Взаимное расположение прямой и плоскости

Возможны три варианта взаимного расположения прямой и плоскости (рис. 1).

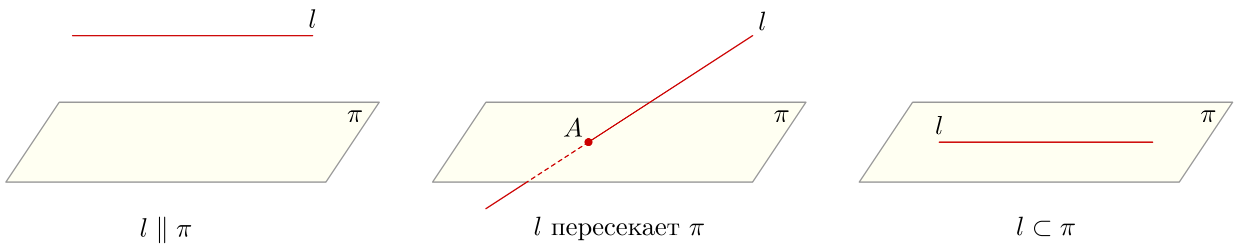

Рис. 1. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Прямая *параллельна* плоскости, если она не имеет с плоскостью общих точек. На левом рисунке прямая l параллельна плоскости π.

2. Прямая *пересекает* плоскость, если она имеет с плоскостью ровно одну общую точку. На рисунке в центре прямая l пересекает плоскость π в точке A.

3. Прямая *лежит* в плоскости, если каждая точка прямой принадлежит этой плоскости. На правом рисунке прямая l лежит в плоскости π. В таком случае говорят ещё, что плоскость π *проходит* через прямую l.

Параллельность прямой и плоскости

Как распознать случай параллельности прямой и плоскости? Для этого имеется замечательно простое утверждение.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая l параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то прямая l параллельна этой плоскости.

Давайте посмотрим, как работает этот признак. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, в которой проведена плоскость A_1BC (рис. 2).

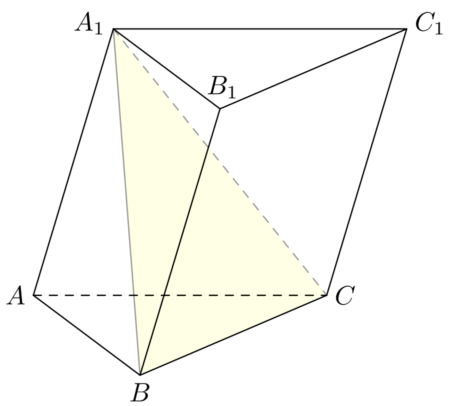

Рис. 2. Прямая B_1C_1 параллельна плоскости A_1BC

Поскольку боковые грани призмы являются параллелограммами, имеем $B_1C_1 \parallel BC$. Но прямая BC лежит в плоскости A_1BC. Поэтому в силу признака параллельности прямой и плоскости мы заключаем, что прямая B_1C_1 параллельна плоскости A_1BC.

Другое важное утверждение, которое нередко используется в задачах, — это теорема о пересечении двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости.

Теорема. Пусть прямая l параллельна плоскости π. Если плоскость σ проходит через прямую l и пересекает плоскость π по прямой m, то $m \parallel l$ (рис. 3).

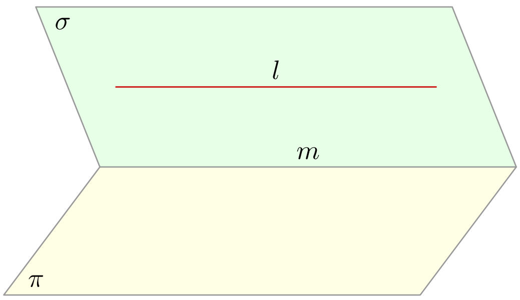

Рис. 3. К теореме

Мы не будем доказывать эту теорему: она содержится в школьной программе, и на экзамене никто не потребует от вас её доказательства. Лучше посмотрим, как это теорема используется в конкретной ситуации.

Задача. В правильной четырёхугольной пирамиде $ABCDS$ (с вершиной S) точка M — середина ребра SC. Постройте сечение пирамиды плоскостью ABM.

Решение. Сечение изображено на рис. 4.

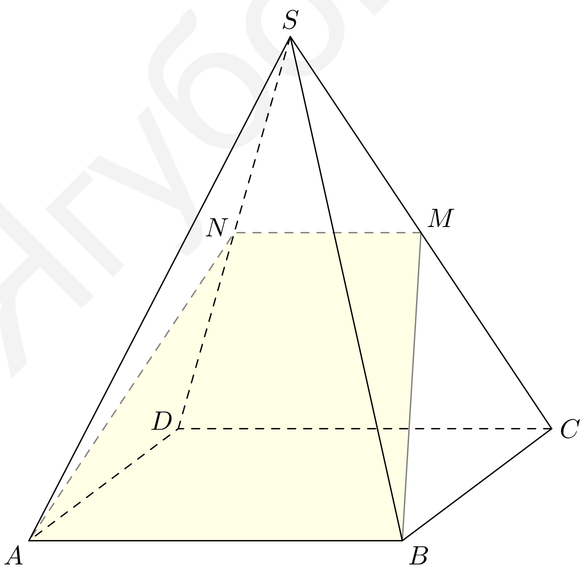

Рис. 4. К задаче

Самое главное тут — выяснить, по какой прямой секущая плоскость ABM пересекает плоскость SCD. Для этого заметим, что $AB \parallel CD$, и по признаку параллельности прямой и плоскости имеем $AB \parallel SCD$. А из теоремы следует тогда, что прямая MN пересечения плоскостей ABM и SCD параллельна прямой AB (и, стало быть, прямой CD).

Таким образом, MN — средняя линия треугольника SCD. Сечением пирамиды будет трапеция $ABMN$.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Важным частным случаем пересечения прямой и плоскости является их *перпендикулярность*. Интуитивно вам совершенно ясно, что значит «прямая перпендикулярна плоскости», но определение нужно знать обязательно.

Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Предположим, в конкретной задаче нам хочется доказать, что прямая l перпендикулярна плоскости π. Как действовать? Не будем же мы перебирать *все* прямые, лежащие в плоскости π! К счастью, это и не нужно. Оказывается, достаточно предъявить две пересекающиеся прямые плоскости π, перпендикулярные прямой l.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Давайте смотреть, как работает этот признак.

Задача. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильная треугольная пирамида (рис. 5). Докажем, например, что $AD \perp BC$.

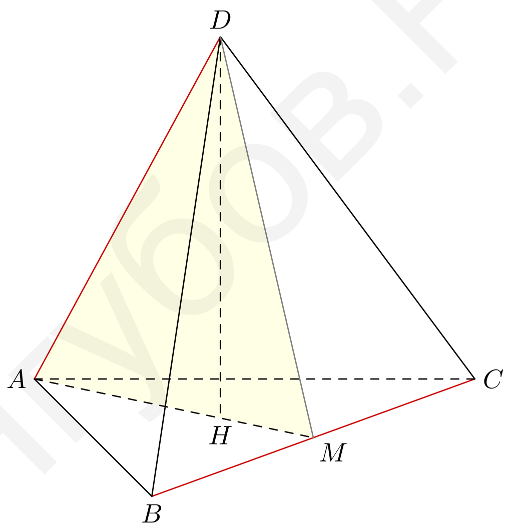

Рис. 5. К задаче

Пусть точка M — середина ребра BC. Рассмотрим плоскость ADM. Ясно, что высота DH нашей пирамиды лежит в этой плоскости (поскольку H лежит на медиане AM)[1].

Докажем, что прямая BC перпендикулярна плоскости ADM. Для этого нам нужно предъявить две пересекающие прямые, лежащие в плоскости ADM и перпендикулярные BC. Какие же это прямые?

Во-первых, это прямая DH. В самом деле, будучи высотой пирамиды, DH перпендикулярна плоскости ABC. По определению это означает, что DH перпендикулярна *любой* прямой, лежащей в плоскости ABC — в частности, прямой BC.

Во-вторых, это прямая AM. Действительно, будучи медианой равностороннего треугольника ABC, отрезок AM является его высотой и потому перпендикулярен BC.

[1]Здесь молчаливо используется одно из базовых утверждений стереометрии, которое часто принимается в качестве аксиомы: *если прямая проходит через две точки плоскости, то она лежит в этой плоскости.* В нашем случае точки D и H лежат в плоскости ADM — стало быть, и прямая DH лежит в данной плоскости.

Итак, мы убедились, что $BC \perp DH$ и $BC \perp AM$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости мы заключаем, что $BC \perp ADM$. Стало быть, BC перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ADM — в частности, прямой AD. Это мы и хотели доказать.

Обратите внимание, какая схема рассуждений реализована в данной задаче. Допустим, мы хотим доказать, что прямая l перпендикулярна прямой m. Действуем следующим образом.

1. Берём подходящую плоскость π, в которой лежит прямая l.

2. В плоскости π находим две пересекающиеся прямые a и b, такие, что $m \perp a$ и $m \perp b$.

3. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости делаем вывод, что $m \perp \pi$.

4. По определению перпендикулярности прямой и плоскости заключаем, что прямая m перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости π. В частности, $m \perp l$, что и требовалось.

Запомните эту схему — она часто работает в экзаменационных задачах. Следующая статья посвящена важному применению этой схемы — теореме о трёх перпендикулярах.