Тригонометрические уравнения. 2

В статье «Тригонометрические уравнения. 1» мы рассмотрели стандартные методы решения весьма простых тригонометрических уравнений. Этих методов достаточно для того, чтобы решить задачу C1 на ЕГЭ по математике.

Данная статья посвящена более сложным тригонометрическим уравнениям, которые (на сегодняшний день) превосходят по сложности задачу C1. Умение решать такие уравнения может пригодиться вам на вузовских олимпиадах и дополнительных вступительных экзаменах по математике (например, в МГУ).

Метод вспомогательного аргумента

Прежде чем давать общее описание метода вспомогательного аргумента, мы рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. Решить уравнение: $\cos x - \sin x = 1$.

Решение. Разделим обе части на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Множитель $1/\sqrt{2}$ при косинусе запишем как $\cos\frac{\pi}{4}$, а тот же самый множитель $1/\sqrt{2}$ при синусе запишем как $\sin\frac{\pi}{4}$:

$$\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В левой части получили косинус суммы:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

или

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Можно оставить ответ в таком виде, а можно разбить его на две серии решений, каждая из которых выглядит приятнее, чем формула с плюс-минусом:

$$x = 2\pi n, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Решить уравнение: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$.

Решение. Разделим обе части на 2:

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1.$$

Множитель $1/2$ запишем как $\cos\frac{\pi}{3}$, а множитель $\sqrt{3}/2$ — как $\sin\frac{\pi}{3}$:

$$\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=1.$$

В левой части получили косинус разности:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

Отсюда

$$x-\frac{\pi}{3}=2\pi n\quad(n\in\mathbb{Z}),$$

то есть

$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi n\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. Решить уравнение: $2\cos x+\sin x=1$.

Решение. Перед косинусом стоит множитель 2, перед синусом — множитель 1; разделим обе части на $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}\,. \tag{1}$$

Чего, спрашивается, мы добились этим делением? Одной важной вещи — теперь сумма квадратов множителей при косинусе и синусе равна единице:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1.$$

А это в свою очередь означает, что существует угол α такой, что

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\,. \tag{2}$$

Подставляем это в уравнение (1):

$$\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\,,$$

то есть

$$\cos\left(x-\alpha\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Отсюда

$$x-\alpha=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n\quad(n\in\mathbb{Z}),$$

или

$$x=\alpha\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

Из формул (2) мы видим, что угол α можно взять на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, поскольку косинус и синус оба положительны. Тогда для α будут справедливы представления как в виде арккосинуса, так и в виде арксинуса:

$$\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\quad\text{или}\quad\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Давайте возьмём арксинус — это позволит нам потом несколько упростить ответ. Имеем:

$$x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Вспомним теперь, что сумма арксинуса и арккосинуса одного и того же числа равна $\frac{\pi}{2}$:

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теперь, когда идея метода вспомогательного аргумента более-менее прояснилась, можно дать общее описание метода. Рассмотрим уравнение

$$a \cos x + b \sin x = c \tag{3}$$

с ненулевыми числами a, b и c. Если $a^2 + b^2 \neq 1$, то разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \tag{4}$$

В результате этого деления сумма квадратов множителей при косинусе и синусе оказывается равной единице:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1.$$

Следовательно, существует угол α такой, что

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Подставляя эти равенства в уравнение (4), получим:

$$\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,,$$

то есть

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Остаётся решить полученное уравнение и записать угол α в виде арккосинуса или арксинуса (как в конце предыдущей задачи). Поэтому давайте закончим с общим описанием и рассмотрим лучше ещё один пример.

Задача 4. Решить уравнение: $3 \cos x - 4 \sin x = 2$.

Решение. Делим обе части уравнения на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$:

$$\frac{3}{5} \cos x - \frac{4}{5} \sin x = \frac{2}{5}\,.$$

Поскольку
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1,$$
существует угол $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ такой, что
$$\cos\alpha = \frac{3}{5}\,, \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}\,.$$

Имеем, следовательно:
$$\cos x\cos\alpha - \sin x\sin\alpha = \frac{2}{5}\,,$$
или
$$\cos(x+\alpha) = \frac{2}{5}\,.$$

Отсюда
$$x = -\alpha \pm \arccos\frac{2}{5} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$
или
$$x = -\arccos\frac{3}{5} \pm \arccos\frac{2}{5} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{5}$$

Ответ: $-\arccos\frac{3}{5} \pm \arccos\frac{2}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Замечание. Уравнение вида $a\cos x + b\sin x = c$ можно решить и другим способом — а именно, свести его к однородному уравнению.

В качестве примера рассмотрим снова уравнение
$$3\cos x - 4\sin x = 2.$$

Имеем:
$$3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) - 4\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right),$$
откуда
$$5\sin^2\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Делим полученное уравнение на $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$ и приходим к равносильному уравнению:
$$5\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 8\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0.$$

Дальнейшее сложностей не представляет:
$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{-4 \pm \sqrt{21}}{5} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{6}$$

Сопоставьте формулы (5) и (6) — казалось бы, ничего общего. А ведь это одно и тоже множество решений! Как видите, решения тригонометрического уравнения могут быть представлены весьма непохожими формулами — в зависимости от способа, которым эти решения были найдены.

Но если уравнение вида $a\cos x + b\sin x = c$ можно свести к однородному уравнению, то зачем мы вообще рассматривали метод вспомогательного аргумента? Дело в том, что данный метод обладает самостоятельной математической ценностью и имеет полезные приложения как в математических, так и в физических задачах.

Например, совершив преобразование

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha),$$

мы находим, что величина $a\cos x + b\sin x$ при различных x меняется в следующих пределах:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a\cos x + b\sin x \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Эта оценка может оказаться очень полезной в некоторых задачах. Ниже у нас будет возможность убедиться в этом.

Одним из физических приложений метода вспомогательного аргумента является описание вынужденных колебаний в колебательном контуре с активным сопротивлением. Смотрите об этом статью «Переменный ток. 2».

Преобразование сумм в произведения

В некоторых уравнениях используются формулы суммы/разности синусов/косинусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,,$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,,$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,,$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\,.$$

Задача 5. Решить уравнение: $\sin x + \sin 3x = 0$.

Решение. Превращаем сумму синусов в произведение:

$$2\sin 2x\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{2}\,,\\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \quad (n,k\in\mathbb{Z}).\end{array}\right.$$

Нетрудно видеть, что множество $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$ содержится в множестве $\dfrac{\pi n}{2}$. В самом деле, если $n = 2k+1$, то

$$\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi(2k+1)}{2} = \frac{\pi + 2\pi k}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k\,.$$

(Укажите также оба множества на тригонометрической окружности и убедитесь по рисунку, что серия $\pi/2 + \pi k$ целиком входит в серию $\pi n/2$.)

Это значит, что ответом является $\pi n/2$.

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Преобразование суммы или разности синусов или косинусов в произведение может использоваться в комбинации с последующим разложением на множители.

Задача 6. Решить уравнение: $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

Решение. Превращаем в произведение разность косинусов:

$$\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin 7x\sin 2x = 0.$$

Это позволяет вынести за скобки общий множитель:

$$\sin 2x\left(\sqrt{3}+2\sin 7x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0,\\ \sin 7x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi n}{2},\\ x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{21}+\dfrac{\pi n}{7} \quad (n\in\mathbb{Z}).\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{21}+\dfrac{\pi n}{7}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 7. Решить уравнение: $\sin x=\cos 3x$.

Решение. Здесь нас выручает формула приведения:

$$\sin x-\cos 3x=0 \Leftrightarrow \sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2},\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi n \quad (n\in\mathbb{Z}).\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}$, $\dfrac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Преобразование произведений в суммы

Иногда при решении уравнений требуется совершить обратную операцию — перейти от произведения тригонометрических функций к их сумме или разности:

$$\begin{aligned}2\cos\alpha\cos\beta&=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta),\\ 2\sin\alpha\sin\beta&=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta),\\ 2\sin\alpha\cos\beta&=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

Задача 8. Решить уравнение: $3+2\sin 3x\sin x=3\cos 2x$.

Решение. Удвоенное произведение синусов — это разность косинусов:

$$\begin{aligned}3+\cos 2x-\cos 4x=3\cos 2x &\Leftrightarrow \cos 4x+2\cos 2x-3=0 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1+2\cos 2x-3=0 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \cos^2 2x+\cos 2x-2=0.\end{aligned}$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим:

$$\begin{array}{l}\cos 2x=1 \Rightarrow x=\pi n \quad (n\in\mathbb{Z}),\\ \cos 2x=-2 \Rightarrow \text{решений нет.}\end{array}$$

Ответ: πn, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 9. Решить уравнение: $\sin 5x\cos 2x=\sin x\cos 6x$.

Решение. Умножаем обе части уравнения на 2:

$$2\sin 5x\cos 2x=2\sin x\cos 6x.$$

Слева имеем сумму синусов, справа — разность синусов:

$$\sin 7x + \sin 3x = \sin 7x - \sin 5x,$$

то есть

$$\sin 3x + \sin 5x = 0.$$

А эту сумму преобразуем в произведение:

$$2\sin 4x\cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0, \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{4}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \quad (n, k \in \mathbb{Z}). \end{array}\right.$$

Вторая серия совокупности содержится в первой. В самом деле, если $n = 4k + 2$, то

$$\frac{\pi n}{4} = \frac{\pi(4k+2)}{4} = \frac{2\pi + 4\pi k}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

(Снова укажите обе серии на тригонометрической окружности и визуально убедитесь, что серия $\pi/2 + \pi k$ «поглощается» серией $\pi n/4$.)

Ответ: $\dfrac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Использование формул понижения степени

В некоторых уравнениях нужно избавляться от квадратов синусов или косинусов с помощью формул понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Задача 10. Решить уравнение: $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

Решение. Имеем:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2},$$

откуда

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Группируем первое слагаемое со вторым, третье с четвёртым и преобразуем сумму косинусов в произведение:

$$2\cos 3x\cos x + 2\cos 7x\cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x(\cos 3x + \cos 7x) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 4\cos x\cos 2x\cos 5x = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \\ \cos 5x = 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5} \quad (k, n \in \mathbb{Z}). \end{array}\right.$$

Остаётся заметить, что серия $\pi/2 + \pi k$ целиком содержится в серии $\pi/10 + \pi n/5$ (а именно, при $n = 5k + 2$ вторая серия переходит в первую).

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Специальные случаи разложения на множители

В этом подразделе мы рассматриваем две ситуации группировки и разложения на множители: использование формулы $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ и разложение на множители квадратного трёхчлена.

Задача 11. Решить уравнение: $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x + \sin x)$.

Решение. Это — один из нечастых случаев непосредственного применения формулы косинуса двойного угла в виде разности квадратов:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Дело в том, что эта разность квадратов раскладывается на множители, в результате чего получаем:

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}(\cos x + \sin x),$$

или

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - \sqrt{2}) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0, \\ \cos x - \sin x = \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Оба уравнения сложностей не представляют (второе решается методом вспомогательного аргумента). Постарайтесь самостоятельно довести эту задачу до конца.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. Решить уравнение: $2\sin 2x + 2\cos^2 x + 2\sin x - 3\cos x - 2 = 0$.

Решение. Используем формулу синуса двойного угла и группируем слагаемые следующим образом (скобки ставим для наглядности):

$$(4\sin x\cos x + 2\sin x) + (2\cos^2 x - 3\cos x - 2) = 0.$$

Заметим, что квадратный трёхчлен $2t^2 - 3t - 2$ раскладывается на множители:

$$2t^2 - 3t - 2 = (t-2)(2t+1).$$

Поэтому в уравнении имеем:

$$2\sin x(2\cos x + 1) + (\cos x - 2)(2\cos x + 1) = 0,$$

то есть

$$(2\cos x + 1)(2\sin x + \cos x - 2) = 0.$$

Остаётся решить совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0, \\ 2\sin x + \cos x - 2 = 0. \end{array}\right.$$

Вы без труда справитесь с этим сами (второе уравнение очень похоже на задачу 3).

Ответ: $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замена переменной

Здесь мы расмотрим некоторые нетривиальные случаи замены переменной, специфичные именно для тригонометрических уравнений.

Задача 13. Решите уравнение: $3 + 2\sin 2x = 3\sin x + 3\cos x$.

Решение. Сделаем замену $t = \sin x + \cos x$. Тогда:

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x,$$

откуда

$$\sin 2x = t^2 - 1.$$

В результате получаем уравнение относительно новой переменной t:

$$3 + 2(t^2 - 1) = 3t \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Находим корни данного квадратного уравнения:

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Обратная замена даёт совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 1, \\ \sin x + \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\,. \end{array}\right.$$

Остаётся решить два простейших тригонометрических уравнения.

Ответ: $2\pi n$, $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 14. Решить уравнение: $\cos x - \sin x = \cos x \sin x$.

Решение. Сделаем замену $t = \cos x - \sin x$. Имеем:

$$t^2 = (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x - 2\cos x\sin x + \sin^2 x = 1 - 2\cos x\sin x,$$

откуда

$$\cos x\sin x = \frac{1 - t^2}{2}\,.$$

Получаем уравнение относительно t:

$$t = \frac{1 - t^2}{2} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 + \sqrt{2}, \\ t = -1 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = -1 + \sqrt{2}, \\ \cos x - \sin x = -1 - \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}\,, \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}\,. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности даёт решения:

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{2 - \sqrt{2}}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Второе уравнение совокупности не имеет решений, поскольку $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} > 1$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

В следующих двух уравнениях применяется *универсальная подстановка*:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \tag{7}$$

после чего делается замена $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Нужно только помнить про один нюанс: левые части формул (7) определены при всех x, а правые части не определены при $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Поэтому наряду с использованием универсальной подстановки следует непосредственно проверить серию $\pi + 2\pi n$, подставив её в уравнение.

Задача 15. Решить уравнение: $2\sin x + \cos x + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 3$.

Решение. Непосредственно убеждаемся, что значения $x = \pi + 2\pi n$ не являются решениями данного уравнения. Делаем подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 3.$$

После преобразований приходим к уравнению

$$t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0.$$

Заметим, что $t = 1$ является корнем этого уравнения, в соответствии с чем совершаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} 0 &= t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = t^3 - t^2 - 3t^2 + 3t + 2t - 2 = \\ &= t^2(t-1) - 3t(t-1) + 2(t-1) = (t-1)(t^2 - 3t + 2) = \\ &= (t-1)(t-1)(t-2) = (t-1)^2(t-2). \end{aligned}$$

Дальше всё просто:

$$\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 1, \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 16. Решить уравнение: $\sqrt{3}(1 + \cos x) + \sin 2x = 0$.

Решение. Прежде всего заметим, что $x = \pi + 2\pi n$ — решения данного уравнения. Далее имеем:

$$\sqrt{3}(1 + \cos x) + 2\sin x \cos x = 0,$$

и делаем замену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sqrt{3}\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 0.$$

Выполнив алгебраические преобразования, приходим к уравнению:

$$2t^3-\sqrt{3}t^2-2t-\sqrt{3}=0.$$

Здесь удобно сделать ещё одну замену $t=u\sqrt{3}$:

$$2\cdot 3\sqrt{3}u^3-\sqrt{3}\cdot 3u^2-2\sqrt{3}u-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 6u^3-3u^2-2u-1=0.$$

Полученное уравнение имеет корень $u=1$, так что преобразуем:

$$6u^3-6u^2+3u^2-3u+u-1=0 \Leftrightarrow (u-1)(6u^2+3u+1)=0.$$

Отсюда видно, что $u=1$ — единственный корень данного уравнения. Остаётся произвести обратные замены и получить ответ:

$$u=1 \Leftrightarrow t=\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

Ответ: $\pi+2\pi n,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Формулы тройного угла

В некоторых уравнениях могут пригодиться формулы синуса и косинуса тройного угла:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Задача 17. Решить уравнение: $\cos 3x-\cos 2x=1$.

Решение. Имеем:

$$4\cos^3 x-3\cos x-(2\cos^2 x-1)=1,$$

то есть

$$\cos x(4\cos^2 x-2\cos x-3)=0.$$

В случае $\cos x=0$ получаем $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$.

В случае $4\cos^2 x-2\cos x-3=0$ получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{4},\\[2mm] \cos x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{4}.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности не имеет решений, поскольку

$$\frac{1+\sqrt{13}}{4}>\frac{1+\sqrt{9}}{4}=1.$$

Второе уравнение совокупности даёт решения:

$$x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{13}}{4}+2\pi n \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{13}}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Задача 18. Решить уравнение: $\sin 3x + 2\sin x = 1$.

Решение. Имеем:

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x = 1 \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 5\sin x + 1 = 0.$$

Делаем замену $t = \sin x$:

$$4t^3 - 5t + 1 = 0.$$

Замечаем, что $t = 1$ является корнем данного уравнения, и раскладываем левую часть на множители:

$$(t-1)(4t^2 + 4t - 1) = 0.$$

В случае $t = 1$ имеем $\sin x = 1$, то есть $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Корнями квадратного уравнения $4t^2 + 4t - 1 = 0$ служат числа $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности даёт решения:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Второе уравнение совокупности не имеет решений, поскольку

$$\frac{-1-\sqrt{2}}{2} < \frac{-1-1}{2} = -1.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $(-1)^n \arcsin \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Преобразование выражений $\sin^4 x + \cos^4 x$ и $\sin^6 x + \cos^6 x$

Обе суммы $\sin^4 x + \cos^4 x$ и $\sin^6 x + \cos^6 x$ преобразуются стандартным образом. Идеи этих преобразований просты, и их желательно запомнить.

Задача 19. Решить уравнение: $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x = 0$.

Решение. Имеем:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$
$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Соответственно, в нашем уравнении получаем:

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x - \sin 2x - 2 = 0.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1, \\ \sin 2x = 2. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет. Остаётся решить первое уравнение и записать ответ.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 20. Решить уравнение: $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{7}{16}$.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned}\sin^6 x+\cos^6 x&=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)=\\&=\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x=\\&=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5+3\cos 4x}{8}.\end{aligned}$$

Возвращаясь к нашему уравнению, получаем:

$$\frac{5+3\cos 4x}{8}=\frac{7}{16}\ \Leftrightarrow\ \cos 4x=-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

Иррациональные уравнения

Уравнение называется *иррациональным*, если оно содержит неизвестную величину под знаком корня. Нас будут интересовать иррациональные уравнения, в которых под знаком корня находятся тригонометрические функции.

Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)}=g(x)$$

равносильно системе

$$\begin{cases}f(x)=(g(x))^2,\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

(Почему отсутствует неравенство $f(x)\geqslant 0$? Оно не нужно — ведь выражение $f(x)$ приравнивается к квадрату выражения $g(x)$ и потому автоматически оказывается неотрицательным.)

Задача 21. Решить уравнение: $\sqrt{3\sin x}=-\sqrt{2}\cos x$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}3\sin x=2\cos^2 x,\\ \cos x\leqslant 0.\end{cases}$$

Решаем уравнение системы:

$$3\sin x=2(1-\sin^2 x)\ \Leftrightarrow\ 2\sin^2 x+3\sin x-2=0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{aligned}&\sin x=-3,\\&\sin x=\frac{1}{2}\end{aligned}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\&x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n\quad(n\in\mathbb{Z}).\end{aligned}\right.$$

Условию $\cos x\leqslant 0$ удовлетворяет лишь вторая из полученных серий.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 22. Решить уравнение: $\sqrt{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = (\sin x - \cos x)^2, \\ \sin x - \cos x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы. Имеем:

$$\sin x + \cos x = 1 - 2\sin x \cos x.$$

Делаем уже знакомую нам замену: $t = \sin x + \cos x$ (тогда $2\sin x \cos x = t^2 - 1$):

$$t = 1 - (t^2 - 1) \;\Leftrightarrow\; t^2 + t - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Теперь — обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 1, \\ \sin x + \cos x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет решений, поскольку $-\sqrt{2} < -1$. Первое уравнение совокупности даёт две серии решений:

$$x_1 = 2\pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Теперь нужно проверить, выполняется ли для этих серий неравенство системы. Имеем:

$$\begin{aligned} &\sin x_1 - \cos x_1 = \sin 2\pi n - \cos 2\pi n = -1; \\ &\sin x_2 - \cos x_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1. \end{aligned}$$

Как видим, серия x_1 не удовлетворяет неравенству системы и потому не содержит решений исходного уравнения. Серия x_2 удовлетворяет неравенству системы и, следовательно, даёт искомые решения.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

равносильно одной из двух систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

(Разумеется, достаточно учесть лишь одно из неравенств $f(x) \geqslant 0$ или $g(x) \geqslant 0$, поскольку второе из этих неравенств будет выполнено автоматически ввиду уравнения $f(x) = g(x)$. Какое именно выражение сравнивать с нулём — $f(x)$ или $g(x)$ — диктуется исключительно соображениями удобства.)

Задача 23. Решить уравнение: $\sqrt{3\sin 2x} = \sqrt{-5\cos x \operatorname{ctg} x}$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3\sin 2x = -5\cos x \operatorname{ctg} x, \\ \sin 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение системы:

$$3\sin 2x + 5\cos x \operatorname{ctg} x = 0 \;\Leftrightarrow\; 6\sin x\cos x + \frac{5\cos^2 x}{\sin x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 6\sin^2 x\cos x + 5\cos^2 x = 0$$

(последнее уравнение равносильно предыдущим, поскольку для его решений не выполнено равенство $\sin x = 0$). Продолжаем:

$$\cos x(6\sin^2 x + 5\cos x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 6\cos^2 x - 5\cos x + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \dfrac{3}{2}, \\ \cos x = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет решения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Эти значения x удовлетворяют неравенству системы:

$$\sin 2x = \sin(\pi + 2\pi n) = 0,$$

и поэтому являются решениями исходного уравнения.

Второе уравнение полученной совокупности не имеет решений. Третье уравнение даёт две серии решений:

$$x_1 = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n = \pi - \arccos\frac{2}{3} + 2\pi n,\; n \in \mathbb{Z} \quad \text{(вторая четверть)},$$
$$x_2 = -\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n = \pi + \arccos\frac{2}{3} + 2\pi n,\; n \in \mathbb{Z} \quad \text{(третья четверть)}.$$

Мы преобразовали эти формулы так, чтобы стало яснее, в какой четверти лежат соответствующие точки тригонометрической окружности, и указали эти четверти.

Поскольку $\sin x_1 > 0$, имеем:

$$\sin 2x_1 = 2\sin x_1 \cos x_1 = 2\sin x_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) < 0.$$

Как видим, серия x_1 не удовлетворяет неравенству системы и потому не содержит решений исходного уравнения.

Аналогично, поскольку $\sin x_2 < 0$, имеем:

$$\sin 2x_2 = 2\sin x_2 \cos x_2 = 2\sin x_2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) > 0.$$

Серия x_2 удовлетворяет неравенству системы. Это — решения исходного уравнения.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $\pi + \arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнения с модулем

В этом подразделе мы рассмотрим уравнения, содержащие тригонометрические функции под знаком модуля.

Напомним определение модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Во многих случаях достаточно действовать непосредственно по этому определению.

Задача 24. Решить уравнение: $|\sin x| = \cos x$.

Решение. С целью снятия модуля рассматриваем два случая.

1. Если $\sin x \geqslant 0$, то уравнение принимает вид:

$$\sin x = \cos x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Разобьём полученную серию x на две серии:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

и заметим, что $\sin x_1 > 0$, $\sin x_2 < 0$. Поэтому только серия x_1 даёт решения исходного уравнения.

Итак, в первом случае имеем решения:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.}$$

2. Если $\sin x < 0$, то после снятия модуля получаем:

$$-\sin x = \cos x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Снова разбиваем на две серии:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

и замечаем, что $\sin x_1 < 0$, $\sin x_2 > 0$. Следовательно, годится лишь серия x_1.

Таким образом, во втором случае получаем решения:

$$\boxed{-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.}$$

Для получения итогового ответа остаётся объединить решения в «рамочках».

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 25. Решить уравнение: $\cos 3x + |\cos x| = \sin 2x$.

Решение. Снова рассматриваем два случая.

1. Если $\cos x \geqslant 0$, то:

$$\cos 3x + \cos x = \sin 2x \Leftrightarrow 2\cos 2x \cos x = 2\sin x \cos x \Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin^2 x + \sin x - 1) = 0.$$

Получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x = -1. \end{array}\right.$$

Решения данной совокупности имеют вид:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(серия $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ решений третьего уравнения входит в x_1). Условию $\cos x \geqslant 0$ удовлетворяют лишь x_1 и x_2.

Таким образом, имеем следующие решения исходного уравнения:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).}$$

2. Если $\cos x < 0$, то:

$$\cos 3x - \cos x = \sin 2x \Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x(2\sin x + 1) = 0.$$

Получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет решения $\dfrac{\pi n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Из этого множества условию $\cos x < 0$ удовлетворяет лишь серия

$$\boxed{\pi + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).}$$

Решения второго уравнения совокупности, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$, таковы:

$$\boxed{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).}$$

Остаётся объединить ответы в «рамочках». Заметим, что серии $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$ можно записать одной формулой $\dfrac{\pi}{6} + \pi n$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 26. Решить уравнение: $2\sin^2 x - 5|\sin x| + 2 = 0$.

Решение. Здесь не нужно снимать модуль «по определению» — всё гораздо проще. Делаем замену $t = |\sin x|$. Тогда $\sin^2 x = |\sin x|^2 = t^2$, и мы получаем уравнение относительно t:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

Его корни: $t_1 = 2$, $t_2 = 1/2$. В результате обратной замены получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} |\sin x| = 2, \\ |\sin x| = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Решения имеет лишь второе уравнение совокупности: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Метод оценок

Некоторые тригонометрические уравнения поддаются решению, если заметить, что синус и косинус по модулю не превосходят единицу.

Задача 27. Решить уравнение: $\sin x + \sin 5x = 2$.

Решение. Поскольку $\sin x \leqslant 1$ и $\sin 5x \leqslant 1$, наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 5x = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет решения $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. При этом

$$\sin 5x_1 = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 10\pi n\right) = 1,$$

то есть серия x_1 удовлетворяет и второму уравнению системы. Следовательно, x_1 — это решения исходного уравнения.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 28. Решить уравнение: $\cos x \cos 4x = -1$.

Решение. Возможны три случая.

1. Если $|\cos x| < 1$, то ввиду неравенства $|\cos 4x| \leqslant 1$ имеем $|\cos x \cos 4x| < 1$. Поэтому в данном случае решений нет.

2. Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. При этом $\cos 4x = \cos 8\pi n = 1$, так что $\cos x \cos 4x = 1$. Решений нет.

3. Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. При этом $\cos 4x = \cos(4\pi + 8\pi n) = 1$, так что $\cos x \cos 4x = -1$. Следовательно, $\pi + 2\pi n$ — решения исходного уравнения.

Ответ: $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 29. Решить уравнение: $\sqrt{2}(\sin x - \cos x)\cos y = 3 - \cos 2y$.

Решение. Используя тождество

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

перепишем уравнение в виде:

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos y = 3 - \cos 2y.$$

Теперь заметим, что для любых значений x выполнены неравенства:

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos y \leqslant 2, \quad 3 - \cos 2y \geqslant 2.$$

Следовательно, решениями нашего уравнения служат те и только те пары $(x; y)$, для которых обе части уравнения одновременно равны 2. Поэтому наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos y = 2, \\ 3 - \cos 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos y = 1, \\ \cos 2y = 1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет решения $y = \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Разобьём их на две серии:

$$y_1 = 2\pi n, \quad y_2 = \pi + 2\pi n,$$

и поочерёдно подставим в первое уравнение.

1. Так как $\cos y_1 = 1$, получаем $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Так как $\cos y_2 = -1$, получаем $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \pi + 2\pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Обратите внимание на то, что в записи x и y фигурируют две различные буквы k и n для обозначения целого кратного 2π. Это очень существенно. Использование только одной буквы (скажем, n) не охватило бы все возможные пары и привело бы к потере части решений.