

Формулы двойного и половинного угла

Формулы двойного угла — это формулы, выражающие тригонометрические функции угла 2α через тригонометрические функции угла α . Все формулы двойного угла выводятся из соответствующих формул сложения.

Синус двойного угла

Исходим из формулы синуса суммы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Полагаем в этой формуле $\beta = \alpha$:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha,$$

то есть

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.} \quad (1)$$

Мы получили формулу синуса двойного угла.

Косинус двойного угла

Исходим из формулы косинуса суммы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Полагаем в этой формуле $\beta = \alpha$:

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha,$$

то есть

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.} \quad (2)$$

Это — первая формула косинуса двойного угла. Имеются ещё две. Они получаются из формулы (2) с помощью основного тригонометрического тождества.

Так, согласно основному тригонометрическому тождеству имеем: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. Подставляя это в (2), получим:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.} \quad (3)$$

С другой стороны, имеем также: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Подставляем это в (2):

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.} \quad (4)$$

Как видите, в отличие от синуса двойного угла, где имеется одна-единственная формула, здесь нужно знать три формулы косинуса двойного угла (2)–(4).

Тангенс и котангенс двойного угла

Берём формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Полагаем в ней $\beta = \alpha$ и получаем формулу тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (5)$$

Точно так же из формулы котангенса суммы:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

получим:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Формулы понижения степени

Мы переходим к *формулам половинного угла*, которые связывают тригонометрические функции угла α и тригонометрические функции угла $\alpha/2$. По сути это те же формулы двойного угла, только записанные несколько иным образом.

По формуле (3) косинуса двойного угла имеем:

$$\cos \alpha = \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \quad (6)$$

А теперь точно так же воспользуемся формулой (4):

$$\cos \alpha = \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1,$$

откуда

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad (7)$$

Тождества (6) и (7) называются *формулами понижения степени*. Название понятно: в левой части каждой формулы стоит квадрат тригонометрической функции, а в правой части — первая степень косинуса.

Формулы тангенса половинного угла

Взяв отношение равенств (6) и (7), получим:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Данная формула, как видите, выражает квадрат тангенса половинного угла. Имеются также две формулы, выражающие сам тангенс.

Первая формула:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Чтобы доказать это тождество, возьмём его правую часть и путём преобразований выведем из неё левую часть. Используем формулы (6) и (1).

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Вторая формула:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Докажите её самостоятельно, используя формулы (1) и (7).

Универсальная подстановка

Оказывается, любую тригонометрическую функцию угла α можно выразить через тангенс половинного угла $\alpha/2$.

1. Формула для синуса:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (8)$$

Доказываем «справа налево», умножая числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha.$$

2. Формула для косинуса:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (9)$$

Попробуйте доказать её самостоятельно. Приём тот же: умножаем числитель и знаменатель на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Но в данном случае вместо формулы синуса двойного угла вам понадобится формула (2) косинуса двойного угла.

3. Формула для тангенса — это уже известная нам формула (5):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (10)$$

4. Формула для котангенса — это «перевёрнутая» формула (10):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \quad (11)$$

Формулы (8)–(11) называются *универсальной подстановкой*.