $a \notin \{-1; 1\}$ (так как $a^2 - 1 \neq 0$, $a - 1 \neq 0$).

График $f(x)$ симметричен графику функции $\varphi(x)$ относительно оси абсцисс, если квадратичная функция $f(x)$ совпадает с квадратичной функцией $-\varphi(x)$.

Квадратичные функции $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + ax + c - 2$ и $-\varphi(x) = -(a - 1)x^2 - (a - 2)x - c - 4$, где $a \notin \{-1; 1\}$, совпадают тогда и только тогда, когда выполняется система равенств

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 1 - a, \\ a = 2 - a, \\ c - 2 = -c - 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 2 = 0, \\ 2a = 2, \\ 2c = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1) \cdot (a + 2) = 0, \\ a = 1, \\ c = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ c = -1. \end{cases}$$

Так как $a \notin \{-1; 1\}$, то последняя система не имеет решений. Это означает, что не существует значений параметров a и c , при которых график квадратичной функции $f(x)$ симметричен графику квадратичной функции $\varphi(x)$ относительно оси абсцисс.

Ответ. $a, c \in \emptyset$.

3. Найдите значения параметров a и c , при которых график квадратичной функции $f(x) = ax^2 + (a^2 - 1)x + c + 3$ симметричен графику квадратичной функции $\varphi(x) = 2(a + 1)x^2 + (a - 1)x - 2c$ относительно оси ординат.

Решение. Так как функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ квадратичные, то $a \notin \{0; -1\}$ (так как $a \neq 0$, $a + 1 \neq 0$).

График $f(x)$ симметричен графику функции $\varphi(x)$ относительно оси ординат, если квадратичная функция $f(x)$ совпадает с квадратичной функцией $\varphi(-x)$. Если $a \notin \{0; -1\}$, то квадратичные функции $f(x) = ax^2 + (a^2 - 1)x + c + 3$ и $\varphi(-x) = 2(a + 1)x^2 - (a - 1)x - 2c$ совпадают тогда и только тогда, когда выполняется система равенств

$$\begin{cases} a = 2a + 2, \\ a^2 - 1 = 1 - a, \\ c + 3 = -2c; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2, \\ a^2 + a - 2 = 0, \\ 3c = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2, \\ (a - 1) \cdot (a + 2) = 0, \\ c = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2, \\ c = -1. \end{cases}$$

Из последней системы следует: если $a = -2$ и $c = -1$, то график квадратичной функции $f(x)$ симметричен графику квадратичной функции $\varphi(x)$ относительно оси ординат.

Ответ. $a = -2$ и $c = -1$.

4. Найдите коэффициенты квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если $y(0) = 4$, $y(1) = y(3) = 5$.

Решение. Так как $y(1) = y(3)$, то осью симметрии параболы является прямая $x = 2$. Так как осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ является прямая $x = -b/2a$, то $-b/2a = 2 \Leftrightarrow b = -4a$.

Так как $y(0) = 4$ и $y(1) = 5$, то $c = 4$ и $a + b + c = 5 \stackrel{c=4}{\Leftrightarrow} a + b = 1$.

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} b = -4a, \\ a + b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/3, \\ b = 4/3. \end{cases}$$

Ответ. $a = -1/3$, $b = 4/3$, $c = 4$.

Дискриминант квадратичной функции

5. Докажите, что дискриминант квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b, c — целые числа, не может равняться 979.

Решение. Дискриминант квадратичной функции равен $D = b^2 - 4ac$. Так как a, b, c — целые числа, то рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть b — чётное число. Число является чётным, если его можно представить в виде $b = 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда $D = 4k^2 - 4ac \Leftrightarrow D = 4(k^2 - ac)$. Получили, что дискриминант делится на 4, но число 979 не делится на 4. Итак, если b чётное число, то не существуют целых чисел a, b, c таких, что $D = 979$.

2. Пусть b — нечётное число. Число является нечётным, если его можно представить в виде $b = 2k + 1$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда $D = (2k + 1)^2 - 4ac \Leftrightarrow D = 4(k^2 + k - ac) + 1$. Получили, что дискриминант при делении на 4 даёт остаток 1, но число $979 = 244 \cdot 4 + 3$ при делении на 4 даёт остаток 3. Итак, если b нечётное число, то не существуют целых чисел a, b, c таких, что $D = 979$.

Из 1. и 2. следует, что не существует целых чисел a, b, c таких, что $D = 979$.

6. Докажите, что график квадратичной функции $y = x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в двух точках, если $5p - 4q > 9$.

Решение. График квадратичной функции пересекает ось абсцисс в двух точках, если дискриминант $D > 0$. Дискриминант квадратичной функции $y = x^2 + px + q$ равен $D = p^2 - 4q$.

$$\text{Очевидно, } 5p - 4q > 9 \Leftrightarrow -4q > 9 - 5p.$$

Имеем

$$D = p^2 - 4q = p^2 + (-4q) > p^2 + (9 - 5p) = (p - 2,5)^2 + 2,75 > 0 \Rightarrow D > 0.$$

Доказали, что $D > 0$. Тогда, если $5p - 4q > 9$, то график функции $y = x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в двух точках.

Корни квадратного трехчлена

7. Найдите корни квадратного трехчлена $f(x) = 252x^2 - 819x + 567$.

Решение. Имеем $f(1) = 252 - 819 + 567 \Leftrightarrow f(1) = 0$.

Итак, $x_1 = 1$ является корнем исходного квадратного трехчлена.

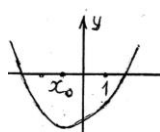
Так как прямая $x = 819/2 \cdot 252 \Leftrightarrow x = 1,625$ является осью симметрии параболы, заданной уравнением $f(x) = 252x^2 - 819x + 567$, то вторым корнем (так как $x_2 + x_1 = 2x_0$) является $x_2 = 2 \cdot 1,625 - 1 \Leftrightarrow x_2 = 2,25$.

Ответ. $x_1 = 1, x_2 = 2,25$.

8. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4874 - 1616x^2 - 3244x} = x - 1$?

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{4874 - 1616x^2 - 3244x} = x - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4874 - 1616x^2 - 3244x = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1617x^2 + 3242x - 4873 = 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$



Определим, сколько различных корней, удовлетворяющих неравенству $x \geq 1$, имеет квадратный трехчлен $f(x) = 1617x^2 + 3242x - 4873$.

Графиком квадратного трехчлена $f(x) = 1617x^2 + 3242x - 4873$ является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины равна $x_0 = -1621/1671$. Отметим $-1 < x_0 < 0$.

Так как квадратный трехчлен $f(x)$ на промежутке $[x_0; \infty)$ возрастает и $f(1) < 0$, то график квадратного трехчлена $f(x)$, если $x \in [1; \infty)$, пересекает ось абсцисс в одной точке. Это означает, что, если $x \geq 1$, то квадратный трехчлен $f(x)$ имеет один корень, который больше единицы. Тогда и исходное уравнение имеет один корень.

Ответ. Один корень.

9. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$. Составьте квадратный трехчлен, корнями которого являются числа $x_1 \cdot x_2$ и $x_1^2 - x_2^2$.

Решение. Пусть $x_1 \geq x_2$.

Так как исходный квадратный трехчлен имеет корни, то дискриминант этого трёхчлена $D \geq 0 \Leftrightarrow p^2 - 4q \geq 0$.

Из теоремы Виета следует, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Из обратной теоремы Виета следует, что искомый квадратный трехчлен имеет вид $\varphi(x) = x^2 - (x_1^2 - x_2^2)x + x_1 \cdot x_2$.

Выразим $x_1^2 - x_2^2$ через p и q .

$$\text{Имеем } x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = -p(x_1 - x_2).$$

Выразим $x_1 - x_2$ через p и q .

Имеем

$$\begin{cases} x_1 = 0,5(-p + \sqrt{D}), \\ x_2 = 0,5(-p - \sqrt{D}); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,5(-p + \sqrt{p^2 - 4q}), \\ x_2 = 0,5(-p - \sqrt{p^2 - 4q}) \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Итак, так как $x_1^2 - x_2^2 = -p(x_1 - x_2)$ и $x_1 - x_2 = \sqrt{p^2 - 4q}$, то

$$x_1^2 - x_2^2 = -p\sqrt{p^2 - 4q}.$$

Искомый квадратный трёхчлен имеет вид

$$\varphi(x) = x^2 - (x_1^2 - x_2^2)x + x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \varphi(x) = x^2 + p\sqrt{p^2 - 4q}x + q.$$

$$\text{Ответ. } \varphi(x) = x^2 + p\sqrt{p^2 - 4q}x + q.$$

10. Докажите, что квадратичная функция $y = x^2 + px + q$ не имеет рациональных корней, если p, q нечётные числа.

Решение. Пусть числа p, q – нечётные. Тогда эти числа можно представить в виде: $p = 2k + 1$, $q = 2n + 1$, где $k, n \in \mathbb{Z}$. Исходная квадратичная функция принимает вид $y(x) = x^2 + (2k + 1)x + (2n + 1)$, где $k, n \in \mathbb{Z}$. (1)

Найдём дискриминант D квадратичной функции (1). Имеем

$$D = \underbrace{(2k + 1)^2}_{\text{целое число}} - 4 \underbrace{(2n + 1)}_{\text{целое число}} - \text{целое число}.$$

Если квадратичная функция (1) имеет рациональные корни, то дискриминант этой функции полный квадрат. Дискриминант является

полным квадратом целого числа, если существует целое число S такое, что

$$D = S^2 \Leftrightarrow \underbrace{(2k+1)^2}_{\text{нечётное}} - \underbrace{4(2n+1)}_{\text{чётное}} = S^2 \quad (2)$$

Из (2) следует, что S – нечётное число. Так как число S – нечётное число, то его можно представить в виде $S = 2m+1$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим равенство (2). Имеем

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 - S^2 = 4(2n+1) &\Leftrightarrow (2k+1)^2 - (2m+1)^2 = 4(2n+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2k-2m)(2k+2m+2) = 4(2n+1) \Leftrightarrow (k-m)(k+m+1) = (2n+1). \quad (3) \end{aligned}$$

Рассмотрим равенство (3).

1) Если k и m одной чётности, то $(k-m)$ является чётным числом. Тогда равенство (3) не выполняется, так как левая часть его чётное число, а правая часть нечётное.

2) Если k и m разной чётности, то $(k+m+1)$ является чётным числом. Тогда равенство (3) не выполняется, так как левая часть его чётное число, а правая часть нечётное.

Получили, что дискриминант исходной квадратичной функции не является полным квадратом, ни при каких нечётных значениях p, q . Тогда исходная квадратичная функция не имеет рациональных корней.

11. Найдите все целые значения p, q , при которых многочлен $f(p; q) = p^2 - 2p + pq - q - 2q^2$ (1) имеет целые корни.

Решение. Рассмотрим многочлен (1) как квадратный трёхчлен относительно p , считая q параметром:

$$f(p; q) = p^2 - (2-q)p - q - 2q^2 \quad (2)$$

Найдём дискриминант $D(q)$ квадратного трёхчлен (2). Имеем

$$D(q) = (2-q)^2 + 4q + 8q^2 \Leftrightarrow D(q) = 9q^2 + 4.$$

Дискриминант $D(q)$ является полным квадратом целого числа, если существует целое число S такое, что

$$D(q) = S^2 \Leftrightarrow 9q^2 + 4 = S^2 \Leftrightarrow S^2 - 9q^2 = 4 \Leftrightarrow (S-3q) \cdot (S+3q) = 4.$$

Так как S и q целые числа, то и $(S-3q), (S+3q)$ так же целые числа. Легко проверить, что числа $(S-3q), (S+3q)$ имеют одинаковую чётность. Действительно, если они имеют разную чётность, то существуют

целые числа k и m такие, что, например,

$$\begin{cases} S - 3q = 2k, \\ S + 3q = 2m + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S = 2(k + m) + 1, \\ S + 3q = 2m + 1. \end{cases}$$

Последняя система не имеет решений, так как $2S$ чётное число, а $2(k + m) + 1$ нечётное число.

Так как $(S - 3q) \cdot (S + 3q) = 4$ и числа $(S - 3q), (S + 3q)$ имеют одинаковую чётность, то

$$\begin{cases} S - 3q = 2, \\ S + 3q = 2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} S - 3q = -2, \\ S + 3q = -2. \end{cases}$$

Из систем следует, что $q = 0$.

Если $q = 0$, то исходный многочлен принимает вид $f(p) = p(p - 2)$, корнями которого являются числа $p = 0$ или $p = 2$.

Ответ. $q = 0, p = 0$ или $q = 0, p = 2$.

12. Найдите все целые значения p, q , при которых имеет целые корни многочлен $f(p; q) = 5p^2 - 2pq^2 + 2q^4 - 6q^2 + 1$ (1).

Решение. Многочлен (1) является квадратным трёхчленом относительно p с параметром q .

Найдём дискриминант $D(q)$ квадратного трёхчлена (1). Имеем

$$D(q)/4 = q^4 - 10q^4 + 30q^2 - 5 \Leftrightarrow D(q)/4 = -9q^4 + 30q^2 - 5.$$

Найдём значения q , при которых $D(q)/4 \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} D(q)/4 \geq 0 &\Leftrightarrow -9q^4 + 30q^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow -(3q^2 - 5)^2 + 20 \geq 0 \Leftrightarrow (3q^2 - 5)^2 \leq 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{20} \leq 3q^2 - 5 \leq \sqrt{20} \Leftrightarrow -\sqrt{20} + 5 \leq 3q^2 \leq \sqrt{20} + 5 \stackrel{4 < \sqrt{20} < 5}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 0 < 3q^2 < 10 \Rightarrow 0 < q^2 < 10/3. \end{aligned}$$

Так как q целое значение, то из неравенства $0 < q^2 < 10/3$, следует, что $q \in \{-1; 1\}$.

Рассмотрим многочлен (1) при $q \in \{-1; 1\}$.

Если $q \in \{-1; 1\}$, то многочлен (1) принимает вид $f(p; q) = (5p + 3)(p - 1)$. Тогда корнями многочлена (1) являются числа $p = -0,6$ или $p = 1$, если $q \in \{-1; 1\}$. Так как по условию p целое число, то только $p = 1$ удовлетворяет условию задачи. Тогда корнями многочлена (1) являются $q = -1, p = 1$ или $q = 1, p = 1$.

Ответ. $q = -1, p = 1$ или $q = 1, p = 1$.

13. Квадратный трёхчлен $y = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение в точке $x = 7$ являются простыми числами. Найдите корни трёхчлена.

Решение. Пусть x_1 и x_2 корни квадратного трёхчлена. Тогда

$$y(x) = (x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow y(7) = (7 - x_1)(7 - x_2).$$

По условию $y(7) = (7 - x_1) \cdot (7 - x_2)$ является простым числом и один из корней трёхчлена является простым числом. Пусть x_1 является простым числом, а x_2 не является простым числом.

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $x_1 = 2$ – простое число.

$$\text{Тогда } y(7) = (7 - 2) \cdot (7 - x_2) \Leftrightarrow y(7) = 5(7 - x_2).$$

Число $y(7) = 5(7 - x_2)$ может быть простым только в случае, если $7 - x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 6$ – не простое число.

Корнями исходного квадратного трёхчлена является пара $(2; 6)$.

2) Пусть x_1 – простое нечётное число. Тогда $y(7) = \underbrace{(7 - x_1)}_{\substack{\square\square\square\square\square\square \\ \text{чётное}}} \cdot (7 - x_2)$.

Очевидно, что $y(7)$ может быть простым только в случае, если

$$\begin{cases} 7 - x_1 = 2, \\ 7 - x_2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Корнями исходного квадратного трёхчлена является пара $(5; 6)$.

Ответ. Корнями уравнения являются пары $(2; 6), (5; 6)$.

14. Квадратный трёхчлен $y = x^2 + (3a + 2)x + 2c - 5$, где $2c - 5$ – простое число, имеет два целых корня. Найдите всевозможные числа a и c .

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена. На основании теоремы Виета имеем

$$\begin{cases} -3a - 2 = x_1 + x_2, \\ 2c - 5 = x_1 \cdot x_2. \end{cases} \quad (1)$$

Из второго уравнения системы (1) следует: так как $2c - 5$ – простое число, то только один из корней равен 1. Пусть $x_1 = 1$.

Если $x_1 = 1$, то система (1) принимает вид

$$\begin{cases} -3a - 2 = 1 + x_2, \\ 2c - 5 = x_2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -3a - 3, \\ x_2 = 2c - 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c - 5 = -3(a + 1), \\ x_2 = 2c - 5. \end{cases} \quad (2)$$

По условию число $2c - 5$ является простым. Тогда из первого уравнения системы (2) следует, что $a + 1 = -1 \Leftrightarrow a = -2$. Так как $a = -2$ и $2c - 5 = -3(a + 1)$, то $c = 4$. Итак, $a = -2$ и $c = 4$.

Так как $c = 4$, то из второго уравнения системы (2) находим, что $x_2 = 3$.

Итак, если $a = -2$, $c = 4$, то корнями исходного квадратного трёхчлена являются целые числа ($x_1 = 1, x_2 = 3$). Это означает, что $a = -2$ и $c = 4$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $a = -2$ и $c = 4$.

15. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых квадратные трёхчлены $f(x) = x^2 - ax + 1977$, $\varphi(x) = x^2 - 1977x + a$ имеют хотя бы один корень, причём все их корни являются целыми числами.

Решение. 1. Если x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 - ax + 1977$, то на основании теоремы Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a, \\ x_1 \cdot x_2 = 1977; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = a, \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 659. \end{cases} \quad (1)$$

Число 659 – простое число. Пусть $x_2 \geq x_1$. Так как x_1 и x_2 – целые числа, то из второго уравнения системы (1) следует, что возможны следующие случаи:

1) $x_1 = 1$ и $x_2 = 1977$, $a = 1978$; 2) $x_1 = -1977$ и $x_2 = -1$; $a = -1978$

3) $x_1 = 3$ и $x_2 = 659$, $a = 662$; 4) $x_1 = -659$ и $x_2 = -3$, $a = -662$.

Итак, если $a \in \{-1978; -662; 662; 1978\}$, то квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 - ax + 1977$ имеет целые корни.

Первый способ.

Определим, при каких значениях параметра $a \in \{-1978; -662; 662; 1978\}$ корнями квадратного трёхчлена $\varphi(x) = x^2 - 1977x + a$ являются целые числа.

2. Пусть x_3 и x_4 – корни квадратного трёхчлена. Пусть $x_4 \geq x_3$.

1) Если $a = -1978$, то $\varphi(x) = x^2 - 1977x - 1978$.

Легко проверить, что $x_3 = -1$ и $x_4 = 1978$ являются корнями квадратного трёхчлена $\varphi(x) = x^2 - 1977x - 1978$. Это означает, что $a = -1978$ удовлетворяет условию задачи.

2) Если $a = 1978$, то на основании теоремы Виета имеем

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = a; \end{cases} & \stackrel{a=1978}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = 1978; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 - x_3 - x_4 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 - x_3 - x_4 + 1 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ (x_3 - 1) \cdot (x_4 - 1) = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $x_3 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$, то второго уравнения системы следует

$$\begin{cases} x_3 - 1 = 1, \\ x_4 - 1 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 2, \\ x_4 = 3. \end{cases}$$

Очевидно, значения $x_3 = 2$ и $x_4 = 3$ не удовлетворяют первому уравнению системы (4). Это означает, что $a = 1978$ не удовлетворяет условию задачи.

3) Если $a = -662$, то имеем

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = a; \end{cases} \stackrel{a=-662}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = -662. \end{cases}$$

Так как 331 – простое число, то из второго уравнения системы следует, что $x_3 = -2$ и $x_4 = 331$. Очевидно, эти значения x_3 и x_4 не удовлетворяют первому уравнению системы. Это означает, что $a = -662$ не удовлетворяет условию задачи.

3) Если $a = 662$, то имеем

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = a; \end{cases} \stackrel{a=662}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = 662. \end{cases} \quad (6)$$

Из второго уравнения системы (6) (с учётом первого уравнения) следует, что $x_3 = 2$ и $x_4 = 331$. Очевидно, эти значения x_3 и x_4 не удовлетворяют первому уравнению системы (6). Это означает, что $a = 662$ не удовлетворяет условию задачи.

Второй способ.

2. Определим, при каких значениях параметра a корнями квадратного трёхчлена $\varphi(x) = x^2 - 1977x + a$ являются целые числа.

Воспользуемся неравенством $|b + c| \leq |bc|$, если $|b| \neq 1$ и $|c| \neq 1$ и неравенством $|b + c| \leq |b| + |c|$.

Если x_3 и x_4 – корни квадратного трёхчлена $\varphi(x) = x^2 - 1977x + a$, то на основании теоремы Виета имеем

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = a; \end{cases} \Rightarrow 1977 = |x_3 + x_4| \leq |x_3| + |x_4| \Leftrightarrow |x_3| + |x_4| \geq 1977.$$

Отметим: $|x_3|$ и $|x_4|$ одновременно не равны 1.

Из системы следует, если $x_3 = -1$, то $x_4 = 1978$ и $a = -1978$; если $x_3 = 1$, то $x_4 = 1976$ и $a = 1976$.

Если $|x_3| \neq 1$, то $1977 \leq |x_3| + |x_4| \leq |x_3 x_4| = |a| \Leftrightarrow |a| \geq 1977$.

Итак, $|a| \geq 1977$ и $a = -1978$, $a = 1976$.

Таким образом, если $a \in (-\infty; -1977] \cup [1976; \infty)$, то квадратный трёхчлен $\varphi(x) = x^2 - 1977x + a$ может иметь целые корни.

3. Имеем, если $a \in \{-1978; -662; 662; 1978\}$, то корни квадратного трёхчлен $f(x) = x^2 - ax + 1977$ являются целыми числами.

Если $a \in (-\infty; -1977] \cup [1976; \infty)$, то квадратный трёхчлен $\varphi(x) = x^2 - 1977x + a$ может иметь целые корни.

Тогда корнями квадратных трёхчленов $f(x) = x^2 - ax + 1977$, $\varphi(x) = x^2 - 1977x + a$ могут быть одновременно целые корни, если

$$a \in ((-\infty; -1977] \cup [1976; \infty)) \cap \{-1978; -662; 662; 1978\} \Leftrightarrow a \in \{-1978; 1978\}.$$

Если $a \in \{-1978; 1978\}$, то корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 - ax + 1977$ являются целые числа.

4. Рассмотрим квадратный трёхчлен $\varphi(x) = x^2 - 1977x + a$, если $a \in \{-1978; 1978\}$.

Пусть x_3 и x_4 – корни квадратного трёхчлена.

1) Если $a = -1978$, то $\varphi(x) = x^2 - 1977x - 1978$.

Легко проверить, что $x_3 = -1$ и $x_4 = 1978$ являются корнями квадратного трёхчлена $\varphi(x) = x^2 - 1977x - 1978$. Это означает, что $a = -1978$ удовлетворяет условию задачи.

2) Если $a = 1978$, то на основании теоремы Виета имеем

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = a; \end{cases} \stackrel{a=1978}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = 1978; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 1977, \\ x_3 \cdot x_4 = 2 \cdot 23 \cdot 43. \end{cases}$$

Из системы следует, что x_3, x_4 – положительные числа.

Из второго уравнения системы следует, что только пары $(1; 1978)$, $(2; 989)$, $(46; 43)$, $(86; 23)$ удовлетворяют уравнению $x_3 \cdot x_4 = 1978$ (второму уравнения системы) но эти пары не удовлетворяют уравнению $x_3 + x_4 = 1977$ (первому уравнения системы). Это означает, что $a = 1978$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $a = -1978$.

16. Найдите нули функции $f(x) = x^4 - 2\sqrt{5}x^2 + x + 5 - \sqrt{5}$.

Решение. Пусть $\sqrt{5} = a$. Тогда $f(x; a) = x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a$.

Рассмотрим функцию $f(x; a)$ как квадратичную функцию относительно a , с параметром x . Перепишем функцию $f(x; a)$ в виде

$$f(x; a) = a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 + x. \quad (1)$$

Нулями функции (1) являются корни квадратного уравнения

$$a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 + x = 0. \quad (2)$$

Найдём корни уравнения (2).

а) Найдём дискриминант $D(x)$ квадратного уравнения (2). Имеем

$$D(x) = (2x^2 + 1)^2 - 4x^4 - 4x \Leftrightarrow D(x) = (2x - 1)^2.$$

б) Найдём a_1 и a_2 – корни квадратного уравнения (2). Имеем

$$a_1 = 0,5(2x^2 + 1 - 2x + 1) \Leftrightarrow a_1 = x^2 - x + 1;$$

$$a_2 = 0,5(2x^2 + 1 + 2x - 1) \Leftrightarrow a_2 = x^2 + x.$$

Так как $\sqrt{5} = a$, то

$$\sqrt{5} = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 0,5(1 \pm \sqrt{4\sqrt{5} - 3});$$

$$\sqrt{5} = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = 0,5(-1 \pm \sqrt{4\sqrt{5} + 1}).$$

$$\text{Ответ. } x_{1,2} = 0,5(1 \pm \sqrt{4\sqrt{5} - 3}); \quad x_{3,4} = 0,5(-1 \pm \sqrt{4\sqrt{5} + 1}).$$

Значения квадратного трёхчлена.

17. Докажите, что квадратичная функция $y(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых значениях x , если $2a, (a + b), c$ являются целыми числами.

Решение. Пусть $2a, (a + b), c$ – целые числа. Докажем, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает целое значение при всех целых значениях x .

Определим, являются ли значения функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ целыми числами в зависимости от значений a .

1) Пусть a – целое число. Так как $(a + b)$ и a являются целыми числами, то и b – целое число. По предположению a является целым числом, по условию c, x , являются целыми числами и доказали, что b – целое число. Тогда $y(x)$ – целое число.

2) Пусть a – нецелое число. Так как $2a$ является целым числом, то $a = k + 0,5$, где $k \in \mathbb{Z}$. Так как $a + b = k + 0,5 + b$, где $k \in \mathbb{Z}$, является целым числом, то $b = n + 0,5$, где $n \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$y(x) = (k + 0,5)x^2 + (n + 0,5)x + c \Leftrightarrow y(x) = \underbrace{(kx^2 + nx + c)}_{\text{целое, т.к. } k, n, c, x - \text{целые}} + \underbrace{0,5x(x+1)}_{x(x+1) \text{ кратно } 2}.$$

Получили, что $y(x)$ – целое число.

18. Найдите все значения параметра a , для которых квадратичная функция $f(x) = (a^2 - 2)x^2 - ax - 2$ отрицательно для всех $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Квадратичная функция отрицательна для всех $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда её дискриминант меньше нуля и коэффициента при x^2 отрицательный. Значения a , удовлетворяющие условию задачи, находим из системы

$$\begin{cases} a^2 - 2 < 0, \\ D < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2 < 0, \\ a^2 + 8(a^2 - 2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2 < 0, \\ 9a^2 - 16 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -4/3 < a < 4/3.$$

Ответ. $-4/3 < a < 4/3$.

19. Найдите все значения параметра a , для которых функция $f(x) = 3^{(a+3)x^2 - 2(a+6)x + 3a + 12}$ больше единицы для всех $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Надо найти все такие значения параметра a , что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow 3^{(a+3)x^2 - 2(a+6)x + 3a + 12} > 3^0 \Leftrightarrow (a+3)x^2 - 2(a+6)x + 3a + 12 > 0.$$

Обозначим $\varphi(x) = (a+3)x^2 - 2(a+6)x + 3a + 12$.

1. Пусть $a + 3 = 0$. Тогда $\varphi(x)$ принимает вид $\varphi(x) = -6x + 3$. Линейная функция $\varphi(x) = -6x + 3$ не является положительной для всех $x \in \mathbb{R}$.

2. Пусть $a + 3 \neq 0$. Тогда функция $\varphi(x)$ является квадратичной.

Квадратичная функция положительная для всех $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда её дискриминант меньше нуля и коэффициента при x^2 положительный. Значения a , удовлетворяющие условию задачи, находим из системы

$$\begin{cases} a + 3 > 0, \\ D < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3 > 0, \\ (a+6)^2 - 3(a+3)(a+4) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3 > 0, \\ a(2a+9) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow a > 0.$$

Ответ. $a \in (0; \infty)$.

20. Найдите все значения параметра a , при которых многочлен $f(x; y) = ax^2 + (a-6)y^4 + 2(4x+a-6)y^2 + 8x + a - 6$ положительный для любых x и y .

Решение. Перепишем многочлен $f(x; y)$ как квадратный трёхчлен относительно x , с параметрами y и a . Имеем

$$\begin{aligned} f(x; y) &= ax^2 + (a-6)y^4 + 2y^2(4x+a-6) + 8x + a - 6 = \\ &= ax^2 + 8x(y^2+1) + (a-6)(y^4+2y^2+1) = ax^2 + 8x(y^2+1) + (a-6)(y^2+1)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } f(x; y) = ax^2 + 8x(y^2+1) + (a-6)(y^2+1)^2.$$

1. Пусть $a \neq 0$. Квадратный трёхчлен $f(x; y)$ положительный для любых x тогда и только тогда когда дискриминанта $D(y; a)$ квадратного трёхчлена $f(x; y)$ меньше нуля и $a > 0$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \begin{cases} D(y; a) < 0, \\ a > 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 16(y^2+1)^2 - a(a-6)(y^2+1)^2 < 0, \\ a > 0; \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (y^2+1)^2(-a^2+6a+16) < 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)(a-8) > 0, \\ -\infty < y < \infty, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < y < \infty, \\ a > 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, если $a > 8$, то исходный многочлен положительный для любых x и y .

2. Если $a = 0$, то исходный многочлен принимает вид

$$f(x; y) = 8x(y^2+1) - 6(y^2+1)^2 \Leftrightarrow f(x; y) = 2(y^2+1)(4x-3y^2-3).$$

$$\text{Итак, если } a = 0, \text{ то } f(x; y) = 2(y^2+1)(4x-3y^2-3).$$

Так как, например, $f(0; 0) = -3 < 0$, то не для всех значений x и y функция $f(x; y) = 2(y^2+1)(-3y^2+4x-3)$ принимает положительные значения. Поэтому $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $a > 8$.

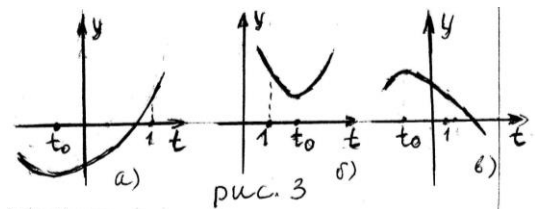
21. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция $f(x) = (a-1) \cdot 9^{x^2} - 4(a-3) \cdot 3^{x^2} + a + 2$ положительная для всех x .

Решение. Пусть $t = 3^{x^2}$. Очевидно, $t \in [1; \infty)$.

Тогда $f(x(t)) = (a-1)t^2 - 4(a-3)t + a + 2$. Обозначим $f(x(t)) = \varphi(t)$.

Задача сводится к тому, что надо найти все значения a , при каждом из которых значения функции $\varphi(t) = (a-1)t^2 - 4(a-3)t + a + 2$ на промежутке $[1; \infty)$ положительные.

1. Пусть $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$. В этом случае $\varphi(t) = 8t + 3$. Очевидно, линейная функция $\varphi(t) = 8t + 3$ на промежутке $[1; \infty)$ положительная.



Тогда $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

2. Пусть $a-1 \neq 0$.

Преобразуем уравнение квадратичной функции $\varphi(t)$ (выделим

полный квадрат). Имеем

$$\varphi(t) = (a-1) \left(t - 2(a-3)(a-1)^{-1} \right)^2 + a + 2 - 4(a-3)^2(a-1)^{-1}$$

Графиком функции $\varphi(t)$ является парабола, абсцисса вершины которой равна $t_0 = 2(a-3)(a-1)^{-1}$, а ордината вершины равна

$$y_0 = (a+2) - 4(a-3)^2(a-1)^{-1} \Leftrightarrow y_0 = \frac{(a+2)(a-1) - 4(a-3)^2}{a-1} \Leftrightarrow y_0 = -\frac{3a^2 - 25a + 38}{a-1}.$$

Итак, $y_0 = -(3a^2 - 25a + 38)(a-1)^{-1}$.

1) Если $a-1 > 0$, то графиком квадратичной функции $\varphi(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Рассмотрим функцию $\varphi(t)$, если $a-1 > 0$, при различных расположениях точки $t_0 = (a^2 - 3)(a-1)^{-1}$ относительно промежутка $[1; \infty)$.

а) Пусть $t_0 \leq 1$. Так как на промежутке $[t_0; \infty)$ функция $\varphi(t)$ возрастает, то и на промежутке $[1; \infty)$ функция возрастает (рис. 3 а)). Функция $\varphi(t)$ положительная на промежутке $[1; \infty)$, если $\varphi(1) > 0$. Итак, параметр a удовлетворяет условию задачи, если

$$\begin{cases} a-1 > 0, \\ t_0 \leq 1, \\ \varphi(1) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 2(a-3)(a-1)^{-1} \leq 1, \\ (a-1) - 4(a-3) + a + 2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a \leq 5, \\ a < 6,5; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a \leq 5.$$

Итак, $a \in (1; 5]$ удовлетворяют условию задачи.

б) Пусть $t_0 > 1$. Тогда абсцисса вершины параболы принадлежит промежутку $[1; \infty)$. Функция $\varphi(t)$ положительная на промежутке $[1; \infty)$, если ордината вершины параболы $y_0 > 0$ (рис. 3 б)). Параметр a удовлетворяет условию задачи, если

$$\begin{cases} a-1 > 0, \\ t_0 > 1, \\ y_0 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 2(a-3)(a-1)^{-1} > 1, \\ -(3a^2 - 25a + 38)(a-1)^{-1} > 0; \end{cases} \stackrel{a>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a > 1, \\ 2(a-3) > a-1, \\ (3a-19)(a-2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow 5 < a < 19/3.$$

Итак, $a \in (5; 19/3)$ удовлетворяют условию задачи.

Из 1. и 2. следует, что $a \in [1; 19/3]$ удовлетворяют условию задачи.

2. Пусть $a-1 < 0$. Графиком квадратичной функции $\varphi(t)$ является парабола, ветви которой направлены вниз (рис. 3 в)). Функция $\varphi(t)$, если $t \in [t_0; \infty)$, принимает все значения из промежутка $(-\infty; y_0]$. Это означает, что найдутся значения $a < 1$, при которых функция $\varphi(t)$, где $t > 1$, принимает отрицательные значения. Тогда $a < 1$ не удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $a \in [1; 19/3]$.

22. Найдите все значения x , для каждого из которых неравенство $(a+3)x^3 - 2(a+2)x^2 + 2x + (a^2 + 3a - 4) > 0$ выполняется хотя бы при одном значении параметра $a \in [-3; 1]$.

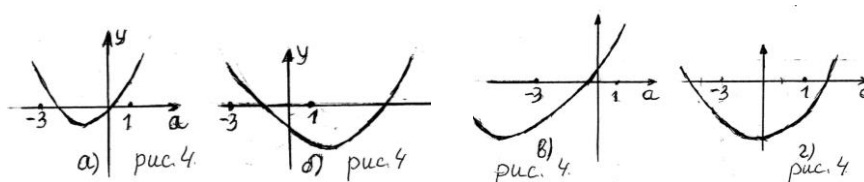
Решение. Пусть $f(x; a) = (a+3)x^3 - 2(a+2)x^2 + 2x + (a^2 + 3a - 4)$.

Перепишем функцию как квадратный трёхчлен относительно a , с параметром x . Имеем

$$f(a; x) = a^2 + (x^3 - 2x^2 + 3)a + (3x^3 - 4x^2 + 2x - 4). \quad (1)$$

Надо найти все значения $a \in [-3; 1]$, при которых квадратный трёхчлен $f(a; x)$ будет принимать хотя бы одно положительное значение.

Графиком квадратного трёхчлена $f(a; x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Возможные варианты графика квадратного трёхчлена $f(x; a)$ изображены на рисунках.



Условию задачи удовлетворяют варианты а), б), в) рисунка 4. Значения a , при которых квадратный трёхчлен $f(x; a)$ будет принимать хотя бы одно положительное значение на отрезке $[-3; 1]$, найдём из совокупности

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} f(x; -3) > 0, \\ f(x; 1) > 0; \end{array} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9 - 3(x^3 - 2x^2 + 3) + (3x^3 - 4x^2 + 2x - 4) > 0, \\ 1 + (x^3 - 2x^2 + 3) + (3x^3 - 4x^2 + 2x - 4) > 0; \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 2 > 0, \\ 2x^3 - 3x^2 + x > 0; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+2) > 0, \\ x(x-1)(2x-1) > 0; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ 0 < x < 0,5, \\ x > 1. \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ответ. $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 0,5) \cup (1; \infty)$.

Монотонность

23. Найдите все значения параметра a , при которых квадратичная функция $y = (a-2)x^2 + (a^2-7)x - 4$ на промежутке $(-\infty; -3]$ возрастает, а на промежутке $[2; \infty)$ убывает.

Решение. Так как исходная функция квадратичная, то $a-2 \neq 0$.

Абсциссой вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ является $x_0 = -b/2a$.

Для исходной параболы $x_0 = -0,5(a^2-7)(a-2)^{-1}$.

Исходная квадратичная функция на промежутке $(-\infty; -3]$ возрастает, а на промежутке $[2; \infty)$ убывает только в случае, если ветви параболы $y = (a-2)x^2 + (a^2-7)x - 4$ направлены вниз и $-3 \leq x_0 \leq 2$. Тогда $a-2 < 0$.

Значения параметра a , удовлетворяющих условию, находим из системы уравнений

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a < 2, \\ -3 \leq x_0 \leq 2; \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < 2, \\ -3 \leq -0,5(a^2-7) \cdot (a-2)^{-1} \leq 2; \end{array} \right\} \stackrel{-(a-2)>0}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} a < 2, \\ 6(a-2) \leq a^2-7 \leq -4(a-2); \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < 2, \\ a^2-6a+5 \geq 0, \\ a^2+4a-15 \leq 0; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < 2, \\ (a-1)(a-5) \geq 0, \\ \left((a+(2+\sqrt{19})) \right) \left((a+(2-\sqrt{19})) \right) \leq 0; \end{array} \right\} \Leftrightarrow -2-\sqrt{19} \leq a \leq 1. \end{aligned}$$

Ответ. $a \in [-2-\sqrt{19}; 1]$.

24. Найдите все значения параметра a , при которых на всей числовой оси функция $f(x) = (1-a)4^{-x} - 6(a^2-9)2^{-x} + 3$ монотонно убывает.

Решение. Пусть $t(x) = 2^{-x}$. Функция $t(x) = 2^{-x}$ монотонно убывает, если $x \in (-\infty; \infty)$. Отметим, $t(x) > 0$.

Известно, если в своих областях определения одна из функций f или φ возрастают, а другая убывают в своих областях определения, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ убывает в её области определения.

Так как функция $t(x) = 2^{-x}$ монотонно убывает, если $x \in (-\infty; \infty)$, то искомыми значениями параметра a будут те значения, при которых функция $f(t(x)) = (1-a)t^2(x) - 6(a^2 - 9)t(x) + 3$, где $t(x) > 0$, монотонно возрастает для любого $t(x) > 0$. Надо найти значениями параметра a , при которых функция $f(t(x))$, где $t(x) > 0$, монотонно возрастает для любого $t(x) > 0$.

1. Если $a = 1$, то $f(t) = 48t + 3$. Так как функция $f(t) = 48t + 3$ монотонно возрастает, то исходная функция при $a = 1$ монотонно убывает.

2. Если $a \neq 1$, то функция $f(t(x))$ является квадратичной, графиком которой является парабола с абсциссой вершины $t_0 = 3(a^2 - 9)(1-a)^{-1}$.

а) Если $1-a > 0$, то функция $f(t(x))$ монотонно возрастает на промежутке $[t_0; \infty)$ (график функции парабола, ветви которой направлены вверх). Тогда $f(t(x))$ монотонно возрастает для любого $t(x) > 0$, если $t_0 \leq 0$. Итак, функция $f(t(x))$ монотонно возрастает для любого $t(x) > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} t_0 \leq 0, \\ 1-a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a^2 - 9)(1-a)^{-1} \leq 0, \\ a < 1; \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq a < 1.$$

Итак, если $-3 \leq a < 1$, то функция $f(t(x))$ монотонно возрастает для любого $t(x) > 0$. Тогда исходная функция, если $-3 \leq a < 1$ монотонно убывает для любого $x \in (-\infty; \infty)$.

б) Если $1-a < 0 \Leftrightarrow a > 1$, то функция $f(t(x))$ монотонно убывает на промежутке $[t_0; \infty)$. Поэтому, не существует значений параметра $a > 1$, при которых для любого $t(x) > 0$ функция $f(t(x))$ монотонно возрастает. Тогда не существует значений параметра $a > 1$, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ. $-3 \leq a < 1$.

Наибольшее и наименьшее значения

25. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = ax^2 + 2x\sqrt{12+a-a^2}$ больше -5 ?

Решение. Область определения параметра является отрезок $[-3; 4]$ (находится из неравенства $12+a-a^2 \geq 0$).

1. Если $a = 0$, то $f(x) = 8\sqrt{2}x$. Линейная функция, если $x \in R$, не принимает наименьшего значения.

2. Если $a \neq 0$, то исходная функция является квадратичной. Преобразуем уравнение исходной функции (выделим полный квадрат). Имеем

$$f(x) = ax^2 + 2x\sqrt{12+a-a^2} \Leftrightarrow f(x) = a\left(x + a^{-1}\sqrt{12+a-a^2}\right)^2 - a^{-1}(12+a-a^2).$$

Графиком функции $f(x) = a\left(x + a^{-1}\sqrt{12+a-a^2}\right)^2 - a^{-1}(12+a-a^2)$, если $a \neq 0$, является парабола: абсцисса вершины — $x_0 = -a^{-1}\sqrt{12+a-a^2}$, а ордината — $y_0 = -a^{-1}(12+a-a^2)$.

Рассмотрим исходную функцию при различных значениях параметра $a \in [-3; 0) \cup (0; 4]$.

1) Если $a \in [-3; 0)$, то графиком функции $f(x)$ является парабола ветви, которой направлены вниз (коэффициент при x^2 меньше нуля).

Функция $f(x)$, если $x \in R$, наименьшее значение не принимает.

2) Если $a \in (0; 4]$, то графиком функции $f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх (коэффициент при x^2 больше нуля). Функция $f(x)$ в точке x_0 принимает *наименьшее значение*, равное $y_0 = -a^{-1}(12+a-a^2)$. Наименьшее значение больше -5 , если

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_0 > -5, \\ 0 < a \leq 4; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -(12+a-a^2)a^{-1} > -5, \\ 0 < a \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 12 > -5a, \\ 0 < a \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2) \cdot (a+6) > 0, \\ 0 < a \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow 2 < a \leq 4. \end{aligned}$$

Итак, $a \in (2; 4]$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $a \in (2; 4]$.

26. Найти все значения параметра a , при которых наименьшее значение функции $y = x^2 + 2(11a+6)x + 116a^2 + 135a + 27$ максимально.

Решение. Преобразуем уравнение исходной функции (выделим полный квадрат). Имеем

$$f(x) = (x + 11a + 6)^2 + 116a^2 + 135a + 27 - 121a^2 - 132a - 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) = (x + 11a + 6)^2 - (5a^2 - 3a + 9).$$

Графиком функции $f(x) = (x + 11a + 6)^2 - (5a^2 - 3a + 9)$ является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины – $x_0 = -11a - 6$, а ордината вершины – $y_0(a) = -5a^2 + 3a - 9$.

Квадратичная функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в точке $x_0 = -11a - 6$, равное $y_0(a) = -5a^2 + 3a - 9$. Очевидно, $y_0(a)$ является квадратичной функцией. Имеем

$$y_0(a) = -(5a^2 - 3a + 9) \Leftrightarrow y_0(a) = -5(a - 0,3)^2 - 8,55.$$

Графиком функции $y_0(a) = -5a^2 + 3a - 9 \Leftrightarrow y_0(a) = -5(a - 0,3)^2 - 8,55$ является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины – $a_0 = 0,3$. Квадратичная функция $y_0(a)$ наибольшее значение принимает, если $a = 0,3$. Это означает, что наименьшее значением функции $f(x)$, если $a = 0,3$ будет наибольшим.

Ответ. $a = 0,3$.

27. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых квадратичная функция $f(x) = x^2 - (a + 2)x + a - 3$ на отрезке $[-1; 2]$ принимает наименьшее значение, равное -6 .

Решение. Преобразуем уравнение квадратичной $f(x)$ функции (выделим полный квадрат). Имеем

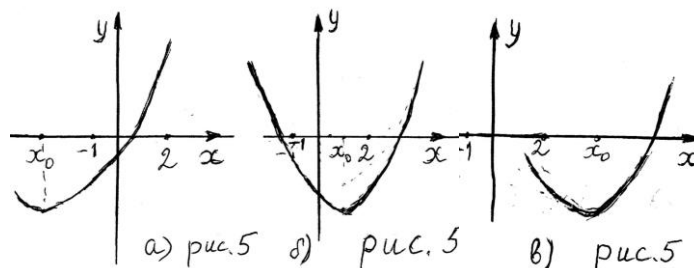
$$f(x) = x^2 - (a + 2)x + a - 3 \Leftrightarrow f(x) = (x - 0,5(a + 2))^2 - 0,25(a^2 + 16).$$

Графиком функции $f(x) = (x - 0,5(a + 2))^2 - 0,25(a^2 + 16)$ является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины – $x_0 = 0,5(a + 2)$, а ордината вершины – $y_0 = -0,25(a^2 + 16)$.

Рассмотрим функцию $f(x)$ при различных расположениях точки $x_0 = 0,5(a + 2)$ относительно отрезка $[-1; 2]$.

1) Пусть $x_0 < -1$. Тогда $x_0 < -1 \Leftrightarrow 0,5(2 + a) < -1 \Leftrightarrow a < -4$.

Так как на промежутке $[x_0; \infty)$ функция $f(x)$ возрастает (рис 5. а)), то при $a \in (-\infty; -4)$ наименьшее значение, равное -6 , функция $f(x)$ на отрезке $[-1; 2]$ может принимать только в точке $x = -1$.



Имеем $f(-1) = -6 \Leftrightarrow 2a = -6 \Leftrightarrow a = -3$. Так как $-3 \notin (-\infty; -4)$, то функция $f(x)$ при $a < -4$ на отрезке $[-1; 2]$ не принимает наименьшее значение.

2) Пусть $x_0 \in [-1; 2]$. Тогда $-1 \leq 0,5(a+2) \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 2$.

Если $a \in [-4; 2]$, то наименьшее значение, равное -6 , квадратичная функция $f(x)$ может принимать в точке $x_0 = 0,5(a+2)$ (рис 5. б)). Имеем

$$\begin{cases} f(x_0) = -6, \\ -4 \leq a \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0,5(a+2)) = -6, \\ -4 \leq a \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,25(a^2 + 16) = -6, \\ -4 \leq a \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 8, \\ -4 \leq a \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow a = -2\sqrt{2}.$$

Квадратичная функция (1) на отрезке $[-1; 2]$ принимает наименьшее значение, равно -6 , если $a = -2\sqrt{2}$.

3) Пусть $x_0 > 2$. Тогда $x_0 > 2 \Leftrightarrow 0,5(a+2) > 2 \Leftrightarrow a > 2$.

Так как на промежутке $(-\infty; x_0]$ квадратичная функция $f(x)$ убывает (рис 5. в)), то при $a \in (2; \infty)$ наименьшее значение, равно -6 , функция может принимать в точке $x = 2$.

Имеем $f(2) = -6 \Leftrightarrow -a - 3 = -6 \Leftrightarrow a = 3$. Так как $3 \in (2; \infty)$, то исходная квадратичная функция $f(x)$ на отрезке $[-1; 2]$, если $a = 3$ принимает наименьшее значение, равное -6 .

Ответ. $a \in \{-2\sqrt{2}; 3\}$.

28. Найдите наименьшее значение квадратичной функции $f(x) = 1 - x^2 - 2(a-2)x$ на отрезке $[a-3; 2a+1]$.

Решение. Графиком функции

$$f(x) = 1 - x^2 - 2(a-2)x \Leftrightarrow f(x) = -(x + (a-2))^2 + 1 + (a-2)^2$$

является парабола, ветви которой направлены вниз.

Пусть $X = [a-3; 2a+1]$. Тогда X является отрезком тогда и только тогда, когда $2a+1 > a-3 \Leftrightarrow a > -4$.

Квадратичная функция $f(x) = 1 - x^2 - 2(a-2)x$ принимает наименьшее значение на отрезке $[a-3; 2a+1]$, если $a > -4$, на одном из

концов отрезка (ветви направлены вниз). Поэтому надо сравнить числа $f(a-3)$ и $f(2a+1)$, где $a > -4$.

Обозначим $\varphi(a) = f(2a+1) - f(a-3)$.

Так как $f(2a+1) = -8a^2 + 2a + 4$ и $f(a-3) = -3a^2 + 16a - 20$, то

$$\varphi(a) = (-8a^2 + 2a + 4) - (-3a^2 + 16a - 20) = -5a^2 - 14a + 24 = (a+4) \cdot (6-5a).$$

Итак, $\varphi(a) = (a+4) \cdot (6-5a)$, где $a \in (-4; \infty)$.

Графиком квадратичной функции $\varphi(a) = (a+4) \cdot (6-5a)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Нулями этой функции являются $a = -4$ и $a = 1,2$.

Рассмотрим функцию $\varphi(a)$ при различных значениях параметра $a \in (-4; \infty)$.

1) Если $a \in (-4; 1,2)$, то $\varphi(a) > 0$. Тогда

$$\varphi(a) > 0 \Leftrightarrow f(2a+1) - f(a-3) > 0 \Leftrightarrow f(2a+1) > f(a-3).$$

Итак, если $a \in (-4; 1,2)$, то $f(2a+1) > f(a-3)$. Тогда

$$\min_{[a-3; 2a+1]} f(x) = f(a-3) = -3a^2 + 16a - 20, \text{ если } a \in (-4; 1,2).$$

2) Если $a \in (1,2; \infty)$, то $\varphi(a) < 0$. Тогда

$$\varphi(a) < 0 \Leftrightarrow f(2a+1) - f(a-3) < 0 \Leftrightarrow f(2a+1) < f(a-3).$$

Итак, если $a \in (1,2; \infty)$, то $f(a-3) > f(2a+1)$. Тогда

$$\min_{[a-3; 2a+1]} f(x) = f(2a+1) \Leftrightarrow \min_{[a-3; 2a+1]} f(x) = -8a^2 + 2a + 4, \text{ если } a \in (1,2; \infty).$$

3) Если $a = 1,2$, то $\varphi(a) = 0$. Тогда

$$\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow f(2a+1) - f(a-3) = 0 \Leftrightarrow f(2a+1) = f(a-3).$$

Итак, если $a = 1,2$, то $f(a-3) = f(2a+1) \stackrel{a=1,2}{\Leftrightarrow} f(-1,8) = f(3,5)$. Тогда

$$\min_{[a-3; 2a+1]} f(x) = f(-1,8) = f(3,5) \Leftrightarrow \min_{[a-3; 2a+1]} f(x) = -5,12, \text{ если } a = 1,2.$$

Ответ. Если $a \in (-4; 1,2)$, то $\min_{[a-3; 2a+1]} y = -3a^2 + 16a - 20$;

если $a \in [1,2; \infty)$, то $\min_{[a-3; 2a+1]} y = -8a^2 + 2a + 4$.

29. Найдите значения x , при которых выполняется равенство

$$\min_a (2a^2 - 3ax + 2x^2 - a) = \max_b (-b^2 - 2bx + x^2).$$

Решение. 1. Функция $f(a) = 2a^2 - 3ax + 2x^2 - a$ является квадратичной функцией относительно a , с параметром x .

Преобразуем уравнение квадратичной функции $f(a)$. Имеем

$$\begin{aligned}
 f(a) &= 2a^2 - 3ax + 2x^2 - a \Leftrightarrow f(a) = 2(a^2 - 0,5a(3x+1)) + 2x^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f(a) = 2(a - 0,25(3x+1))^2 + 2x^2 - 0,125(3x+1)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f(a) = 2(a - 0,25(3x+1))^2 + 0,125(7x^2 - 6x - 1).
 \end{aligned}$$

Графиком функции $f(a) = 2(a - 0,25(3x+1))^2 + 0,125(7x^2 - 6x - 1)$ является парабола, ветви которой направлены вверх, ордината вершины $- f_0 = 0,125(7x^2 - 6x - 1)$. Тогда $\min_a f(a) = 0,125(7x^2 - 6x - 1)$.

2. Функция $\varphi(b) = -b^2 - 2bx + 2x^2$ является квадратичной функцией относительно b , с параметром x .

Преобразуем уравнение квадратичной функции $\varphi(b)$. Имеем

$$\varphi(b) = -b^2 - 2bx + x^2 \Leftrightarrow \varphi(b) = -(b^2 + 2bx + x^2) + 2x^2 \Leftrightarrow \varphi(b) = -(b+x)^2 + 2x^2.$$

Графиком квадратичной функции $\varphi(b) = -(b+x)^2 + 2x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, ордината вершины $-\varphi_0 = 2x^2$. Тогда $\max_b \varphi(b) = 2x^2$.

3. Имеем

$$\begin{aligned}
 \min_a f(a) &= \max_b \varphi(b) \Leftrightarrow 0,125(7x^2 - 6x - 1) = 2x^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 7x^2 - 6x - 1 = 16x^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1/3.
 \end{aligned}$$

Ответ. $x = -1/3$.

30. Найдите все значения параметра $\alpha \in [\pi/6; \pi/2]$, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 2x\sin^2 \alpha + 2(1 + \sin \alpha)^2$ на отрезке $[-\sin \alpha; \sin \alpha]$ является наименьшим.

Решение. 1. Преобразуем уравнение исходной функции. Имеем

$$f(x) = -x^2 + 2x\sin^2 \alpha + 2(1 + \sin \alpha)^2 \Leftrightarrow f(x) = -(x - \sin^2 \alpha)^2 + \sin^4 \alpha + 2(1 + \sin \alpha)^2.$$

Графиком исходной функции является парабола, ветви которой направлены вниз, абсцисса вершины $-x_0 = \sin^2 \alpha$, а ордината вершины $-y_0 = \sin^4 \alpha + 2(1 + \sin \alpha)^2$.

Имеем $-\sin \alpha \leq \sin^2 \alpha \leq \sin \alpha \Rightarrow -\sin \alpha \leq x_0 \leq \sin \alpha$. Тогда $x_0 \in [-\sin \alpha; \sin \alpha]$, где $\alpha \in [\pi/6; \pi/2]$. Так как ветви параболы направлены вниз, то исходная функция принимает наибольшее значение на отрезке $[-\sin \alpha; \sin \alpha]$, где $\alpha \in [\pi/6; \pi/2]$, в точке $x_0 = \sin^2 \alpha$, равное $y_0(\alpha) = \sin^4 \alpha + 2(1 + \sin \alpha)^2$.

2. Найдём наименьшее значение функции $y_0(\alpha) = \sin^4 \alpha + 2(1 + \sin \alpha)^2$, если $\alpha \in [\pi/6; \pi/2]$.

Так как $\sin \alpha > 0$ и функция $\sin \alpha$ возрастает, если $\alpha \in [\pi/6; \pi/2]$, то функции $\sin^4 \alpha$ и $2(1 + \sin \alpha)^2$ также возрастают, если $\alpha \in [\pi/6; \pi/2]$. Откуда следует, что функция $y_0(\alpha) = \sin^4 \alpha + 2(1 + \sin \alpha)^2$ возрастает на отрезке $[\pi/6; \pi/2]$. Поэтому наименьшее значение функция $y_0(\alpha)$ принимает в точке $\alpha = \pi/6$. Тогда в точке $\alpha = \pi/6$ наибольшее значение функция $f(x)$ на отрезке $[-\sin \alpha; \sin \alpha]$, если $\alpha \in [\pi/6; \pi/2]$, является наименьшим.

Ответ. $\alpha = \pi/6$.

31. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = (12\pi^{-1} \arcsin 0,1x)^2 - 6\pi^{-1} \cdot (a+2) \arcsin 0,1x + a - 3$ на отрезке $[0; 5]$ отрицательно.

Решение. Пусть $t = 12\pi^{-1} \arcsin 0,1x$. Тогда

$$f(x) = \varphi(t(x)) \Leftrightarrow \varphi(t) = t^2 - 0,5(a+2)t + a - 3.$$

Найдём множество значений функции $t(x)$, если $x \in [0; 5]$.

Так как функция $t(x)$ возрастает, то

$$0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq 0,1x \leq 0,5 \Leftrightarrow \arcsin 0 \leq \arcsin 0,1x \leq \arcsin 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \arcsin 0,1x \leq \pi/6 \Leftrightarrow 0 \leq 12\pi^{-1} \cdot \arcsin 0,1x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2.$$

Итак, $t \in [0; 2]$.

Задача сводится к тому, что надо найти все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $\varphi(t) = t^2 - 0,5(a+2)t + a - 3$ на отрезке $[0; 2]$ отрицательно.

Графиком функции $\varphi(t) = t^2 - 0,5(a+2)t + a - 3$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Поэтому наибольшее значение функция $\varphi(t)$ будет принимать на одном из концов отрезка $[0; 2]$.

Наибольшее из двух чисел $\varphi(2) = -1$ и $\varphi(0) = a - 3$ будет меньше нуля тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел меньше нуля. Так как $\varphi(2) < 0$, то искомые значения a находим из неравенства

$$\varphi(0) < 0 \Leftrightarrow a - 3 < 0 \Leftrightarrow a < 3.$$

Итак, $a < 3$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $a < 3$.

32. Найдите наименьшее и наибольшее целые значения функции

$$f(x) = 4\sqrt{6 + \sin x - 2\sin^2 x}.$$

Решение. Пусть $t = \sin x$. Очевидно, $|t| \leq 1$. Тогда

$$f(x) = \varphi(t(x)) \Rightarrow \varphi(t) = 4\sqrt{6+t-2t^2}.$$

Итак, $\varphi(t) = 4\sqrt{6+t-2t^2}$, где $t \in [-1; 1]$.

Знак функции $y(t) = 6+t-2t^2$ на отрезке $[-1; 1]$ определим из системы

$$\begin{cases} 6+t-2t^2 \geq 0, \\ |t| \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2t+3) \cdot (t-2) \leq 0, \\ |t| \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow |t| \leq 1.$$

Итак, $y(t) \geq 0$ для любого $t \in [-1; 1]$.

Наибольшее (наименьшее) значения квадратичные функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ и $f(x) = \sqrt[n]{ax^2 + bx + c}$ на отрезке $[d_1; d_2]$ принимают в одной и той же точке $x_1 \in [d_1; d_2]$ тогда и только тогда, когда $ax^2 + bx + c \geq 0$ для любого $x \in [d_1; d_2]$.

Если непрерывную функцию $f(x)$ на промежутке $[a; b]$ можно представить в виде $f(x) = \varphi(t(x))$, где $t(x)$ и $\varphi(t)$ — непрерывные функции на промежутках $[a; b]$ и $[c; d]$ соответственно, и $c = \min_{x \in [a; b]} t(x)$,

$d = \max_{x \in [a; b]} t(x)$, то $\max_{x \in [a; b]} f(x) = \max_{t \in [c; d]} \varphi(t)$ и $\min_{x \in [a; b]} f(x) = \min_{t \in [c; d]} \varphi(t)$.

1. Найдём наибольшее значение функции $f(x)$.

а) Найдём наибольшее значение функции $y(t) = 6+t-2t^2$ на отрезке $[-1; 1]$.

$$\text{Имеем } y(t) = -2t^2 + t + 6 \Leftrightarrow y(t) = -2(t - 1/4)^2 + 49/8.$$

Абсцисса вершины параболы $y(t) = 6+t-2t^2$ равна $t_0 = 1/4$, а ордината равна $y_0 = 49/8$. Так как графиком функции $y(t)$ является парабола, ветви которой направлены вниз и $t_0 \in [-1; 1]$, то наибольшее значение функции $y(t)$ равно $y_0 = 49/8$. Итак, $\max_{t \in [-1; 1]} y(t) = 49/8$.

б) Найдём наибольшее значение функции $\varphi(t)$ на отрезке $[-1; 1]$.

$$\text{Имеем } \max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = \max_{t \in [-1; 1]} 4\sqrt{y(t)} \Rightarrow \max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = 4\sqrt{49/8} \Leftrightarrow \max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = \sqrt{98}.$$

в) Найдём наибольшее значение функции $f(x)$.

$$\text{Так как } \max_{x \in (-\infty; \infty)} f(x) = \max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t), \text{ то } \max_{x \in (-\infty; \infty)} f(x) = \sqrt{98}.$$

$$\text{Так как } \max_{x \in (-\infty; \infty)} f(x) = \sqrt{98}, \text{ то } f(x) \leq \sqrt{98}.$$

2. Найдём наименьшее значения функции $f(x)$.

а) Найдём наименьшее значение функции $y(t)$ на отрезке $[-1; 1]$.

Так как графиком функции $y(t)$, где $|t| \leq 1$, является парабола, ветви которой направлены вниз, то наименьшее значение функция $y(t)$ будет принимать на одном из концов отрезка $[-1; 1]$. Так как $y(-1) = 3$ и $y(1) = 5$, то $\min_{t \in [-1; 1]} y(t) = 3$.

б) Найдём наименьшее значение функции $\varphi(t)$ на отрезке $[-1; 1]$.

$$\text{Имеем } \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = \min_{t \in [-1; 1]} 4\sqrt{y(t)} \Rightarrow \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = \sqrt{48}.$$

в) Найдём наименьшее значение функции $f(x)$.

$$\text{Так как } \min_{x \in (-\infty; \infty)} f(x) = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t), \text{ то } \min_{x \in (-\infty; \infty)} f(x) = \sqrt{48}.$$

$$\text{Так как } \min_{x \in (-\infty; \infty)} f(x) = \sqrt{48}, \text{ то } f(x) \geq \sqrt{48}.$$

3. Найдём наименьшее и наибольшее целое значение функции $f(x)$.

Из 1. и 2. следует, что $\sqrt{48} \leq f(x) \leq \sqrt{98}$. Тогда $f(x) \in [\sqrt{48}; \sqrt{98}]$ для любого $x \in (-\infty; \infty)$.

Имеем $9 < \sqrt{98} < 10$ и $6 < \sqrt{48} < 7$. Так как 7 и 9 принадлежат отрезку $[\sqrt{48}; \sqrt{98}]$, а 10 и 6 не принадлежат отрезку $[\sqrt{48}; \sqrt{98}]$, то наибольшее целое значение функции $f(x)$ равно 9, а наименьшее целое значение функции $f(x)$ равно 7.

*Ответ. Наибольшее целое значение равно 9;
наименьшее целое значение равно 7.*

33. Найдите все значения a , при которых функция

$$f(x) = \sqrt[5]{ax^2 + (a^2 - 4)x - 2a - 3}$$

имеет минимум в точке $x_0 = 1,5$.

Решение. 1. Если $a = 0$, то $f(x) = \sqrt[5]{-4x - 3}$. Так как линейная функция $y = -4x - 3$, если $x \in \mathbb{R}$, не принимает экстремальных значений, то и функция $f(x) = \sqrt[5]{-4x - 3}$, если $x \in \mathbb{R}$, не принимает экстремальных значений.

2. Пусть $a \neq 0$.

а) Функция $y(x) = ax^2 + (a^2 - 4)x - 2a - 3$, где $x \in \mathbb{R}$, имеет минимум, если коэффициент при x^2 больше нуля.

Графиком функции $y(x)$ является парабола, абсцисса вершины которой равна $x_0 = -(a^2 - 4)/2a$. В точке x_0 функция $y(x)$ принимает минимум, если $a > 0$. Тогда и функция $f(x)$ принимает минимум в точке x_0 , если $a > 0$.

Значения параметра a , которые удовлетворяют условию задачи, находим из системы

$$\begin{cases} x_0 = 1,5, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a^2 - 4}{2a} = \frac{3}{2} \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 3a - 4 = 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(a + 4) = 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Итак, $a = 1$ удовлетворяют условию задачи.

б) Функция $y(x) = ax^2 + (a^2 - 4)x - 2a - 3$, где $x \in R$, не имеет минимум, если $a < 0$, то и функция $f(x) = \sqrt[5]{ax^2 + (a^2 - 4)x - 2a - 3}$ если $x \in R$, не имеет минимум, если $a < 0$.

Ответ. $a = 1$.

Расположение вершины параболы относительно прямой

34. Найдите все значения параметра a , при которых вершины парабол $f(x) = x^2 - 2ax + a$ (1) и $\varphi(x) = ax^2 + x - 1$ (2) лежат 1) по разные стороны от прямой $y = 2$; 2) под прямой $y = -2,5x$.

Решение. Отметим, что $a \neq 0$. Найдём ординаты вершин парабол.

а) Имеем $f(x) = x^2 - 2ax + a \Leftrightarrow f(x) = (x - a)^2 + a - a^2$.

Итак, ордината вершины параболы (1) — $y_1 = a - a^2$.

б) Имеем $\varphi(x) = ax^2 + x - 1 \Leftrightarrow \varphi(x) = a(x + 0,5a^{-1})^2 - (1 + 0,25a^{-1})$.

Итак, ордината вершины параболы (2) — $y_2 = -(1 + 0,25a^{-1})$

1) Вершины данных парабол лежат по разные стороны от прямой $y = 2$, если

$$\begin{aligned} (y_1 - y) \cdot (y_2 - y) < 0 &\Leftrightarrow (a - a^2 - 2) \cdot (-1 - 0,25a^{-1} - 2) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^2 - a + 2) \cdot (12a + 1) \cdot a^{-1} < 0 \stackrel{a^2 - a + 2 > 0}{\Leftrightarrow} (12a + 1) \cdot a^{-1} < 0 \Leftrightarrow -1/12 < a < 0. \end{aligned}$$

Итак, искомые значения параметра $a \in (-1/12; 0)$.

2) Абсциссой вершины параболы $f(x) = x^2 - 2ax + a$ является $x_1 = a$, а абсциссой вершины параболы $\varphi(x) = ax^2 + x - 1$ является $x_2 = -0,5a^{-1}$.

Определим значение функции $y = -2,5x$ в абсциссах вершин парабол: $y(a) = -2,5a$, $y(-0,5a^{-1}) = 1,25a^{-1}$.

Вершины данных парабол лежат под прямой $y = -2,5x$, если

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y_1 - y(a) < 0, \\ y_2 - y(-0,5a^{-1}) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + a + 2,5a < 0, \\ -1 - 0,25a^{-1} - 1,25a^{-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5(7a - 2a^2) < 0, \\ 0,5(-3 - 2a)a^{-1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2a - 7) > 0, \\ (3 + 2a)a^{-1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1,5, \\ a > 3,5. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, искомые значения параметра $a \in (-\infty; -1,5) \cup (3,5; \infty)$.

Ответ. 1) $a \in (-1/12; 0)$; 2) $a \in (-\infty; -1,5) \cup (3,5; \infty)$.

Касательная к параболе

35. При каких значениях параметров a и b прямые $y = 2x$ и $y = -4x$ являются касательными к графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + 1$?

Решение. По условию $a \neq 0$.

Прямые $y = 2x$ и $y = -4x$ являются касательными к графику функции $y = ax^2 + bx + 1$ тогда и только тогда, когда системы

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y = ax^2 + bx + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4x, \\ y = ax^2 + bx + 1 \end{cases}$$

имеют единственное решение при одних и тех же значениях параметров a и b . Это равносильно тому, что система

$$\begin{cases} ax^2 + bx + 1 = 2x, \\ ax^2 + bx + 1 = 4x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + (b - 2)x + 1 = 0, \\ ax^2 + (b + 4)x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

имеет единственное решение.

Система (1) имеет единственное решение, если дискриминанты первого и второго уравнений системы (1) одновременно равны нулю. Дискриминанты уравнений системы (1) соответственно равны

$$D_1 = (b - 2)^2 - 4a, \quad D_2 = (b + 4)^2 - 4a.$$

Решим систему

$$\begin{cases} (b - 2)^2 - 4a = 0, \\ (b + 4)^2 - 4a = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b - 2)^2 - 4a = 0, \\ (b + 4)^2 = (b - 2)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9/4, \\ b = -1. \end{cases}$$

Ответ. $a = 9/4$, $b = -1$.

36. К графику квадратичной функции $y = 3x^2 - x + 2$ в точке A проведена касательная, которая параллельна прямой $y = 8x$. Найдите уравнение касательной.

Решение. Пусть абсцисса точки A равна x_0 . Тогда ордината точки

A равна $f(x_0) = 3x_0^2 - x_0 + 2$.

Найдём уравнение касательной.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \text{где} \quad k = f'(x_0) - \text{угловой}$$

коэффициент касательной.

Угловой коэффициент прямой $y = 8x$ равен $k_1 = 8$, а угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0) = 6x_0 - 1$. Так как искомая касательная параллельна прямой $y = 8x$, то $f'(x_0) = 8 \Rightarrow 6x_0 - 1 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 3/2$.

Так как $x_0 = 3/2$, то $f(x_0) = 3x_0^2 - x_0 + 2 \Rightarrow f(3/2) = 29/4$.

Тогда уравнением искомой касательной является уравнение

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = 8(x - 3/2) + 29/4 \Leftrightarrow y = 8x - 19/4.$$

Таким образом, $y = 8x - 19/4$ – уравнение искомой касательной.

Ответ. $y = 8x - 19/4$.

37. При каких значениях параметра a касательная к графику квадратичной функции $f(x) = ax^2 + \sqrt{3}x/3 - a$ образует с осью абсцисс угол, равный $\pi/6$ и отсекает от второй четверти треугольник, площадь которого равна $2\sqrt{3}$?

Решение. 1. По условию $a \neq 0$.

Если x_0 – абсцисса точки касания, то уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (1).

В нашем случае $f(x_0) = ax_0^2 + \sqrt{3}x_0/3 - a$, $f'(x) = 2ax_0 + \sqrt{3}/3$.

Так как касательная образует с осью абсцисс угол, равный $\varphi = \pi/6$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \pi/6 \Leftrightarrow f'(x_0) = \sqrt{3}/3$.

Так как $f'(x_0) = \sqrt{3}/3$ и $f'(x_0) = 2ax_0 + \sqrt{3}/3$, то

$$2ax_0 + \sqrt{3}/3 = \sqrt{3}/3 \Leftrightarrow 2ax_0 \stackrel{a \neq 0}{=} 0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Так как $x_0 = 0$, то $f(0) = -a$. Кроме того $f'(0) = \sqrt{3}/3$. Уравнение касательной (1) принимает вид $y = \sqrt{3}/3x - a$.

Из уравнения касательной $y = \sqrt{3}/3x - a$ следует, что точкой пересечения касательной с осью абсцисс является точка $A(\sqrt{3}a; 0)$ и точкой пересечения касательной с осью ординат является точка $B(0; -a)$.

Пусть $x_1 = \sqrt{3}a$ – абсцисса точки A , а $y_1 = -a$ – ордината точки B .
 Так как касательная отсекает треугольник от второй четверти, то

$$\begin{cases} x_1 < 0, \\ y_1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}a < 0, \\ -a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow a < 0.$$

Итак, $a < 0$.

Площадь треугольника, отсекаемого касательной от второй четверти, по условию, равна $S = 2\sqrt{3}$, с другой стороны $S = 0,5 \cdot |x_1 \cdot y_1|$.

Тогда $0,5 \cdot |x_1 \cdot y_1| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 0,5\sqrt{3}a^2 = 2\sqrt{3} \xrightarrow{a < 0} a = -2$.

Ответ. $a = -2$.

38. При каких значениях параметра a касательная к графику квадратичной функции $f(x) = ax^2 + 3x$ отсекает от третьей четверти равнобедренный треугольник, площадь которого равна 2?

Решение. 1. По условию $a \neq 0$.

Если x_0 – абсцисса точки касания, то уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (1). В нашем случае $f(x_0) = ax_0^2 + 3x_0$ и $f'(x_0) = 2ax_0 + 3$.

Так как касательная отсекает от третьей четверти равнобедренный треугольник, то касательная образует с осью абсцисс угол, равный $\varphi = 3\pi/4$. Тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg} 3\pi/4 \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$.

Так как $f'(x_0) = 2ax_0 + 3$ и $f'(x_0) = -1$, то $2ax_0 + 3 = -1 \xrightarrow{a \neq 0} x_0 = -2/a$.

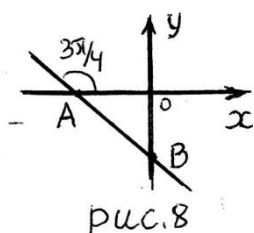
Так как $x_0 = -2/a$ и $f(x_0) = ax_0^2 + 3x_0$, то $f(x_0) = -2/a$.

Уравнение касательной (1) принимает вид $y = -x - 4/a$.

Из уравнения касательной $y = -x - 4/a$ следует, что точкой пересечения касательной с осью абсцисс является точка $A(-4/a; 0)$ и точкой пересечения касательной с осью ординат является точка $B(0; -4/a)$.

Пусть $x_1 = -4/a$ – абсцисса точки A , $y_1 = -4/a$ – ордината точки B .

Так как касательная отсекает треугольник от третьей четверти и $x_1 = y_1$, то $x_1 < 0 \Leftrightarrow -4/a < 0 \Leftrightarrow a > 0$. Итак, $a > 0$.



Площадь треугольника AOB , отсекаемого касательной от осей координат, по условию, равна $S = 2$, с другой стороны $S = 0,5 \cdot |x_1 \cdot y_1|$. Тогда

$$0,5 \cdot |x_1 \cdot y_1| = 2 \Leftrightarrow 8/a^2 = 2 \stackrel{a>0}{\Rightarrow} a = 2.$$

Ответ. $a = 2$.

39. При каких значениях параметра a имеют общую касательную графики функций $f(x) = x^2 - 2ax + a^2$, $\varphi(x) = -x^2 + (a+1)x - a^2$?

Решение. Уравнение касательной к графику функции $f(x)$, если x_1 – абсцисса точки касания, имеет вид $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$, где $f(x_1) = x_1^2 - 2ax_1 + a^2$, $f'(x_1) = 2x_1 - 2a$.

Уравнение касательной к графику функции $\varphi(x)$, если x_2 – абсцисса точки касания, имеет вид

$$y = \varphi'(x_2)(x - x_2) + \varphi(x_2), \text{ где } \varphi(x_2) = -x_2^2 + (a+1)x_2 - a^2, \varphi'(x_2) = -2x_2 + a + 1.$$

Перепишем уравнения касательных в виде

$$y = f'(x_1) \cdot x + (f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1), \quad y = \varphi'(x_2) \cdot x + (\varphi(x_2) - \varphi'(x_2) \cdot x_2).$$

Так как касательные (прямые) совпадают, то

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f'(x_1) = \varphi'(x_2), \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = \varphi(x_2) - x_2 \varphi'(x_2); \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2a = -2x_2 + a + 1, \\ x_1^2 - 2ax_1 + a^2 - x_1(2x_1 - 2a) = -x_2^2 + (a+1)x_2 - a^2 - x_2(-2x_2 + a + 1); \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 3a + 1, \\ x_1^2 + x_2^2 = 2a^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 3a + 1, \\ 4x_1^2 + 4x_2^2 = 8a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 3a + 1 - 2x_2, \\ (3a + 1 - 2x_2)^2 + 4x_2^2 = 8a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 3a + 1 - 2x_2, \\ 8x_2^2 - 4(3a + 1)x_2 + a^2 + 6a + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют общую касательную, если последняя система имеет решение. Эта система имеет решение, если имеет решение квадратное уравнение

$$8x_2^2 - 4(3a + 1)x_2 + a^2 + 6a + 1 = 0 \quad (1).$$

Найдём дискриминант уравнения (1).

$$\text{Имеем: } D/4 = 4(3a + 1)^2 - 8(a^2 + 6a + 1) \Leftrightarrow D/4 = 4(a - 1)(7a + 1).$$

Итак, $D/4 = 4(a - 1)(7a + 1)$.

Уравнение (1) имеет решение, если

$$D/4 \geq 0 \Leftrightarrow 4(a - 1)(7a + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -1/7, \\ a \geq 1. \end{cases}$$

Ответ. $a \in (-\infty; -1/7] \cup [1; \infty)$.

40. Парабола проходит через точку $A(1; 1)$. Касательная к параболе, проведённой в точке A , перпендикулярна прямой $y = -0,5x + 1$. Абсцисса одной из точек пересечения параболы с осью абсцисс больше 5. Какие значения может принимать абсцисса другой точки пересечения?

Решение. Пусть уравнение параболы имеет вид $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Так как точка $A(1; 1)$ является точкой касания, то угловой коэффициент касательной, равен $f'(1) = 2a + b$, а угловой коэффициент прямой $y = -0,5x + 1$, равен $k_1 = -0,5$. Так как касательная перпендикулярна прямой $y = -0,5x + 1$, то

$$k_1 \cdot f'(-1) = -1 \Leftrightarrow -0,5(2a + b) = -1 \Leftrightarrow 2a + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 2a.$$

Так как парабола проходит через точку $A(1; 1)$, то

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow a + b + c \stackrel{b=2-2a}{=} 1 \Leftrightarrow c = a - 1..$$

Итак, $b = 2 - 2a$, $c = a - 1$.

По условию парабола пересекает ось абсцисс в двух точках. Пусть x_1, x_2 точки пересечения параболы с осью x (x_1, x_2 корни квадратичной функции) и пусть $x_1 > 5$. Выразим x_1 через x_2 .

По теореме Виета

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a; \end{cases} &\stackrel{b=2-2a}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - 2a^{-1}, \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - a^{-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - 2a^{-1}, \\ 2x_1 \cdot x_2 = 2 - 2a^{-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - 2a^{-1}, \\ -2x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - 2a^{-1}, \\ x_1(2x_2 - 1) = x_2; \end{cases} \stackrel{2x_2-1 \neq 0}{\Rightarrow} x_1 = \frac{x_2}{2x_2 - 1}. \end{aligned}$$

Отметим: из второго уравнения последней системы следует, что $2x_2 - 1 \neq 0$.

$$\text{Так как } x_1 > 5, \text{ то } \frac{x_2}{2x_2 - 1} > 5 \Leftrightarrow \frac{9x_2 - 5}{2x_2 - 1} < 0 \Leftrightarrow 1/2 < x_2 < 5/9..$$

Ответ. $1/2 < x_2 < 5/9$.

41. Парабола $f(x) = x^2 + bx + c$ проходит через точку $A(4; 3)$. Через эту точку проведена касательная к этой параболе. Найдите b и c , если площади треугольников, образованных касательной, прямой $y = 3x - 9$ и, соответственно, осями абсцисс и ординат, равны.

Решение. Так как точка $A(4; 3)$ принадлежит параболе, то $f(4) = 3$. Так как точка $A(4; 3)$ является точкой касания, то $x_0 = 4$ — абсцисса точки касания. Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = f'(4)(x - 4) + f(4).$$

Так как $f'(4) = 8 + b$, то уравнение $y = 3 + (8 + b)(x - 4)$ является уравнением касательной к графику функции $f(x) = x^2 + bx + c$.

Найдём точки пересечения касательной $y = 3 + (8 + b)(x - 4)$ и прямой $y = 3x - 9$ с осями координат.

а) Точками пересечения касательной $y = 3 + (8 + b)(x - 4)$ с осями координат являются точки $B(0; -29 - 4b)$ и $C((29 + 4b) \cdot (8 + b)^{-1}; 0)$.

б) Точками пересечения прямой $y = 3x - 9$ с осями координат являются точки $D(0; -9)$ и $E(3; 0)$. Отметим: прямая $y = 3x - 9$ проходит через точку $A(4; 3)$. По условию задачи площади треугольников ABD и ACE равны.

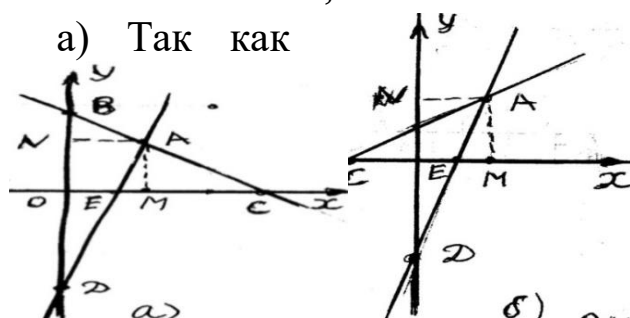
На рисунках 9 а), б), в), г) рассмотрены всевозможные случаи расположению треугольников ABD и ACE .

1. Рассмотрим случай расположения треугольников ABD

Рис. 9.

и AEC на рисунках 9 а), б).

В этих случаях точка B расположена выше оси абсцисс. Тогда $-29 - 4b > 0 \Leftrightarrow b < -7,25$.



АМ перпендикулярна ЕС, то площадь S_1 треугольника AEC находим по формуле

$$S_1 = 0,5 \cdot AM \cdot EC = 0,5 \cdot 3 \cdot |OC - OE| = 1,5 \cdot |(29 + 4b) \cdot (8 + b)^{-1} - 3|$$

$$\text{Итак, } S_1 = 1,5 \cdot |(5 + b)(8 + b)^{-1}|.$$

б) Так как AN

перпендикулярна DB, то площадь S_2 треугольника

ADB находим по формуле

$$S_2 = 0,5 \cdot AN \cdot BD = 0,5 \cdot 4 \cdot |OB - OD| = 2 \cdot |-29 - 4b + 9| = 8|5 + b|.$$

$$\text{Итак, } S_2 = 8 \cdot |5 + b|.$$

в) Так как площади треугольников ABD и ACE равны и $b < -7,25$, то

$$\begin{cases} S_1 = S_2, \\ b < -7,25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5|(5 + b)(8 + b)^{-1}| = 8|5 + b|, \\ b < -7,25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5 + b| \cdot (3|(8 + b)^{-1}| - 16) = 0, \\ b < -7,25; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 \cdot |8 + b| = 3, \\ b < -7,25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8\frac{3}{16}, \\ b = -7\frac{13}{16}. \end{cases}$$

Итак, условию задачи удовлетворяют $b = -8\frac{3}{16}, b = -7\frac{13}{16}$.

Найдём все значения c , которые в зависимости от значений b , удовлетворяют условию задачи.

Так как парабола $f(x) = x^2 + bx + c$ проходит через точку $A(4; 3)$, то $3 = 16 + 4b + c \Leftrightarrow 4b + c = -13$. Тогда имеем, если $b = -8\frac{3}{16}$, то $c = 19\frac{3}{4}$; если $b = -7\frac{13}{16}$, то $c = 18\frac{1}{4}$.

2. Рассмотрим случай расположения треугольников ABD и AEC на рисунках 9 в), г). В этих случаях точка B расположена ниже оси абсцисс.

Из рисунков 9 в), г) следует, что треугольник AEC является частью треугольника ADB , тогда $S_2 > S_1$. Значит случаи, когда точка B расположена ниже оси абсцисс, не удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $b = -8\frac{3}{16}, c = 19\frac{3}{4}; b = -7\frac{13}{16}, c = 18\frac{1}{4}$.

Разные задачи

42. Докажите, что если числа a, b, c попарно различны, то график квадратичной функции $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-c)(x-b) + (x-c)(x-a)$ пересекает ось абсцисс в двух точках.

Решение. Вычислим значения функции $f(x)$, если $x = a, x = b, x = c$. Имеем

$$f(a) = (a-c)(a-b), f(b) = (b-c)(b-a), f(c) = (c-a)(c-b)$$

Так как числа a, b, c попарно различны, то $f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) \neq 0$.

Имеем

$$f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) = -(a-c)^2(a-b)^2(b-c)^2 \Rightarrow f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) < 0.$$

Так как $f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) < 0$, то одно значение или все три значения $f(a), f(b), f(c)$ является отрицательным числом. Так как квадратичная функция принимает в некоторой точке отрицательное значение, то график функции $f(x)$ пересечёт ось абсцисс в двух точках.

43. Докажите, что парабола $y(x) = x^2 + 2x + 4$ не пересекает график функции $f(x) = 2 + \cos x$.

Решение. 1) Оценим функцию $y(x)$.

$$\text{Имеем } y(x) = x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow y(x) = (x+1)^2 + 3.$$

Так как $y(x) = (x+1)^2 + 3$, то $y(x) \geq 3$ и $y(-1) = 3$. (1)

Итак, наименьшее значение, равное 3, функция $y(x)$ принимает, если $x = -1$.

1) Оценим функцию $f(x)$.

Имеем $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$.

Тогда $-1 \leq f(x) \leq 3$ и $f(2\pi k) = 3, k \in \mathbb{Z}$. (2)

Итак, наибольшее значение, равное 3, функция $f(x)$ принимает, если $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Графики исходных функций могут пересекаться при тех значениях x , при которых $f(x) = y(x) = 3$, то есть, если $2\pi k = -1$. Это невозможно, поэтому графики исходных функций не пересекаются.

44. Разложите на множители многочлен

$$f(x; y) = 4y^2x(x+2) + 4y(1-x^2) + (x-1)^2.$$

Решение. 1. Преобразуем многочлен. Имеем

$$\begin{aligned} f(x; y) &= 4y^2x(x+2) + 4y(1-x^2) + (x-1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x; y) = x^2(4y^2 - 4y + 1) - 2x(1 - 4y^2) + 4y + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x; y) = x^2(2y-1)^2 + 2x(2y-1)(2y+1) + 4y + 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Многочлен (1) является квадратным трёхчленом относительно x , с параметром y , если $2y-1 \neq 0$. Итак, многочлен

$$f(x; y) = x^2(2y-1)^2 + 2x(2y-1)(1+2y) + 4y+1, \text{ где } y \neq 0,5, \quad (2)$$

является квадратным трёхчленом относительно x , с параметром y .

2. Найдём корни квадратного трёхчлена (2).

а) Дискриминант квадратного трёхчлена (2) равен

$$D(y)/4 = (2y-1)^2 \cdot (1+2y)^2 - (2y-1)^2(4y+1) = (2y(2y-1))^2.$$

б) Найдём x_1 и x_2 корни квадратного трёхчлена (2). Имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(2y-1) \cdot (1+2y) - 2y(2y-1)}{(2y-1)^2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{4y+1}{1-2y}, \\ x_2 &= \frac{-(2y-1) \cdot (1+2y) + 2y(2y-1)}{(2y-1)^2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{1-2y}. \end{aligned}$$

в) Найдём разложение квадратного трёхчлена (2), а значит и исходного многочлена, при $y \neq 0,5$. Имеем

$$\begin{aligned}
f(x; y) &= (2y-1)^2 \left(x - \frac{1}{1-2y} \right) \left(x - \frac{4y+1}{1-2y} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f(x; y) = (2y-1)^2 \cdot \left(\frac{x-2yx-1}{1-2y} \right) \cdot \left(\frac{x-2yx-4y-1}{1-2y} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f(x; y) = (x-2yx-1) \cdot (x-2yx-4y-1), \text{ где } y \neq 0,5.
\end{aligned}$$

3. Легко проверить, что исходный многочлен, если $y = 0,5$ равен 3 и произведение $(2yx - x - 1) \cdot (2yx - x - 4y - 1)$ равно 3, если $y = 0,5$. Это означает, что $f(x; y) = (x - 2yx - 1) \cdot (x - 2yx - 4y - 1)$ при любых $x, y \in R$.

Ответ. $f(x; y) = (x - 2yx - 1) \cdot (x - 2yx - 4y - 1)$.

45. Докажите тождество

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(z-y)(x-z).$$

Решение. Пусть $f(x; y; z) = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$.

Преобразуем $f(x; y; z)$. Имеем

$$\begin{aligned}
f(x; y; z) &= (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = \\
&= x^3 - 3x^2y + 3y^2x - y^3 + y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3 + z^3 - 3xz^2 + 3zx^2 - x^3 = \\
&= -3x^2y + 3y^2x - 3y^2z + 3yz^2 - 3xz^2 + 3zx^2 = 3(x^2(z-y) + x(y^2 - z^2) + yz(z-y)) = \\
&= 3(z-y)(x^2 - x(y+z) + yz).
\end{aligned}$$

Итак, $f(x; y; z) = 3(z-y)(x^2 - x(y+z) + yz)$.

Надо доказать, что

$$\begin{aligned}
3(z-y)(x^2 - x(z+y) + zy) &= 3(x-y)(z-y)(x-z) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \stackrel{z-y \neq 0}{(x^2 - x(z+y) + zy)} = (x-y)(x-z).
\end{aligned}$$

Докажем, что $x^2 - x(z+y) + yz = (x-y)(x-z)$, где $z-y \neq 0$.

Обозначим $g(x; y; z) = x^2 - x(z+y) + yz$, $\varphi(x; y; z) = (x-y)(x-z)$.

Исходное тождество справедливо, если равенство $g(x; y; z) = \varphi(x; y; z)$, где $z-y \neq 0$, является тождеством. Докажем это.

Очевидно, $g(x; y; z) = x^2 - x(z+y) + yz$, $\varphi(x; y; z) = (x-y)(x-z)$ являются квадратными трёхчленами относительно x , с параметрами y и z .

Так как два квадратных трёхчлена равны тогда и только тогда, когда они равны хотя бы в трёх точках, то найдём значения $g(x; y; z)$ и $\varphi(x; y; z)$ в точках $(z; y; z)$, $(0; y; z)$, $(0; y; z)$.

Легко проверить:

$$g(y; y; z) = \varphi(y; y; z) = 0; \quad g(z; y; z) = \varphi(z; y; z) = 0; \quad g(0; y; z) = \varphi(0; y; z) = yz.$$

Так как квадратные трёхчлены $g(x; y; z), \varphi(x; y; z)$ равны в трёх точках, то равенство $g(x; y; z) = \varphi(x; y; z)$ является тождеством. Тогда исходное тождество верно, если $z - y \neq 0$. Если $z - y = 0$, то легко проверить, что исходное тождество так же верно.

46. Найдите все значения a, b, c , при которых для любых $x, y \in Z$ функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условию

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) + xy \Leftrightarrow a(x+y)^2 + b(x+y) + c = \\ &= (ax^2 + bx + c) + (ay^2 + by + c) + xy \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a(x^2 + 2xy + y^2) + b(x+y) + c &= a(x^2 + y^2) + b(x+y) + 2c + xy \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2axy &= c + xy \Leftrightarrow (2a-1)xy = c. \end{aligned}$$

Так как равенство $(2a-1)xy = c$ (1) выполняется для всех $x, y \in Z$, то оно справедливо, если $x = 0$ или $x = y = 1$. Если $x = 0$, то из (1) следует, что $c = 0$. Если $x = y = 1$, то из (1) следует, что $a = 0,5$.

Условию $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ удовлетворяет любая функция вида $f(x) = 0,5x^2 + bx$, где $b \in Z$.

Ответ. $a = 0,5, c = 0, b \in Z$.

47. Найдите наибольшее значение параметра a , при котором парабола $y = (a+2)x^2 - 2ax + (a+2)^{-1}(a^2 + a - 2)$ касается оси абсцисс.

Решение. Отметим, что $a+2 \neq 0$. Найдём ординату вершины параболы. Имеем

$$y = (a+2)x^2 - 2ax + \frac{a^2 + a - 2}{a+2} \Leftrightarrow y = (a+2)\left(x - \frac{a}{a+2}\right)^2 + \frac{a-2}{a+2}. \quad (1)$$

Из (1) следует, что ордината вершины параболы равна $y_0 = (a-2)(a+2)^{-1}$.

Так как парабола касается оси абсцисс тогда и только тогда, когда ордината вершины параболы равна нулю, то

$$y_0 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+2)^{-1} = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Ответ. $a = 2$.

48. Найдите все значения параметра $a \neq 0$, при которых множество значений функции $f(x) = 5^{ax^2 - 2ax + a^2 - 4}$ 1) имеет хотя бы одну общую точку с отрезком $[1/5; 25]$; 2) содержит отрезок $[1/5; 25]$; 3) совпадает с промежутком $(0; 25]$.

Решение. Найдём множество значений исходной функции.

Пусть $y(x) = ax^2 - 2ax + a^2 - 4$. Преобразуем $y(x)$. Имеем

$$y(x) = a(x^2 - 2x) + a^2 - 4 \Leftrightarrow y(x) = a(x-1)^2 + a^2 - a - 4. \quad (1)$$

1. Если $a > 0$, то из (1) следует, что $y(x) \geq a^2 - a - 4$, где $a > 0$. Так как показательная функция с основанием больше единицы возрастает, то

$$\begin{cases} y(x) \geq a^2 - a - 4, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{y(x)} \geq 5^{a^2 - a - 4}, \\ a > 0. \end{cases}$$

Из последней системы следует: множеством значений исходной функции является промежуток $[5^{a^2 - a - 4}; \infty)$, где $a > 0$.

1) Промежуток $[5^{a^2 - a - 4}; \infty)$, где $a > 0$, имеет хотя бы одну общую точку с отрезком $[1/5; 25]$, если

$$\begin{cases} 5^{a^2 - a - 4} \leq 25, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 4 \leq 2, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a+2) \leq 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq 3.$$

Итак, если $a \in (0; 3]$, то множество значений исходной функции имеет хотя бы одну общую точку с отрезком $[1/5; 25]$.

2) Промежуток $[5^{a^2 - a - 4}; \infty)$, где $a > 0$, содержит отрезок $[1/5; 25]$, если

$$\begin{cases} 5^{a^2 - a - 4} \leq 1/5, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 4 \leq -1, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 3 \leq 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq 0,5(1 + \sqrt{13}).$$

Итак, если $a \in (0; 0,5(1 + \sqrt{13})]$, то множество значений исходной функции содержит отрезок $[1/5; 25]$.

3) Очевидно, что промежуток $[5^{a^2 - a - 4}; \infty)$, где $a > 0$, ни при каких значениях параметра a , не совпадает с промежутком $(0; 25]$.

2. Если $a < 0$, то из (1) следует, что $y(x) \leq a^2 - a - 4$, где $a < 0$. Так как показательная функция с основанием больше единицы возрастает, то

$$\begin{cases} y(x) \leq a^2 - a - 4, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 5^{y(x)} \leq 5^{a^2 - a - 4}, \\ a < 0. \end{cases}$$

Из последней системы следует: множеством значений исходной функции является промежуток $\left(0; 5^{a^2-a-4}\right]$, где $a < 0$.

1) Промежуток $\left(0; 5^{a^2-a-4}\right]$, где $a < 0$, имеет хотя бы одну общую точку с отрезком $[1/5; 25]$, если

$$\begin{cases} 5^{a^2-a-4} \geq 1/5, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 4 \geq -1, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 3 \geq 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 0,5(1 - \sqrt{13}).$$

Итак, если $a \in (-\infty; 0,5(1 - \sqrt{13})]$, то множество значений исходной функции имеет хотя бы одну общую точку с отрезком $[1/5; 25]$.

2) Промежуток $\left(0; 5^{a^2-a-4}\right]$, где $a < 0$, содержит отрезок $[1/5; 25]$, если

$$\begin{cases} 5^{a^2-a-4} \geq 25, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 4 \geq 2, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a+2) \geq 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \leq -2.$$

Итак, если $a \in (-\infty; -2]$, то множество значений исходной функции содержит отрезок $[1/5; 25]$.

3) Промежуток $\left(0; 5^{a^2-a-4}\right]$, где $a < 0$, совпадает с промежутком $(0; 25]$, если $\begin{cases} 5^{a^2-a-4} = 25, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 4 = 2, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 6 = 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow a = -2.$

Итак, если $a = -2$, то множество значений исходной функции совпадает с промежутком $(0; 25]$.

Ответ. 1) $a \in (-\infty; 0,5(1 - \sqrt{13})] \cup (0; 3]$;

2) $a \in (-\infty; -2] \cup (0; 0,5(1 + \sqrt{13})]$; 3) $a = -2$.

49. Найдите все значения параметра $a \neq 0$, при которых множество значений функции $f(x) = \lg(ax^2 + 2x + a)$ 1) является пустое множество; 2) является луч $[1; \infty)$.

Решение. 1) Если $ax^2 + 2x + a \leq 0$, то область определения, а значит и множество значений исходной функции, является пустое множество.

Квадратичная функция $y(x) = ax^2 + 2x + a$ не положительная для любого $x \in R$, тогда и только тогда, когда дискриминант $D/4$ не положительный и $a < 0$. Множеством значений исходной функции является пустое множество, если

$$\begin{cases} D/4 \leq 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a^2 \leq 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \leq -1.$$

Итак, $a \geq -1$ удовлетворяют условию задачи.

2. Множеством значений исходной функции может быть луч $[1; \infty)$, если $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \lg(ax^2 + 2x + a) \geq 1 \Leftrightarrow ax^2 + 2x + a \geq 10 \Leftrightarrow ax^2 + 2x + a - 10 \geq 0$.

Квадратичная функция $y(x) = ax^2 + 2x + a - 10$ не отрицательная для любого $x \in R$ тогда и только тогда, когда дискриминант $D_1/4$ не положительный и $a > 0$. Множеством значений исходной функции является луч $[1; \infty)$, если

$$\begin{cases} D_1/4 \leq 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a^2 + 10a \leq 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 10a - 1 \geq 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 5 + \sqrt{26}.$$

Итак, $a \geq \sqrt{26} + 5$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ. 1) $a \leq -1$; 2) $a \geq \sqrt{26} + 5$.

50. Найдите все значения параметра α , при которых квадратичная функция $f(x) = (\cos \alpha)x^2 - 2(1 - \sin \alpha)x + 2 - \cos \alpha$ является квадратом линейной функции.

Решение. Квадратичная функция является квадратом линейной функции тогда и только тогда, когда коэффициент при x^2 больше нуля и дискриминант этой функции равен нулю.

Найдём дискриминант исходной квадратичной функции. Имеем

$$\begin{aligned} D(\alpha)/4 &= (1 - \sin \alpha)^2 - (2 - \cos \alpha)\cos \alpha = 1 - 2\sin \alpha + (\sin \alpha)^2 - 2\cos \alpha + (\cos \alpha)^2 = \\ &= 2 - 2(\sin \alpha + \cos \alpha) = 2 - 4\cos(\alpha - \pi/4) \cdot \sin \pi/4 = 2 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha - \pi/4). \end{aligned}$$

Итак, $D(\alpha)/4 = 2 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha - \pi/4)$.

Искомые значения параметра α найдём из системы

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos \alpha > 0, \\ D(\alpha) = 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha > 0, \\ 2 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha - \pi/4) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha > 0, \\ \cos(\alpha - \pi/4) = \sqrt{2}/2; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha > 0, \\ \alpha - \pi/4 = \pm \pi/4 + \pi n, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha > 0, \\ \alpha = \pi/4 \pm \pi/4 + \pi n, n \in Z. \end{cases} \end{aligned}$$

Определим знак $\cos \alpha$, если $\alpha = \pi/4 \pm \pi/4 + \pi n, n \in Z$. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha = \pi/4 \pm \pi/4 + \pi n, n \in Z &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \pi/2 + \pi n, n \in Z, \\ \alpha_2 = \pi k, k \in Z. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha_1 = \cos(\pi/2 + \pi n), n \in Z, \\ \cos \alpha_2 = \cos \pi k, k \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha_1 = 0, n \in Z, \\ \cos \alpha_2 = (-1)^k, k \in Z. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Из совокупности (1) следует, что $\cos \alpha > 0$, если $\alpha = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\alpha = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

51. На плоскости xOy найдите множество точек, через которые не проходит ни одна из парабол семейства $y = 2x^2 + (3a+1)x + a^2$.

Решение. Если через точку $(x; y)$ не проходит ни одна из кривых, заданного семейства, то координаты этой точки не удовлетворяют уравнению $2x^2 + (3a+1)x + a^2 - y = 0$ (1). Поэтому надо найти такую зависимость между x и y , при которых уравнение (1) не имеет решений.

Рассмотрим уравнение (1) как квадратное относительно a , с параметрами x и y . Уравнение (1) перепишем в виде $a^2 + 3ax + x + 2x^2 - y = 0$. Последнее уравнение не имеет решений, если

$$D(x; y) < 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 4x - 8x^2 + 4y < 0 \Leftrightarrow y < -0,25(x^2 - 4x).$$

Итак, искомое множество точек, это точки плоскости xOy , удовлетворяющие неравенству $y < -0,25(x^2 - 4x)$. Из последнего неравенства следует, что искомое множество точек, это множество точек, лежащих ниже параболы $y = -0,25(x^2 - 4x)$.

Ответ. $y < -0,25(x^2 - 4x)$.

52. Расположите в порядке возрастания числа $\lg 3, 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2}$, а также x_1, x_2 – т корни квадратного трехчлена $y = 2x^2 + 8x - 3$.

Решение. 1. Так как свободный член квадратного трехчлена отрицательный, то x_1 и x_2 разных знаков. Пусть $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$.

2. Очевидно, $\lg 3 > 0$.

3. Определим знак $c_1 = 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2}$. Имеем

$$c_1 = 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{9}) = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} (\sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{81}) \Rightarrow c_1 < 0.$$

4. Так как $c_1 < 0$, то надо сравнить x_1 и c_1 .

Графиком квадратного трехчлена $y = 2x^2 + 8x - 3$ является парабола, ветви которой направлены вверх и абсцисса вершины равна $x_0 = -8/4 \Leftrightarrow x_0 = -2$.

Сравним $x_0 = -2$ и $c_1 = 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2}$. Отметим: $2 = \sqrt[6]{64}$. Имеем

$$c_1 - x_0 = 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2} + 2 = 2\sqrt[6]{9} - 3\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{64} = (2\sqrt[6]{9} - 2\sqrt[6]{8}) + (\sqrt[6]{64} - \sqrt[6]{8}) > 0 \Rightarrow c_1 > x_0.$$

Доказали, что $c_1 > x_0$. Так как $x_0 > x_1$ и $c_1 > x_0$, то $c_1 > x_1$.

Сравним x_2 и $c_2 = \lg 3$.

Определим знак $y(c_2)$. Имеем

$$y(c_2) = 2(\lg 3)^2 + 8\lg 3 - 3 = 2(\lg 3)^2 + (\lg 3^8 - 3) = 2(\lg 3)^2 + \underbrace{(\lg 6561 - \lg 1000)}_{\text{положительное}} > 0.$$

Итак, $y(c_2) > 0$. Отметим, что $y(x_2) = 0$.

Таким образом, имеем: $y(x_2) = 0$, $y(c_2) > 0$. Тогда $y(c_2) > y(x_2)$.

Отметим: так как $c_2 > 0$, $x_2 > x_0 = -2$, то $c_2, x_2 \in [-2; \infty)$.

Так как квадратный трёхчлен $y(x)$ возрастает в промежутке $[-2; \infty)$ и $c_2, x_2 \in [-2; \infty)$, то $y(c_2) > y(x_2) \Leftrightarrow c_2 > x_2$.

Так как $x_2 > 0$ и $c_1 < 0$, то $x_2 > c_1$. Кроме того имеем $c_2 > x_2$ и $c_1 > x_1$. Тогда $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 \Leftrightarrow x_1 < 2\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2} < x_2 < \lg 3$.

Ответ. $x_1 < 2\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2} < x_2 < \lg 3$.

53. Найдите все значения a , при которых имеет единственное решение система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + 6x + 6 + a \leq 0, \\ x^2 + 4x + 6 \leq a. \end{cases}$$

Решение. В плоскости $(x; a)$ построим параболы $a = -x^2 - 6x - 6$, $a = x^2 + 4x + 6$ исходной системы.

1. Найдём точки пересечения этих парабол. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a = -x^2 - 6x - 6, \\ a = x^2 + 4x + 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -2x, \\ a = x^2 + 4x + 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x, \\ x^2 + 5x + 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x, \\ \begin{cases} x = -2, \\ x = -3. \end{cases} \end{cases}$$

Из последней системы следует, что точками пересечения парабол являются точки $A(-2; 2)$ и $B(-3; 3)$.

2. Построим параболу $a = -x^2 - 6x - 6$.

Так как $a = -x^2 - 6x - 6 \Leftrightarrow a = -(x+3)^2 + 3$, то $B(-3; 3)$ – вершина параболы, ветви параболы направлены вниз и парабола проходит через точку $A(-2; 2)$.

Так как, например, точка $(0; 0)$ не удовлетворяет неравенству $x^2 + 6x + 6 + a \leq 0$, то это неравенство определяет множество точек, лежащих под параболой и на параболе $a = -x^2 - 6x - 6$.

3. Построим параболу $a = x^2 + 4x + 6$.

Так как $a = x^2 + 4x + 6 \Leftrightarrow a = (x+2)^2 + 2$, то $A(-2; 2)$ – вершина параболы, ветви параболы направлены вверх и парабола проходит через точку $B(-3; 3)$.

Так как, например, точка $(0; 0)$ не удовлетворяет неравенству $x^2 + 4x + 6 \leq a$, то это неравенство определяет множество точек, лежащих над параболой и на параболе $a = x^2 + 4x + 6$.

4. Для того чтобы найти решения исходной системы проведём прямые $a = c$. Множество решений системы заштриховано на рисунке 10. Так как только прямые $a = 2$ и $a = 3$ пересекают заштрихованную область (в которую входит граница) в одной точке, то исходная система имеет единственное решение, если $a \in \{2; 3\}$.

Ответ. $a \in \{2; 3\}$.

Оглавление.

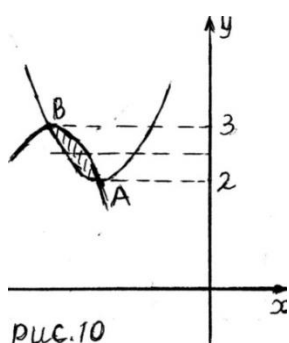


рис.10

Основные сведения	1
Симметрия	5
Дискриминант квадратного трёхчлена	7
Корни квадратного трёхчлена	8
Монотонность	16
Наибольшее и наименьшее значения	22
Расположение вершины параболы относительно прямой	30
Касательная к параболе	31
Разные задачи	38