

Тригонометрические формулы

Здесь приведены **все тригонометрические формулы**, выведенные в предыдущих статьях, а также некоторые важные формулы, полученные при решении тренировочных задач. Данная статья служит справочником, к которому можно обращаться по мере надобности.

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Формулы приведения

1. *Формулы приведения с опорной точкой $\pi/2$:*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

2. *Формулы приведения с опорной точкой π :*

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha; \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha; \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha; \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(\pi + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

3. *Формулы приведения с опорной точкой $3\pi/2$:*

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\cos \alpha; \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\sin \alpha; \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{tg} \alpha; \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha; \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= -\operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= -\operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

4. *Формулы приведения с опорной точкой 2π :*

$$\begin{aligned}\sin(2\pi - \alpha) &= -\sin \alpha; \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha; \\ \sin(2\pi + \alpha) &= \sin \alpha; \\ \cos(2\pi + \alpha) &= \cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(2\pi + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

Формулы двойного угла

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1; \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.\end{aligned}$$

Формулы тройного угла

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \\ \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Формулы понижения степени

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Формулы тангенса половинного угла

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.\end{aligned}$$

Универсальная подстановка

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

Суммы и произведения тригонометрических функций

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta};$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta);$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta).$$