Уравнения с аркфункциями

Для решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, нужно чётко знать определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Если вы их не помните, то повторите ещё раз статью «Обратные тригонометрические функции. 1».

Задача 1. Решить уравнение: $\arcsin(x^2-4x+4)=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Если $\arcsin a=\pi/2$, то $a=1$. Следовательно,

$$x^2-4x+4=1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x_1=1,\, x_2=3.$$

Ответ: 1, 3.

Задача 2. Решить уравнение: $12\operatorname{arctg}^2 x-\pi\operatorname{arctg} x-\pi^2=0$.

Решение. Делая замену $t=\operatorname{arctg} x$, получаем квадратное уравнение относительно t:

$$12t^2-\pi t-\pi^2=0 \Leftrightarrow t_1=\frac{\pi}{3},\, t_2=-\frac{\pi}{4}.$$

Теперь обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{3},\\ \operatorname{arctg} x=-\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3},\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{3}$, -1.

Задача 3. Решить уравнение: $\arcsin^2 x-2\arcsin x-3=0$.

Решение. Замена $t=\arcsin x$:

$$t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow t_1=3,\, t_2=-1.$$

Во первом случае имеем $\arcsin x=3$. Здесь надо быть осторожным: автоматически написать $x=\sin 3$ нельзя! В данном случае решений нет, поскольку множеством значений арксинуса служит отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, а число 3 не принадлежит этому отрезку (ведь $3>\frac{\pi}{2}$).

Во втором случае имеем $\arcsin x=-1$. Число -1 принадлежит множеству значений арксинуса: $-1\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, поэтому решением будет $x=\sin(-1)=-\sin 1$.

Ответ: $-\sin 1$.

Задача 4. Решить уравнение: $\arccos^2 x-\arccos x-2=0$.

Решение. Замена $t=\arccos x$:

$$t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t_1=2,\, t_2=-1.$$

В первом случае имеем $\arccos x=2$. Число 2 принадлежит множеству значений арккосинуса: $2\in[0;\pi]$, поэтому $x=\cos 2$.

Второй случай: $\arccos x=-1$. Решений нет, так как $-1\notin[0;\pi]$.

Ответ: $\cos 2$.

Задача 5. Решить уравнение: $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Множество значений арккосинуса есть отрезок $[0;\pi]$. Множество значений арктангенса есть интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому если арккосинус равен арктангенсу, то оба они принимают значения из промежутка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. При этом x может принимать значения из отрезка $[-1;1]$.

Но два числа из промежутка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ равны тогда и только тогда, когда равны их косинусы. Поэтому наше уравнение равносильно следующему:

$$\cos(\arccos x) = \cos(\operatorname{arctg} x).$$

В левой части имеем: $\cos(\arccos x) = x$. В правой части (учитывая, что в промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ косинус положителен):

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\,.$$

Получаем уравнение:

$$x = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\,,$$

решить которое — несложное самостоятельное упражнение для вас (возводим обе части в квадрат, решаем биквадратное уравнение и учитываем на последнем этапе, что $x \geqslant 0$).

Ответ: $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 6. Решить уравнение: $\arcsin x = 2\operatorname{arctg} x$.

Решение. Когда x пробегает отрезок $[-1;1]$, функция $\arcsin x$ принимает значения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, а функция $\operatorname{arctg} x$ принимает значения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. Поэтому обе части нашего уравнения могут принимать значения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Но равенство чисел из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ равносильно равенству их синусов:

$$\sin(\arcsin x) = \sin(2\operatorname{arctg} x).$$

С левой частью всё ясно: $\sin(\arcsin x) = x$. В правой части используем универсальную подстановку:

$$\sin(2\operatorname{arctg} x) = \frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

Приходим к уравнению:

$$x = \frac{2x}{1+x^2}\,,$$

которое элементарно решается.

Ответ: 0, ± 1.

Задача 7. Решить уравнение: $\sin(3\arccos x) = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 3\arccos x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ 3\arccos x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \arccos x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} = \dfrac{\pi(1+12n)}{18}\,, \\ \arccos x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} = \dfrac{\pi(5+12n)}{18} \end{array}\right. \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

С учётом неравенства $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ из первой серии совокупности годятся лишь $\frac{\pi}{18}$ и $\frac{13\pi}{18}$, а из второй серии годятся лишь $\frac{5\pi}{18}$ и $\frac{17\pi}{18}$:

$$\left[\begin{array}{l} \arccos x = \dfrac{\pi}{18}\,, \\ \arccos x = \dfrac{13\pi}{18}\,, \\ \arccos x = \dfrac{5\pi}{18}\,, \\ \arccos x = \dfrac{17\pi}{18}\,. \end{array}\right.$$

Соответственно получаем решения нашего уравнения:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{18}\,, \quad x_2 = \cos\frac{13\pi}{18}\,, \quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{18}\,, \quad x_4 = \cos\frac{17\pi}{18}\,.$$

Ну и заметим напоследок, что $x_4 = -x_1$ и $x_2 = -x_3$.

Ответ: $\pm\cos\dfrac{\pi}{18}\,,\ \pm\cos\dfrac{5\pi}{18}\,.$

Задача 8. Решить уравнение: $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \dfrac{5\pi^2}{36}\,.$

Решение. Пусть $t = \arcsin x$, тогда $\arccos x = \frac{\pi}{2} - t$. Имеем:

$$t^2 + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 = \frac{5\pi^2}{36} \Leftrightarrow 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{9} = 0.$$

Дальше всё очевидно: $t_1 = \frac{\pi}{3}$, $t_2 = \frac{\pi}{6}$, откуда $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \dfrac{1}{2}\,.$