

Расстояние от точки до плоскости

Если точка не принадлежит плоскости, то *расстояние от точки до плоскости* — это длина перпендикуляра, проведённого из точки на данную плоскость. На рис. 1 показано расстояние d от точки M до плоскости π .

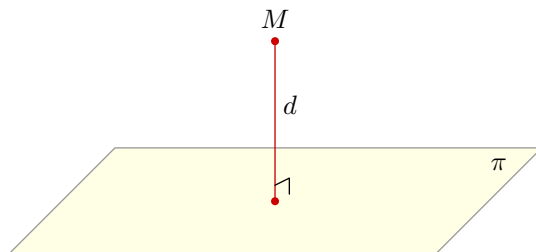


Рис. 1. Расстояние от точки до плоскости

Если точка принадлежит плоскости, то расстояние от точки до плоскости равно нулю.

Примеры решения задач

Разберём четыре задачи. В них мы проиллюстрируем основные идеи, встречающиеся на ЕГЭ по математике в задачах С2, где требуется найти расстояние от точки до плоскости.

Задача 1. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 2. В пространстве взята точка D такая, что $AD = BD = 2$, $CD = 1$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC .

Решение. Искомое расстояние — это высота пирамиды $ABCD$, проведённая из точки D .

Пусть M — середина AB . Проведём перпендикуляр DH на прямую CM (рис. 2). Покажем, что DH будет высотой нашей пирамиды.

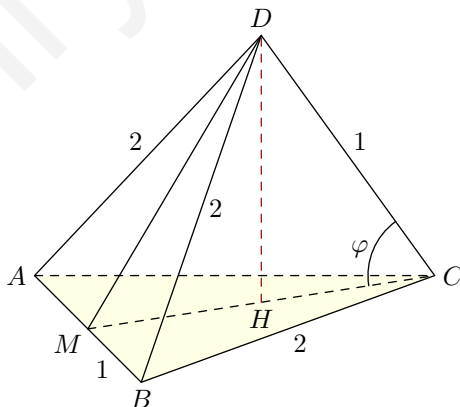


Рис. 2. К задаче 1

Поскольку медиана CM является высотой треугольника ABC , имеем $AB \perp CM$. Точно так же $AB \perp DM$ (ведь треугольник ABD тоже равносторонний). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости получаем, что AB перпендикулярна плоскости MDC . Значит, AB перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости — в частности, прямой DH .

Итак, $DH \perp CM$ (по построению) и $DH \perp AB$. Отсюда получаем $DH \perp ABC$, что мы и хотели.

Из треугольников BCM и BDM легко находим: $CM = DM = \sqrt{3}$. Теперь запишем теорему косинусов для стороны DM треугольника DMC :

$$3 = 1 + 3 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cos \varphi$$

(здесь $\varphi = \angle DCM$). Отсюда $\cos \varphi = \sqrt{3}/6$, $\sin \varphi = \sqrt{33}/6$ и

$$DH = 1 \cdot \sin \varphi = \frac{\sqrt{33}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{33}}{6}$.

Задача 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 1. Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости ABC_1 .

Решение. Поскольку $A_1B_1 \parallel AB$, прямая A_1B_1 параллельна плоскости ABC_1 . Следовательно, искомое расстояние d есть расстояние от *любой* точки прямой A_1B_1 до плоскости ABC_1 (ведь все эти расстояния равны друг другу). Поэтому мы можем выбрать наиболее удобную точку на прямой A_1B_1 . Это, несомненно, точка N — середина отрезка A_1B_1 (рис. 3).

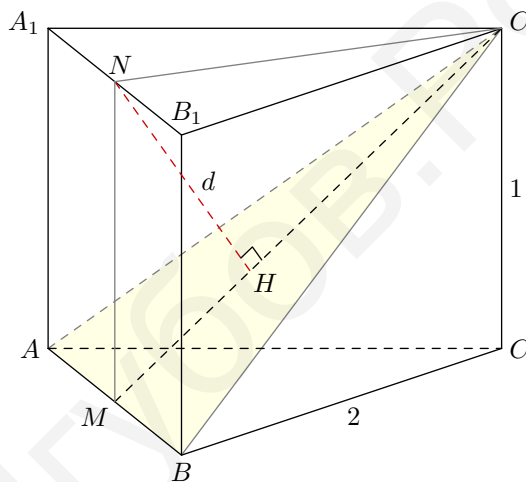


Рис. 3. К задаче 2

Пусть M — середина AB . Проведём NH перпендикулярно C_1M . Покажем, что $NH \perp ABC_1$.

В равнобедренном треугольнике ABC_1 медиана C_1M является одновременно высотой, так что $AB \perp C_1M$. Кроме того, $AB \perp MN$, так как призма прямая. Следовательно, прямая AB перпендикулярна плоскости C_1MN — и, в частности, прямой NH , лежащей в этой плоскости.

Итак, $NH \perp C_1M$ (по построению) и $NH \perp AB$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая NH перпендикулярна плоскости ABC_1 , что мы и хотели показать. Стало быть, искомое расстояние d равно длине отрезка NH .

Дальше несложно. Имеем: $MN = 1$, $C_1N = \sqrt{3}$ и

$$C_1M = \sqrt{C_1N^2 + MN^2} = 2,$$

откуда

$$d = \frac{C_1N \cdot MN}{C_1M} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Повторим ключевую идею данной задачи: от исходной точки B_1 перейти к другой точке, находящейся на таком же расстоянии от плоскости ABC_1 , но более удобной для вычислений. В приведённом решении мы из точки B_1 сместились параллельно плоскости в точку N .

Возможен и другой вариант смещения, который также может оказаться полезным при решении задач. Он основан на следующем простом факте:

- если плоскость проходит через середину отрезка, то концы отрезка равноудалены от данной плоскости.

Так, на рис. 4 мы видим плоскость π , проходящую через середину K отрезка PQ . Проведём перпендикуляры PA и QB на данную плоскость.

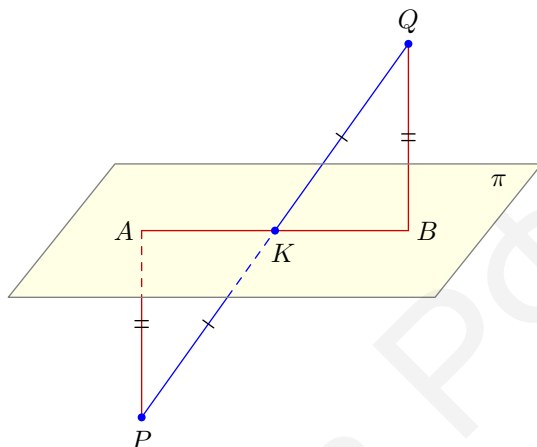


Рис. 4. Концы отрезка равноудалены от плоскости

Прямоугольные треугольники PKA и QKB равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $PA = QB$, что и требовалось.

Вернёмся к задаче 2. Заметим, что отрезок B_1C делится плоскостью ABC_1 пополам (рис. 5). Следовательно, расстояние от точки B_1 до плоскости ABC_1 равно расстоянию от точки C до этой плоскости.

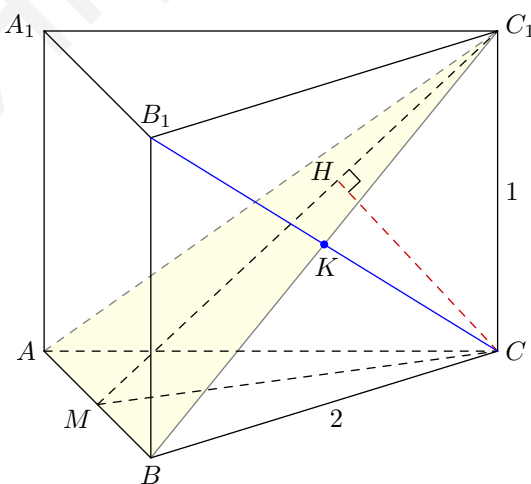


Рис. 5. К задаче 2

Итак, из точки B_1 переходим в точку C . Аналогично доказываем, что расстояние от точки C до плоскости ABC_1 равно длине перпендикуляра CH , проведённого к C_1M , — и далее решение повторяется без каких-либо изменений.

Сформулированный выше факт о равноудалённости концов отрезка от плоскости, проходящей через его середину, является частным случаем следующей (тоже очень простой) теоремы.

Теорема. Пусть прямая пересекает плоскость π в точке O . Возьмём любые две точки X и Y на этой прямой (отличные от O), и пусть x и y — соответственно расстояния от данных точек до плоскости π . Тогда $x : y = OX : OY$.

Доказательство. Если прямая перпендикулярна плоскости π , то доказывать нечего. Пусть прямая является наклонной (рис. 6). Проведём перпендикуляры XA и YB к плоскости π .

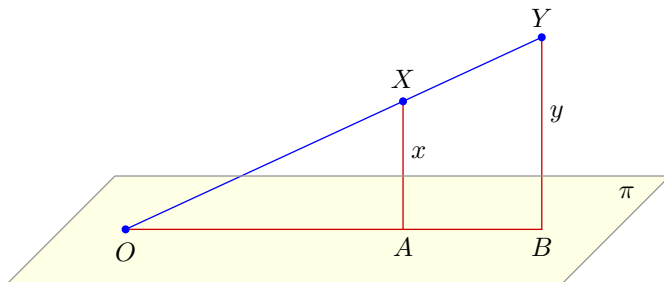


Рис. 6. $OX : OY = x : y$

Из подобия треугольников OXA и OYB получаем $OX : OY = XA : YB$, а последнее отношение как раз и есть $x : y$. Теорема доказана.

Полезность этой теоремы состоит вот в чём. Предположим, что мы ищем расстояние от точки X до плоскости π . Тогда, взяв некоторую точку $O \in \pi$, можно сместиться вдоль прямой OX в более удобную точку Y с пропорциональным изменением расстояния до нашей плоскости.

Задача 3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 2 и высота равна 1. Найдите расстояние от точки D до плоскости BCS .

Решение. Пусть ST — высота пирамиды (рис. 7). Точка T является серединой отрезка DB . Тогда, согласно нашей теореме, искомое расстояние d от точки D до плоскости BCS равно удвоенному расстоянию от точки T до этой плоскости.

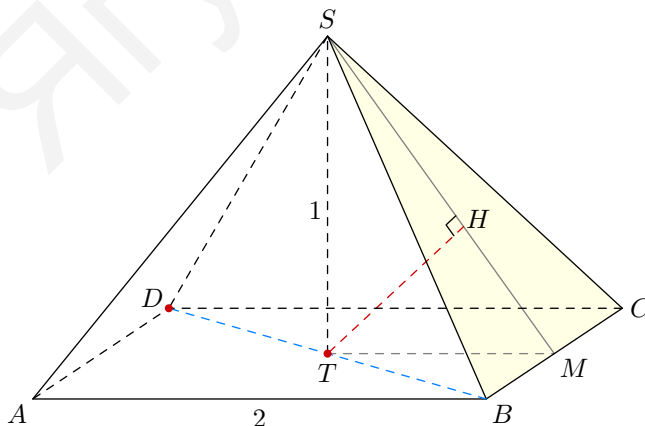


Рис. 7. К задаче 3

А расстояние от точки T до плоскости BCS равно высоте TH треугольника STM (точка M — середина BC). Действительно, TH перпендикулярна также прямой BC ($BC \perp TM$, $BC \perp SM \Rightarrow BC \perp STM \Rightarrow BC \perp TH$), и потому TH — перпендикуляр к плоскости BCS .

Из треугольника STM легко находим: $TH = \sqrt{2}/2$. Тогда $d = 2 \cdot TH = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Задача 4. Точка M — середина ребра DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ребро куба равно 6. Найдите расстояние от точки M до плоскости $BC_1 D$.

Решение. Здесь можно осуществить переход $M \rightarrow D_1 \rightarrow C$ (рис. 8).

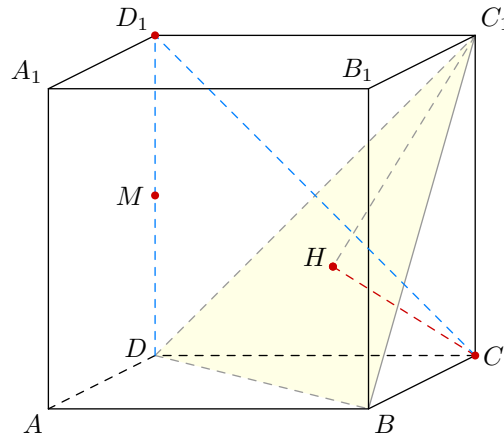


Рис. 8. К задаче 4

Именно, пусть искомое расстояние от точки M до плоскости $BC_1 D$ равно d . Тогда расстояние от точки D_1 до этой плоскости равно $2d$. Отрезок $D_1 C$ делится плоскостью $BC_1 D$ пополам, поэтому расстояние от точки C до данной плоскости также равно $2d$.

С другой стороны, расстояние от точки C до плоскости $BC_1 D$ есть высота CH треугольной пирамиды $BC_1 DC$. Основанием этой пирамиды служит равносторонний треугольник $BC_1 D$ со стороной $6\sqrt{2}$. Боковые рёбра пирамиды равны 6. Стало быть, данная пирамида является правильной, и точка H — центр треугольника $BC_1 D$.

Отрезок $C_1 H$ есть радиус окружности, описанной вокруг треугольника $BC_1 D$. Имеем:

$$C_1 H = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}.$$

Тогда

$$CH = \sqrt{CC_1^2 - C_1 H^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$d = \frac{CH}{2} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.