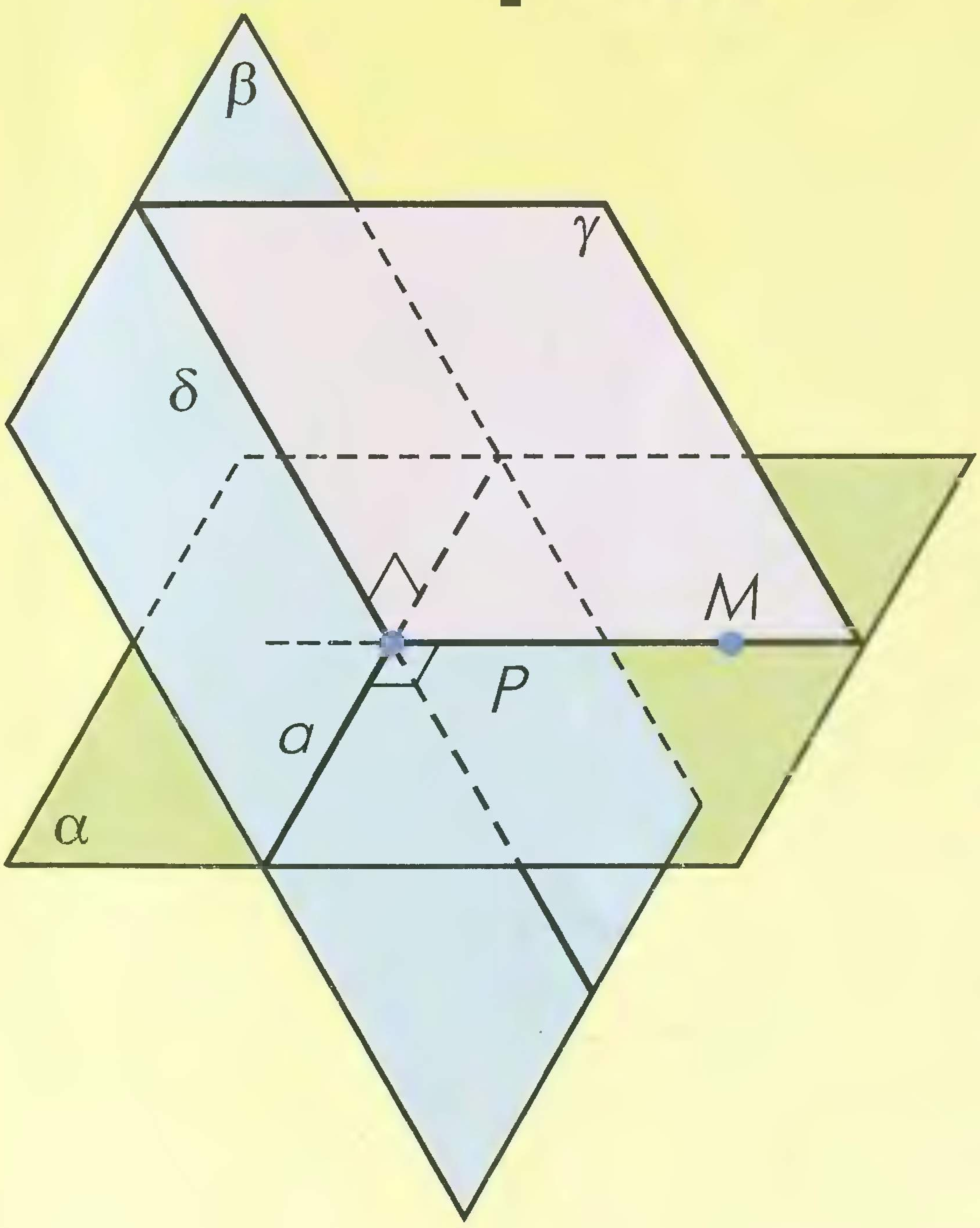
В. Н. Литвиненко

Геометрия

Проверочные и контрольные работы



10 класс

Вербум-М

В. Н. Литвиненко

Геометрия

Проверочные и контрольные работы

10 класс

«Вербум – М»
Москва
2000

ББК 22.151.0я721
Л 64

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент Московского педагогического университета **Е.С. Карманова**,

учитель математики общеобразовательной школы № 42 г. Москвы, Заслуженный учитель РФ **Н.В. Карюкина**

Литвиненко В.Н.

Л 64 Геометрия — 10: Проверочные и контрольные работы. — М.: Вербум-М, 2000. — 112 с.: ил.

ISBN 5-8391-0053-6

Пособие является частью комплекта, состоящего из учебника «Геометрия — 10» и «Тетради заданий по геометрии — 10» этого же автора. Все задачи, включенные в пособие, сопровождаются рисунками, на которых учащиеся должны выполнять необходимые построения. Ко всем вычислительным задачам даны ответы, а к наиболее трудным, как правило, и указания.

Проверочные и контрольные работы пособия полностью охватывают все темы школьного курса «Геометрия — 10»

ББК 22.151.0я721

ISBN 5-8391-0053-6

Учебное издание

Литвиненко Виктор Николаевич

Геометрия — 10

Проверочные и контрольные работы

Редактор *Ю.И. Козлова*
Корректор *О.Н. Баганова*
Дизайн обложки *А.А. Кравченко*
Верстка и макет *Л.В. Прокопенко*

Издательство «Вербум-М»,
111024, Москва, 5-я Кабельная улица, д. 2Б.
Тел. 273-57-95
тел./факс 273-76-42
Гигиенический сертификат
№ 77.99.2.953.П.9492.3.00 от 13.03.2000
Издательская лицензия ЛР № 066334 от 23.02.99
Сдано в набор 03.09.2000. Подписано в печать 03.11.2000.
Формат 60x90/16. Гарнитура «PetersburgC». Печать офсетная. Усл.-печ. л. 7,0.
Тираж 5000 экз. Зак. № 59.

Государственное унитарное предприятие
ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат
Министерства Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии содержатся шесть проверочных работ (каждая в шести вариантах, в каждом варианте две задачи) и шесть контрольных работ (каждая в шести вариантах, в каждом варианте три задачи). Таким образом, всего в пособии 180 задач.

Самостоятельные работы в пособие не включены, так как достаточное их количество содержится в «Тетради заданий по геометрии — 10».

Выполнение «удачных» рисунков к решению задач, как правило, отнимает у учащихся значительное время. Поэтому ко всем задачам приведены рисунки. Непосредственно на этих рисунках учащиеся должны выполнять построения при выполнении проверочных и контрольных работ. Обоснование построений и вычислительную работу следует делать на отдельном листке. В соответствии с установкой учителя при этом допускается использование символики.

Трудность задач из вариантов 1—4 каждой работы примерно одинаковая (средняя и ниже средней), задачи вариантов 5 и 6 — труднее, многие из них сопровождаются указаниями. Ко всем вычислительным задачам даны ответы.

Проверочная работа рассчитана на 20—25 мин, а контрольные работы — на весь урок. Проверочная работа составлена из двух простых задач. Для более полного учета качества усвоения учащимися учебного материала целесообразно выставлять оценку за решение каждой из этих двух задач.

Учитель оценивает контрольную работу за решение любых двух задач, а в тех случаях, когда правильно решены все три задачи варианта, учащемуся может быть выставлена дополнительная оценка.

В течение учебного года проверочные (ПР) и контрольные (КР) работы выполняются в такой последовательности: ПР-1, КР-1; ПР-2, КР-2; ПР-3, КР-3 и т.д.

В качестве образца оформления решения в конце пособия приведено решение типовой контрольной работы (вариант 0).

Ко всем вычислительным задачам проверочных и контрольных работ даны ответы, а к наиболее трудным задачам даются также указания.

Тематика, порядок следования и содержание задач, представленных в этом сборнике «Проверочных и контрольных работ», тесно увязаны с материалом, изложенным в учебном пособии В.Н. Литвиненко «Геометрия — 10» и в «Тетради заданий» к этому пособию. Следует отметить, что задачи предлагаемых проверочных и контрольных работ не выходят за рамки программы школьного курса геометрии и, таким образом, могут быть использованы при изучении соответствующих разделов по школьным учебникам и учебным пособиям также других авторов.

Автор

ПРОВЕРОЧНЫЕ РАБОТЫ

1. Построение точки пересечения данной прямой и данной плоскости с плоскостью основания пирамиды.

2. Построение сечения призмы плоскостью. Построение линии пересечения двух данных секущих плоскостей призмы.

3. Построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой. Построение сечения призмы плоскостью, проходящей через данную прямую параллельно другой данной прямой.

4. Вычисление расстояния между двумя данными точками. Построение перпендикуляра к данной прямой, проходящего через данную точку.

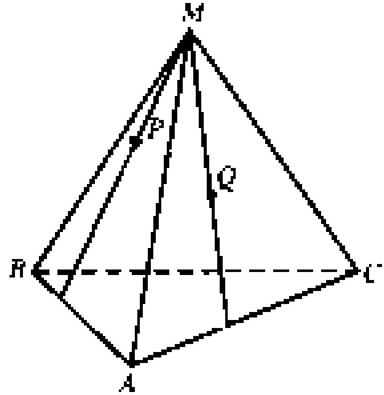
5. Построение перпендикуляра к данной плоскости, проходящего через данную точку.

6. Вычисление угла между данными скрещивающимися прямыми и угла между данной прямой и данной плоскостью.

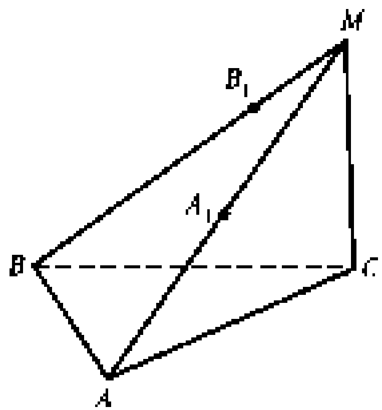
Проверочная работа 1

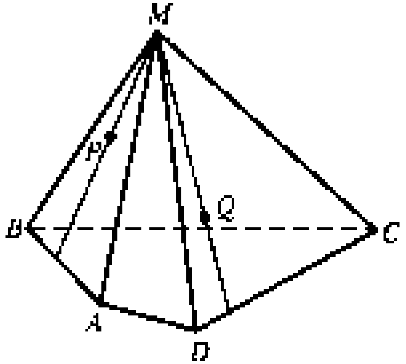
Построение точки пересечения данной прямой и данной плоскости с плоскостью основания пирамиды

1. В гранях MAB и MAC пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки P и Q.
Постройте точку пересечения прямой PQ с плоскостью ABC.

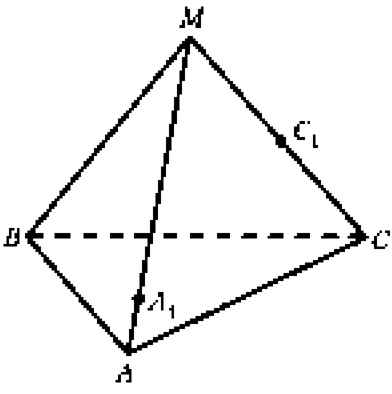


2. На ребрах MA и MB пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки A_1 и B_1.
Постройте линию пересечения плоскости A_1B_1C с плоскостью ABC.



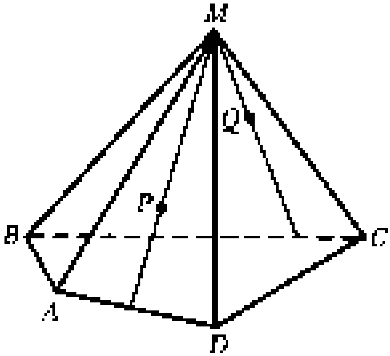


1. В гранях MAB и MCD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки P и Q.
Постройте точку пересечения прямой PQ с плоскостью основания пирамиды.

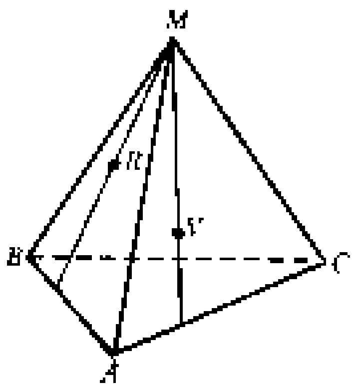


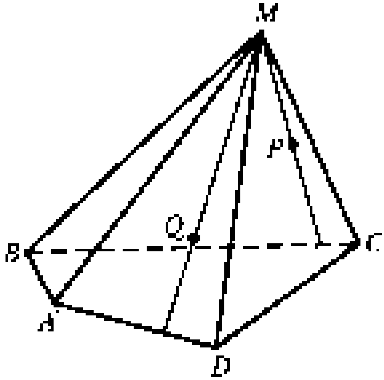
2. На ребрах MA и MC пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки A_1 и C_1.
Постройте линию пересечения плоскости A_1BC_1 с плоскостью ABC.

1. В гранях MAD и MBC пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки P и Q. Постройте точку пересечения прямой PQ с плоскостью основания пирамиды.

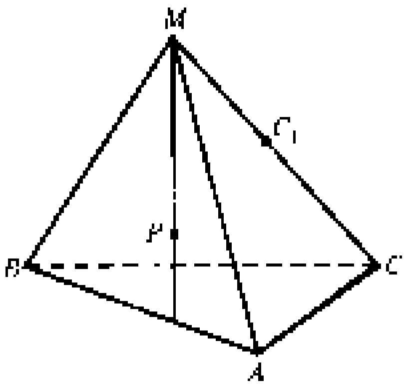


2. В гранях MAB и MAC пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки R и V. Постройте линию пересечения плоскости CRV с плоскостью ABC.



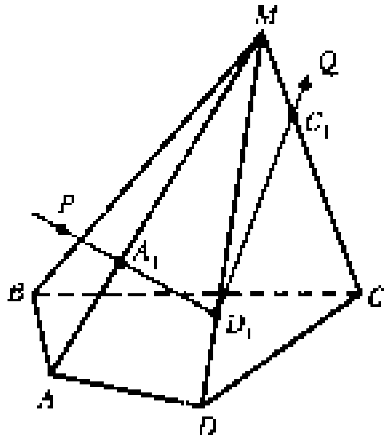


1. В гранях MBC и MAD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки P и Q.
Постройте точку пересечения прямой PQ с плоскостью основания пирамиды.

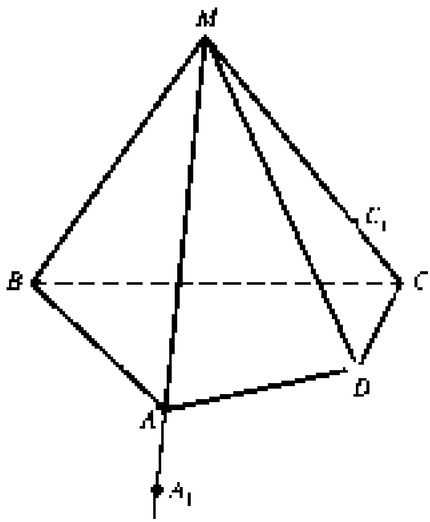


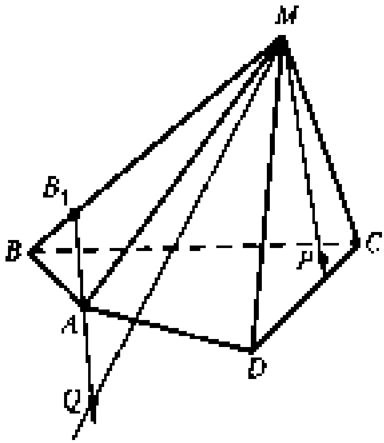
2. На ребре MC пирамиды $MABC$ взята точка C_1, а в грани MAB — точка P.
Постройте линию пересечения плоскости BC_1P с плоскостью ABC.

1. На ребрах MA, MC и MD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки A_1, C_1 и D_1, а на прямых A_1D_1 и D_1C_1 взяты вне пирамиды соответственно точки P и Q.
Постройте точку пересечения прямой PQ с плоскостью основания пирамиды.

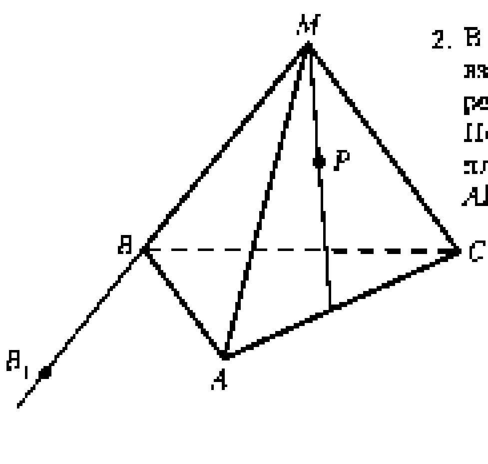


2. На ребре MC пирамиды $MABCD$ и на продолжении ее ребра MA взяты соответственно точки C_1 и A_1.
Постройте линию пересечения плоскости A_1DC_1 с плоскостью основания пирамиды.





1. На ребре MB пирамиды $MABCD$ взята точка B_1, а на прямой AB_1 — точка Q. В грани MCD взята точка P.
Постройте точку пересечения прямой PQ с плоскостью основания пирамиды.

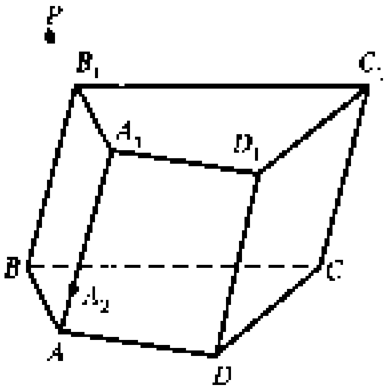


2. В грани MAC пирамиды $MABC$ взята точка P, а на продолжении ребра MB — точка B_1.
Постройте линию пересечения плоскости B_1CP с плоскостью ABC.

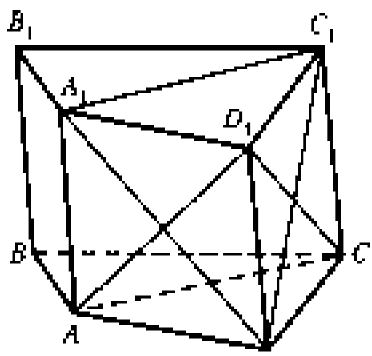
Проверочная работа 2

Построение сечения призмы плоскостью.
Построение линии пересечения
двух данных секущих плоскостей призмы

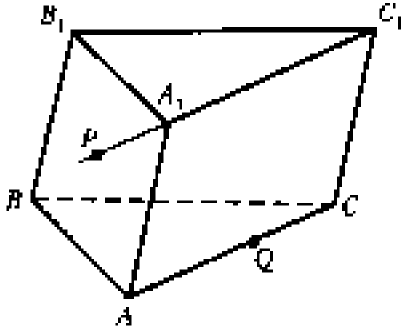
1. На продолжении ребра A_1B_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P, а на ребре AA_1 — точка A_2.
Постройте сечение призмы плоскостью PA_2D_1



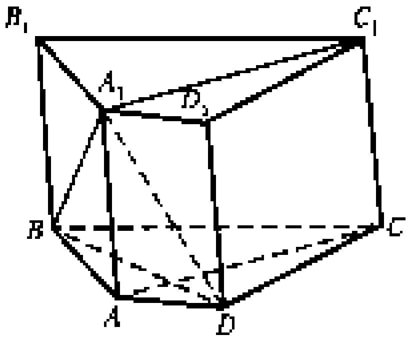
2. Постройте линию пересечения плоскостей ACD_1 и A_1C_1D, проведенных в призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Вариант 2

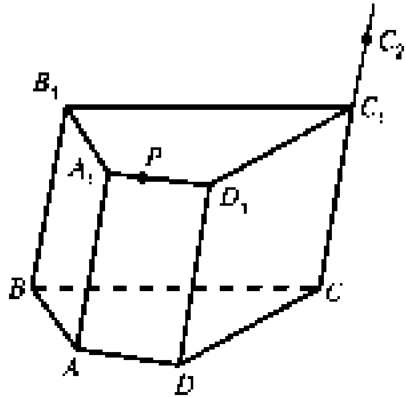


1. На продолжении ребра A_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка P, а на ребре AC — точка Q. Постройте сечение призмы плоскостью PBQ.

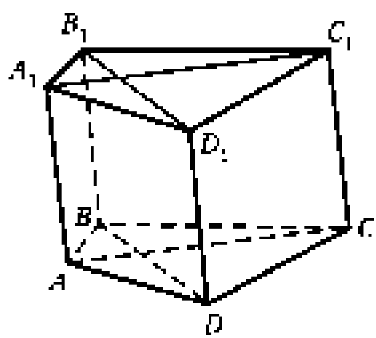


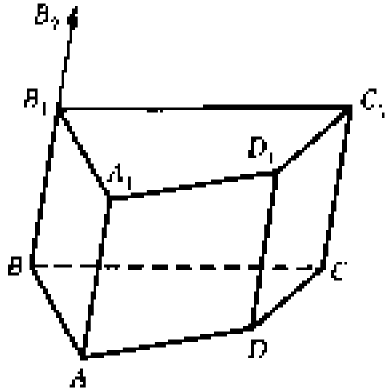
2. Постройте линию пересечения плоскостей A_1BD и ACC_1A_1, проведенных в призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. На продолжении ребра CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка C_2, а на ребре — точка P. Постройте сечение призмы плоскостью C_2DP.

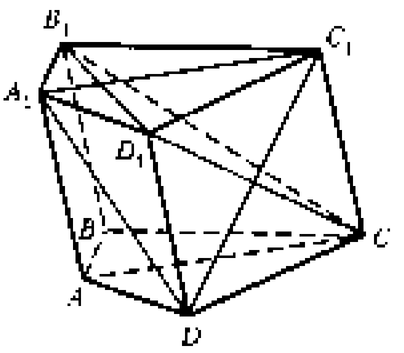


2. Постройте линию пересечения плоскостей ACC_1A_1 и BDD_1B_1, проведенных в призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



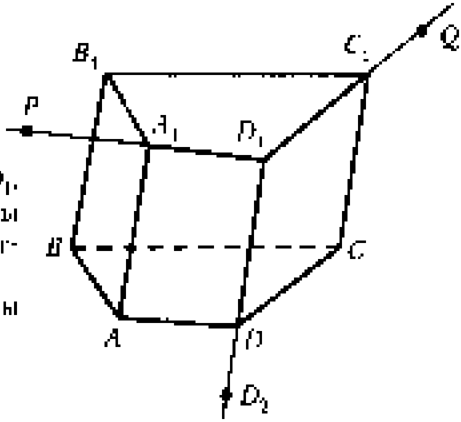


1. На продолжении ребра BB_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка B_2.
Постройте сечение призмы плоскостью AB_2C

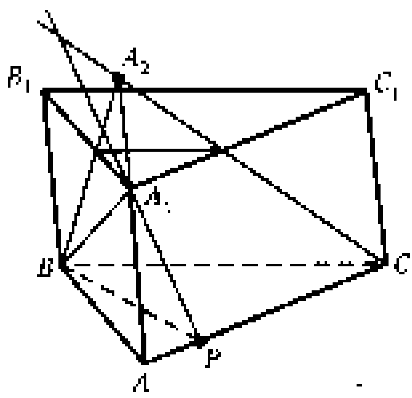


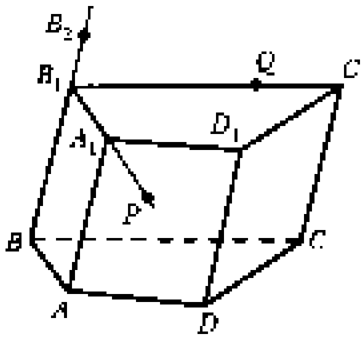
2. Постройте линию пересечения плоскостей B_1D_1C и A_1C_1D, проведенных в призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. На продолжениях ребер A_1D_1, DD_1 и D_1C_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, D_2 и Q. Постройте сечение призмы плоскостью PD_2Q.

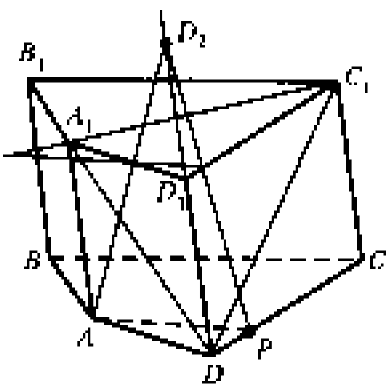


2. На продолжении ребра AA_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка A_2, а на ребре AC – точка P. Постройте линию пересечения плоскостей A_1BP и BA_2C, проведенных в призме.





1. На продолжениях ребер BB_1 и A_1B_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки B_2 и P, а на ребре B_1C_1 — точка Q.
Постройте сечение призмы плоскостью B_2PQ.

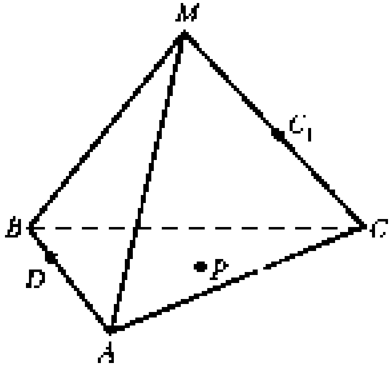


2. На ребре CD призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P, а на продолжении ребра DD_1 взята точка D_2.
Постройте линию пересечения плоскостей D_2AP и A_1C_1D, проведенных в призме.

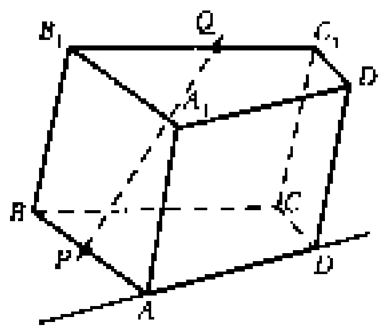
Проверочная работа 3

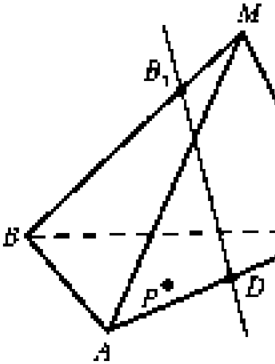
Построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой. Построение сечения призмы плоскостью, проходящей через данную прямую параллельно другой данной прямой

1. На ребрах AB и MC пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки D и C_1, а в грани ABC взята точка P.
Постройте прямую, проходящую через точку P параллельно прямой DC_1.

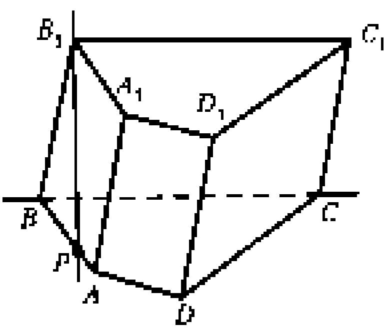


2. На ребрах AB и B_1C_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через прямую PQ параллельно прямой AD.



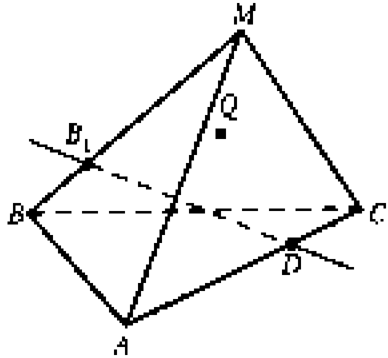


1. На ребрах MB и AC пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки B_1 и D, а на грани ABC точка P.
Постройте прямую, проходящую через точку P параллельно прямой B_1D.

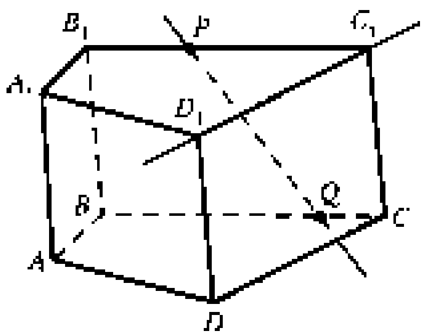


2. На ребре AB призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точку P параллельно прямой BC.

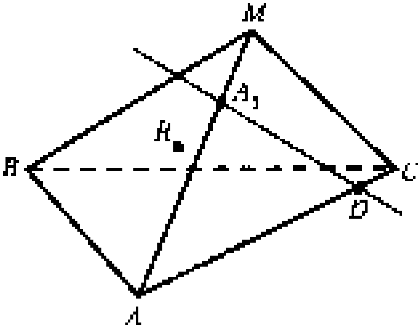
1. На ребрах MB и AC пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки B_1 и D, а в грани MBC взята точка Q.
Постройте прямую, проходящую через точку Q параллельно прямой B_1D.



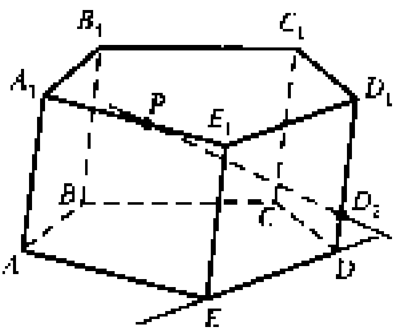
2. На ребрах B_1C_1 и BC призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через прямую PQ параллельно прямой C_1D_1.



Вариант 4

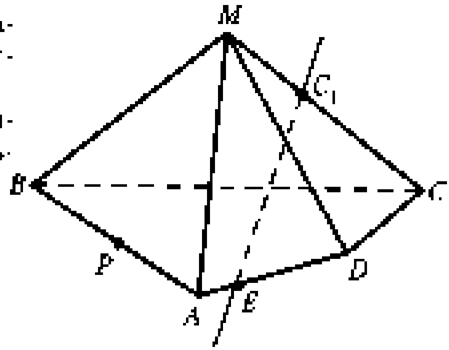


1. На ребрах MA и AC пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки A_1 и D, а в грани MAB — точка K.
Постройте прямую, проходящую через точку K параллельно прямой A_1D.

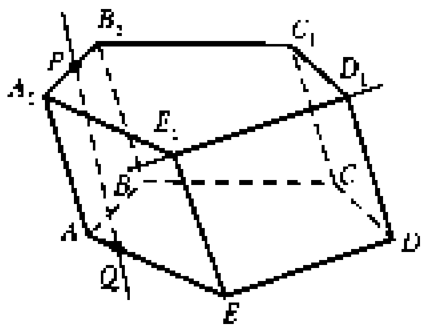


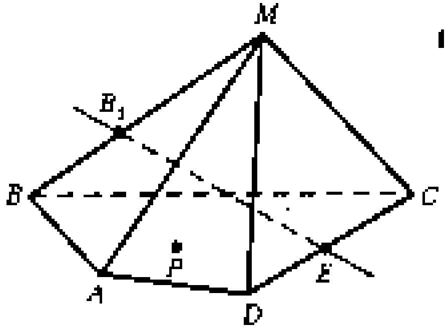
2. На ребрах A_1E_1 и DD_1 призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ взяты соответственно точки P и D_2.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через прямую PD_2 параллельно прямой DE.

1. На ребрах MC, AD и AB пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки C_1, E и P. Постройте прямую, проходящую через точку P, параллельную прямой C_1E.



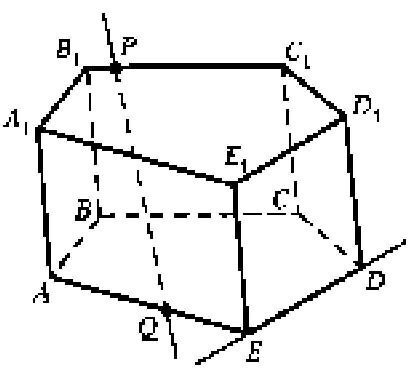
2. На ребрах A_1B_1 и AE призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ взяты соответственно точки P и Q. Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через прямую PQ параллельно прямой D_1E_1.





1. На ребрах MB и CD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки B_1 и E, а в грани $ABCD$ взята точка P.

Постройте прямую, проходящую через точку P параллельно прямой B_1E.



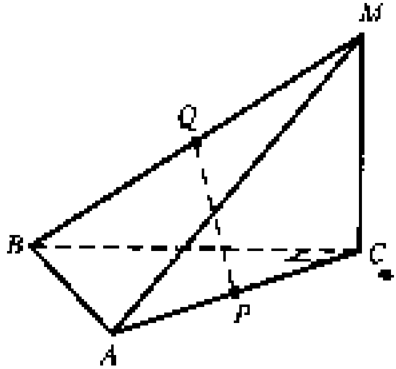
2. На ребрах B_1C_1 и AE призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ взяты соответственно точки P и Q.

Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через прямую PQ параллельно прямой DE.

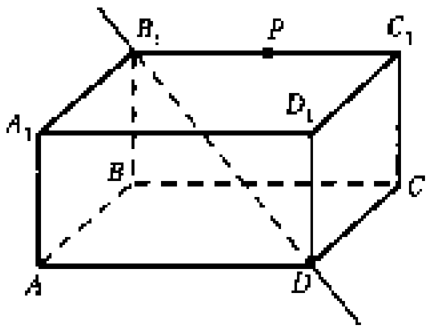
Проверочная работа 4

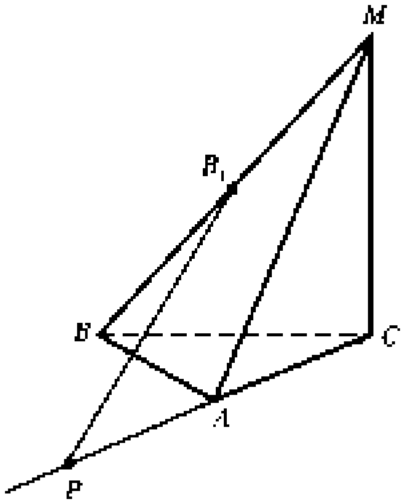
Вычисление расстояния между двумя данными точками. Построение перпендикуляра к данной прямой, проходящего через данную точку

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник с прямым углом при вершине C, а ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости ABC. Отношение ребер пирамиды $CA : CB : MC = 3 : 4 : 1$.
Считая $MC = a$, найдите расстояние между точками P и Q — серединами соответственно ребер AC и MB.

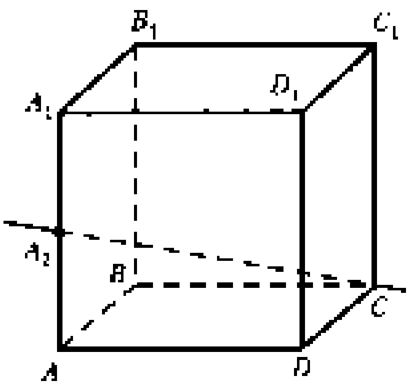


2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$. Опустите перпендикуляр из точки P — середины ребра B_1C_1 — на прямую B_1D



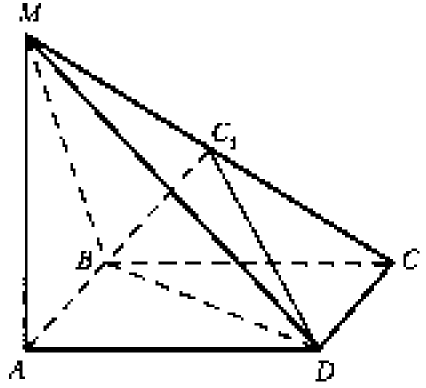


1. В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник, а ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости ABC и в два раза больше стороны основания. На ребре MB взята точка B_1 — его середина, а на продолжении ребра CA взята точка P такая, что точка A является серединой отрезка CP. Считая $AB = a$, найдите расстояние между точками B_1 и P.

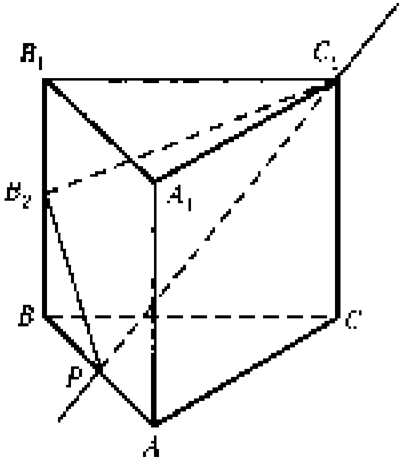


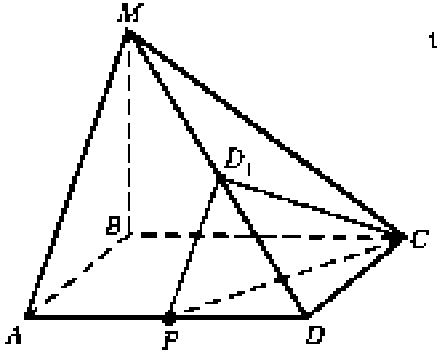
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 2$. Опустите перпендикуляр из точки B_1 на прямую A_2C, точка A_2 которой является серединой ребра AA_1.

1. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник, а ее боковое ребро MA перпендикулярно плоскости ABC. Отношения ребер пирамиды $AB : AD : MA = 1 : 2 : 2$.
Считая $AB = a$, найдите стороны треугольника BDC_1, вершина C_1 которого является серединой ребра MC.

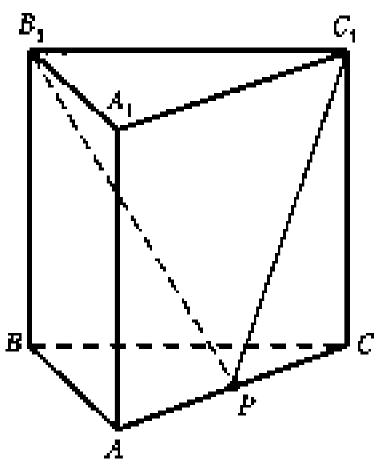


2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания.
Опустите перпендикуляр из точки B_2 — середины ребра BB_1 — на прямую C_1P, точка P которой является серединой ребра AB.



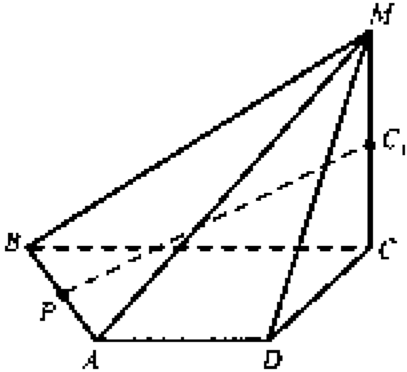


1. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости ABC. Отношение ребер пирамиды $BA : BC : MB = 1 : 3 : 2$.
Считая $AB = a$, найдите стороны треугольника D_1CP, вершины D_1 и P которого являются серединами соответственно ребер MD и AD.

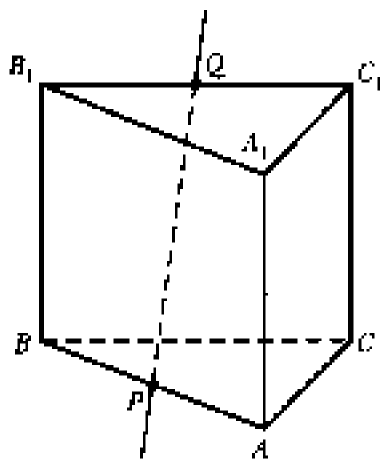


2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания. Опустите перпендикуляр из точки B_1 на прямую C_1P, точка P которой является серединой ребра AC.

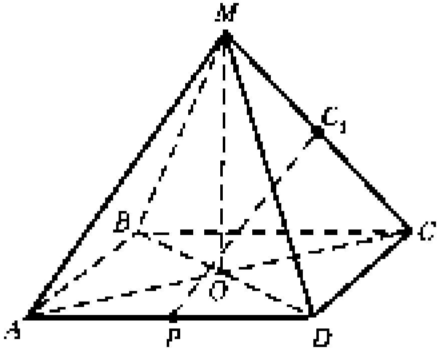
1. В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция, у которой $AD : CD : BC = 1 : 1 : 2$ и $\angle BCD = 90°$, $\angle CBA = 45°$. Боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания пирамиды и $MC = AD$.
Считая $AD = a$, найдите расстояние между точками C_1 и P — серединами соответственно ребер MC и AB.



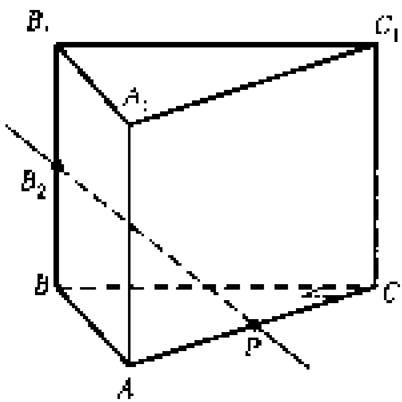
2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания.
Опустите перпендикуляр из вершины C_1 на прямую PQ, точки P и Q которой являются серединами соответственно ребер AB и B_1C_1.



Вариант Б



1. Высота правильной пирамиды $MABCD$ в два раза больше стороны ее основания. На ребрах AD и MC взяты соответственно точки P и C_1 — середины этих ребер.
Считая $AB = a$, найдите расстояние между точками P и C_1.



2. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник с прямым углом при вершине C и отношением катетов $BC : AC = 1 : 2$. Боковое ребро призмы равно катету AC.
Из вершины C опустите перпендикуляр на прямую B_2P, точки B_2 и P которой являются серединами соответственно ребер BB_1 и AC.

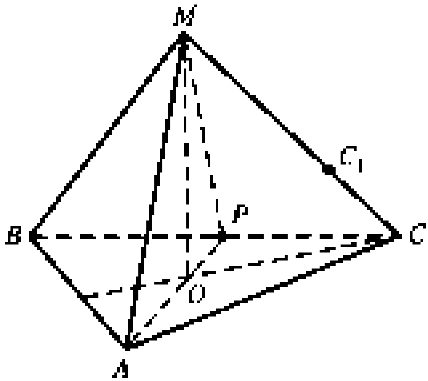
Проверочная работа 5

Построение перпендикуляра к данной плоскости, проходящего через данную точку

1. На ребре MC правильной пирамиды $MABC$ взята точка C_1. Опустите перпендикуляры из точки C_1 на следующие плоскости:

а) ABC;

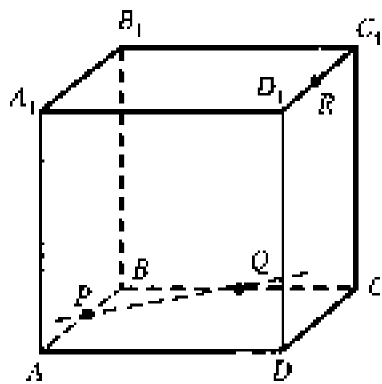
б) MAP, точка P которой является серединой ребра BC



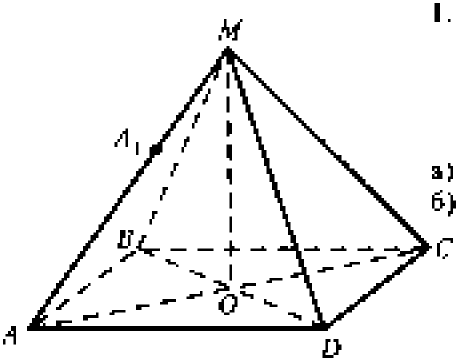
2. На ребрах AB, BC и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R — середины этих ребер.

а) Постройте сечение куба плоскостью α, проходящей через прямую PQ параллельно прямой BB_1;

б) опустите перпендикуляр из точки R на плоскость α



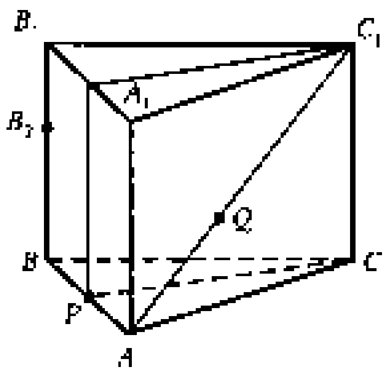
Вариант 2



1. На ребре MA правильной пирамиды $MABC$ взята точка A_1. Опустите перпендикуляры из точки A_1 на следующие плоскости:

а) ABC;

б) MDB.



2. Через точку P — середину ребра AB правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, — и прямую CC_1 проведена плоскость α. Опустите перпендикуляры на плоскость α из следующих точек:

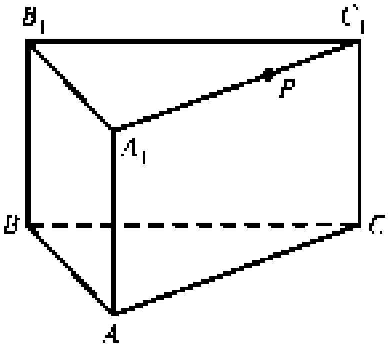
а) B_2, взятой на ребре BB_1,

б) Q, взятой на отрезке AC_1.

1. На ребре A_1C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка P. Опустите перпендикуляры из точки P на следующие плоскости:

а) ABC;

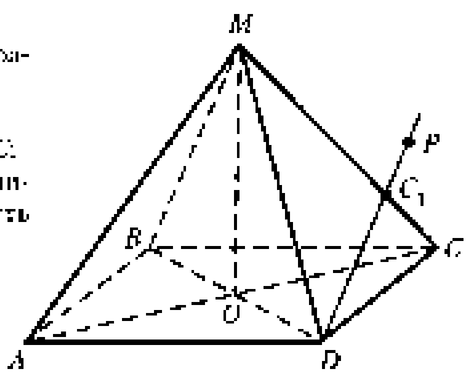
б) A_1AB



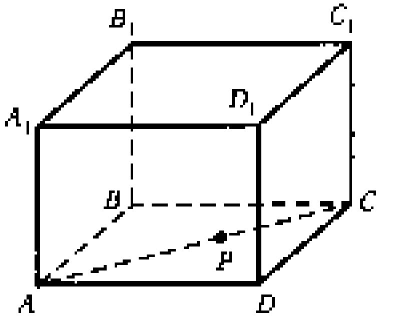
2. На ребре MC правильной пирамиды $MABC$ взята точка C_1. Опустите перпендикуляры.

а) из точки C_1 на плоскость ABC;

б) из точки P, взятой вне пирамиды на луче DC_1, на плоскость MDB.



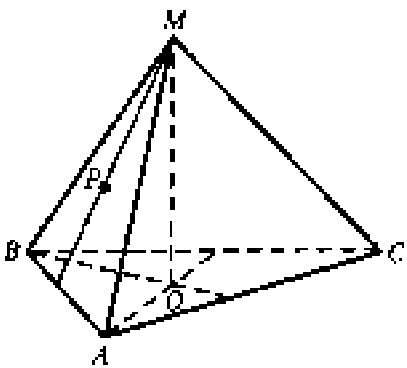
Вариант 4



1. Из точки P, взятой на диагонали AC нижнего основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, опустите перпендикуляры на следующие плоскости

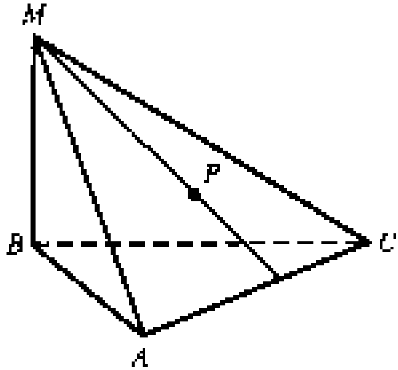
а) A_1AB;

б) $A_1B_1C_1$.

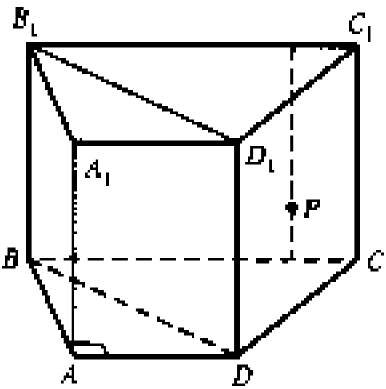


2. Из точки P, взятой в грани MAB правильной пирамиды $MABC$, опустите перпендикуляр на плоскость ABC.

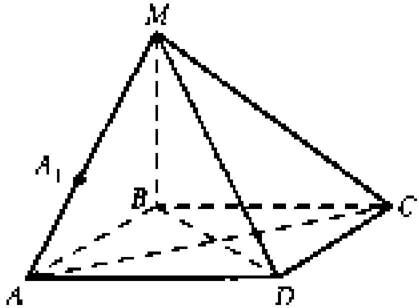
1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник с прямым углом при вершине B, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания.
   Из точки P, взятой в грани MAC, опустите перпендикуляры на следующие плоскости:
а) ABC;
б) MAB.



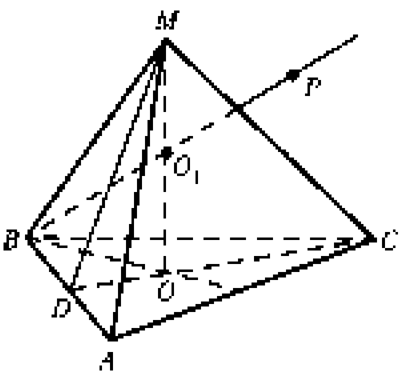
2. В основании прямой призмы $ABCD$ лежит трапеция, отношение сторон которой $AD : AB : BC = 1 : 1 : 2$, а угол при вершине A — прямой.
   Из точки P, взятой в грани BCC_1B_1, опустите перпендикуляры на следующие плоскости:
а) ABB_1;
б) BDD_1.



Вариант 6



1. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания.
Из точки A_1, взятой на ребре MA, опустите перпендикуляры на следующие плоскости:
а) ABC.
б) MDB

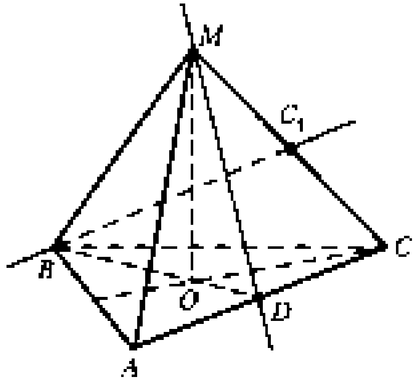


2. На высоте MO правильной пирамиды $MABC$ взята точка O_1. Из точки P, взятой на луче BO_1, вне пирамиды, опустите перпендикуляр на плоскость MCD, точка D которой является серединой ребра AB

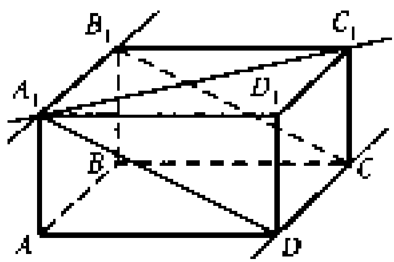
Проверочная работа 6

**Вычисление угла
между данными скрещивающимися прямыми
и угла между данной прямой
и данной плоскостью**

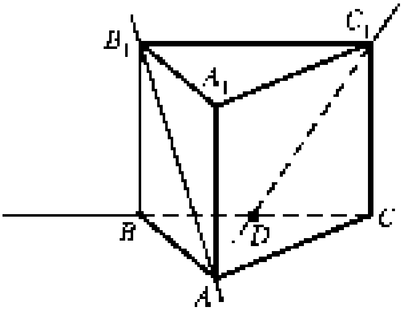
1. На ребрах MC и AC правильного тетраэдра $MABC$ взяты соответственно точки C_1 и D — середины этих ребер.
Найдите угол между скрещивающимися прямыми BC_1 и MD



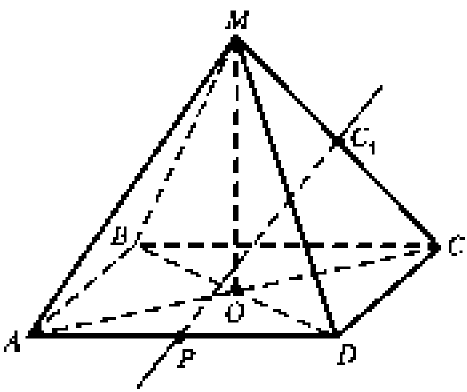
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$. Через параллельные прямые A_1B_1 и CD проведена секущая плоскость α.
Найдите угол между прямой A_1C_1 и плоскостью α.



Вариант 2

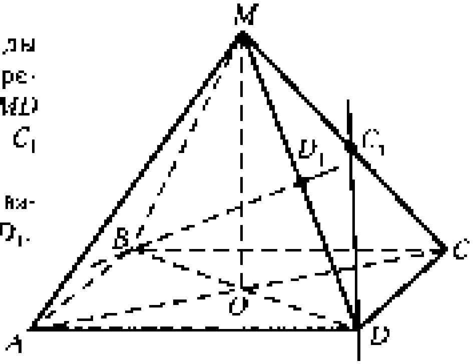


1. Все боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. На ребре BC взята точка D — его середина.
Найдите угол между скрещивающимися прямыми C_1D и AB_1.

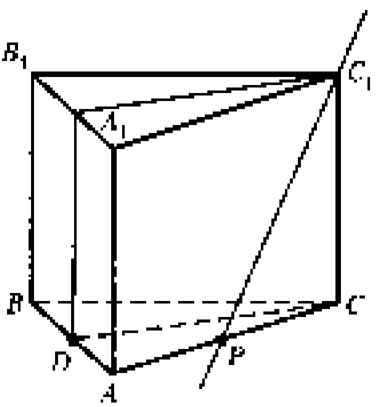


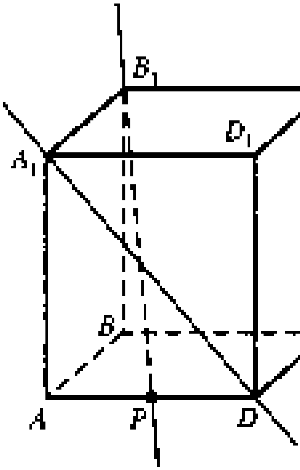
2. Высота правильной пирамиды $MABCD$ равна диагонали ее основания.
Найдите угол между прямой C_1P, точки C_1 и P которой являются серединами соответственно ребер MC и AD, и плоскостью α, проходящей через точки M, A и C.

1. Боковые грани пирамиды $MABCD$ — правильные треугольники. На ребрах MC и MD взяты соответственно точки C_1 и D_1 — середины этих ребер. Найдите угол между скрещивающимися прямыми DC_1 и BD_1.

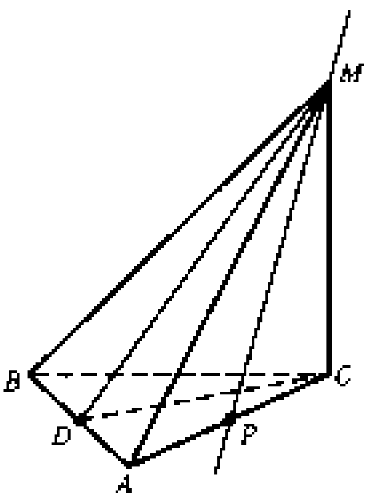


2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне основания. На ребрах AB и AC взяты соответственно точки D и P — середины этих ребер. Найдите угол между прямой C_1P и плоскостью α, проходящей через точки C_1, C и D.



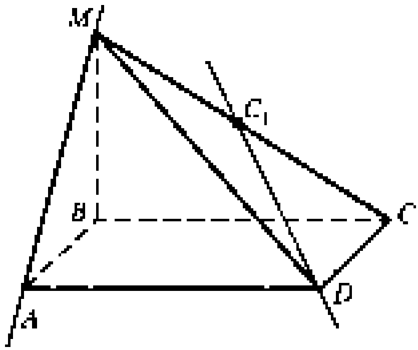


1. Отношение бокового ребра правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к стороне основания $AA_1 : AB = 3 : 2$. На ее ребре AD взята точка P — середина этого ребра. Найдите угол между скрещивающимися прямыми B_1P и A_1D.

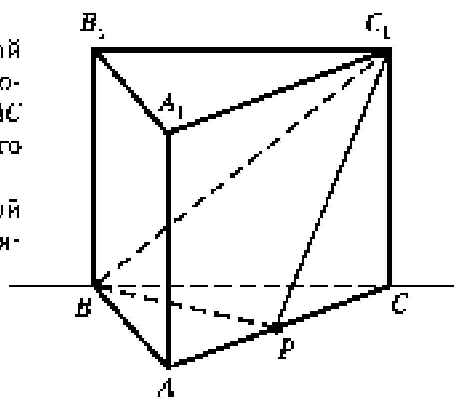


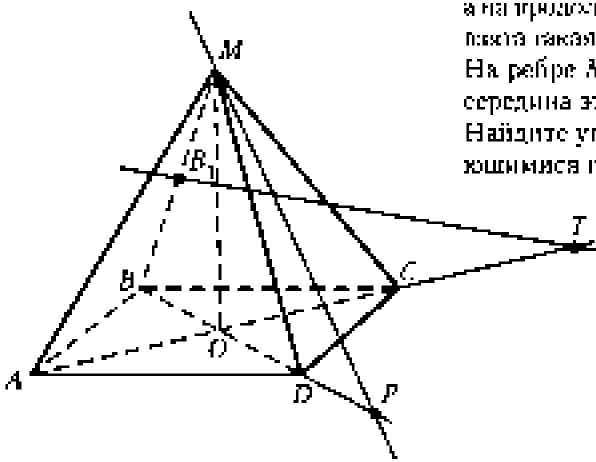
2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, у которого $AC = BC$. Боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и равно стороне AB. Через точки M, C и D — середину ребра AB — проведена плоскость α.
Найдите угол между этой плоскостью и прямой MP, точка P которой является серединой ребра AC.

1. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : BC = 1 : 2$. Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне AB. На ребре MC взята точка C_1 — середина этого ребра.
Найдите угол между скрещивающимися прямыми MA и C_1D.

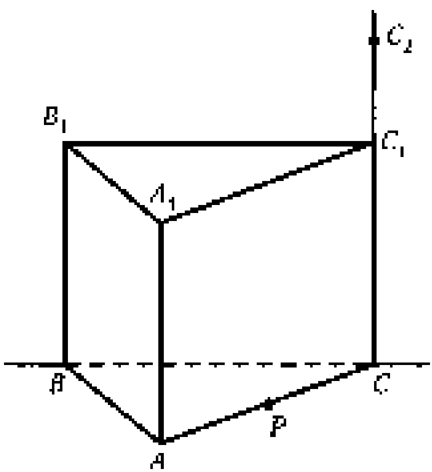


2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне основания. На ребре AC взята точка P — середина этого ребра.
Найдите угол между прямой BC и плоскостью α, проходящей через точки C_1, B и P.





1. На продолжении диагонали BD правильной пирамиды $MABCD$ взята такая точка P, что $OD = DP$, а на продолжении диагонали AC взята такая точка T, что $OC = CT$. На ребре MB взята точка B_1 — середина этого ребра.
Найдите угол между скрещивающимися прямыми MP и B_1T.



2. На ребре AC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка P — середина этого ребра, а на продолжении ребра CC_1 взята такая точка C_2, что $CC_2 : CC_1 = 3 : 2$. Боковое ребро призмы равно стороне основания.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки C_2, B и P.
Найдите угол между прямой BC и плоскостью α.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

1. Построение сечения пирамиды плоскостью. Построение линии пересечения двух данных секущих плоскостей пирамиды. Построение точки пересечения данной прямой с данной секущей плоскостью.

2. Построение точек пересечения данной прямой с плоскостями оснований призмы. Построение сечения призмы плоскостью.

3. Построение сечения пирамиды и призмы плоскостью, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости, и сечения, проходящего через данную прямую параллельно другой данной прямой.

4. Построение перпендикуляра к данной прямой, проходящего через данную точку. Вычисление длины заданного отрезка.

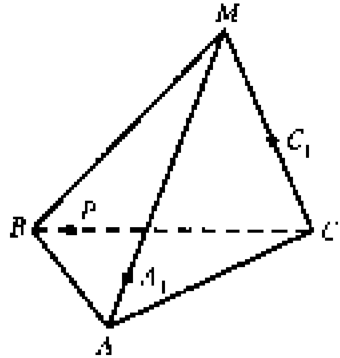
5. Вычисление расстояния от данной точки до данной плоскости.

6. Вычисление угла между плоскостями. Вычисление двугранного угла.

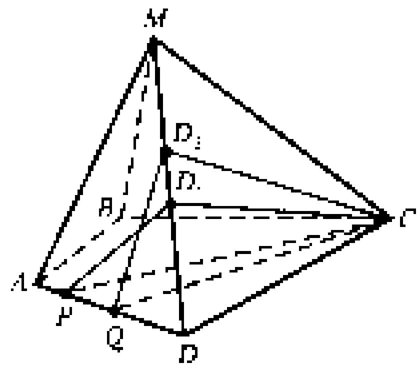
Контрольная работа 1

Построение сечения пирамиды плоскостью. Построение линии пересечения двух данных секущих плоскостей пирамиды. Построение точки пересечения данной прямой с данной секущей плоскостью

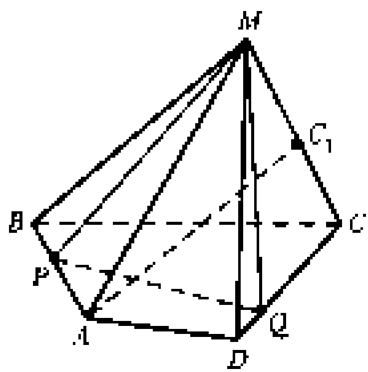
1. На ребрах MA, MC и BC пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки A_1, C_1 и P. Постройте сечение пирамиды плоскостью A_1C_1P.

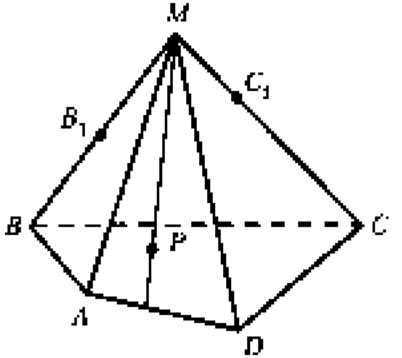


2. На ребре MD пирамиды $MABCD$ взяты точки D_1 и D_2, а на ребре AD — точки P и Q. Постройте линию пересечения плоскостей CD_1P и CD_2Q.

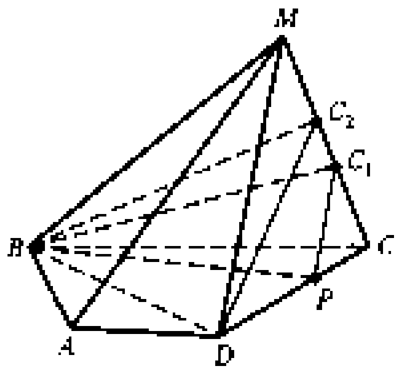


3. На ребрах MC, AB и CD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки C_1, P и Q. Постройте точку пересечения прямой AC_1 с плоскостью MPQ.

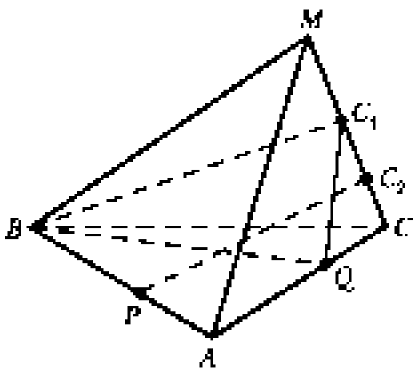




1. На ребрах MB и MC пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки B_1 и C_1, а в грани MAD взята точка P.
Постройте сечение пирамиды плоскостью B_1C_1P.

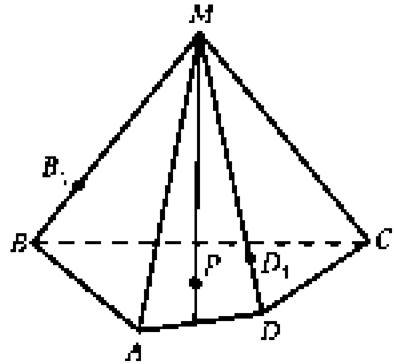


2. На ребре MC пирамиды $MABCD$ взяты точки C_1 и C_2, а на ребре CD — точка P.
Постройте линию пересечения плоскостей BPC_1 и BDC_2.

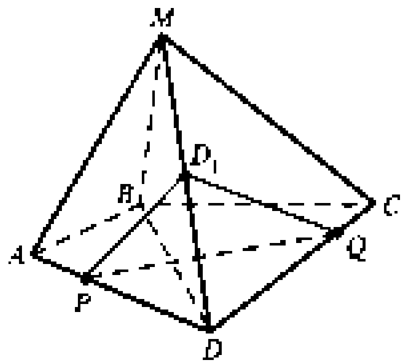


3. На ребре MC пирамиды $MABCD$ взяты точки C_1 и C_2, а на ребрах AB и AC соответственно точки P и Q.
Постройте точку пересечения прямой PC_2 с плоскостью BC_1Q.

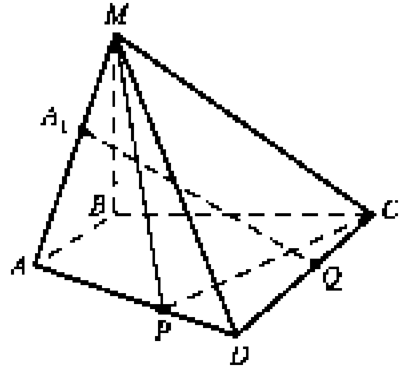
1. На ребрах MB и MD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки B_1 и D_1, а в грани MAD — точка P.
Постройте сечение пирамиды плоскостью B_1D_1P.

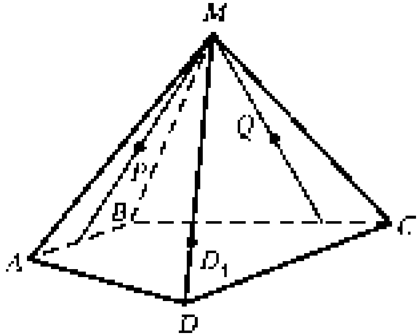


2. На ребрах AD, CD и MD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки P, Q и D_1.
Постройте линию пересечения плоскостей MDB и D_1PQ.

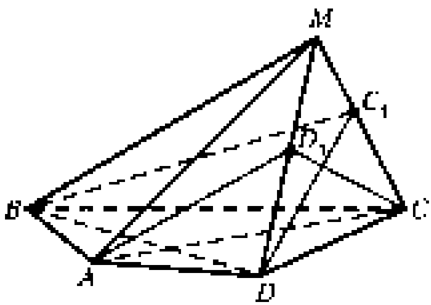


3. На ребрах MA, AD и CD взяты соответственно точки A_1, P и Q.
Постройте точку пересечения прямой A_1Q с плоскостью MCP.

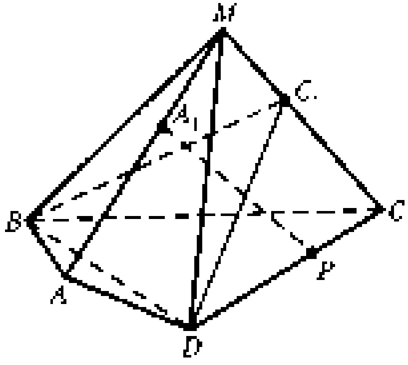




1. На ребре MD пирамиды $MABCD$ взята точка D_1, а в гранях MAB и MBC соответственно точки P и Q.
Постройте сечение пирамиды плоскостью D_1PQ.

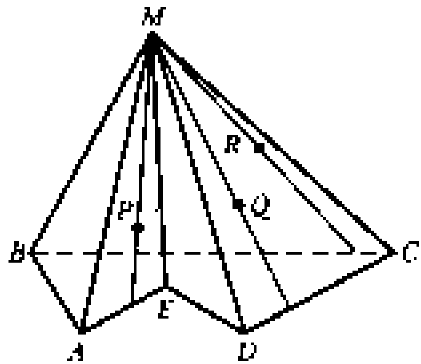


2. На ребрах MC и MD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки C_1 и D_1.
Постройте линию пересечения плоскостей AD_1C и BC_1D.

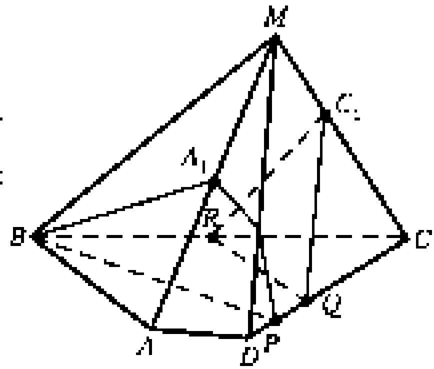


3. На ребрах MA, MC и CD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки A_1, C_1 и P.
Постройте точку пересечения прямой A_1P с плоскостью BC_1D.

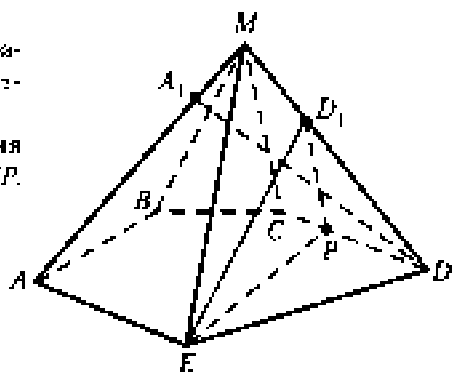
1. Постройте сечение пирамиды $MABCDE$ плоскостью, проходящей через точки P, Q и R, взятые соответственно в гранях MAE, MCD и MBC.

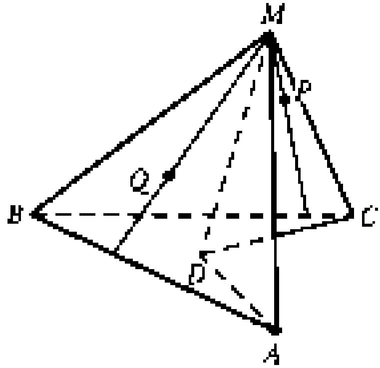


2. На ребрах MA, MC и BC пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки A_1, C_1 и R, а на ребре CD взяты точки P и Q. Постройте линию пересечения плоскостей A_1BP и C_1RQ.

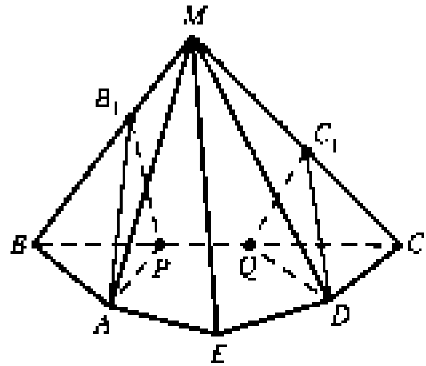


3. На ребрах MA, MD и CD пирамиды $MABCDE$ взяты соответственно точки A_1, D_1 и P. Постройте точку пересечения прямой A_1D с плоскостью D_1EP.

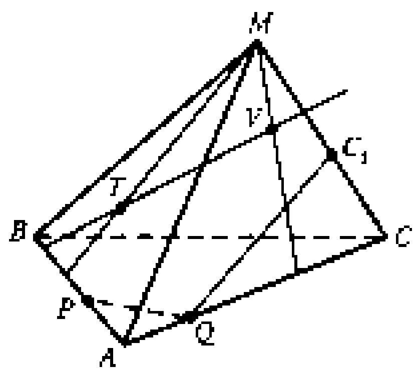




1. Постройте сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью APQ, точки P и Q которой взяты соответственно в гранях MBC и MAB.



2. На ребрах MB и MC пирамиды $MABCDE$ взяты соответственно точки B_1 и C_1, а на ребре BC взяты точки P и Q.
Постройте линию пересечения плоскостей B_1AP и C_1DQ.



3. В гранях MAB и MAC пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки T и V, а на ребрах AB, AC и MC взяты соответственно точки P, Q и C_1.
Постройте точку пересечения прямой TV с плоскостью C_1PQ.

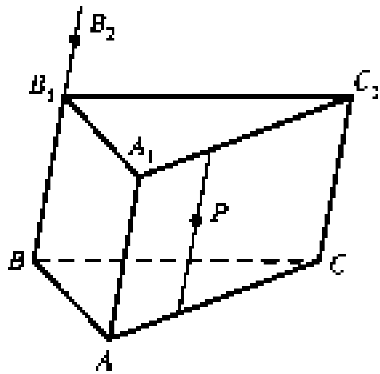
Контрольная работа 2

Построение точек пересечения данной прямой с плоскостями оснований призмы. Построение сечения призмы плоскостью

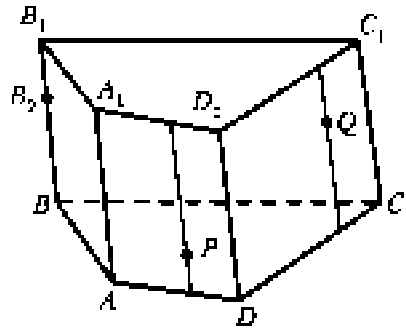
3 Заказ 50

Вариант 1

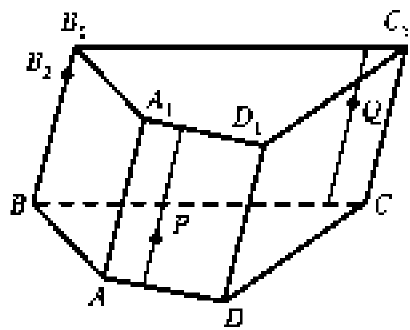
1. На продолжении ребра BB_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка B_2, а в грани ACC_1A_1 — точка P. Постройте точки пересечения прямой B_2P с плоскостями оснований призмы.



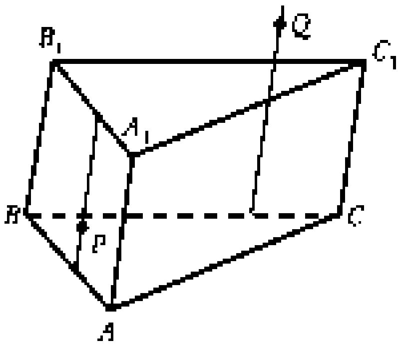
2. На ребре BB_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка B_2, а в гранях ADD_1A_1 и CDD_1C_1 взяты соответственно точки P и Q. Постройте основной след плоскости α, проходящей через точки B_2, P и Q.



3. На ребре BB_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка B_2, а в гранях ADD_1A_1 и BCC_1B_1 взяты соответственно точки P и Q. Постройте сечение призмы плоскостью B_2PQ.

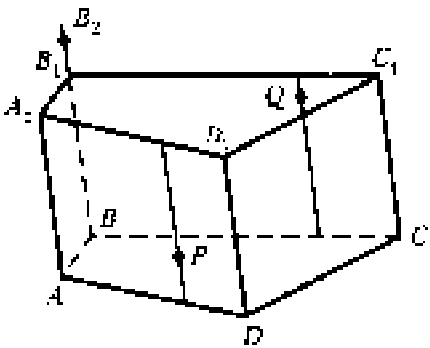


Вариант 2



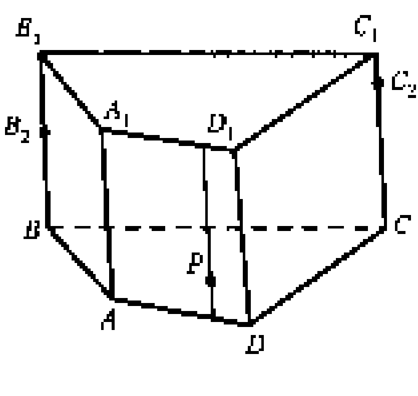
1. В грани ABB_1A_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка P, а в плоскости грани BCC_1B_1 взята точка Q.

   Постройте точку пересечения прямой PQ с плоскостями оснований призмы.



2. На продолжении ребра BB_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка B_2, а в гранях ADD_1A_1 и BCC_1B_1 взяты соответственно точки P и Q.

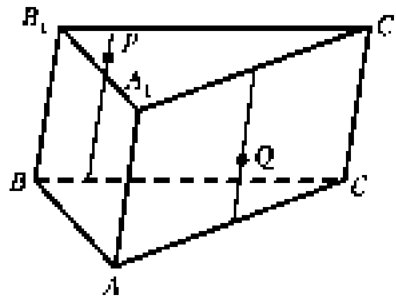
   Постройте основной след плоскости α, проходящей через точки B_2, P и Q.



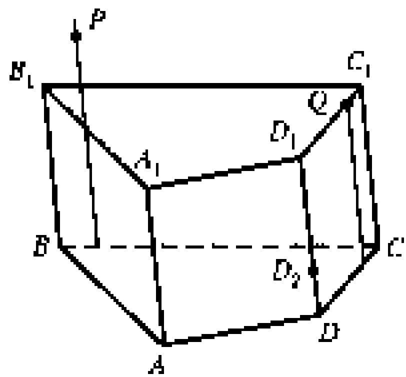
3. На ребрах BB_1 и CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки B_2 и C_2, а в грани ADD_1A_1 — точка P.

   Постройте сечение призмы плоскостью B_2C_2P.

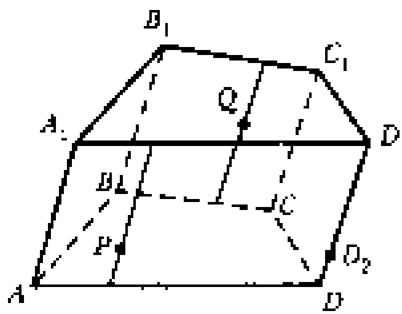
1. В гранях BCC_1B_1 и ACC_1A_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки P и Q.
Постройте точки пересечения прямой PQ с плоскостями оснований призмы.

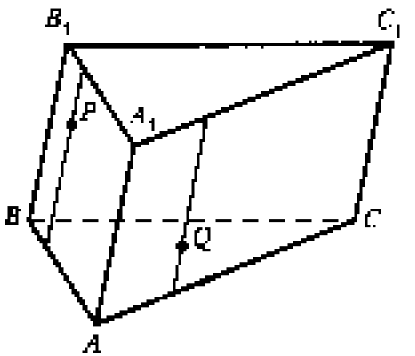


2. В плоскости грани BCC_1B_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P, на ребрах DD_1 и C_1D_1 взяты соответственно точки D_2 и Q.
Постройте основной след плоскости α, проходящей через точки P, D_2 и Q.

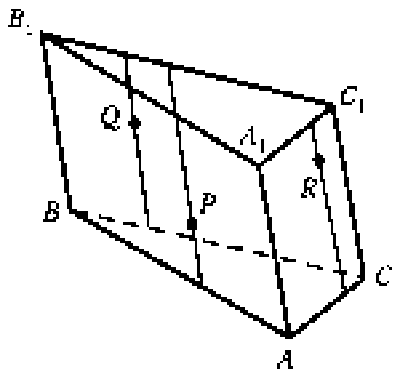


3. В гранях ADD_1A_1 и BCC_1B_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q, а на ребре DD_1 взята точка D_2.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки P, Q и D_2.

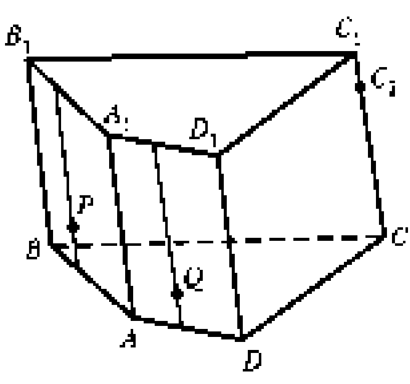




1. В гранях ABB_1A_1 и ACC_1A_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки P и Q.
Постройте точки пересечения прямой PQ с плоскостями оснований призмы.

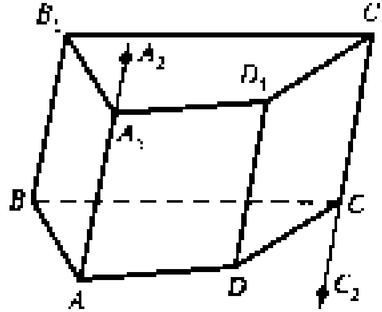


2. В гранях ABB_1A_1, BCC_1B_1 и ACC_1A_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R.
Постройте основной след плоскости α, проходящей через точки P, Q и R.

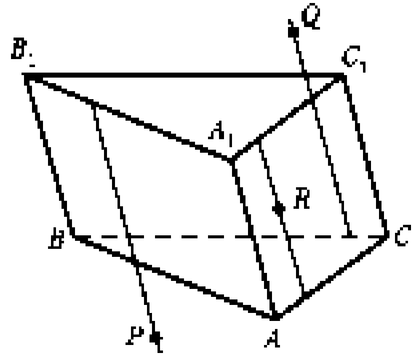


3. В гранях ABB_1A и ADD_1A_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q, а на ребре CC_1 — точка C_2.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки C_2, P и Q.

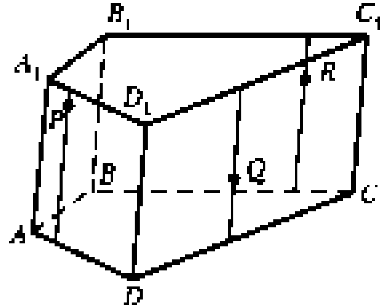
1. На продолжениях ребер AA_1 и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки A_2 и C_2. Постройте точки пересечения прямой A_2C_2 с плоскостями оснований призмы.

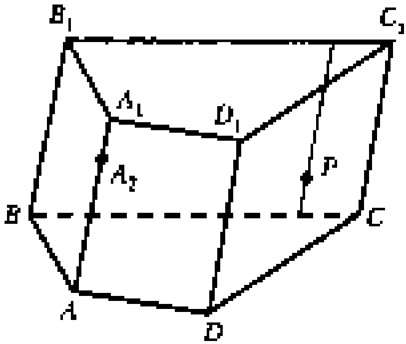


2. В плоскостях граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки P и Q, а в грани ACC_1A_1 взята точка R.
Постройте основной след плоскости α, проходящей через точки P, Q и R.

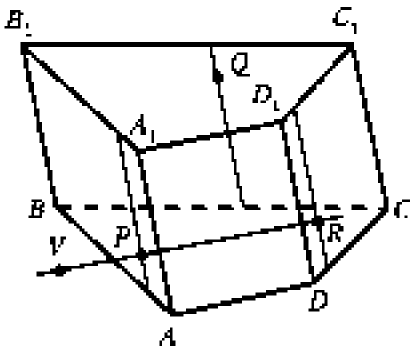


3. В гранях ADD_1A_1, CDD_1C_1 и BCC_1B_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки P, Q и R.

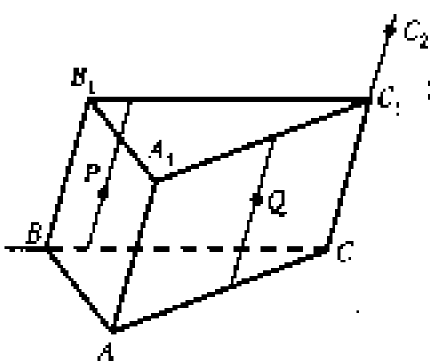




1. На ребре AA_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка A_2, а в грани BCC_1B_1 – точка P.
Постройте точку пересечения прямой A_2P с плоскостями оснований призмы.



2. В гранях ABB_1A_1, BCC_1B_1 и CDD_1C_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R, а на прямой PR вне призмы взята точка V.
Постройте основной след плоскости α, проходящей через точки V, Q и R.

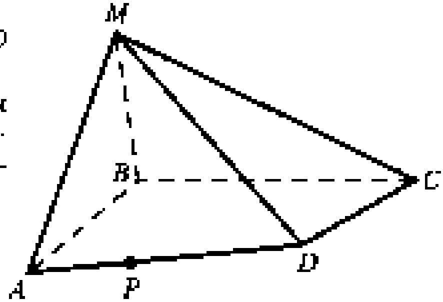


3. В гранях BCC_1B_1 и ACC_1A_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q, а на продолжении ребра CC_1 взята точка C_2.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки P, Q и C_2.

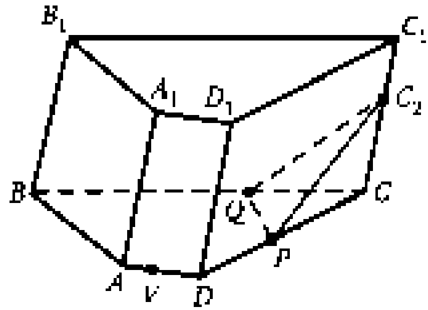
Контрольная работа 3

Построение сечения пирамиды и призмы плоскостью, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости, и сечения, проходящего через данную прямую параллельно другой данной прямой

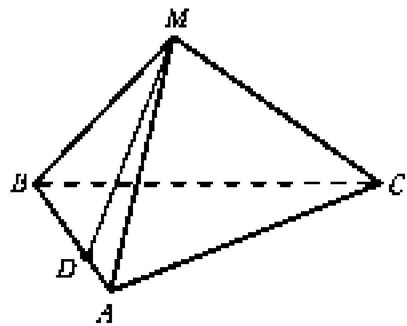
1. На ребре AD пирамиды $MABCD$ взята точка P.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку P параллельно плоскости MAB.

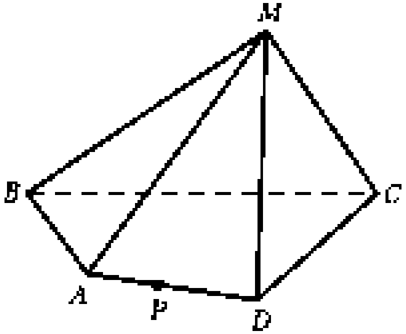


2. На ребрах CD, BC, CC_1 и AD призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q, C_2 и V.
Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку V параллельно плоскости PQC_2.



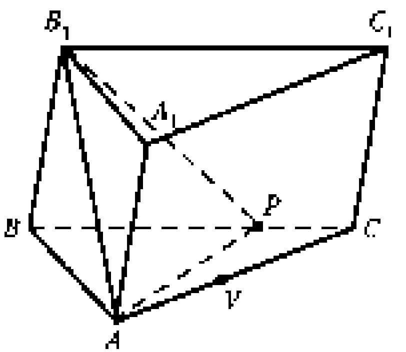
3. На ребре AB пирамиды $MABC$ взята точка D.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через прямую MD параллельно прямой AC.





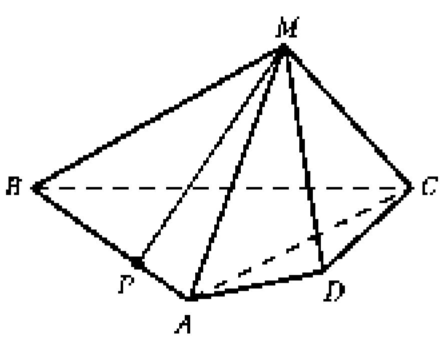
1. На ребре AD пирамиды $MABCD$ взята точка P.

   Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку P параллельно плоскости MAB.



2. На ребрах AC и BC призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки V и P.

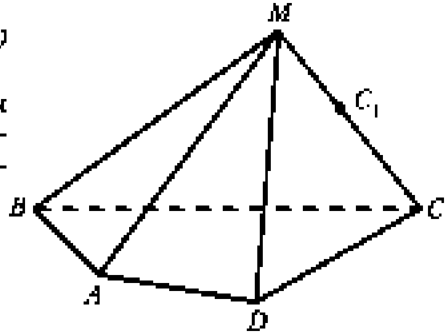
   Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку V параллельно плоскости B_1AP.



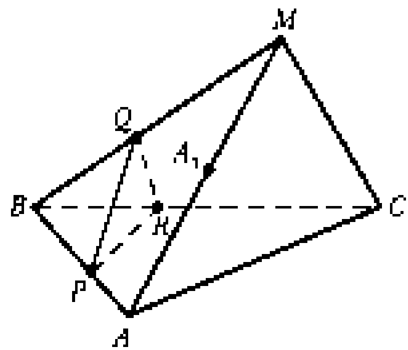
3. На ребре AB пирамиды $MABCD$ взята точка P.

   Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MP параллельно прямой AC.

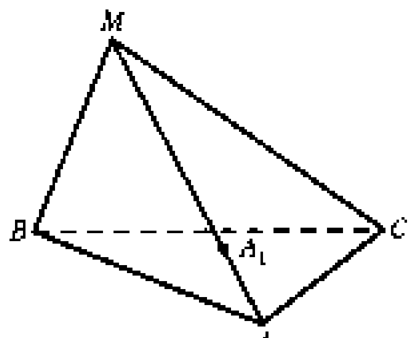
1. На ребре MC пирамиды $MABCD$ взята точка C_1.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку C_1 параллельно плоскости ABC.



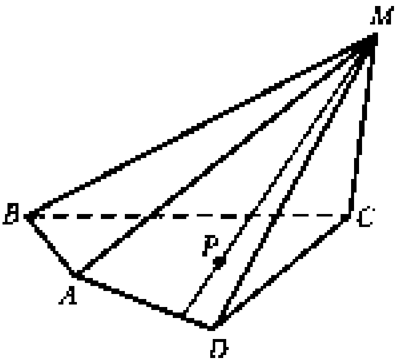
2. На ребрах AB, MB, BC и MA пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки P, Q, R и A_1.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку A_1 параллельно плоскости PQR.



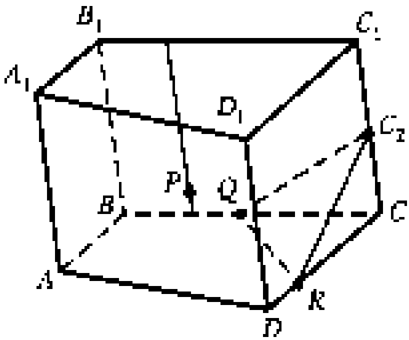
3. На ребре MA пирамиды $MABC$ взята точка A_1.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через прямую BA_1 параллельно прямой AC.



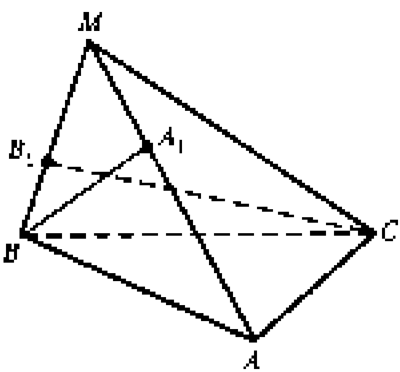
Вариант 4



1. В грани MAD пирамиды $MABCD$ взята точка P.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку P параллельно плоскости MAB.



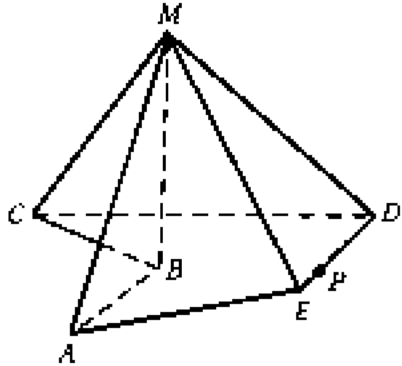
2. На ребрах BC, CD и CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки Q, R и C_2, а в грани BCC_1B_1 взята точка P.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точку P параллельно плоскости C_2QR.



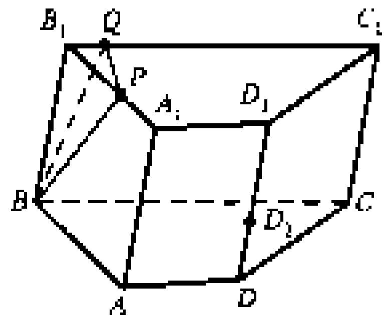
3. На ребрах MA и MB пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки A_1 и B_1.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через прямую B_1C параллельно прямой A_1B.

Вариант 5

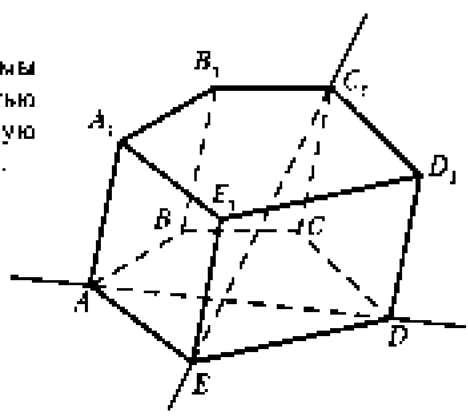
1. На ребре DE пирамиды $MABCDE$ взята точка P.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку P параллельно плоскости MBC.

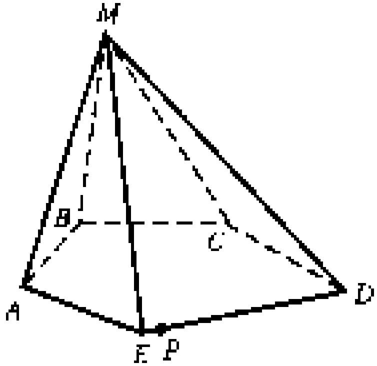


2. На ребрах A_1B_1 и B_1C_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q, а на ребре DD_1 взята точка D_2.
Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку D_2 параллельно плоскости BPQ.

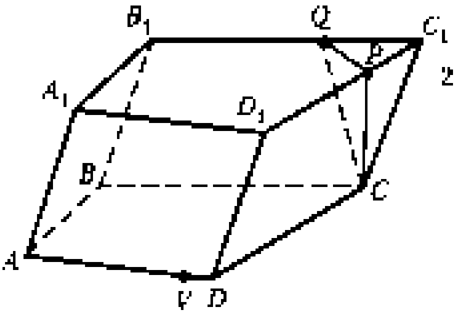


3. Постройте сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью α, проходящей через прямую C_1E параллельно прямой AD.

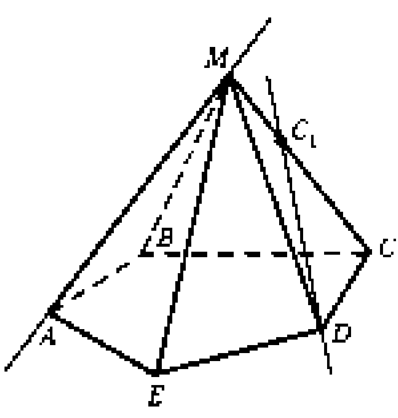




1. На ребре DE пирамиды $MABCDE$ взята точка P.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку P параллельно плоскости MAB.



2. На ребрах C_1D_1, B_1C_1 и AD призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и V.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точку V параллельно плоскости CPQ.

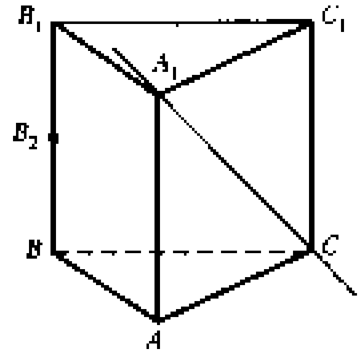


3. На ребре MC пирамиды $MABCDE$ взята точка C_1.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через прямую DC_1 параллельно прямой MA.

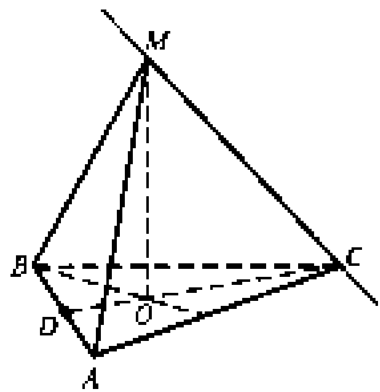
Контрольная работа 4

Построение перпендикуляра к данной прямой, проходящего через данную точку. Вычисление длины заданного отрезка

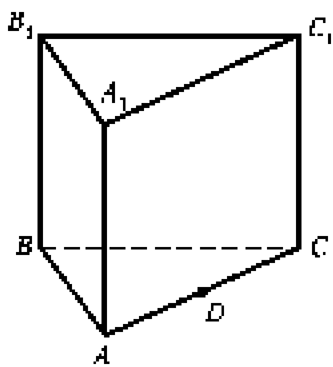
1. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания. Опустите перпендикуляр из точки B_2 — середины ребра BB_1 — на прямую A_1C.



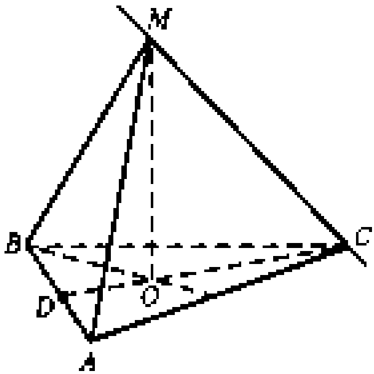
2. В основании правильной пирамиды $MABC$ лежит треугольник со стороной, равной a. Высота пирамиды равна $2a$. Найдите расстояние от точки D — середины ребра AB — до прямой MC.



3. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания. Постройте сечения призмы плоскостью C_1AB и плоскостью B_1BD, точка D которой — это середина ребра AC. Постройте линию пересечения этих плоскостей и, считая $AB = a$, найдите длину той ее части, которая находится внутри призмы.

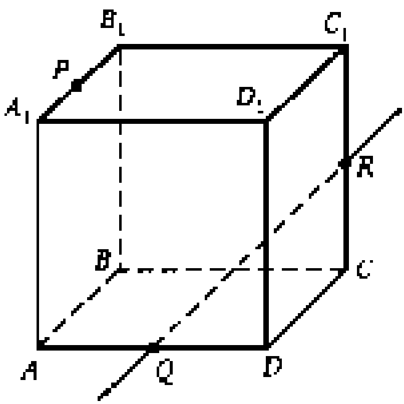


Вариант 2



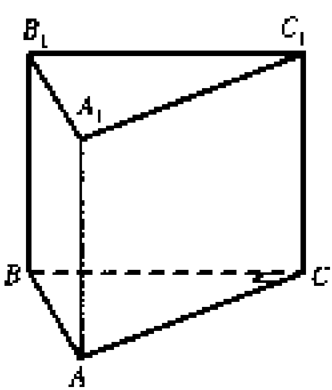
1. Высота правильной пирамиды $MABC$ равна стороне ее основания.

   Опустите перпендикуляр из точки D — середины ребра AB — на прямую MC.



2. На ребрах A_1B_1, AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R — середины этих ребер.

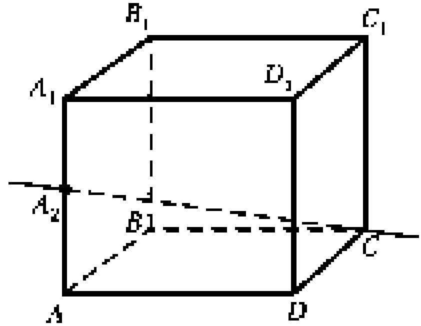
   Считая $AB = a$, найдите расстояние от точки P до прямой QR.



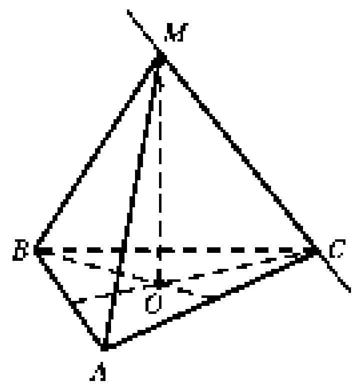
3. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник, у которого $AC = BC$ и $\angle ACB = 90°$, а ее боковая грань ABB_1A_1 — квадрат.

   Постройте сечения призмы плоскостями B_1AC и C_1BA. Постройте линию пересечения этих плоскостей и, считая $AC = a$, найдите длину той ее части, которая находится внутри призмы.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 3 : 2$. Опустите перпендикуляр из точки B_1 на прямую A_2C, точка A_2 которой является серединой ребра AA_1.



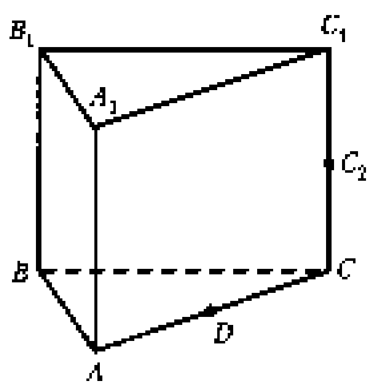
2. В правильном тетраэдре $MABC$ точка O — центр грани ABC. Считая ребро тетраэдра равным a, найдите расстояние от точки O до прямой MC.



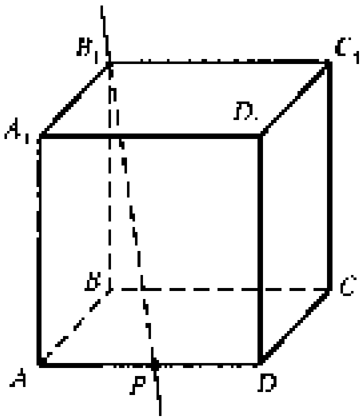
3. На ребрах AC и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки D и C_2 — середины этих ребер.

Постройте сечения призмы плоскостями C_1BD и B_1AC_2 и линию пересечения этих плоскостей.

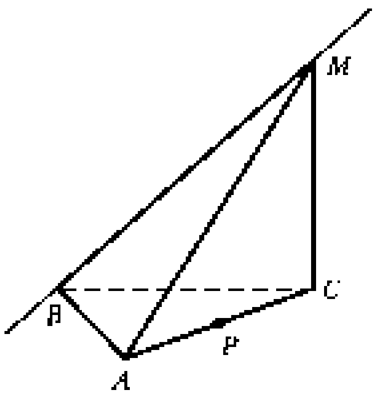
Считая $AA_1 = AB = a$, найдите длину той части линии пересечения, которая заключена внутри призмы.



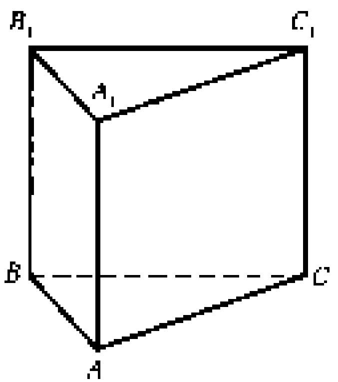
Вариант 4



1. Отношение ребер $AB : AD : AA_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1 : 2 : 2. Опустите перпендикуляр из точки C_1 на прямую B_1P, точка P которой является серединой ребра AD.



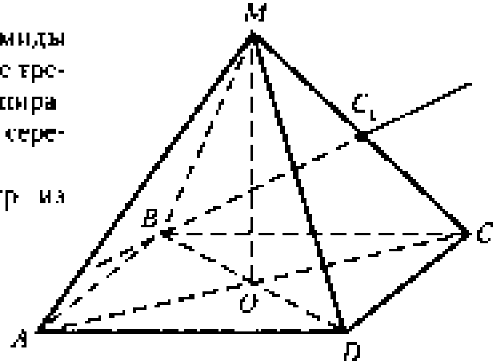
2. В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC, а ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и $MC = AB = a$. Найдите расстояние от точки P — середины ребра AC — до прямой MB.



3. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания. Постройте сечения призмы плоскостями A_1BC и C_1AB, а также линию пересечения этих плоскостей. Считая $AB = a$, найдите длину той ее части, которая заключена внутри призмы.

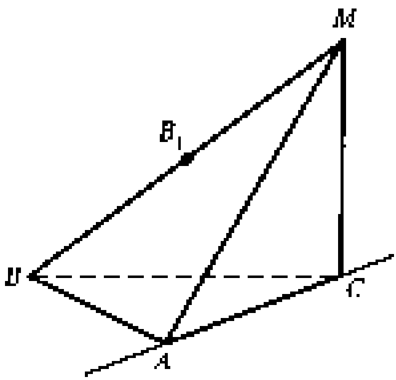
1. Боковые грани пирамиды $MABCD$ — равносторонние треугольники. На ребре MC пирамиды взята точка C_1 — его середина.

   Опустите перпендикуляр из точки D на прямую BC_1.



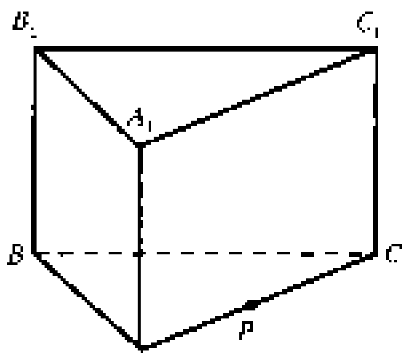
2. В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC, сторона которого равна a. Боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и равно $2a$.

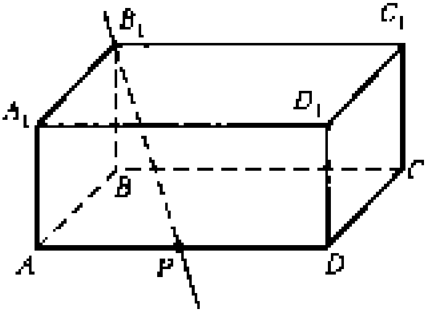
   Найдите расстояние от точки B_1 — середины ребра MB — до прямой AC.



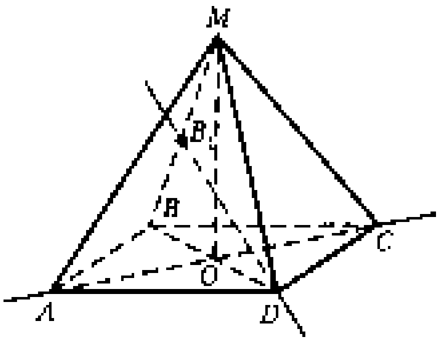
3. Все боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты.

   Постройте сечения призмы плоскостью C_1AB и плоскостью B_1BP, точка P которой — это середина ребра AC. Постройте линию пересечения этих плоскостей, и, считая $AB = a$, найдите расстояние до нее от точки C_1.

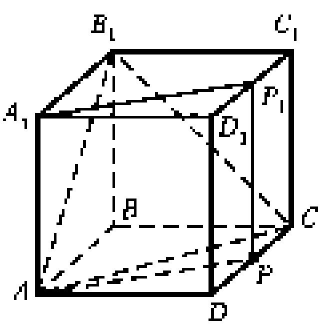




1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB : AD : AA_1 = 2 : 4 : 1$ проведена прямая B_1P, точка P которой — середина ребра AD. Опустите перпендикуляр из точки D_1 на прямую B_1P.



2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб, сторона которого равна a. Точка O, в которой пересекаются диагонали ромба, является основанием высоты MO пирамиды и $MO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Известно также, что треугольник MDB является равносторонним.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через прямую DB_1, точка B_1 которой — это середина ребра MB, параллельно прямой AC. Найдите диагонали четырехугольника, получающегося в сечении пирамиды плоскостью α.



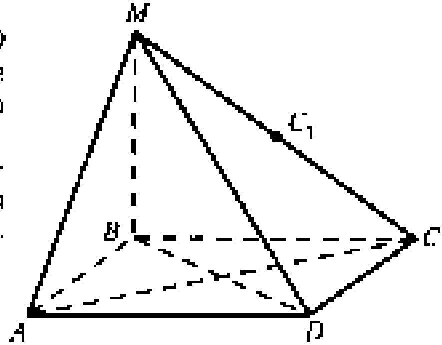
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены две секущие плоскости: B_1AC и APP_1A_1, где точка P — середина ребра CD.
Постройте линию пересечения этих плоскостей и, считая ребро куба равным a, найдите расстояние до нее от точки C.

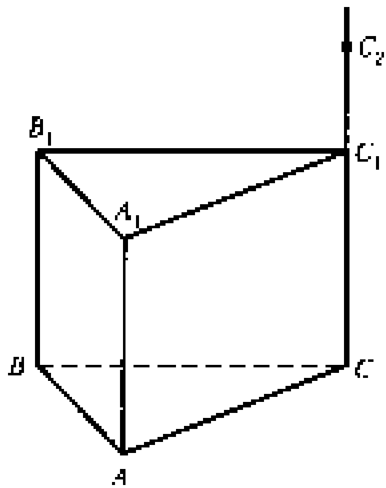
Контрольная работа 5

Вычисление расстояния от данной точки до данной плоскости

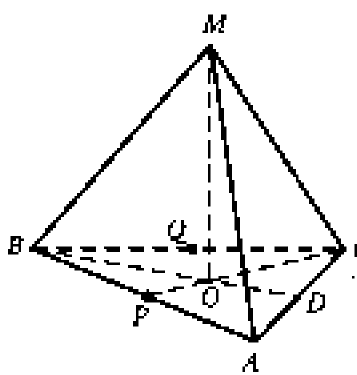
Вариант 1

1. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания.
Считая $AB = a$, найдите расстояние от точки C_1 — середины ребра MC — до плоскости MDB.



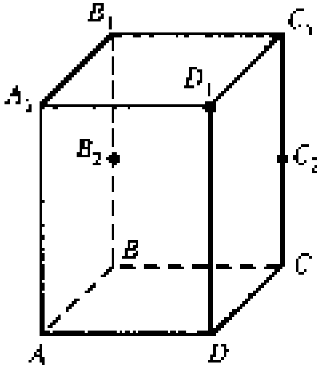


2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания. На продолжении ребра CC_1 взята точка C_2 такая, что $CC_2 : CC_1 = 3 : 2$.
Считая $AB = a$, найдите расстояние от точки C до плоскости C_2AB.

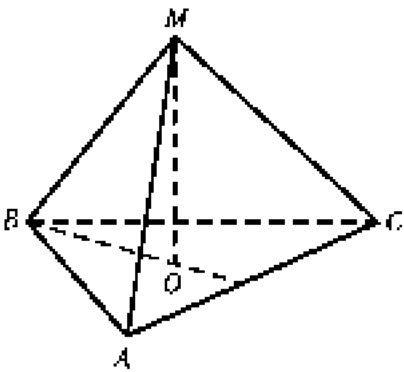


3. На ребрах AB и BC правильного тетраэдра $MABC$ взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер.
Постройте сечение тетраэдра плоскостью α, проходящей через точки M, P и Q. Считая ребро тетраэдра равным a, найдите расстояние от точки C до плоскости α.

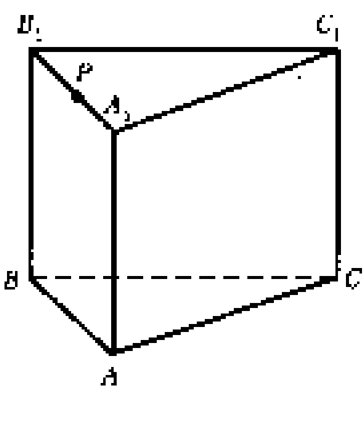
Вариант 2



1. Боковое ребро правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в два раза больше стороны основания.
Считая $AB = a$, найдите расстояние от вершины D_1 до плоскости α, проходящей через точки A, D и точку B_2 — середину ребра BB_1.

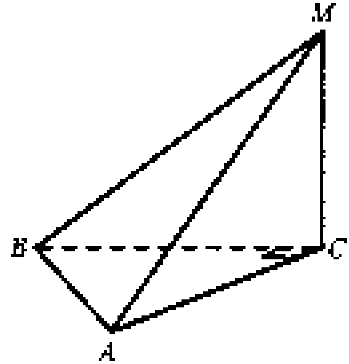


2. Высота MO правильной пирамиды $MABC$ равна стороне ее основания.
Считая $AB = a$, найдите расстояние от точки A до плоскости MBC.

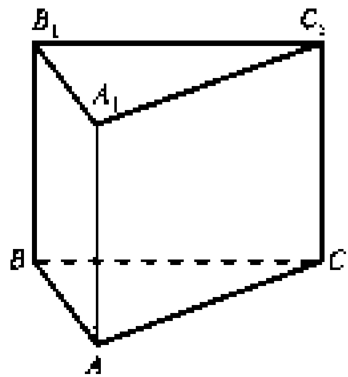


3. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания. Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через прямую AC и точку P — середину ребра A_1B_1.
Считая $AB = a$, найдите расстояние от точки C_1 до плоскости α.

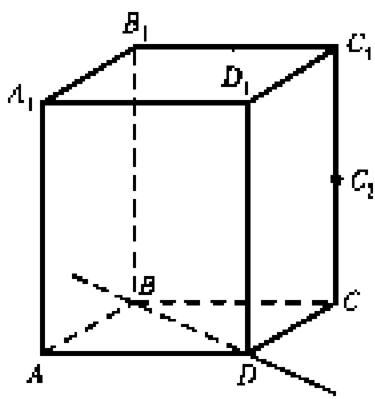
1. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник, у которого $AC = BC$, а ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и $MC = BC$.
Считая $BC = a$, найдите расстояние от точки C до плоскости MAB.



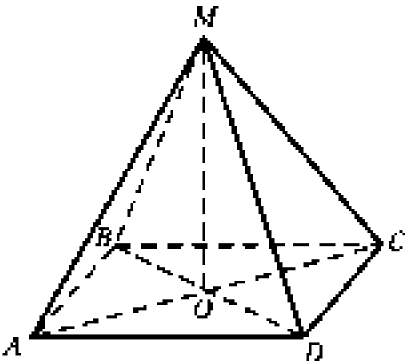
2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания.
Считая $AB = a$, найдите расстояние от точки C до плоскости C_1AB.



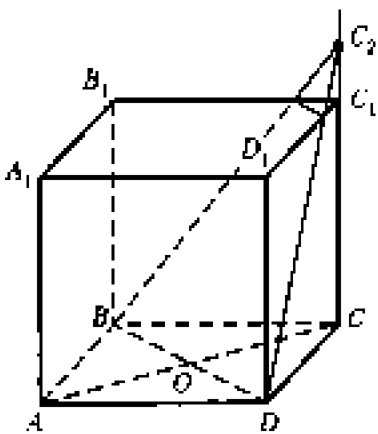
3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 1 : 2$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью α, проходящей через прямую BD и точку C_2 — середину ребра CC_1. Считая $AB = a$, найдите расстояние до плоскости α от точки B_1.



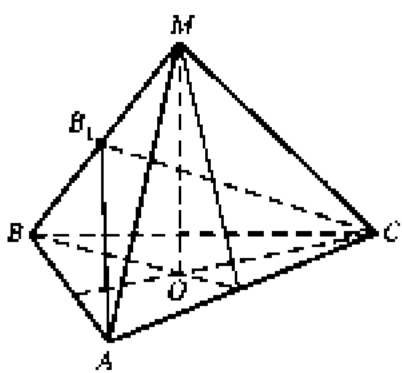
Вариант 4



1. Боковые грани пирамиды $MABCD$ равносторонние треугольники.
Считая $AB = a$, найдите высоту пирамиды.

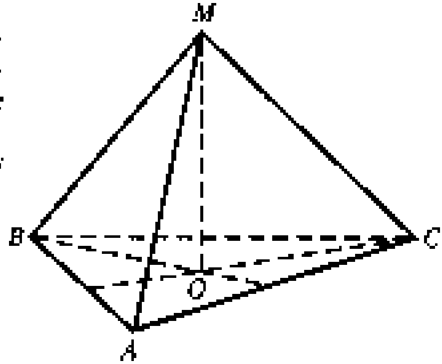


2. На продолжении ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка C_2 такая, что $CC_2 : CC_1 = 5 : 4$. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от точки C до плоскости C_2BD.

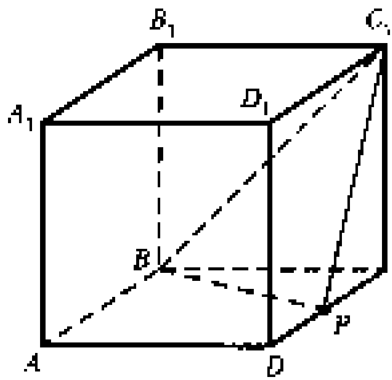


3. На ребре MB правильного тетраэдра $MABC$ взята точка B_1 — середина этого ребра.
Считая ребро тетраэдра равным a, найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C.

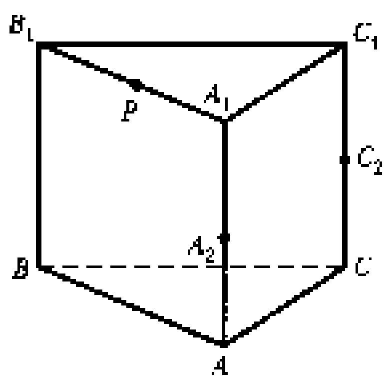
1. Боковые грани правильной пирамиды $MABC$ — равные равнобедренные прямоугольные треугольники.
Считая $AB = a$, найдите высоту пирамиды.



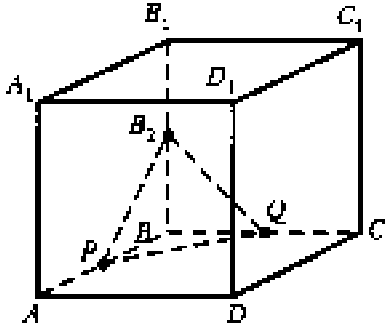
2. На ребре CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P — середина этого ребра.
Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от точки C до плоскости C_1BP.



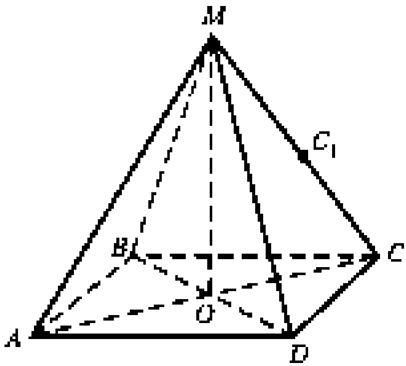
3. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания. Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки A_2, C_2 и P — соответственно середины ребер AA_1, CC_1 и A_1B_1.
Считая $AB = a$, найдите расстояние от точки C до плоскости α.



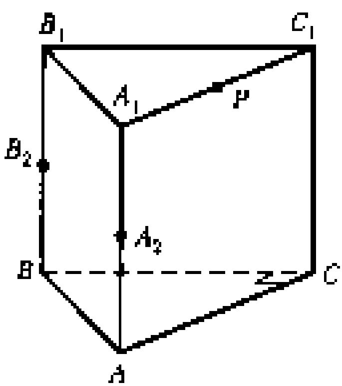
Вариант 6



1. На ребрах AB, BC и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и B_2.
Считая $AB = a$, найдите расстояние от точки D_1 до плоскости B_2PQ.



2. Боковые грани пирамиды $MABCD$ — правильные треугольники.
Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через прямую AD и точку C_1 — середину ребра MC.
Считая $AB = a$, найдите расстояние от точки M до плоскости α.



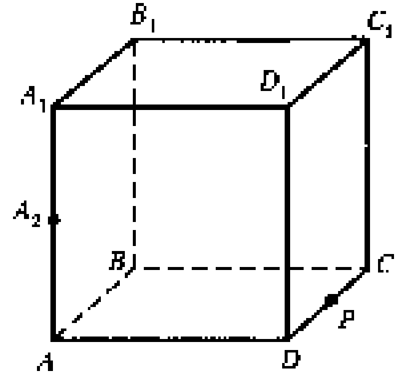
3. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. Боковое ребро призмы равно стороне BC.
Постройте сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки A_2, B_2 и P — середины соответственно ребер AA_1, BB_1 и A_1C_1.
Считая $BC = a$, найдите расстояние от точки C до плоскости α.

Контрольная работа 6

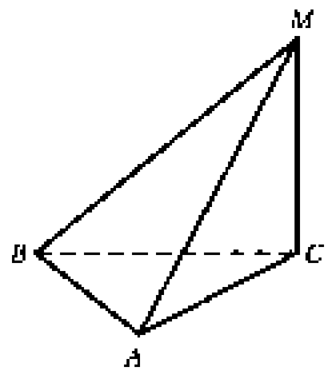
Вычисление угла между плоскостями.
Вычисление двугранного угла

Вариант 1

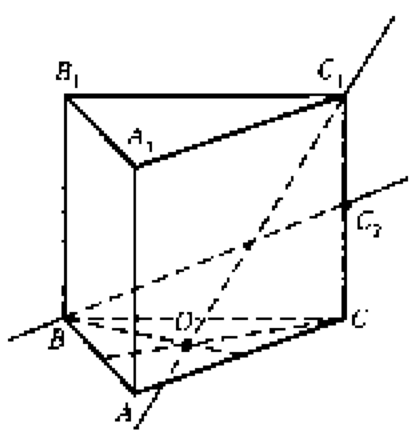
1. На ребрах AA_1 и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки A_2 и P — середины этих ребер.
Постройте сечения куба плоскостями $A_2B_1C_1$ и A_1D_1P и найдите угол между этими плоскостями.



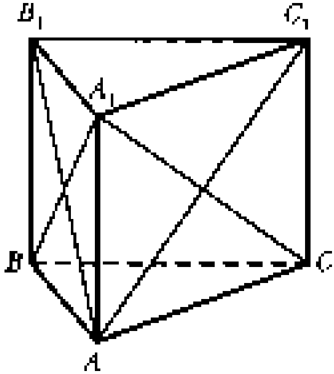
2. Ребра AC, BC и MC тетраэдра $MABC$ равны и попарно перпендикулярны.
Найдите двугранный угол при ребре MB.



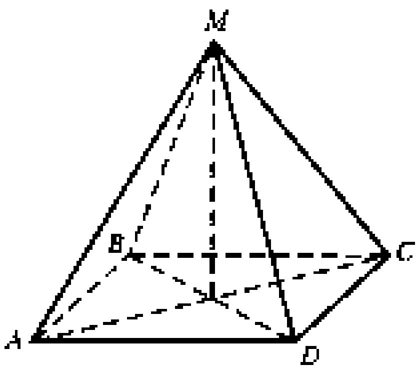
3. Все боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. На ее ребре CC_1 взята точка C_2 — середина этого ребра, а в основании ABC взята точка O — центр этой грани.
Найдите угол между скрещивающимися прямыми BC_2 и C_1O.



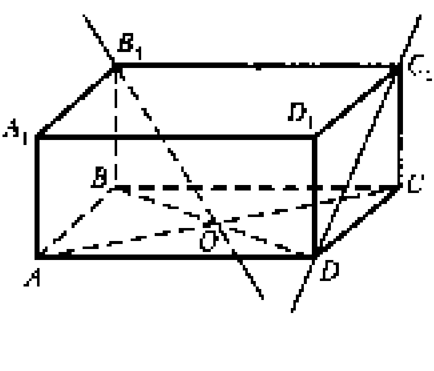
Вариант 2



1. Все ребра прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны.
Найдите угол между секущими плоскостями A_1BC и AB_1C_1 этой призмы.

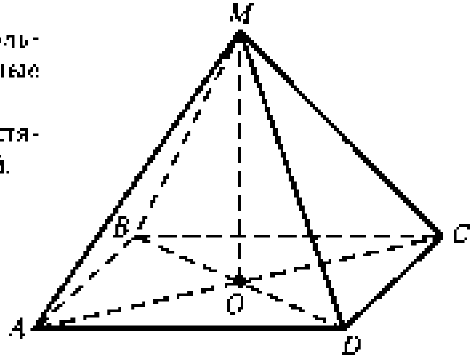


2. Высота правильной четырехугольной пирамиды в два раза больше стороны ее основания.
Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

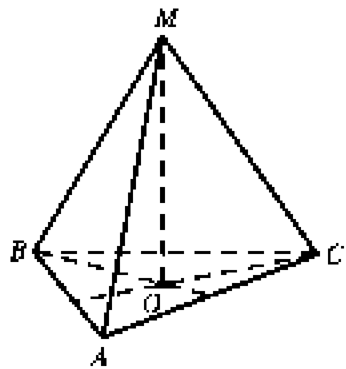


3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 2 : 4 : 1$. Найдите угол между скрещивающимися прямыми C_1D и B_1O, точка O которой — это точка пересечения диагоналей AC и BD основания параллелепипеда.

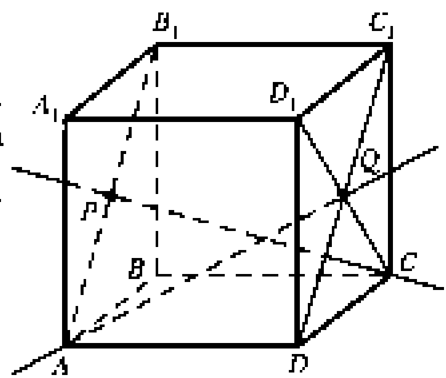
1. Боковые грани четырехугольной пирамиды — правильные треугольники.
Найдите угол между плоскостями противоположных граней.

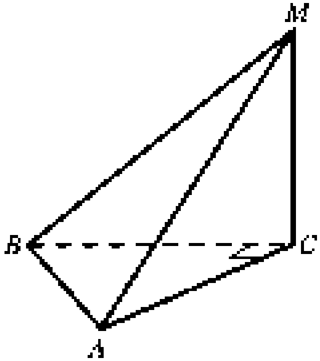


2. Высота правильной треугольной пирамиды в два раза больше стороны основания.
Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

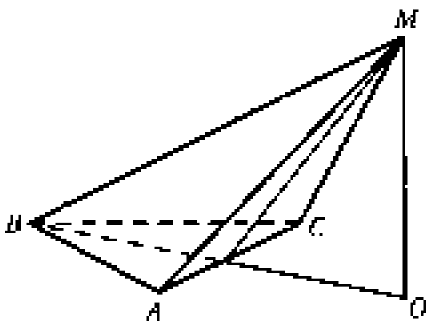


3. Точки P и Q — центры соответственно граней ABB_1A_1 и CDD_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Найдите угол между скрещивающимися прямыми CP и AQ.

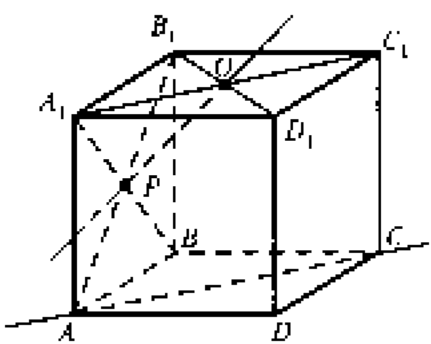




1. В основании пирамиды $MABC$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C, а ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и равно стороне BC. Найдите угол между плоскостями MAB и MAC.



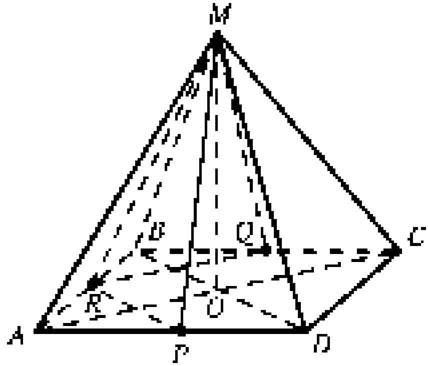
2. В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник, а ее высота проектируется в точку O, симметричную вершине B относительно прямой AC. Найдите двугранный угол при ребре AC пирамиды.



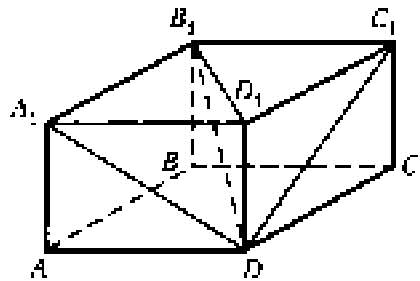
3. Точки O и P — центры соответственно граней $A_1B_1C_1D_1$ и ABB_1A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между скрещивающимися прямыми OP и AC.

Вариант 5

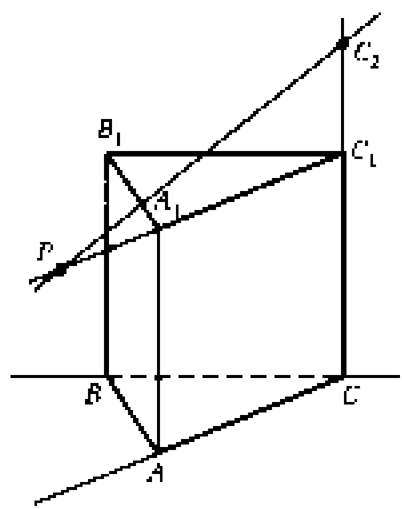
1. Боковые грани пирамиды $MABCD$ — правильные треугольники. На ребрах AD, AB и BC взяты соответственно точки P, R и Q — середины этих ребер. Найдите угол между плоскостями MPR и MQR.



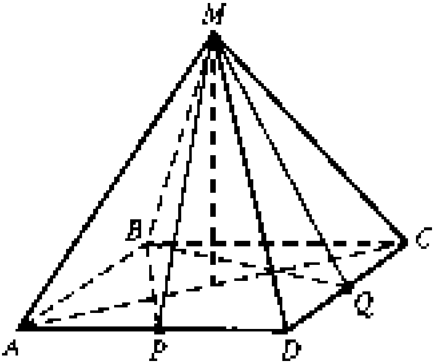
2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб, острый угол которого равен $60°$. Боковое ребро призмы равно стороне ромба.
Найдите двугранный угол $A_1B_1DC_1$.



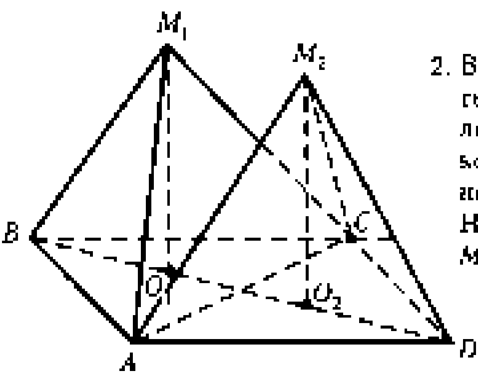
3. Все боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. На продолжении ее ребра CC_1 взята точка C_2 такая, что $CC_2 : CC_1 = 3 : 2$, а на продолжении ребра C_1A_1 точка P такая, что $C_1P : C_1A_1 = 3 : 2$.
Найдите угол между скрещивающимися прямыми C_2P и BC.



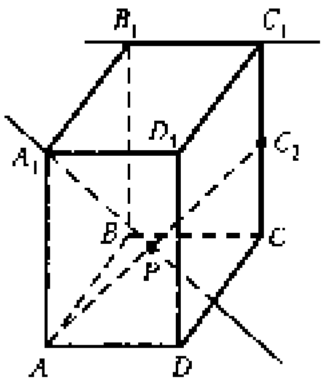
Вариант 6



1. Боковые грани пирамиды $MABCD$ правильные треугольники. На ребрах AD и CD взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер.
Найдите угол между плоскостями MBP и MBQ.



2. Вершины M_1 и M_2 правильных тетраэдров M_1ABC и M_2ADC лежат по одну сторону от плоскости, в которой лежат их основания.
Найдите двугранный угол M_1ACM_2.

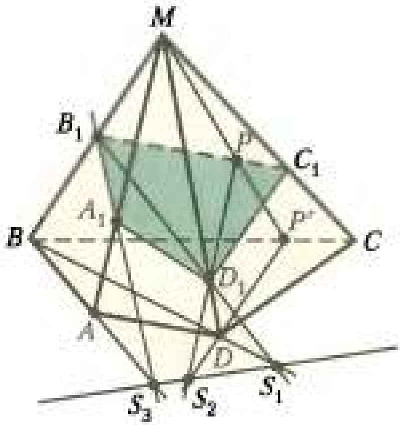


3. Отношение ребер $AB : AD : AA_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $2 : 1 : 2$.
Постройте сечение параллелепипеда плоскостью α, проходящей через прямую AD и точку C_2 — середину ребра CC_1.
Найдите точку P — центр фигуры, получающейся в сечении, и угол между скрещивающимися прямыми A_1P и B_1C_1.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 0

1. На ребрах MB и MD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки B_1 и D_1, а в грани MBC взята точка P.
   Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точки B_1, D_1 и P.



Решение

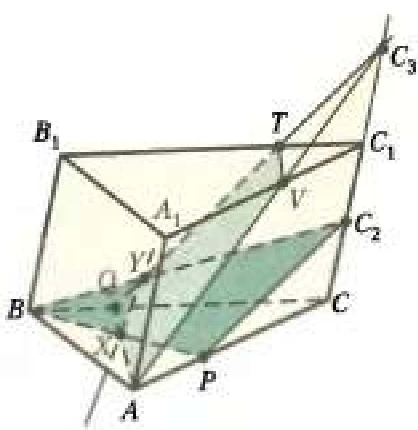
1) Построим основной след плоскости α. Для этого найдем сначала точки $S_1 = B_1D_1 \cap BD$ и $S_2 = PD_1 \cap P'D$. Прямая S_1S_2 — основной след плоскости α.

2) Найдем точку пересечения плоскости α, например, с прямой MA. Для этого построим точку $S_3 = AB \cap S_1S_2$. Тогда прямая S_3B_1 — это линия пересечения плоскости α с плоскостью MAB, и $S_3B_1 \cap MA = A_1$.

3) Таким образом, получаем следы плоскости α на гранях пирамиды: отрезок A_1B_1 — след плоскости α на грани MAB, $B_1P \cap MC = C_1$ и отрезок B_1C_1 — след плоскости α на грани MBC, отрезки C_1D_1 и A_1D_1 — следы плоскости α соответственно на гранях MCD и MAD пирамиды $MABCD$.

Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — искомое сечение.

2. На ребрах AC, BC и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки P, Q и C_2, а на продолжении ребра CC_1 взята точка C_3.
   Постройте линию пересечения плоскости α, проходящей через точки B, P и C_2, с плоскостью β, проходящей через точки A, Q и C_3.



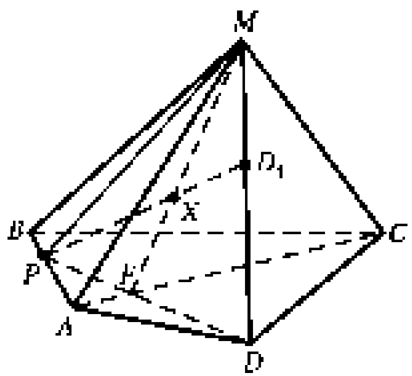
Решение

1) Построим сечения призмы плоскостями α и β. Получаем треугольник BPC_1 и четырехугольник $AQTV$.

2) Построим линию пересечения плоскостей α и β. Заметим, что с плоскостью ABC плоскости α и β пересекаются по прямым BP и AQ. Значит, точка $X = BP \cap AQ$ принадлежит линии пересечения плоскостей α и β.

Аналогично заметим, что точка $Y = BC_1 \cap C_1Q$ принадлежит линии пересечения плоскостей α и β.

Итак, прямая XY — искомая линия пересечения плоскостей α и β.



3. На ребрах AB и MD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки P и D_1.

Постройте точку пересечения прямой PD_1 с плоскостью α, проходящей через точки M, A и C.

Решение

1) Построим сечение пирамиды какой-нибудь вспомогательной секущей плоскостью β, проходящей через прямую D_1P. Например плоскостью MDP. В сечении пирамиды плоскостью β получаем треугольник MDP.

2) Построим линию пересечения плоскостей α и β. Она проходит через общие точки плоскостей α и β, т.е. через точку M и точку $F = AC \cap DP$.

3) Прямые MF и D_1F пересекаются, так как обе они лежат в плоскости β.

Таким образом, точка $X = D_1P \cap MF$ — искомая точка.

ОТВЕТЫ

Проверочная работа 4

В1. 1. $PQ = \frac{a\sqrt{26}}{2}$

В2. 1. $B_1P = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

В3. 1. $BD = a\sqrt{3}$, $C_1B = C_1D = \frac{3a}{2}$

В4. 1. $CP = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, $D_1P = \frac{a\sqrt{5}}{2}$,

$D_1C = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

В5. 1. $C_1P = \frac{a\sqrt{41}}{2}$.

В6. 1. $C_1P = \frac{a\sqrt{26}}{4}$.

Проверочная работа 6

В1. 1. $\arccos\frac{1}{6}$ 2. $\arcsin\frac{2}{5}$

В2. 1. $\arccos\frac{3\sqrt{10}}{20}$ 2. $\arcsin\frac{1}{3}$

В3. 1. $\arccos\frac{\sqrt{15}}{6}$ 2. $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{10}$

В4. 1. $\arccos\frac{11\sqrt{182}}{182}$. 2. $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$.

В5. 1. $45°$ 2. $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$

В6. 1. $\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 2. $\arcsin\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

Контрольная работа 4

В1. 2. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. 3. a.

В2. 2. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. 3. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$

В3. 2. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. 3. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

В4. 2. $\frac{a\sqrt{30}}{8}$. 3. a.

В5. 2. $\frac{a\sqrt{19}}{4}$ 3. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

В6. 2. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ и $\frac{2a\sqrt{34}}{9}$ 3. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Контрольная работа 5

В1. 1. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. 2. $\frac{3a}{4}$. 3. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

В2. 1. $a\sqrt{2}$ 2. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. 3. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$

В3. 1. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ 2. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ 3. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

В4. 1. $\frac{a\sqrt{2}}{7}$ 2. $\frac{5a\sqrt{66}}{66}$ 3. $\frac{a}{2}$.

В5. 1. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ 2. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. 3. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

В6. 1. $\frac{5a\sqrt{3}}{66}$. 2. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$ 3. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Контрольная работа 6

В1. 1. $90°$. 2. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 3. $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$

В2. 1. $\arccos\frac{1}{7}$. 2. $\arccos\left(-\frac{1}{17}\right)$.

3. $\arcsin\frac{\sqrt{30}}{10}$.

В3. 1. $\arccos\frac{1}{3}$ 2. $\arccos\frac{23}{48}$ 3. $\arccos\frac{2}{3}$.

В4. 1. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

3. $60°$.

В5. 1. $\arccos\frac{1}{3}$. 2. $\arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$

3. $\arccos\frac{3\sqrt{10}}{20}$

В6. 1. $\arccos\frac{7}{11}$ 2. $\arccos\frac{7}{9}$. 3. $\arccos\frac{6}{7}$

УКАЗАНИЯ

Проверочная работа 1

В5. 1. $P' = MP \cap AD$, $Q' = MQ \cap CD$. $PQ \cap P'Q' = X$ — искомая точка.

2. Точка D — это общая точка плоскостей A_1DC_1 и ABC. Точка $X = A_1C_1 \cap AC$ — еще одна общая точка этих плоскостей.

В6. 1. $P' = MP \cap CD$, $Q' = MQ \cap AD$, $PQ \cap P'Q' = X$ — искомая точка.

2. Точка C — это общая точка плоскостей B_1CP и ABC. Точка $X = B_1P \cap BP'$ — еще одна общая точка этих плоскостей.

Проверочная работа 4

В1. 2. Если $PH \perp B_1D$, то в треугольнике PB_1D выполняется равенство

$$PB_1^2 - B_1H^2 = PD^2 - DH^2,$$

или

$$a^2 - \left(a\sqrt{6} - DH\right)^2 = 3a^2 - DH^2,$$

откуда $DH = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Тогда $DH : DB_1 = 2 : 3$.

В2. 2. Если $B_1H \perp CP$, то $CH : CP = 3 : 4$.

В3. 2. Если $B_1H \perp C_1P$, то $C_1H : C_1P = 11 : 19$.

В4. 2. Если $B_1H \perp C_1P$, то $PH : PC_1 = 16 : 17$.

В5. 2. Если $C_1H \perp PQ$, то $PH : PQ = 11 : 10$.

В6. 2. Если $CH \perp B_1P$, то $B_1H : B_1P = 7 : 6$.

Проверочная работа 5

В6. 2. Проекцией точки B на плоскость MDB является точка D. Тогда проекцией луча BO_1 на эту плоскость является луч DO_1.

Контрольная работа 1

В1. 3. Через прямую AC_1 и точку M проведем плоскость. Эта плоскость имеет с плоскостью MPQ две общие точки: M и $K = AC_1 \cap PQ$. Искомая точка — это точка $X = AC_1 \cap MK$.

В5. 3. Через прямую A_1D и точку M проведем плоскость. Эта плоскость имеет с плоскостью D_1EP две общие точки: D_1 и $L = AD \cap EP$. Искомой является точка $X = A_1D \cap ML$.

В6. 3. Построим точки $T' = MT \cap AB$ и $V' = MV \cap AC$.
Построим сечение пирамиды плоскостью C_1PQ. (Для этого найдем точки $S = C_1Q \cap MA$ и $B_1 = SP \cap MB$.) Прямые MV и C_1Q лежат в одной плоскости. Найдем точку $K = MV \cap C_1Q$, и аналогично найдем точку $N = MT \cap DP$. Прямая KN – это линия пересечения плоскостей MTV и C_1PQ, а точка $X = KN \cap T'V'$ – это искомая точка.

Контрольная работа 2

В5. 1. Через прямую A_2C_2 проведем какую-нибудь плоскость. Например плоскость A_2AC. Точки $X = A_2C_2 \cap A_1C_1$ и $Y = A_2C_2 \cap AC$ – это искомые точки.

Контрольная работа 3

В5. 2. Возьмем какую-нибудь точку, например на ребре A_1D_1, и построим вспомогательное сечение призмы плоскостью, проходящей через эту точку параллельно плоскости BPQ.

3. В плоскости ABC через точку E проведем прямую $m \parallel AD$. Пересекающиеся прямые C_1E и m определяют плоскость искомого сечения. Находим точку $S_1 = m \cap CD$, затем проводим S_1C и т.д.

В6. 2. Сначала построим вспомогательное сечение призмы, например сечение ее плоскостью, проходящей через какую-нибудь точку, взятую на ребре A_1B_1 параллельно CPQ.

3. В плоскости MAC проведем через точку C_1 прямую $m \parallel MA$. Пересекающиеся прямые DC_1 и m определяют плоскость искомого сечения.

Контрольная работа 4

В1. 2. Можно выразить площадь треугольника MCD двумя способами:

$S = \frac{1}{2} CD \cdot MO$ и $S = \frac{1}{2} MC \cdot DH$, где DH – искомое расстояние.

В3. 3. В треугольнике AC_1C отрезки AC_2 и C_1P – медианы. Если $C_1P \cap AC_2 = K$, то $C_2K : C_2A = 1 : 3$. Аналогично в треугольнике B_1C_1C отрезки B_1C_2 и BC_1 – медианы, т.е. если $B_1C_2 \cap BC_1 = F$, то $C_2F : C_2B = 1 : 3$. Таким образом, $FK : AB = 1 : 3$.

В6. 1. Если $D_1H : B_1P$, то $B_1H : B_1P = 4 : 3$.

Контрольная работа 5

В1. 3. Воспользуйтесь тем, что так как $AC \parallel PQ$, то прямая AC параллельна плоскости α.

В2. 3. Так как $A_1C_1 \parallel AC$, то прямая A_1C_1 параллельна плоскости α. Тогда расстояние от любой точки прямой A_1C_1 до плоскости α одно и то же. Найдем расстояние до плоскости α от точки T — середины ребра A_1C_1.

В3. 1. Точка C одинаково удалена от вершин M, A и B. Значит, если прямая CO перпендикулярна плоскости MAB, то точка O - центр грани MAB.

В4. 3. Построим $MF \perp AC$ и соединим точку F с точкой B_1. Докажем, что $B_1F \perp AC$. Если, далее, $BH \perp B_1F$, то прямая BH перпендикулярна плоскости AB_1C. Таким образом, задача сводится к вычислению расстояния от точки B до прямой B_1F.

В5. 3. Воспользуйтесь тем, что так как $AC \parallel A_2C_2$, то расстояние от любой точки прямой A_2C_2 до плоскости α одно и то же.

В6. 1. Докажем, что наклонные D_1P, D_1Q и D_1B равны. Тогда точка H — основание перпендикуляра D_1H на плоскость PQB_1 — является центром равностороннего треугольника.

Контрольная работа 6

В5. 3. Пусть точка P_1 — середина ребра CC_1. В плоскости A_1AC через точку P_1 проведите прямую $m_1 \parallel PQ$, а в плоскости B_1BC через точку P_1 проведите прямую $m_2 \parallel BC$. Угол между прямыми m_1 и m_2 равен искомому углу.

В6. 3. В треугольнике AA_1C_2 отрезок A_1P является медианой. Найти A_1P можно, если воспользоваться теоремой о сумме квадратов диагоналей параллелограмма:

$$(2A_1P)^2 + AC_2^2 = 2\left(AA_1^2 + A_1C_2^2\right).$$

СОДЕРЖАНИЕ