

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — это ещё один вид числовой последовательности. Общее понятие последовательности мы обсудили в предыдущей статье «[Арифметическая прогрессия](#)».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Геометрическая прогрессия — это последовательность, первый член которой не равен нулю, а каждый последующий член равен произведению предыдущего члена на некоторое фиксированное ненулевое число (называемое знаменателем геометрической прогрессии).

Например, последовательность $2, 6, 18, 54, \dots$ является геометрической прогрессией с первым членом 2 и знаменателем 3. Последовательность $20, 10, 5, 5/2, \dots$ является геометрической прогрессией со знаменателем $1/2$. Последовательность $1, -2, 4, -8, \dots$ является геометрической прогрессией со знаменателем -2 .

Эквивалентное определение: последовательность b_n , состоящая из ненулевых чисел, называется геометрической прогрессией, если частное b_{n+1}/b_n есть величина постоянная (не зависящая от n).

Формула n -го члена геометрической прогрессии

Геометрическая прогрессия полностью определяется первым членом и знаменателем. Выведем формулу n -го члена геометрической прогрессии.

Пусть b_n — геометрическая прогрессия со знаменателем q . Имеем:

$$b_{n+1} = b_n q \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В частности:

$$b_2 = b_1 q,$$

$$b_3 = b_2 q = (b_1 q) q = b_1 q^2,$$

$$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2) q = b_1 q^3,$$

и тогда ясно, что

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \quad (1)$$

Задача 1. Между числами 16 и 81 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

Решение. Пусть q — знаменатель получившейся прогрессии. Число 81 будет её пятым членом, поэтому согласно формуле (1) имеем:

$$81 = 16q^4,$$

$$q^4 = \frac{81}{16},$$

$$q = \pm \frac{3}{2}.$$

Таким образом, имеются два решения: 16, 24, 36, 54, 81 и 16, -24 , 36, -54 , 81.

Свойство и признак геометрической прогрессии

СВОЙСТВО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ. В геометрической прогрессии b_n для любого $n \geq 2$ выполнено равенство

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}. \quad (2)$$

Иными словами, если геометрическая прогрессия состоит из положительных чисел, то каждый её член (кроме первого) равен среднему геометрическому соседних членов: $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$b_{n-1}b_{n+1} = \frac{b_n}{q} \cdot b_n q = b_n^2,$$

что и требовалось.

Более общим образом, для геометрической прогрессии b_n справедливо равенство

$$b_n^2 = b_{n-k}b_{n+k}$$

при любом $n \geq 2$ и любом натуральном $k < n$. Докажите эту формулу самостоятельно — тем же самым приёмом, что и формулу (2).

Формула (2) служит не только необходимым, но и достаточным условием того, что последовательность является геометрической прогрессией.

ПРИЗНАК ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ. Если для всех $n \geq 2$ выполнено равенство (2), то последовательность b_n является геометрической прогрессией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем формулу (2) следующим образом:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Отсюда видно, что частное b_{n+1}/b_n не зависит от n , а это как раз и означает, что последовательность b_n есть геометрическая прогрессия.

Сформулируем свойство и признак геометрической прогрессии в виде одного утверждения для трёх чисел.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ. Три числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$.

Задача 2. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение. Обозначим данные числа x, y и z ; они образуют геометрическую прогрессию. По условию, числа $x, y+2, z$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $x, y+2, z+9$ — снова геометрическую. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2(y+2) = x+z, \\ (y+2)^2 = x(z+9). \end{cases}$$

(первое и третье уравнения — характеристика геометрической прогрессии, второе уравнение — характеристика арифметической прогрессии).

Из первого и третьего уравнений получим $4y+4 = 9x$. Выражая z из второго уравнения и подставляя в первое, получим $y^2 = 2xy+4x-x^2$. Остаётся решить систему этих двух уравнений относительно x и y и затем найти z (сделайте это самостоятельно).

Ответ: 4, 8, 16 или $\frac{4}{25}, -\frac{16}{25}, \frac{64}{25}$.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Прежде всего нам нужно решить один технический вопрос. Именно, раскроем скобки и приведём подобные в выражении

$$(q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1).$$

Имеем:

$$\begin{aligned}(q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) &= \\ &= q^n + q^{n-1} + \dots + q^2 + q - (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) = q^n - 1.\end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (3)$$

Теперь для суммы первых n членов геометрической прогрессии имеем:

$$\begin{aligned}S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \\ &= b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} = b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}),\end{aligned}$$

и тогда формула (3) даёт

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (4)$$

Задача 3. (МГУ, ВМК, 1994) Найти $\underbrace{f(\dots(f(f(6))))}_{n \text{ раз}}$, где $f(x) = \frac{x}{5} + 4$.

Решение. Давайте поищем $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ и т. д. в надежде отыскать закономерность.

$$\begin{aligned}f(f(x)) &= \frac{\frac{x}{5} + 4}{5} + 4 = \frac{x}{5^2} + \frac{4}{5} + 4; \\ f(f(f(x))) &= \frac{\frac{x}{5} + 4}{5^2} + \frac{4}{5} + 4 = \frac{x}{5^3} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5} + 4; \\ f(f(f(f(x)))) &= \frac{\frac{x}{5} + 4}{5^3} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5} + 4 = \frac{x}{5^4} + \frac{4}{5^3} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5} + 4.\end{aligned}$$

Теперь ясно, что

$$\underbrace{f(\dots(f(f(x))))}_{n \text{ раз}} = \frac{x}{5^n} + \frac{4}{5^{n-1}} + \frac{4}{5^{n-2}} + \dots + \frac{4}{5} + 4 = \frac{x}{5^n} + 4 \left(1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}} \right).$$

Сумму в скобках найдём по формуле (3):

$$1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}} = \frac{\frac{1}{5^n} - 1}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n} \right).$$

Тогда

$$\underbrace{f(\dots(f(f(6))))}_{n \text{ раз}} = \frac{6}{5^n} + 5 \left(1 - \frac{1}{5^n} \right) = 5 + \frac{1}{5^n}.$$

Ответ: $5 + \frac{1}{5^n}$.

Сумма убывающей геометрической прогрессии

Мы будем называть геометрическую прогрессию *убывающей*, если её знаменатель по модулю меньше единицы. Оказывается, можно говорить о сумме *всех* членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Рассмотрим в качестве примера убывающую геометрическую прогрессию

$$1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$$

С помощью формулы (4) найдём сумму её первых n членов:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что при увеличении числа слагаемых, то есть при возрастании n , правая часть (5) становится всё ближе и ближе к числу 2:

$$S_n \rightarrow 2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это даёт основание утверждать, что соответствующая сумма *бесконечного* числа слагаемых равна 2:

$$S_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = 2.$$

Теперь рассмотрим общий случай: геометрическую прогрессию $b_1, b_2, \dots$ со знаменателем q , где $|q| < 1$. Согласно формуле (4) имеем:

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Если $n \rightarrow \infty$, то $q^n \rightarrow 0$, так что

$$S_n \rightarrow \frac{b_1}{1 - q}.$$

Следовательно, сумма всех членов нашей прогрессии равна

$$S_\infty = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \frac{b_1}{1 - q}. \quad (6)$$

Задача 4. Периодическую десятичную дробь $1,2(3)$ представить в виде обыкновенной дроби.

Решение. Обозначим данное число через x . Имеем:

$$x = 1,2333\dots = 1,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$$

Слагаемые начиная со второго образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию с первым членом 0,03 и знаменателем 0,1. Согласно формуле (6) имеем:

$$x = 1,2 + \frac{0,03}{1 - 0,1} = 1,2 + \frac{0,03}{0,9} = \frac{12}{10} + \frac{1}{30} = \frac{37}{30}.$$

Ответ: $\frac{37}{30}$.