Линейные уравнения и неравенства с параметрами

Среди всего многообразия задач с параметрами наиболее простыми являются линейные уравнения и неравенства. Поэтому начать разумно именно с них.

Задача 1. При всех значениях параметра a решить уравнение $2x + a = 3$.

Решение. Решать тут особо нечего: выражаем x и пишем ответ.

Ответ: $x = \frac{3-a}{2}$.

Задача 2. При всех значениях параметра a решить уравнение $ax = 1$.

Решение. Хочется просто написать $x = \frac{1}{a}$, но нужно проявить осторожность. Ведь a «никому ничем не обязано» и может равняться нулю, а на нуль нелить нельзя! Поэтому решение должно выглядеть так.

Если $a = 0$, то решений нет (поскольку вне зависимости от x получается неверное числовое равенство $0 = 1$). Если же $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

Ответ: Если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то решений нет.

Задача 3. При всех значениях a решить уравнение $(a + 2)x = a^2 - 4$.

Решение. Имеем:

$$(a + 2)x = (a + 2)(a - 2).$$

Если $a = -2$, то независимо от x получается верное числовое равенство $0 = 0$, так что в этом случае x — любое число. Если же $a \neq -2$, то сокращаем обе части на ненулевое выражение $a + 2$ и получаем $x = a - 2$.

Ответ: Если $a \neq -2$, то $x = a - 2$; если $a = -2$, то x любое.

Задача 4. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение. Выразим из первого уравнения y:

$$y = \frac{ax - a - 1}{4}, \tag{1}$$

и подставим во второе уравнение системы:

$$2x + \frac{(a + 6)(ax - a - 1)}{4} = a + 3.$$

Умножаем на 4, раскрываем скобки и приводим подобные:

$$(a^2 + 6a + 8)x = a^2 + 11a + 18.$$

Раскладываем на множители оба квадратных трёхчлена:

$$(a + 2)(a + 4)x = (a + 2)(a + 9). \tag{2}$$

Если $a \neq -2$ и $a \neq -4$, то уравнение (2) имеет (единственное) решение $x = \frac{a+9}{a+4}$. Подставляя его в (1), найдём соответствующее значение y. Полученная пара (x, y) будет (единственным) решением нашей системы при указанных a.

Если $a = -2$, то уравнение (2) превращается в верное числовое равенство $0 = 0$ независимо от x. Поэтому любое число x является решением уравнения (2). Соотношение (1) даёт соответствующее число y, так что любая пара $\left(x, \frac{ax-a-1}{4}\right)$ служит решением нашей системы. Стало быть, при $a = -2$ система имеет бесконечно много решений.

Наконец, если $a = -4$, то уравнение (2) превращается в неверное числовое равенство $0 = 10$ независимо от x и потому не имеет корней. Но уравнение (2) является следствием исходной системы; значит, при $a = -4$ не имеет решений и сама система.

Мы рассмотрели все возможные значения a. Как видим, система не имеет решений только при $a = -4$.

Ответ: -4.

Задача 5. При всех a решить неравенство $ax > 1$.

Решение. Здесь предстоит деление на a, поэтому необходимо рассмотреть три случая.

Если $a = 0$, то неравенство превращается в неверное числовое неравенство $0 > 1$. Поэтому при $a = 0$ решений нет.

Если $a > 0$, то делим наше неравенство на a; при этом знак неравенства сохраняется: $x > \frac{1}{a}$.

Если $a < 0$, то опять-таки делим на a, но при этом знак неравенства меняется: $x < \frac{1}{a}$.

Ответ: Если $a > 0$, то $x > \frac{1}{a}$; если $a < 0$, то $x < \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то решений нет.

Задача 6. При каких a неравенство $2x - a \leqslant 3$ является следствием неравенства $3a - x > 5$?

Решение. По определению, неравенство 2 является *следствием* неравенства 1 (или из неравенства 1 *следует* неравенство 2), если каждое решение неравенства 1 является также решением неравенства 2; иными словами, множество решений неравенства 1 содержится в множестве решений неравенства 2.

В нашем случае неравенством 1 является неравенство $3a - x > 5$, решения которого:

$$x < 3a - 5. \tag{3}$$

Неравенством 2 служит неравенство $2x - a \leqslant 3$, решения которого:

$$x \leqslant \frac{3+a}{2}. \tag{4}$$

Множество (3) должно содержаться в множестве (4), то есть каждая точка луча $(-\infty; 3a-5)$ должна принадлежать лучу $\left(-\infty; \frac{3+a}{2}\right]$. Так будет, если вершина первого луча находится левее вершины второго луча или совпадает с ней:

$$3a - 5 \leqslant \frac{3+a}{2}.$$

Остаётся решить это неравенство:

$$a \leqslant \frac{13}{5}.$$

Ответ: $a \leqslant \frac{13}{5}$.