

Рациональные уравнения и неравенства с параметрами

Напомним, что *рациональной функцией* называется отношение двух многочленов. Уравнение или неравенство называется *рациональным*, если в нём рациональная функция сравнивается с нулём (или с другой рациональной функцией).

При решении рациональных уравнений нужно считаться с тем, что знаменатели дробей могут обращаться в нуль. Рациональные неравенства решаются [методом интервалов](#).

Задача 1. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$\frac{x - a}{x^2 - 3x + 2} = 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - a = 0, \\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ x \neq 1, 2. \end{cases}$$

Ответ: Если $a \neq 1, 2$, то $x = a$; если $a = 1$ или $a = 2$, то решений нет.

Задача 2. При каких a уравнение

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x - 2} = 0$$

имеет единственный корень?

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Данная система будет иметь единственное решение в одном из двух случаев:

- 1) уравнение системы имеет единственный корень, не равный 2;
- 2) уравнение системы имеет два корня, один из которых равен 2.

Первый случай отвечает нулевому дискриминанту: $D = a^2 - 4 = 0$, то есть $a = \pm 2$. Если $a = 2$, то уравнение системы имеет корень $x = -1$; аналогично, если $a = -2$, то $x = 1$. В обоих случаях имеем $x \neq 2$, так что значения $a = \pm 2$ подходят.

Во втором случае давайте просто подставим $x = 2$ в уравнение системы: $4 + 2a + 1 = 0$, откуда $a = -\frac{5}{2}$. Тем самым мы нашли (единственное) значение a , при котором уравнение системы имеет корень $x = 2$. При данном a уравнение системы принимает вид $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$, и второй его корень $x = \frac{1}{2}$. Это значение x и будет единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $a = \pm 2, -\frac{5}{2}$.

Задача 3. (МГУ, химический ф-т, 2003) Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x - a} > 0$$

содержит точку $x = 1$.

Решение. Если $a = 0$, то данное неравенство принимает вид $\frac{0}{x} > 0$ и решений не имеет.

Если $a > 0$, то множество решений неравенства есть $x > a$. Это множество содержит точку $x = 1$ при $a < 1$. Итак, в данном случае имеем подходящие a : $0 < a < 1$.

Если $a < 0$, то множество решений неравенства есть $x < a$. Это множество состоит из отрицательных чисел и не может содержать точку $x = 1$. Поэтому никакое $a < 0$ не годится.

Ответ: $a \in (0; 1)$.

Задача 4. Найти все a , при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $1 \leq x \leq 2$.

Решение. Методом интервалов легко устанавливаем, что решения данного неравенства расположены между точками a и $2a + 1$. Точнее, имеем три случая — в зависимости от того, какое из чисел (a или $2a + 1$) больше.

1. При $a < -1$ имеем $2a + 1 < a$, так что множество решений неравенства есть $2a + 1 < x < a$. Это множество состоит только из отрицательных чисел и потому не может содержать отрезок $[1; 2]$. Следовательно, в рассматриваемом случае подходящих значений a нет.
2. Если $a = -1$, то неравенство не имеет решений. Это значение a не годится.
3. При $a > -1$ имеем $a < 2a + 1$, так что множество решений неравенства есть $a < x < 2a + 1$. Отрезок $[1; 2]$ будет содержаться в этом множестве при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} a < 1, \\ 2 < 2a + 1, \end{cases}$$

то есть при $\frac{1}{2} < a < 2$. Все эти a удовлетворяют неравенству $a > -1$ и, следовательно, подходят.

Ответ: $a \in (\frac{1}{2}; 2)$.

В следующей статье «[Параметр как переменная](#)» мы рассмотрим другой способ решения этой задачи, в котором параметр a играет роль отдельной переменной.