Метод объёмов

Объём треугольной пирамиды можно посчитать несколькими разными способами. *Методом объёмов* мы называем приравнивание двух подходящих выражений для объёма, в результате чего удаётся вычислить искомую величину (расстояние или угол).

Метод объёмов можно использовать, вычисляя:

- расстояние от точки до плоскости;
- угол между прямой и плоскостью;
- угол между плоскостями;
- расстояние между скрещивающимися прямыми.

С идейной точки зрения метод объёмов весьма прост. Всё, что здесь нужно, — это найти подходящую треугольную пирамиду и аккуратно провести вычисления. Правда, вычислений обычно получается несколько больше, чем в методах, рассмотренных выше. Но тут уж ничего не поделаешь — за простоту метода приходится платить.

Расстояние от точки до плоскости

Замечательный факт состоит в том, что при вычислении объёма треугольной пирамиды можно в качестве основания выбрать любую её грань. Это используется при нахождении расстояния от точки до плоскости; нужно лишь представить искомое расстояние как высоту подходящей пирамиды.

А именно, предположим, что нам нужно найти расстояние от некоторой точки C до некоторой плоскости ABD. Рассмотрим треугольную пирамиду $ABCD$ (рис. 1). Тогда искомое расстояние — это высота d данной пирамиды, проведённая из вершины C.

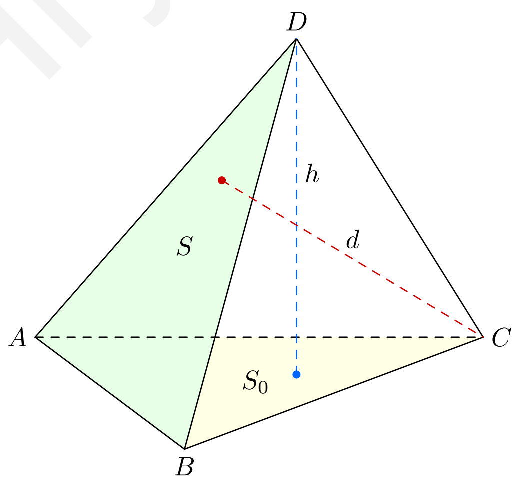

Рис. 1. $S_0h = Sd$

Пусть S_0 — площадь грани ABC, h — высота, опущенная на эту грань, S — площадь грани ABD. С одной стороны, объём пирамиды $ABCD$ может быть найден по формуле:

$$V = \frac{1}{3}S_0h. \qquad (1)$$

С другой стороны, за основание можно принять грань ABD, и тогда

$$V = \frac{1}{3} Sd. \tag{2}$$

Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим:

$$S_0 h = Sd. \tag{3}$$

Из соотношения (3) можно найти искомую величину d.

Давайте посмотрим, как всё это работает в конкретной задаче. Разберём задачу, которую мы уже решали выше — в статье «Расстояние от точки до плоскости».

Задача 1. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ (с вершиной P) сторона основания равна 2 и высота равна 1. Найдите расстояние от точки D до плоскости BCP.

Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду $BCDP$ (рис. 2). Искомое расстояние d есть высота этой пирамиды, проведённая из вершины D.

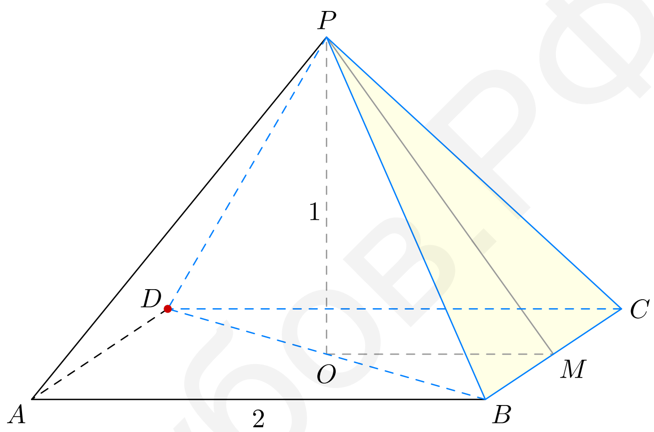

Рис. 2. К задаче 1

Высота пирамиды $BCDP$, проведённая из вершины P, совпадает с высотой PO исходной пирамиды. Согласно формуле (3) имеем:

$$S_{BCD} \cdot PO = S_{BCP} \cdot d. \tag{4}$$

По условию $PO = 1$. Легко находим $S_{BCD} = 2$. Остаётся вычислить площадь треугольника BCP. Его высоту PM найдём из треугольника POM: $PM = \sqrt{2}$, и тогда

$$S_{BCP} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PM = \sqrt{2}.$$

Подставляем найденные величины в (4):

$$2 \cdot 1 = \sqrt{2} \cdot d,$$

откуда

$$d = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Метод объёмов легко справляется с задачами, решить которые прежними методами было бы затруднительно.

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C.

Решение. Ситуация изображена на рис. 3. Подходящую треугольную пирамиду увидеть несложно — это пирамида $ABCB_1$. Надо найти её высоту d, опущенную из точки B.

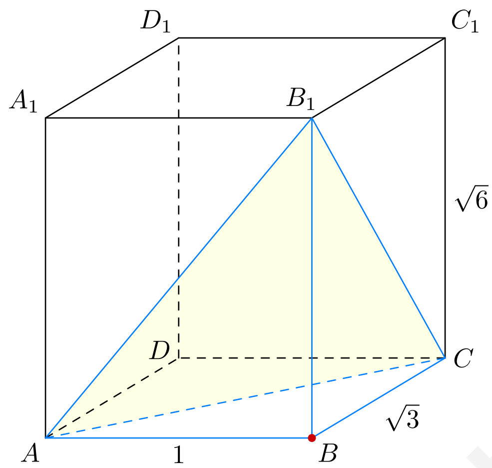

Рис. 3. К задаче 2

Снова имеем согласно (3):

$$S_{ABC} \cdot BB_1 = S_{AB_1C} \cdot d. \tag{5}$$

Очевидно, что

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь нужно найти площадь треугольника AB_1C. По теореме Пифагора вычисляем его стороны:

$$AC = 2, \quad AB_1 = \sqrt{7}, \quad B_1C = 3,$$

и по формуле Герона легко получаем:

$$S_{AB_1C} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}-1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляем найденные величины в (5):

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot d,$$

откуда

$$d = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Почему при решении этой задачи прежними методами мы столкнулись бы с проблемами? Дело в том, что в пирамиде $ABCB_1$ отсутствует симметрия — все рёбра пирамиды имеют различную длину. Соответственно, к проекции точки B на плоскость AB_1C не так-то просто «подобраться». Но методу объёмов, как видите, данная трудность нипочём — мы нашли искомую высоту d, даже не выясняя, куда именно проектируется точка B.

Освоив столь мощный метод нахождения расстояния от точки до плоскости, мы в качестве «дополнительной опции» немедленно получаем метод вычисления угла между прямой и плоскостью.

Угол между прямой и плоскостью

Идея вычисления угла между прямой и плоскостью очень проста и основана на предварительном вычислении расстояния от точки до плоскости. Давайте посмотрим на рис. 4.

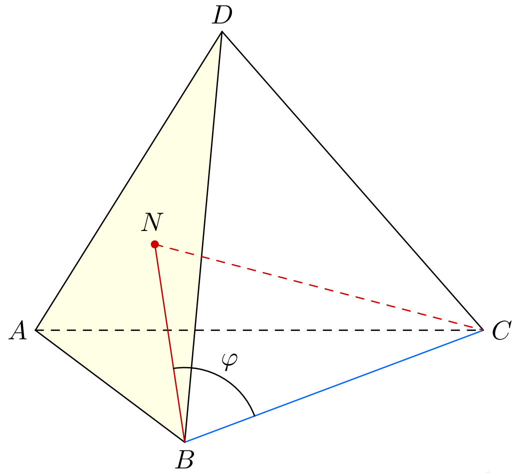

Рис. 4. Угол между прямой и плоскостью

Предположим, нам нужно найти угол φ между прямой BC и плоскостью ABD. Вычисляем сначала высоту CN, после чего находим:

$$\sin\varphi = \frac{CN}{BC}\,.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу с теми же исходными данными, что и предыдущая.

Задача 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C.

Решение. Ситуация показана на рис. 5.

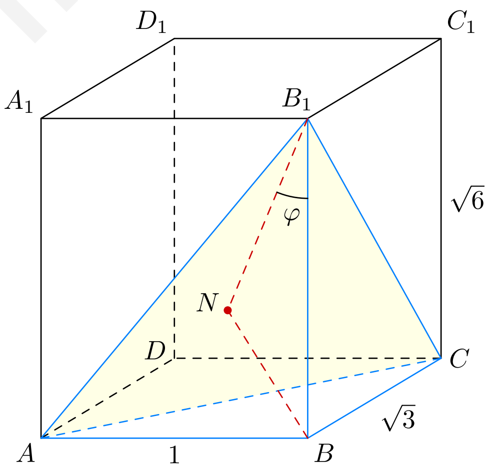

Рис. 5. К задаче 3

Расстояние от точки B до плоскости AB_1C мы уже нашли в предыдущей задаче:

$$BN = \frac{\sqrt{6}}{3}\,.$$

Остаётся найти искомый угол φ:

$$\sin\varphi = \frac{BN}{BB_1} = \frac{\sqrt{6}/3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\,.$$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}$.

Угол между плоскостями

При вычислении угла между плоскостями может оказаться полезной следующая формула для объёма треугольной пирамиды:

$$V = \frac{2}{3}\frac{S_1S_2}{a}\sin\varphi. \tag{6}$$

Здесь S_1 и S_2 — площади двух граней пирамиды, a — общее ребро этих граней, φ — угол между плоскостями этих граней.

Вывести данную формулу несложно. Давайте посмотрим на рис. 6.

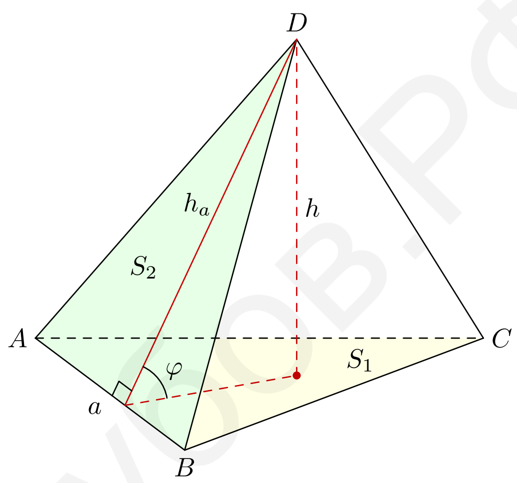

Рис. 6. К выводу формулы $V = \dfrac{2}{3}\dfrac{S_1S_2}{a}\sin\varphi$

Пусть S_1 и S_2 — площади треугольников ABC и ABD соответственно; пусть также $a = AB$ и φ — угол между плоскостями ABC и ABD. Из вершины D проведём высоту h пирамиды и высоту h_a грани ABD.

Легко видеть, что $h = h_a\sin\varphi$. Тогда для объёма пирамиды имеем:

$$V = \frac{1}{3}S_1h = \frac{1}{3}S_1h_a\sin\varphi. \tag{7}$$

С другой стороны, запишем формулу для площади S_2:

$$S_2 = \frac{ah_a}{2}\,,$$

откуда

$$h_a = \frac{2S_2}{a}\,.$$

Это выражение надо подставить в (7):

$$V = \frac{1}{3}S_1\frac{2S_2}{a}\sin\varphi = \frac{2}{3}\frac{S_1S_2}{a}\sin\varphi,$$

что нам и хотелось получить.

В качестве несложного упражнения возьмите параллелепипед из задачи 2 и с помощью формулы (6) найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC (ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$). А мы рассмотрим более трудную ситуацию в том же параллелепипеде.

Задача 4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и CB_1D_1.

Решение. Делаем чертёж (рис. 7). Искомый угол φ будем вычислять с помощью треугольной пирамиды AB_1CD_1.

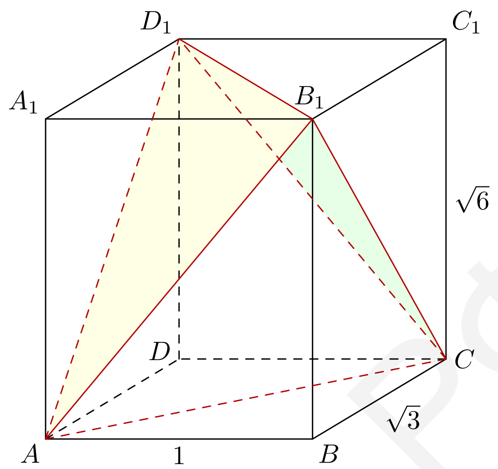

Рис. 7. К задаче 4

Согласно формуле (6) имеем:

$$V_{AB_1CD_1} = \frac{2}{3}\frac{S_{AB_1D_1}S_{CB_1D_1}}{B_1D_1}\sin\varphi. \tag{8}$$

Объём тетраэдра AB_1CD_1 мы найдём, «отрезая» от исходного параллелепипеда четыре равнообъёмных «куска»:

$$V_{AB_1CD_1} = V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} - V_{AA_1B_1D_1} - V_{ABCB_1} - V_{CB_1C_1D_1} - V_{ACDD_1}.$$

Объём параллелепипеда равен $1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$, а объём каждого «куска»:

$$V_{AA_1B_1D_1} = V_{ABCB_1} = V_{CB_1C_1D_1} = V_{ACDD_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$V_{AB_1CD_1} = 3\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Теперь найдём площади граней AB_1D_1 и CB_1D_1. Имеем:

$$AB_1 = CD_1 = \sqrt{7}, \quad AD_1 = CB_1 = 3, \quad B_1D_1 = 2.$$

Таким образом, треугольники AB_1D_1 и CB_1D_1 имеют стороны 2, 3 и $\sqrt{7}$. Площадь такого треугольника мы уже посчитали в задаче 2:

$$S_{AB_1D_1} = S_{CB_1D_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляем найденные величины в формулу (8):

$$\sqrt{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} \sin\varphi,$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Многовато вычислений, не правда ли? Но таков уж метод объёмов. Правда, в данной задаче можно не прибегать к этому мощному методу и обойтись прежними средствами — то есть, явно построить линейный угол двугранного угла и вычислить его из некоторого треугольника. Решение получится более коротким и изящным. Сможете ли вы найти его?

Расстояние между скрещивающимися прямыми

При нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми может помочь следующая формула для объёма тетраэдра:

$$V = \frac{1}{6}abd\sin\varphi. \tag{9}$$

Здесь a и b — скрещивающиеся рёбра тетраэдра, d и φ — соответственно расстояние и угол между ними (точнее, между прямыми, содержащими эти рёбра).

Дадим вывод этой формулы.

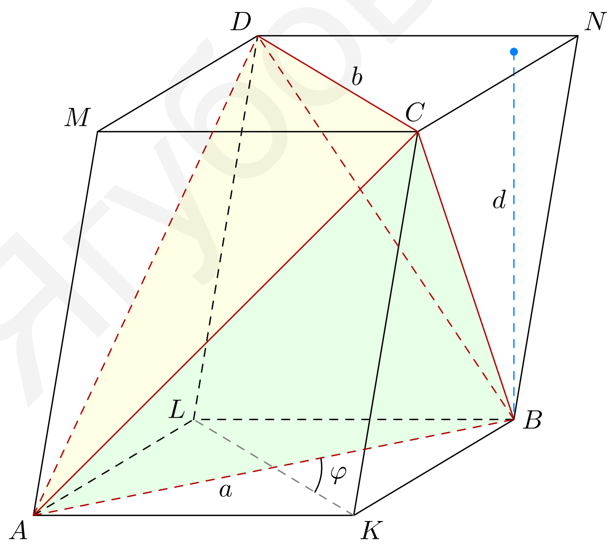

Рис. 8. К выводу формулы $V = \frac{1}{6}abd\sin\varphi$

На рис. 8 мы видим тетраэдр $ABCD$, достроенный до параллелепипеда $AKBLMCND$ следующим образом: через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная ребру, скрещивающемуся с данным ребром. Покажем, что объём V тетраэдра $ABCD$ равен одной трети объёма V_0 получившегося параллелепипеда.

Как и в задаче 4, отрезаем от параллелепипеда четыре тетраэдра:

$$V = V_0 - V_{AKBC} - V_{BCND} - V_{ALBD} - V_{ACMD}.$$

Все эти тетраэдры имеют одинаковый объём. В самом деле, если S и d — соответственно площадь основания и высота параллелепипеда, то

$$V_{AKBC} = V_{BCND} = V_{ALBD} = V_{ACMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot d = \frac{1}{6} Sd = \frac{V_0}{6}.$$

Тогда

$$V = V_0 - 4 \cdot \frac{V_0}{6} = \frac{V_0}{3}.$$

Пусть $a = AB$, $b = CD$. Расстояние между прямыми, проходящими через рёбра a и b, является расстоянием между параллельными плоскостями AKB и MCN, то есть высотой d нашего параллелепипеда. Угол между рёбрами a и b — это угол φ между прямыми AB и KL.

Для площади основания параллелепипеда имеем:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot KL \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} ab \sin\varphi$$

(есть такая формула планиметрии: площадь четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними). Объём параллелепипеда, стало быть, равен:

$$V_0 = S_0 d = \frac{1}{2} abd \sin\varphi.$$

Объём тетраэдра $ABCD$, как было показано выше, меньше в три раза, и тем самым мы приходим к нужной формуле (9).

Посмотрим, как работает данная формула в задаче, которую мы уже разбирали в статье «Расстояние между скрещивающимися прямыми».

Задача 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1C. Ребро куба равно 3.

Решение. Делаем чертёж (рис. 9). Искомое расстояние d будем вычислять при помощи тетраэдра A_1BCB_1.

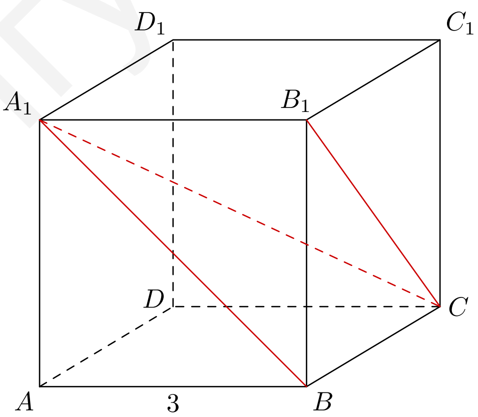

Рис. 9. К задаче 5

Объём V этого тетраэдра легко найти, приняв за основание грань BCB_1. Тогда:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

С другой стороны, согласно формуле (9) имеем:

$$V = \frac{1}{6} \cdot A_1B \cdot B_1C \cdot d \cdot \sin\varphi.$$

Здесь $A_1B = B_1C = 3\sqrt{2}$, угол φ между прямыми A_1B и B_1C равен 60° (почему?), так что

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3d\sqrt{3}}{2}\,.$$

Остаётся приравнять выражения для объёма:

$$\frac{9}{2} = \frac{3d\sqrt{3}}{2}\,,$$

и найти требуемое расстояние:

$$d = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.