

Окружность

Окружность — это геометрическое место точек плоскости, удалённых от данной точки на данное (ненулевое) расстояние.

На рис. 1 мы видим окружность — геометрическое место точек M , удалённых от точки O на фиксированное расстояние R .

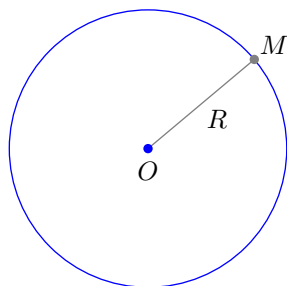


Рис. 1. Окружность с центром O и радиусом R

Точка O называется *центром* окружности, а величина $R = OM$ — *радиусом* окружности. Кроме того, радиусом называется сам отрезок OM .

Хорда — это отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*. Также называется диаметром величина, равная удвоенному радиусу окружности.

Описанная окружность

Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется *описанной* вокруг этого треугольника.

Мы уже знаем (см. листок «[Геометрическое место точек](#)»), что *вокруг любого треугольника можно описать единственную окружность*, и *центр описанной окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника* (рис. 2).

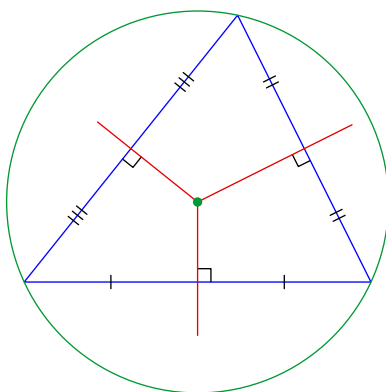


Рис. 2. Описанная окружность

(Напомним, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка. Поэтому серединные перпендикуляры к сторонам треугольника обязаны пересечься в одной точке; эта точка, будучи равноудалена от всех трёх вершин треугольника, служит центром описанной окружности.)

Касательная к окружности

Касательная к окружности — это прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку (которая называется *точкой касания*).

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

ПРИЗНАК КАСАТЕЛЬНОЙ. Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в данную точку, то эта прямая является касательной к окружности.

Обе ситуации проиллюстрированы на рис. 3.

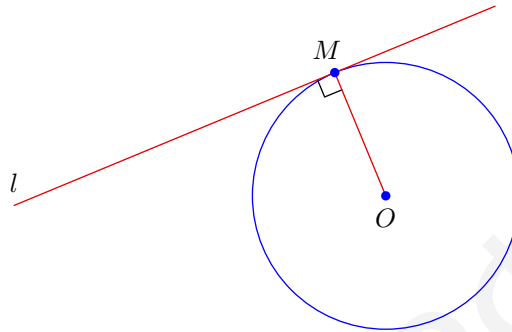


Рис. 3. l — касательная $\Leftrightarrow l \perp OM$

Задача 1. Докажите, что отрезки касательных, проведённых из данной точки к окружности, равны друг другу.

Решение. Пусть точка A лежит вне окружности. Проведём касательные AB и AC (B и C — точки касания; рис. 4).

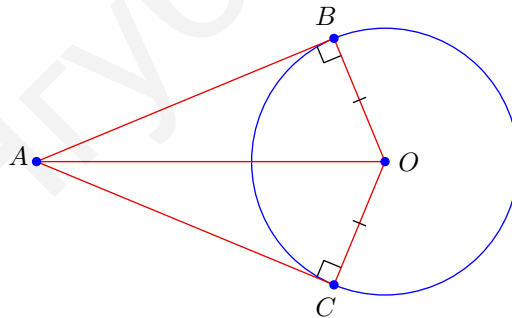


Рис. 4. К задаче 1

Треугольники AOB и AOC — прямоугольные с общей гипотенузой AO . Катеты OB и OC являются радиусами окружности и потому равны друг другу. Следовательно, $\triangle AOB = \triangle AOC$ по гипотенузе и катету, и потому $AB = AC$ — что требовалось.

Рассмотренная задача проста, но полученный результат чрезвычайно важен. Равенство отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, очень часто используется при решении задач.

Вписанная окружность

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Из свойства касательной следует, что радиусы вписанной окружности, проведённые в точки касания, перпендикулярны сторонам треугольника. Следовательно, центр вписанной окружности равноудалён от всех трёх сторон треугольника и поэтому совпадает с точкой пересечения биссектрис.

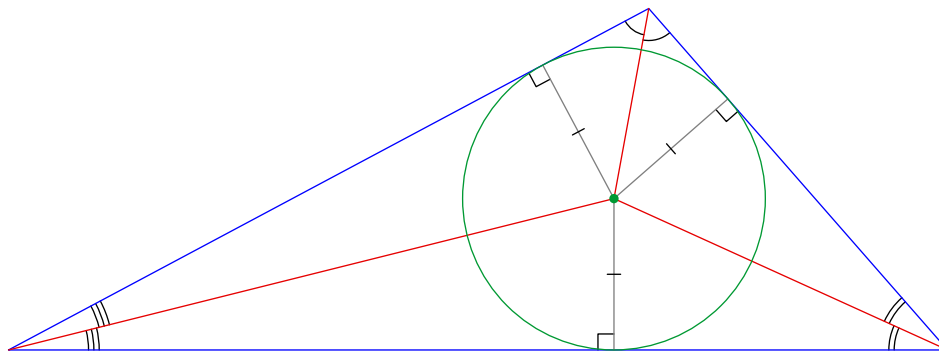


Рис. 5. Вписанная окружность

Таким образом, в любой треугольник можно вписать единственную окружность, центр которой есть точка пересечения биссектрис треугольника (рис. 5). Этот факт мы уже отметили в самом конце листка «Геометрическое место точек».

Задача 2. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке K . Найдите AK , если $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 2$.

Решение. Воспользуемся равенством отрезков касательных к окружности, проведённых из одной точки (рис. 6)

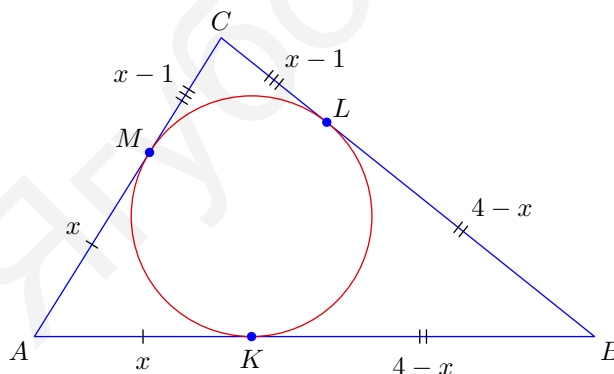


Рис. 6. К задаче 2

Пусть $AK = x$. Тогда и $AM = x$. Отрезок BK равен $4 - x$. Но тогда и $BL = 4 - x$. Далее находим: $CL = 3 - BL = 3 - (4 - x) = x - 1$. Но тогда и $CM = x - 1$. Получаем уравнение:

$$x + (x - 1) = 2,$$

откуда $x = 3/2$.

Ответ: $3/2$.