

Задача С3 на ЕГЭ по математике

В данной статье мы разберём несколько задач С3, которые предлагались на ЕГЭ по математике в 2010–2013 годах. При этом мы активно используем [метод рационализации](#), подробно изложенный в предыдущей статье.

Разумеется, рассмотрены не все задачи, предлагавшиеся на ЕГЭ. Задачи отбирались с целью проиллюстрировать основные идеи, встречавшиеся в заданиях С3. Достаточно полную подборку задач С3 из вариантов ЕГЭ и работ МИОО содержит «[Задачник С3](#)».

Задача С3. (ЕГЭ, 2013) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10, \\ x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2 + x - 7}{x-7} \leq 1. \end{cases}$$

Решение. Начнём со второго неравенства (вдруг его решения окажутся, например, $x > 10$, — тогда ясно, что система не имеет решений, и можно не решать первое неравенство). Преобразуем второе неравенство:

$$\begin{aligned} x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} + 1 &\leq 1 \Leftrightarrow x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^4 + x^3 - 6x^2}{x-7} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7} \leq 0. \end{aligned}$$

Полученное неравенство легко решается методом интервалов:

$$\boxed{x \leq -3, \quad x = 0, \quad 2 \leq x < 7.} \quad (1)$$

Теперь займёмся первым неравенством:

$$\begin{aligned} \log_{5-x} \frac{x+4}{(x-5)^{10}} + 10 &\geq 0 \Leftrightarrow \log_{5-x} \frac{x+4}{(5-x)^{10}} + \log_{5-x} (5-x)^{10} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{5-x} (x+4) &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+4)}{\lg(5-x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+4) - \lg 1}{\lg(5-x) - \lg 1} \geq 0. \end{aligned}$$

Функция $y = \lg x$ монотонно возрастает; следовательно, последнее неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{(x+4) - 1}{(5-x) - 1} \geq 0, \\ x+4 > 0, \\ 5-x > 0. \end{cases}$$

Данная система легко решается с помощью метода интервалов:

$$\boxed{-3 \leq x < 4.} \quad (2)$$

Для получения ответа нужно пересечь множества решений каждого из неравенств — то есть, множества в «рамочках» (1) и (2).

Ответ: $\{-3\} \cup \{0\} \cup [2; 4)$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2012) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{160 - 4^x}{32 - 2^x} \geq 5, \\ \log_{0,25x^2} \left(\frac{6-x}{4} \right) \leq 1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое неравенство:

$$\frac{4^x - 160}{2^x - 32} - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4^x - 5 \cdot 2^x}{2^x - 32} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^{2x} - 2^{x+\log_2 5}}{2^x - 2^5} \geq 0.$$

Функция $y = 2^x$ определена и монотонно возрастает на множестве $\mathbb{R}$. Поэтому последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2x - (x + \log_2 5)}{x - 5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x - \log_2 5}{x - 5} \geq 0.$$

Легко решаем его методом интервалов и получаем тем самым решения первого неравенства:

$$\boxed{x \leq \log_2 5, \quad x > 5.} \quad (3)$$

(очевидно, что $\log_2 5 < 5$).

Во втором неравенстве перейдем к основанию 10:

$$\frac{\lg \frac{6-x}{4}}{\lg \frac{x^2}{4}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg \frac{6-x}{4} - \lg \frac{x^2}{4}}{\lg \frac{x^2}{4}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\lg \frac{6-x}{4} - \lg \frac{x^2}{4}}{\lg \frac{x^2}{4} - \lg 1} \leq 0.$$

Функция $y = \lg x$ определена и монотонно возрастает на множестве $(0; +\infty)$, поэтому последнее неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{\frac{6-x}{4} - \frac{x^2}{4}}{\frac{x^2}{4} - 1} \leq 0, \\ \frac{6-x}{4} > 0, \\ \frac{x^2}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} \geq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Первое неравенство системы (4) записывается в виде:

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

и решается методом интервалов:

$$x \leq -3, \quad -2 < x < 2, \quad x > 2.$$

Решения системы (4), то есть решения второго неравенства исходной системы, имеют вид:

$$\boxed{x \leq -3, \quad -2 < x < 0, \quad 0 < x < 2, \quad 2 < x < 6.} \quad (5)$$

Для получения ответа нужно пересечь множества решений обоих неравенств исходной системы, то есть множества «в рамочках» (3) и (5), и учесть оценку $2 < \log_2 5$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \log_2 5] \cup (5; 6)$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2012) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \leq 87, \\ \log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3(27x) + 9 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. В первом неравенстве делаем замену $t = 3^x$:

$$18t + \frac{27}{t} \leq 87.$$

Заметим, что $t > 0$ при всех x . Поэтому, умножая данное неравенство на t (а заодно и деля его на 3), получим равносильное неравенство:

$$6t^2 - 29t + 9 \leq 0.$$

Решения данного неравенства: $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{9}{2}$. Обратная замена: $\frac{1}{3} \leq 3^x \leq \frac{9}{2}$. Решая это двойное неравенство, получаем решения первого неравенства исходной системы:

$$\boxed{-1 \leq x \leq \log_3 \frac{9}{2}}. \quad (6)$$

Во втором неравенстве нашей системы переходим к основанию 3:

$$\frac{\log_3 \frac{1}{27}}{\log_3(3x)} \cdot \log_3(27x) + 9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3}{1 + \log_3 x} \cdot (3 + \log_3 x) + 9 \geq 0.$$

Сделав замену $t = \log_3 x$ и выполнив простые преобразования, получим неравенство

$$\frac{6t}{1+t} \geq 0.$$

Его решения: $t < -1$ или $t \geq 0$. Обратная замена: $\log_3 x < -1$ или $\log_3 x \geq 0$. Отсюда получаем решения второго неравенства исходной системы:

$$\boxed{0 < x < \frac{1}{3}, \quad x \geq 1}. \quad (7)$$

Решение нашей системы получается пересечением «рамочек» — множеств (6) и (7) решений первого и второго неравенств (при этом ясно, что $\log_3 \frac{9}{2} > 1$).

Ответ: $(0; \frac{1}{3}) \cup [1; \log_3 \frac{9}{2}]$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2012) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^{4x} - 4^{x+3} \leq 65, \\ \log_{x+5} \left(\frac{3-x}{x} \right)^4 + \log_{x+5} \frac{x}{x-3} \leq 3. \end{cases}$$

Решение. В первом неравенстве делаем замену $t = 4^x$ и приходим к квадратному неравенству относительно t :

$$t^2 - 64t - 65 \leq 0.$$

Его решения: $-1 \leq t \leq 65$. Обратная замена: $-1 \leq 4^x \leq 65$. Отсюда получаем решения первого неравенства системы:

$$\boxed{x \leq \log_4 65}. \quad (8)$$

Решения второго неравенства системы удовлетворяют условию

$$\frac{x}{x-3} > 0,$$

или, что то же самое,

$$\frac{x-3}{x} > 0.$$

Поэтому первое слагаемое левой части преобразуется следующим образом:

$$\log_{x+5} \left(\frac{3-x}{x} \right)^4 = 4 \log_{x+5} \left| \frac{3-x}{x} \right| = 4 \log_{x+5} \frac{x-3}{x}.$$

Таким образом, имеем цепочку равносильных преобразований второго неравенства:

$$\begin{aligned} 4 \log_{x+5} \frac{x-3}{x} + \log_{x+5} \frac{x}{x-3} &\leq 3 \Leftrightarrow 4 \log_{x+5} \frac{x-3}{x} + \log_{x+5} \left(\frac{x-3}{x} \right)^{-1} \leq 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 \log_{x+5} \frac{x-3}{x} - \log_{x+5} \frac{x-3}{x} &\leq 3 \Leftrightarrow \log_{x+5} \frac{x-3}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\lg \frac{x-3}{x}}{\lg(x+5)} &\leq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg \frac{x-3}{x} - \lg(x+5)}{\lg(x+5) - \lg 1} \leq 0. \end{aligned}$$

Ввиду монотонного возрастания функции $y = \lg x$ на множестве $(0; +\infty)$ последнее неравенство цепочки равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{\frac{x-3}{x} - (x+5)}{(x+5) - 1} \leq 0, \\ \frac{x-3}{x} > 0, \\ x+5 > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Первое неравенство системы (9) записываем в виде

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x(x+4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+3)}{x(x+4)} \geq 0$$

и решаем методом интервалов:

$$x < -4, \quad -3 \leq x \leq -1, \quad x > 0. \quad (10)$$

Пересечение множеств решений второго и третьего неравенств системы (9):

$$-5 < x < 0, \quad x > 3. \quad (11)$$

Множество решений системы (9) является пересечением множеств (10) и (11):

$$\boxed{-5 < x < -4, \quad -3 \leq x \leq -1, \quad x > 3.} \quad (12)$$

Это и есть множество решений второго неравенства исходной системы. Множество решений нашей системы получается пересечением множеств (8) и (12) с учётом оценки $3 < \log_4 65$.

Ответ: $(-5; -4) \cup [-3; -1] \cup (3; \log_4 65]$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2012) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{25 \cdot 0,5^{x-1} - 2^{x-2}}{2^{x+2} - 4^x} \geq 0,5^{x+2}, \\ \log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое неравенство системы:

$$\frac{25 \cdot 2^{1-x} - 2^{x-2}}{2^{x+2} - 4^x} - 2^{-x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{25 \cdot 2^{1-x} - 1}{2^{x+2} - 4^x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^{\log_2 25 + 1 - x} - 2^0}{2^{x+2} - 2^{2x}} \geq 0.$$

Ввиду монотонного возрастания функции $y = 2^x$ на множестве $\mathbb{R}$ последнее неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{\log_2 25 + 1 - x - 0}{x + 2 - 2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x - \log_2 50}{x - 2} \geq 0.$$

Решения полученного неравенства являются решениями первого неравенства системы:

$$\boxed{x < 2, \quad x \geq \log_2 50.} \quad (13)$$

Решения второго неравенства системы удовлетворяют условию $6 - x > 0$; но на множестве $x < 6$ мы имеем:

$$\log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} = \log_{6-x} \frac{x^4}{(x-6)^2} = \log_{6-x} \left(\frac{x^2}{x-6} \right)^2 = 2 \log_{6-x} \left| \frac{x^2}{x-6} \right| = 2 \log_{6-x} \frac{x^2}{6-x}.$$

Поэтому второе неравенство нашей системы равносильно неравенству:

$$\log_{6-x} \frac{x^2}{6-x} \leq 0 \Leftrightarrow \log_{6-x} x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\lg x^2}{\lg(6-x)} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\lg x^2 - \lg(6-x)}{\lg(6-x) - \lg 1} \leq 0.$$

Ввиду монотонного возрастания функции $y = \lg x$ на своей области определения последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{x^2 - (6-x)}{(6-x) - 1} \leq 0, \\ 6-x > 0, \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{5-x} \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Первое неравенство системы (14) переписываем в виде:

$$\frac{(x+3)(x-2)}{x-5} \geq 0$$

и решаем его методом интервалов: $-3 \leq x \leq 2, \quad x > 5$. Таким образом, множество решений системы (14):

$$\boxed{-3 \leq x < 0, \quad 0 < x \leq 2, \quad 5 < x < 6.} \quad (15)$$

Это — множество решений второго неравенства системы.

Множество решений нашей системы получается пересечением множеств (13) и (15) с учётом оценки $5 < \log_2 50 < 6$.

Ответ: $[-3; 0) \cup (0; 2) \cup [\log_2 50; 6)$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2011) Решите неравенство:

$$\frac{2 \log_{x+4} (x^2 - 2x)}{\log_{x+4} x^2} \geq 1.$$

Решение. Все решения данного неравенства удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1, \end{cases}$$

множество решений которой:

$$-4 < x < -3, \quad -3 < x < 0, \quad x > 2. \quad (16)$$

На множестве (16) имеем цепочку равносильных преобразований нашего неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot \frac{\lg(x^2 - 2x)}{\lg(x+4)}}{\frac{\lg x^2}{\lg(x+4)}} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{2 \lg(x^2 - 2x)}{\lg x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2 - 2x)^2}{\lg x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\lg(x^2 - 2x)^2 - \lg x^2}{\lg x^2 - \lg 1} \geq 0. \end{aligned}$$

В силу монотонного возрастания функции $y = \lg x$ эта цепочка продолжается:

$$\frac{(x^2 - 2x)^2 - x^2}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 3x)(x^2 - x)}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x - 3)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \geq 0.$$

Полученное неравенство решаем методом интервалов:

$$x < -1, \quad x = 0, \quad x \geq 3. \quad (17)$$

Решением исходного неравенства служит пересечение множеств (16) и (17).

Ответ: $(-4; -3) \cup (-3; -1) \cup [3; +\infty)$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2011) Решите неравенство:

$$9 \log_7(x^2 + x - 2) \leq 10 + \log_7 \frac{(x - 1)^9}{x + 2}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$9 \log_7(x - 1)(x + 2) \leq 10 + \log_7 \frac{(x - 1)^9}{x + 2}.$$

Все решения данного неравенства удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (x - 1)(x + 2) > 0, \\ \frac{(x - 1)^9}{x + 2} > 0, \end{cases}$$

множество решений которой:

$$x < -2, \quad x > 1. \quad (18)$$

На множестве (18) имеем цепочку равносильных преобразований нашего неравенства:

$$\begin{aligned} 9(\log_7 |x - 1| + \log_7 |x + 2|) &\leq 10 + \log_7 |x - 1|^9 - \log_7 |x + 2| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9 \log_7 |x - 1| + 9 \log_7 |x + 2| \leq 10 + 9 \log_7 |x - 1| - \log_7 |x + 2| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10 \log_7 |x + 2| \leq 10 \Leftrightarrow \log_7 |x + 2| \leq 1 \Leftrightarrow |x + 2| \leq 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -7 \leq x + 2 \leq 7 \Leftrightarrow -9 \leq x \leq 5. \end{aligned}$$

Остаётся лишь взять пересечение полученного множества с множеством (18).

Ответ: $[-9; -2) \cup (1; 5]$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2011) Решите неравенство:

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0.$$

Решение. Все решения данного неравенства удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{x}{3} > 0, \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2) > 0, \end{cases}$$

множество решений которой:

$$0 < x < \frac{3}{2}, \quad x > 2. \quad (19)$$

На множестве (19) имеем цепочку равносильных преобразований нашего неравенства:

$$\frac{\lg \frac{x}{3}}{\lg \sqrt{2x^2-7x+6}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lg \frac{x}{3}}{\lg(2x^2-7x+6)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lg x - \lg 3}{\lg(2x^2-7x+6) - \lg 1} > 0.$$

Вследствие монотонного возрастания функции $y = \lg x$ цепочка продолжается:

$$\frac{x-3}{(2x^2-7x+6)-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2x^2-7x+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)} > 0.$$

Полученное неравенство решаем методом интервалов:

$$1 < x < \frac{5}{2}, \quad x > 3. \quad (20)$$

Решением исходного неравенства служит пересечение множеств (20) и (19).

Ответ: $(1; \frac{3}{2}) \cup (2; \frac{5}{2}) \cup (3; +\infty)$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2010) Решите неравенство:

$$\log_5 \left((3^{-x^2} - 5)(3^{-x^2+16} - 1) \right) + \log_5 \frac{3^{-x^2} - 5}{3^{-x^2+16} - 1} > \log_5 \left(3^{7-x^2} - 1 \right)^2.$$

Решение. Делаем замену $t = 3^{-x^2}$:

$$\log_5(t-5)(3^{16}t-1) + \log_5 \frac{t-5}{3^{16}t-1} > \log_5 (3^7t-1)^2. \quad (21)$$

Заметим теперь, что $0 < t \leq 1$ (ведь t есть тройка в неположительной степени). Отсюда $t-5 < 0$. Поэтому все решения неравенства (21) удовлетворяют условию

$$3^{16}t-1 < 0 \Leftrightarrow t < 3^{-16}.$$

Итак, все решения неравенства (21) принадлежат множеству

$$0 < t < 3^{-16}. \quad (22)$$

На множестве (22) имеем также оценку:

$$3^7 t - 1 < 3^7 \cdot 3^{-16} - 1 = 3^{-9} - 1 < 0.$$

С учётом этой оценки имеем на множестве (22) цепочку равносильных преобразований неравенства (21):

$$\begin{aligned} \log_5 |t - 5| + \log_5 |3^{16} t - 1| + \log_5 |t - 5| - \log_5 |3^{16} t - 1| &> 2 \log_5 |3^7 t - 1| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \log_5 (5 - t) &> 2 \log_5 (1 - 3^7 t) \Leftrightarrow \log_5 (5 - t) > \log_5 (1 - 3^7 t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5 - t > 1 - 3^7 t &\Leftrightarrow (1 - 3^7) t < 4. \end{aligned}$$

Поскольку $1 - 3^7 < 0$, полученное неравенство выполнено при всех t из множества (22). Таким образом, множество (22) есть множество решений неравенства (21), и нам остаётся лишь сделать обратную замену:

$$3^{-x^2} < 3^{-16} \Leftrightarrow -x^2 < -16 \Leftrightarrow x^2 > 16.$$

Решения последнего неравенства: $x > 4$ или $x < -4$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2010) Решите неравенство:

$$\frac{\log_4(2-x) - \log_{14}(2-x)}{\log_{14} x - \log_{49} x} \leq \log_4 49.$$

Решение. Переходим к основанию 4:

$$\frac{\log_4(2-x) - \frac{\log_4(2-x)}{\log_4 14}}{\frac{\log_4 x}{\log_4 14} - \frac{\log_4 x}{\log_4 49}} \leq \log_4 49 \Leftrightarrow \frac{\log_4(2-x) \cdot \frac{\log_4 14 - 1}{\log_4 14}}{\log_4 x \cdot \frac{\log_4 49 - \log_4 14}{\log_4 49 \log_4 14}} \leq \log_4 49.$$

Замечаем, что $\log_4 14 - 1 = \log_4 \frac{7}{2}$ и $\log_4 49 - \log_4 14 = \log_4 \frac{7}{2}$:

$$\frac{\log_4(2-x) \cdot \log_4 \frac{7}{2}}{\log_4 x \cdot \log_4 \frac{7}{2}} \cdot \log_4 49 \leq \log_4 49.$$

Сокращая обе части на положительный множитель $\log_4 49$, приходим к равносильному неравенству

$$\frac{\log_4(2-x)}{\log_4 x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_4(2-x) - \log_4 x}{\log_4 x - \log_4 1} \leq 0.$$

Ввиду монотонного возрастания функции $y = \log_4 x$ полученное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{(2-x) - x}{x-1} \leq 0, \\ 2-x > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(x-1)}{x-1} \geq 0, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ 0 < x < 2. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 2)$.