

Угол между плоскостями

Величину угла между двумя различными плоскостями можно определить для любого взаимного расположения плоскостей.

Тривиальный случай — если плоскости параллельны. Тогда угол между ними считается равным нулю.

Нетривиальный случай — если плоскости пересекаются. Этому случаю и посвящено дальнейшее обсуждение. Сначала нам понадобится понятие двугранного угла.

Двугранный угол

Двугранный угол — это две полуплоскости с общей прямой (которая называется *ребром* двугранного угла). На рис. 1 изображён двугранный угол, образованный полуплоскостями π и σ ; ребром этого двугранного угла служит прямая a , общая для данных полуплоскостей.

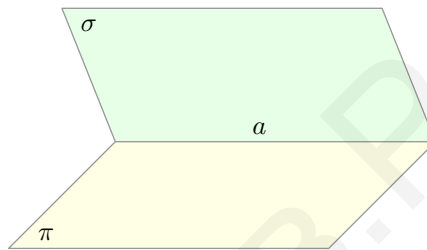


Рис. 1. Двугранный угол

Двугранный угол можно измерять в градусах или радианах — словом, ввести угловую величину двугранного угла. Делается это следующим образом.

На ребре двугранного угла, образованного полуплоскостями π и σ , возьмём произвольную точку M . Проведём лучи MA и MB , лежащие соответственно в данных полуплоскостях и перпендикулярные ребру (рис. 2).

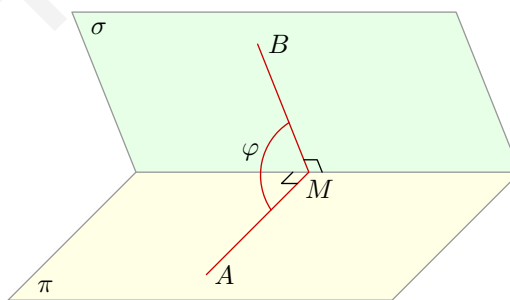


Рис. 2. Линейный угол двугранного угла

Полученный угол AMB — это *линейный угол двугранного угла*. Угол $\varphi = \angle AMB$ как раз и является угловой величиной нашего двугранного угла.

Определение. Угловая величина двугранного угла — это величина линейного угла данного двугранного угла.

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу (ведь они получаются друг из друга параллельным сдвигом). Поэтому данное определение корректно: величина φ не зависит от конкретного выбора точки M на ребре двугранного угла.

Определение угла между плоскостями

При пересечении двух плоскостей получаются четыре двугранных угла. Если все они имеют одинаковую величину (по 90°), то плоскости называются *перпендикулярными*; угол между плоскостями тогда равен 90° .

Если не все двугранные углы одинаковы (то есть имеются два острых и два тупых), то углом между плоскостями называется величина *острого* двугранного угла (рис. 3).

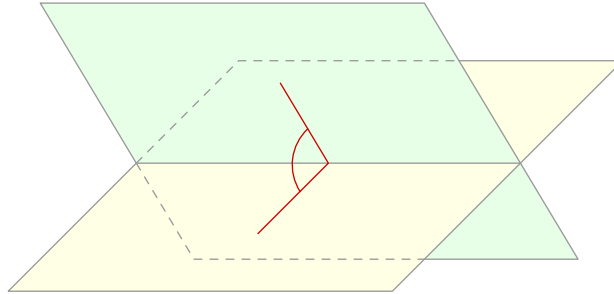


Рис. 3. Угол между плоскостями

Примеры решения задач

Разберём три задачи. Первая — простая, вторая и третья — примерно на уровне С2 на ЕГЭ по математике.

Задача 1. Найдите угол между двумя гранями правильного тетраэдра.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Проведём медианы AM и DM соответствующих граней, а также высоту тетраэдра DH (рис. 4).

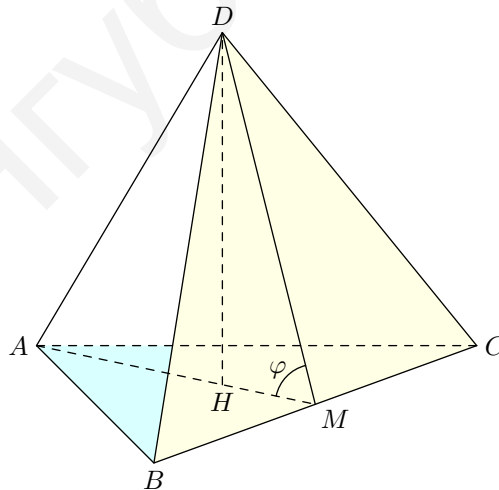


Рис. 4. К задаче 1

Будучи медианами, AM и DM являются также высотами равносторонних треугольников ABC и DBC . Поэтому угол $\varphi = \angle AMD$ есть линейный угол двугранного угла, образованного гранями ABC и DBC . Находим его из треугольника DHM :

$$\cos \varphi = \frac{HM}{DM} = \frac{\frac{1}{3}AM}{DM} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

Задача 2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) боковое ребро равно стороне основания. Точка K — середина ребра SA . Найдите угол между плоскостями KBC и ABC .

Решение. Прямая BC параллельна AD и тем самым параллельна плоскости ADS . Поэтому плоскость KBC пересекает плоскость ADS по прямой KL , параллельной BC (рис. 5).

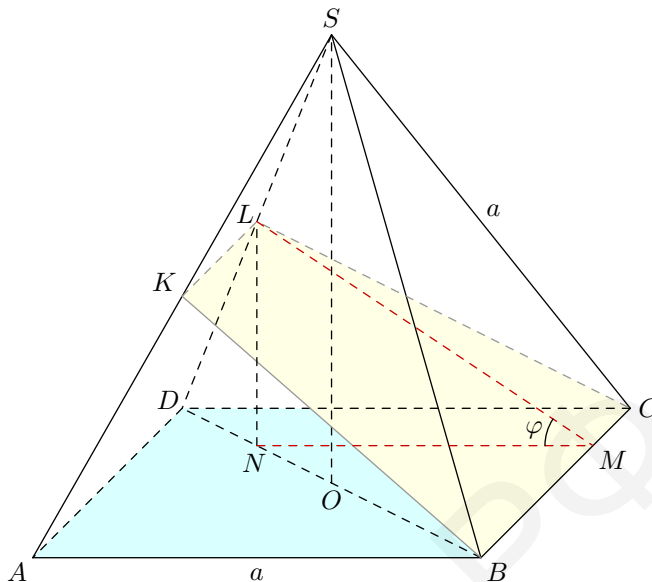


Рис. 5. К задаче 2

При этом KL будет также параллельна прямой AD ; следовательно, KL — средняя линия треугольника ADS , и точка L — середина DS .

Проведём высоту пирамиды SO . Пусть N — середина DO . Тогда LN — средняя линия треугольника DOS , и потому $LN \parallel SO$. Значит, LN — перпендикуляр к плоскости ABC .

Из точки N опустим перпендикуляр NM на прямую BC . Прямая NM будет проекцией наклонной LM на плоскость ABC . Из теоремы о трёх перпендикулярах следует тогда, что LM также перпендикулярна BC .

Таким образом, угол $\varphi = \angle LMN$ является линейным углом двугранного угла, образованного полуплоскостями KBC и ABC . Будем искать этот угол из прямоугольного треугольника LMN .

Пусть ребро пирамиды равно a . Сначала находим высоту пирамиды:

$$SO = \sqrt{DS^2 - DO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда

$$LN = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Далее, треугольник BMN подобен треугольнику BCD и $BN : BD = 3 : 4$. Стало быть,

$$MN = \frac{3}{4}CD = \frac{3a}{4}.$$

Теперь находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{LN}{MN} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\arctg \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно стороне основания. Точка K — середина ребра BB_1 . Найдите угол между плоскостями A_1KC и ABC .

Решение. Пусть L — точка пересечения прямых A_1K и AB . Тогда плоскость A_1KC пересекает плоскость ABC по прямой CL (рис. 6).

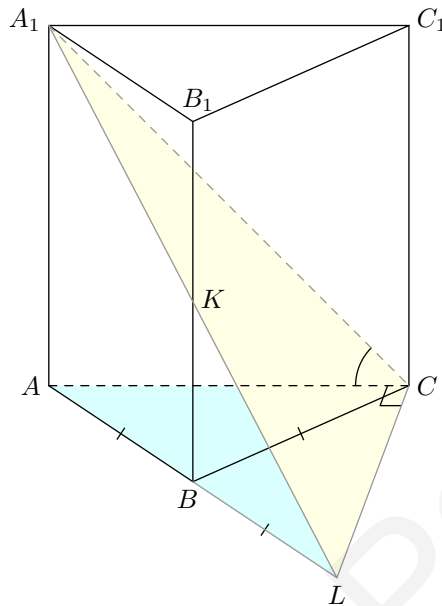


Рис. 6. К задаче 3

Треугольники A_1B_1K и KBL равны по катету и острому углу. Следовательно, равны и другие катеты: $A_1B_1 = BL$.

Рассмотрим треугольник ACL . В нём $BA = BC = BL$. Угол CBL равен 120° ; стало быть, $\angle BCL = 30^\circ$. Кроме того, $\angle BCA = 60^\circ$. Поэтому $\angle ACL = \angle BCA + \angle BCL = 90^\circ$.

Итак, $LC \perp AC$. Но прямая AC служит проекцией прямой A_1C на плоскость ABC . По теореме о трёх перпендикулярах заключаем тогда, что $LC \perp A_1C$.

Таким образом, угол A_1CA — линейный угол двугранного угла, образованного полуплоскостями A_1KC и ABC . Это и есть искомый угол. Из равнобедренного прямоугольного треугольника A_1AC мы видим, что он равен 45° .

Ответ: 45°