Условный экстремум

В предыдущей статье «Область значений функции» мы, в частности, выяснили, как в некоторых случаях найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$. Сейчас мы рассмотрим более общую ситуацию: нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных $f(x, y)$ при дополнительном условии, что эти переменные связаны друг с другом теми или иными соотношениями. Это и есть задача на *условный экстремум*[1].

Задача 1. Найти наименьшее расстояние от начала координат до точек прямой $3x + 2y = 1$.

Решение. Расстояние от начала координат до точки (x, y) равно $\sqrt{x^2+y^2}$. Вместо минимизации расстояния можно минимизировать его квадрат, поэтому задача ставится так: найти наименьшее значение величины

$$s = x^2 + y^2 \tag{1}$$

при условии

$$3x + 2y = 1. \tag{2}$$

Из (2) выражаем y и подставляем это выражение в (1):

$$s = x^2 + \left(\frac{1-3x}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\,,$$

то есть

$$13x^2 - 6x + 1 - 4s = 0.$$

Нам нужно найти наименьшее s, при котором данное квадратное уравнение имеет решение. Как это сделать — очевидно:

$$D = 52s - 4 \geqslant 0,$$

откуда $s \geqslant \frac{1}{13}$. Следовательно, наименьшее значение s равно $\frac{1}{13}$, а искомое наименьшее расстояние равно $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x + 2y$, если x и y удовлетворяют условию $3x^2 - 2xy + 4y^2 \leqslant 5$.

Решение. Нам нужно найти наибольшее и наименьшее значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x + 2y = a, \\ 3x^2 - 2xy + 4y^2 \leqslant 5 \end{cases} \tag{3}$$

имеет решения.

Удобно из равенства системы (3) выразить $2y$:

$$2y = a - x, \tag{4}$$

и подставить в неравенство этой системы:

$$3x^2 - x(a-x) + (a-x)^2 \leqslant 5,$$

[1] Вообще, нахождение условных экстремумов функций нескольких переменных — классическая тема высшей математики. Однако некоторые задачи вам доступны уже сейчас!

то есть
$$5x^2 - 3ax + a^2 - 5 \leqslant 0. \tag{5}$$

Данное неравенство имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен:
$$D = -11a^2 + 100 \geqslant 0,$$
откуда
$$-\frac{10}{\sqrt{11}} \leqslant a \leqslant \frac{10}{\sqrt{11}}\,.$$

При таких и только при таких a ввиду (4) будет иметь решения и система (3). Следовательно, наибольшее из подходящих a равно $\frac{10}{\sqrt{11}}$, а наименьшее равно $-\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $\frac{10}{\sqrt{11}}$ и $-\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Задача 3. (*МГУ, геологич. ф-т, 2007*) Числа x, y, z таковы, что
$$\begin{cases} x + 2 = z + y, \\ xy + z^2 + 22 - 9z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найдите это максимальное значение.

Решение. Найдём сначала множество возможных значений z. Именно, воспринимаем z как параметр и ищем, при каких z данная система имеет решения относительно x и y.

Выражаем y из первого уравнения:
$$y = x - z + 2, \tag{6}$$
и подставляем во второе. После преобразований получим:
$$x^2 + (2 - z)x + z^2 - 9z + 22 = 0.$$

Чтобы это квадратное уравнение имело корни, его дискриминант должен быть неотрицательным:
$$D = -3z^2 + 32z - 84 \geqslant 0,$$
откуда
$$\frac{14}{3} \leqslant z \leqslant 6. \tag{7}$$

Ввиду (6) заключаем, что исходная система имеет решения, если и только если z принадлежит отрезку (7).

Теперь перепишем нашу систему в следующем виде:
$$\begin{cases} x - y = z - 2, \\ xy = 9z - z^2 - 22. \end{cases}$$

Теперь имеем:
$$s = x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (z - 2)^2 + 2\left(9z - z^2 - 22\right),$$
то есть
$$s = -z^2 + 14z - 40. \tag{8}$$

Графиком функции $s(z)$ служит парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы равна 7, поэтому на отрезке (7) функция (8) является возрастающей и достигает наибольшего значения на правом конце этого отрезка:

$$s_{\max} = s(6) = 8.$$

Ответ: 8 при $z = 6$.

Задача 4. (*Олимпиада «Ломоносов», 2007*) Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

Решение. Добавим для удобства к нашему множеству его границу (искомый угол от этого не изменится). Таким образом, мы имеем дело с фигурой S, заданной на координатной плоскости нестрогим неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 \leqslant 0. \tag{9}$$

Расположение и вид фигуры S схематически показаны на рис. 1. Мы ищем угол φ между двумя «крайними» прямыми, проходящими через точки фигуры S и начало координат[2].

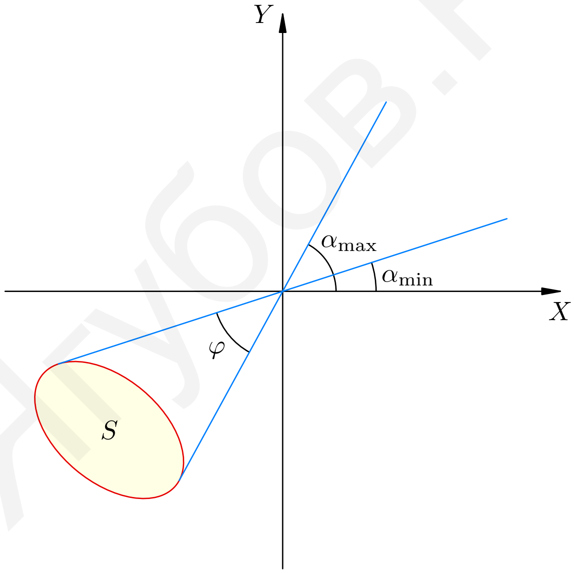

Рис. 1. К задаче 4

Покажем прежде всего, что фигура S целиком расположена в третьей четверти (как это и показано на рисунке). Неравенство (9) является квадратным по y:

$$y^2 + (x + 2)y + 14x^2 + 14x + 4 \leqslant 0. \tag{10}$$

Для всех точек фигуры S дискриминант квадратного трёхчлена (10) неотрицателен:

$$D = -55x^2 - 52x - 12 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 55x^2 + 52x + 12 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{6}{11} \leqslant x \leqslant -\frac{2}{5}\,.$$

[2]На самом деле фигура S — это эллипс с внутренними точками, а ищем мы угол между двумя касательными к эллипсу, проходящими через начало координат. Распознавать эллипс и другие кривые второго порядка вы научитесь в вузовском курсе аналитической геометрии.

Аналогично, неравенство (9) является квадратным по x:

$$14x^2 + (y + 14)x + y^2 + 2y + 4 \leqslant 0,$$

и дискриминант его также неотрицателен:

$$D = -55y^2 - 84y - 28 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-42 - \sqrt{224}}{55} \leqslant y \leqslant \frac{-42 + \sqrt{224}}{55}\,.$$

Мы видим, что проекциями фигуры S на координатные оси X и Y служат соответственно отрезки $\left[-\frac{6}{11}; -\frac{2}{5}\right]$ и $\left[\frac{-42-\sqrt{224}}{55}; \frac{-42+\sqrt{224}}{55}\right]$, расположенные на отрицательных полуосях. Значит, фигура S действительно находится целиком в третьей четверти, и поэтому видна из начала координат под острым углом.

Теперь заметим, что для каждой точки (x, y) фигуры S отношение y/x есть тангенс угла α между прямой, соединяющей эту точку с началом координат, и осью X. На рис. 1 показан наибольший $\alpha_{\max}$ и наименьший $\alpha_{\max}$ из углов α; их разность

$$\varphi = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$$

и есть искомый угол.

Таким образом, нас интересует наибольшее и наименьшее значение величины

$$k = \frac{y}{x}$$

при условии, что x и y связаны неравенством (9). Подставляя $y = kx$ в неравенство (9), получим:

$$(k^2 + k + 14)x^2 + (2k + 14)x + 4 \leqslant 0.$$

При фиксированном k это неравенство задаёт отрезок значений x для тех точек фигуры S, которые лежат на прямой $y = kx$. Дискриминант должен быть неотрицательным:

$$D = -3k^2 + 10k - 7 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant k \leqslant \frac{7}{3}\,.$$

Теперь находим:

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{7}{3}\,, \quad \alpha_{\min} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

откуда

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}\,.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}$.