Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Степени и корни

Степенью называется выражение вида a^c. Число a называется *основанием* степени, число c называется *показателем* степени.

Степень с натуральным показателем

Сначала определим понятие степени, показатель которой — натуральное число (т. е. целое и положительное).

Прежде всего, по определению

$$a^1 = a.$$

Далее, возвести число в квадрат — значит умножить его само на себя: $a^2 = a \cdot a$. Возвести число в куб — значит умножить его само на себя три раза: $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Возвести число в натуральную степень n — значит умножить его само на себя n раз:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

С этим ясно. Но что делать, если показатель степени не является натуральным числом?

Степень с целым показателем

Сначала разберёмся с нулевым показателем. Если $a \neq 0$, то по определению

$$a^0 = 1.$$

Выражение 0^0 не определено!

Теперь определим степень с целым отрицательным показателем. Опять-таки, если $a \neq 0$, то для натурального n по определению имеем:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,.$$

Например:

$$5^{-1} = \frac{1}{5}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}\,.$$

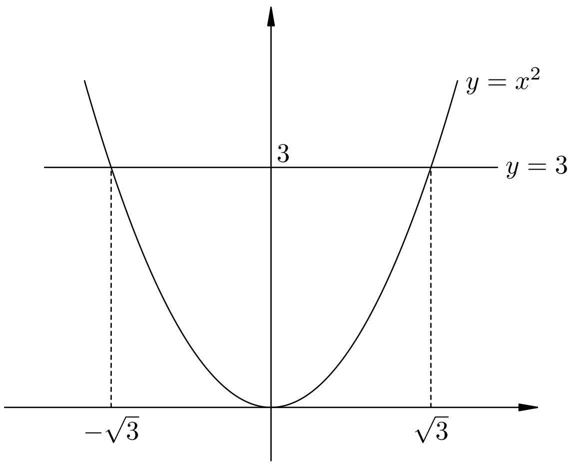
Выражение 0^{-n} снова не определено.

Разобрались. Однако показатель степени может быть ещё и дробным! Здесь нам понадобится понятие корня n-й степени. Начнём с простейшего случая.

Арифметический квадратный корень

Уравнение $x^2 = 4$ имеет два решения: $x = 2$ и $x = -2$. Это числа, квадрат которых равен 4.

А как быть с уравнением $x^2 = 3$? Если мы нарисуем график функции $y = x^2$, то увидим, что и у этого уравнения имеются два решения, одно из которых положительно, а другое отрицательно.



Но теперь эти решения не являются целыми числами. Более того, они не являются рациональными. Для того, чтобы записать эти иррациональные решения, мы вводим специальный символ квадратного корня.

Итак, пусть $a \geqslant 0$. По определению, *арифметический квадратный корень* $\sqrt{a}$ — это неотрицательное число, квадрат которого равен a. Иными словами, это неотрицательный корень уравнения $x^2 = a$.

Например, $\sqrt{4} = 2$ (но не -2). А решения уравнения $x^2 = 3$ мы запишем следующим образом: $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$.

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не определено. В самом деле, не найдётся такого действительного числа, квадрат которого равен отрицательному числу a (или: уравнение $x^2 = a$ не имеет решений).

Кубический корень

Кубический корень из числа a — это число, куб которого равен a. Иными словами, это единственный корень уравнения $x^3 = a$.

Обратите внимание, что кубический корень определён для всех a. Его можно извлечь из любого числа. Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Теперь становится ясно, как определить корень n-й степени для любого натурального n.

Корень n-й степени

Корень n-й степени из числа a — это число, n-я степень которого равна a. Иными словами, это корень уравнения $x^n = a$.

Пусть n чётно. Тогда при $a < 0$ корень n-й степени из a не определён. Если $a \geqslant 0$, то неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называется *арифметическим корнем n-й степени* из a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. При $n = 2$ вместо $\sqrt[2]{a}$ пишется $\sqrt{a}$.

Пусть теперь n нечётно. Тогда уравнение $x^n = a$ имеет единственный корень при любом a. Он также обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Например, $\sqrt[4]{10000} = 10$, $\sqrt[5]{-243} = -3$, $\sqrt[6]{64} = 2$.

Вот теперь мы готовы обсудить степень с дробным показателем.

Степень с рациональным показателем

Сразу договоримся, что основание степени будет положительным: $a > 0$. Число n по-прежнему будет натуральным ($n \in N$). Число m мы будем считать целым ($m \in Z$).

Определение:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Например:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}\,.$$

Почему наложено ограничение $a > 0$? Понятно, что $a = 0$ не годится — нуль не возведёшь в отрицательную степень. Но чем плохи отрицательные основания степени?

Казалось бы, раз $\sqrt[3]{-8} = -2$, то можно записать: $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Но нас тут поджидает неприятность. Смотрите: $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Одно и то же число оказалось равно -2 и 2 одновременно.

Другой пример. С одной стороны, $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ не существует. Но с другой стороны, $(-4)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Чтобы не связываться с подобными парадоксами, рассматривают лишь положительное основание степени с дробным показателем.

Степень с рациональным показателем обладает следующими свойствами. (Числа a и b — действительные положительные, числа p и q — рациональные.)

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p$$

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

Все эти формулы можно доказать. Их знания достаточно для решения всех задач части B вариантов ЕГЭ по теме «Корни и степени».

Степени с дробным показателем очень полезны для преобразования выражений с корнями. Например:

$$\frac{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{7^{\frac{1}{9}} \cdot 7^{\frac{1}{18}}}{7^{\frac{1}{6}}} = 7^{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}-\frac{1}{6}} = 7^0 = 1.$$