Тригонометрические уравнения. 1

В данной статье рассматриваются самые простые виды тригонометрических уравнений. Методы решения таких уравнений стандартны и составляют необходимый минимум знаний по тригонометрическим уравнениям.

Задача C1 на ЕГЭ по математике в настоящее время содержит тригонометрические уравнения, для решения которых достаточно упомянутых выше стандартных процедур. Поэтому материала данной статьи достаточно для того, чтобы на ЕГЭ справиться с задачей C1.

Однако в задаче C1 требуется нечто большее, чем просто решить тригонометрическое уравнение. Например, на ЕГЭ-2010 нужно было решить систему уравнений, а в 2011 и 2012 годах требовалось произвести отбор решений в соответствии с некоторыми условиями. Задачи реальных вариантов ЕГЭ мы разберём в следующей статье «Задача C1 на ЕГЭ по математике».

А начнём мы именно с общих и стандартных методов решения тригонометрических уравнений. Более сложным видам тригонометрических уравнений, для решения которых нужны более изощрённые методы, будет посвящена статья «Тригонометрические уравнения. 2».

Разложение левой части на множители

Предположим, что в правой части уравнения стоит нуль, а левую часть удаётся разложить на множители. Тогда решение уравнения упрощается: если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю, и мы последовательно рассматриваем случаи равенства нулю каждого из множителей.

Задача 1. Решить уравнение: $2\cos^2 x + \cos x = 0$.

Решение. Выносим $\cos x$ за скобки:

$$\cos x(2\cos x + 1) = 0.$$

Произведение двух множителей равно нулю — значит, хотя бы один из них равен нулю. Первый случай:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Второй случай:

$$2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. $\sin 2x = 3\sin x$.

Решение. Перепишем это уравнение, воспользовавшись формулой синуса двойного угла:

$$2\sin x\cos x = 3\sin x.$$

Очень распространённая ошибка в таких ситуациях: «сократим на $\sin x$». Поступив так, мы потеряем часть решений — а именно, те значения x, для которых $\sin x = 0$. Мы будем действовать правильно: перенесём всё в одну часть и вынесем общий множитель за скобки:

$$2\sin x\cos x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 3) = 0.$$

Ягубов.РФ

Первый случай:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Второй случай:

$$2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{3}{2}.$$

Здесь решений нет: ведь $\frac{3}{2} > 1$, а косинус не может принимать значений, бо́льших единицы.
Ответ: πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Решить уравнение: $\sin 2x = 2\cos^2 x$.

Решение. Начинаем так же, как и в предыдущей задаче:

$$2\sin x\cos x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - \cos x) = 0.$$

Первый случай:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Второй случай:

$$\sin x - \cos x = 0. \tag{1}$$

Как тут действовать? Можно применить два разных способа. Мы опишем оба, а вы уж выбирайте, какой вам больше по душе.

1. Перепишем (1) в виде:

   $$\sin x = \cos x.$$

   Теперь хотелось бы поделить на $\cos x$, но имеется одна неприятность: ведь косинус может обращаться в нуль. Поэтому необходима следующая оговорка.

   Если $\cos x = 0$, *то в силу уравнения имеем также* $\sin x = 0$. *Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, *согласно которому синус и косинус не могут обращаться в нуль одновременно. Значит, для любого решения данного уравнения выполнено неравенство* $\cos x \neq 0$, *и потому обе части уравнения можно разделить на* $\cos x$.

   Деля на $\cos x \neq 0$, получаем уравнение

   $$\operatorname{tg} x = 1,$$

   решения которого даются формулой:

   $$x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

   Заметим, что описанным способом решается любое уравнение вида

   $$a\sin x + b\cos x = 0$$

   (с ненулевыми a и b). Сделав оговорку, делим обе части на $\cos x$ и приходим к простейшему уравнению для $\operatorname{tg} x$.

2. Умножим обе части уравнения (1) на $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

   $$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 0.$$

Множитель в первом слагаемом запишем как $\cos\frac{\pi}{4}$, а во втором слагаемом — как $\sin\frac{\pi}{4}$:

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4} = 0.$$

Это формула синуса разности:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Отсюда:

$$x - \frac{\pi}{4} = \pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Как видите, в первом способе меньше формул, но зато надо писать оговорку. Во втором способе больше формул, но зато кроме них можно ничего больше не писать — только цепочка преобразований друг за другом, и всё. Так что, повторяем, выбор за вами.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Решить уравнение: $\sin 2x + 2\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$.

Решение. Раскладываем синус двойного угла и переносим всё в одну часть:

$$2\sin x\cos x + 2\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} = 0.$$

Группируем первое слагаемое со вторым, третье с четвёртым:

$$2\sin x(\cos x + 1) - \sqrt{3}(\cos x + 1) = 0.$$

Выносим за скобки общий множитель $\cos x + 1$:

$$(\cos x + 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Первый случай:

$$\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Второй случай:

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ или } x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнения, сводящиеся к квадратным

В ряде случаев тригонометрическое уравнение можно преобразовать так, что оно окажется квадратным относительно некоторой тригонометрической функции.

Задача 5. Решить уравнение: $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

Решение. Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Делаем замену $t = \sin x$ и получаем квадратное уравнение относительно t:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Решая его, находим:

$$t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -2.$$

Ягубов.РФ

Теперь обратная замена:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z});$$
$$\sin x = -2 \Rightarrow \text{решений нет.}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Решить уравнение: $6\sin^2 x - \cos x - 4 = 0$.

Решение. Выражаем $\sin^2 x$ из основного тригонометрического тождества: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, и подставляем в уравнение:

$$6(1 - \cos^2 x) - \cos x - 4 = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем:

$$6\cos^2 x + \cos x - 2 = 0.$$

Делаем замену $t = \cos x$:

$$6t^2 + t - 2 = 0.$$

Корни полученного квадратного уравнения:

$$t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -\frac{2}{3}.$$

Обратная замена:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z});$$
$$\cos x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 7. Решить уравнение: $\cos 2x + 10\sin x - 9 = 0$.

Решение. Здесь нам нужна формула косинуса двойного угла — та, которая «через синус»:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Подставляем в уравнение:

$$1 - 2\sin^2 x + 10\sin x - 9 = 0,$$

откуда

$$\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0.$$

Здесь и ниже мы уже не будем подробно расписывать элементарный шаг с заменой и обратной заменой. Решая соответствующее квадратное уравнение, получим:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z});$$
$$\sin x = 4 \Rightarrow \text{решений нет.}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ЯГУБОВ.РФ

Задача 8. Решить уравнение: $3\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$.

Решение. Здесь понадобится другая формула косинуса двойного угла — та, которая «через косинус»:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Подставляем её в уравнение:

$$3(2\cos^2 x - 1) - 8\cos x + 5 = 0.$$

После преобразований получаем:

$$3\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение и находим:

$$\begin{aligned}
&\cos x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z});\\
&\cos x = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ответ: $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 9. Решить уравнение: $\cos 2x + 10\cos^2 x + 5\sin x = 9$.

Решение. Здесь мы комбинируем преобразования, использованные выше: нужную формулу для косинуса двойного угла (в данном случае «через синус») и основное тригонометрическое тождество.

$$1 - 2\sin^2 x + 10(1 - \sin^2 x) + 5\sin x = 9.$$

После преобразований имеем:

$$12\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
&\sin x = \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z});\\
&\sin x = -\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 10. Решить уравнение: $4\cos^2 x - 1 = 0$.

Решение. Это неполное квадратное уравнение (отсутствует слагаемое с первой степенью косинуса). Решая подобные уравнения, многие школьники (неожиданно для себя) сталкиваются с трудностями. Мы покажем два возможных способа решения.

1. Запишем уравнение в виде:

   $$\cos^2 x = \frac{1}{4}.$$

   Извлекаем корень:

   $$\left[\begin{aligned} &\cos x = \frac{1}{2},\\ &\cos x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

ЯГУБОВ.РФ

Первое уравнение совокупности имеет решения:

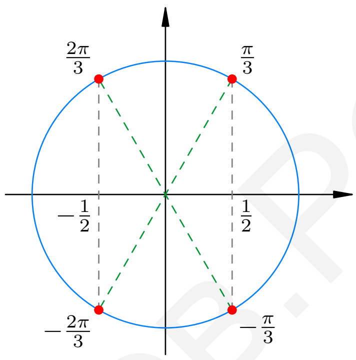
$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Второе уравнение совокупности имеет решения:

$$x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Можно, конечно, такой ответ и дать — просто перечислив серии x_1 и x_2. Но давайте не будем торопиться и покажем сначала эти серии решений на тригонометрической окружности.

Серии x_1 отвечает правая вертикальная пара точек (соединённая серым пунктиром). Серии x_2 отвечает левая вертикальная пара точек (тоже соединённая серым пунктиром).



Всего на окружности изображены четыре точки. Соединим их по-другому — а именно, наискосок (зелёные пунктиры). Получаются две диаметральные пары точек. Пара, расположенная в первой и третьей четвертях, описывается формулой:

$$\frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Пара, расположенная во второй и четвёртой четвертях, описывается формулой:

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Объединяем эти пары и получаем ответ:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Такой ответ выглядит эстетичнее, чем предложенное выше перечисление серий x_1 и x_2.

2. Можно, однако, избежать всех этих манипуляций с точками и прийти к ответу совершенно формально, если с самого начала действовать по-другому. А именно, используем формулу понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Подставляем в уравнение:

$$4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 = 0,$$

ЯГУБОВ.РФ

откуда

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}\,.$$

Решая полученное уравнение, находим:

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Остаётся поделить на 2 обе части:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 11. Решить уравнение: $3\cos 4x + 2\cos^2 x + 1 = 0$.

Решение. Здесь идея заключается в том, чтобы перейти к аргументу $2x$ (который является половинным для $4x$ и удвоенным для x). Последовательно используем формулу косинуса двойного угла и формулу понижения степени:

$$3(2\cos^2 2x - 1) + (1 + \cos 2x) + 1 = 0.$$

В результате приходим к квадратному уравнению относительно $\cos 2x$:

$$6\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0.$$

Решая его, получим:

$$\begin{aligned}
&\cos 2x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z});\\
&\cos 2x = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; 2x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Однородные уравнения

Однородное тригонометрическое уравнение первой степени — это уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

с коэффициентами a и b, не равными нулю. Мы уже обсуждали такое уравнение в задаче 3: делаем оговорку и делим обе части на $\cos x$.

Задача 12. Решить уравнение: $\dfrac{2\sin x + 5\cos x}{3\sin x - 2\cos x} = 4$.

Решение. Переносим 4 влево с минусом и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{2\sin x + 5\cos x}{3\sin x - 2\cos x} - \frac{4(3\sin x - 2\cos x)}{3\sin x - 2\cos x} = 0.$$

После преобразований получаем:

$$\frac{13\cos x - 10\sin x}{3\sin x - 2\cos x} = 0. \tag{2}$$

ЯГубов.РФ

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель нулю не равен. Приравнивая к нулю числитель дроби (2), имеем:

$$10 \sin x = 13 \cos x.$$

Мы не повторяем тут оговорку — она ещё появится немного ниже. Делим на $\cos x \neq 0$ и получаем:

$$\operatorname{tg} x = \frac{13}{10},$$

откуда

$$x = \operatorname{arctg} \frac{13}{10} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Аналогично, знаменатель дроби (2) обращается в нуль при $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$. Для полученных выше значений x данное равенство не выполняется.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{13}{10} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Однородное тригонометрическое уравнение второй степени — это уравнение вида

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \tag{3}$$

с некоторыми коэффициентами a, b, c. Однородным это уравнение называется потому, что в каждом слагаемом левой части сумма степеней синуса и косинуса одинакова и равна 2.

Чтобы решить уравнение (3), нужно разделить обе его части на $\cos^2 x$ (с соответствующей оговоркой). Тогда придём к квадратному уравнению относительно тангенса. Давайте рассмотрим конкретные примеры.

Задача 13. Решить уравнение: $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$.

Решение. Взять и молча разделить на $\cos^2 x$ нельзя — ведь косинус может обращаться в нуль. Поэтому прежде чем делить на $\cos^2 x$, нужно сделать следующую оговорку.

Если $\cos x = 0$, *то в силу уравнения имеем также* $\sin x = 0$. *Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, *согласно которому синус и косинус не могут обращаться в нуль одновременно. Значит, для любого решения данного уравнения выполнено неравенство* $\cos x \neq 0$, *и потому обе части уравнения можно разделить на* $\cos^2 x$.

Как видите, это почти дословное воспроизведение оговорки, сделанной при решении уравнения (1) первым способом.

Разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, приходим к квадратному уравнению относительно тангенса:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z});$$
$$\operatorname{tg} x = 4 \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 14. Решить уравнение: $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 11 \cos^2 x = 4$.

Решение. Припишем к числу 4 в правой части единичный множитель $\sin^2 x + \cos^2 x$. От этого, понятно, ничего не изменится:

$$\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 11 \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Раскрываем скобки и приводим подобные:

$$3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0.$$

Делаем, как и выше, оговорку и делим на $\cos^2 x$:

$$3\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 7 = 0.$$

Остаётся решить это уравнение: $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -\dfrac{7}{3}$, и записать ответ.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\dfrac{7}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В некоторых ситуациях для получения однородного уравнения нужно предварительно применить формулы двойного угла.

Задача 15. Решить уравнение: $3\sin 2x + 4\cos 2x = 5$.

Решение. Используем формулы синуса и косинуса двойного угла, а также приём с приписыванием единичного множителя:

$$3\cdot 2\sin x\cos x + 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 5(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Получаем:

$$9\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x = 0,$$

и, соответственно,

$$9\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

В левой части стоит полный квадрат:

$$(3\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3},$$

то есть

$$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ягубов.РФ