

ЕСТЕСТВЕННАЯ НАУКА В КОМИКСАХ

АЛГЕБРА

«Гоник настолько умен и остроумен, что читатель едва ли замечает, как узнает все основы рассматриваемой темы».

New York Times Book Review

ЗНАНИЙ
МНОГО
НЕ БЫВАЕТ!



ЛАРРИ
ГОНИК

New York Times bestselling author

УДК 512
ББК 22.1
Г65

Larry Gonick
THE CARTOON GUIDE TO ALGEBRA

Перевод с английского Вадима Кагученко
Оформление обложки Владиславы Матвеевой

Перевод опубликован с согласия издательства HarperCollins Publishers

Гоник Л.
Г65 Алгебра : Естественная наука в комиксах / Ларри Гоник ; пер. с англ. В. Кагученко. –
М. : Колибри, Азбука-Аттикус, 2015. – 240 с., ил.

ISBN 978-5-389-08904-4

Новая книга всемирно знаменитого карикатуриста Ларри Гоника, изучавшего и преподававшего математику в Гарвардском университете, представляет собой интенсивный курс алгебры, охватывающий ряд основных тем школьной программы, включая линейные уравнения, многочлены, квадратные уравнения, построение кривых. С живым юмором автор делает экскурс в историю алгебры и приводит многочисленные примеры практического применения «царицы наук» в современной жизни. Уникальная способность Гоника преподносить сложный материал весело, интересно и легко для восприятия, да еще и в безупречно ясном, структурированном виде, делает эту книгу отличным пособием для школьников, а также для всех желающих поддержать в форме свои математические способности.

УДК 512
ББК 22.1

ISBN 978-5-389-08904-4

© Larry Gonick, 2015
© Кагученко В.Д., перевод на русский язык, 2015
© Издание на русском языке, оформление.
ООО «Издательская Группа «Азбука-Аттикус», 2015
Колибри®

Оглавление

Введение.	9
ЧТО ИЗУЧАЕТ АЛГЕБРА?	
Глава 1	13
ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ	
Глава 2	21
СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ	
Глава 3	31
УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ	
Глава 4	43
ВЫРАЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕННЫЕ	
Глава 5	67
ВОССТАНАВЛИВАЕМ РАВНОВЕСИЕ	
Глава 6	79
РЕАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ	
Глава 7	91
НЕСКОЛЬКО НЕИЗВЕСТНЫХ	
Глава 8	103
РИСУЕМ УРАВНЕНИЯ	
Глава 9	123
ПРЕВОСХОДНЫЕ СТЕПЕНИ	
Глава 10	131
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ	
Глава 11	143
ОТНОШЕНИЯ	
Глава 12	163
О СРЕДНИХ	
Глава 13	177
КВАДРАТЫ	
Глава 14	189
КВАДРАТНЫЕ КОРНИ	
Глава 15	201
РЕШАЕМ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ	
Глава 16	225
ЧТО ДАЛЬШЕ?	
Ответы к некоторым задачам	232

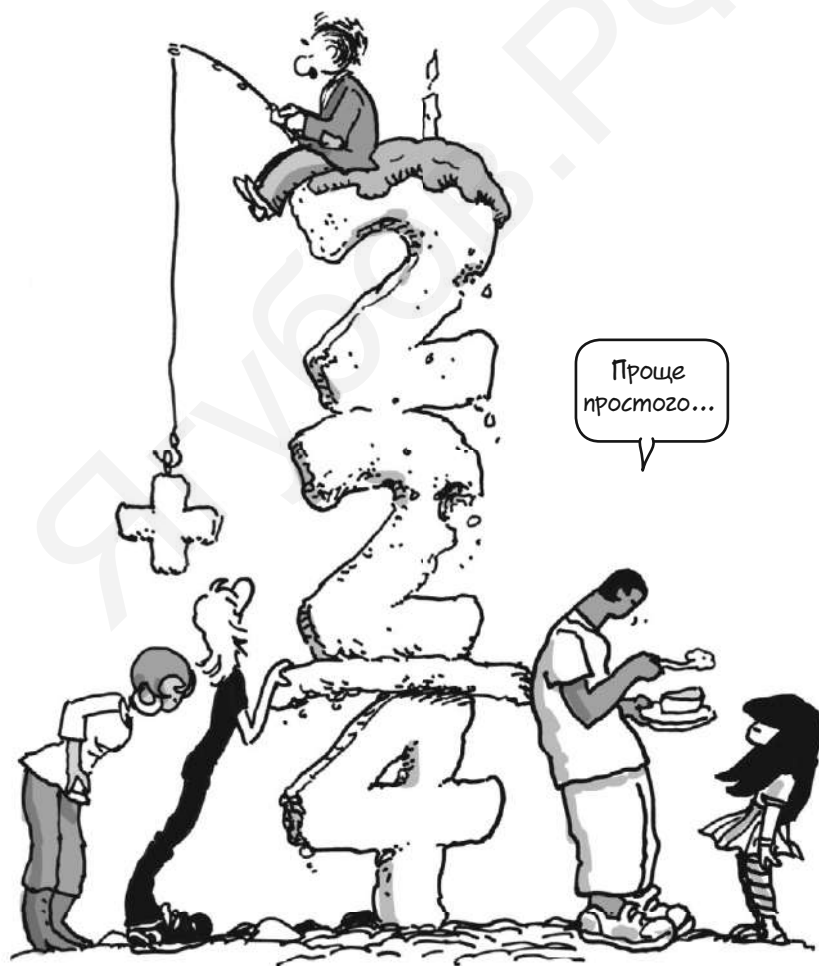
Таблица умножения

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Введение

Что изучает алгебра?

Прежде чем познакомиться с алгеброй, мы учимся складывать, вычитать, умножать и делить числа по правилам арифметики. Чтобы понять, о чем говорится в этой книге, нужно знать арифметику!



Арифметика изучает действия с числами. Что же тогда изучает алгебра? Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с простых арифметических задач...

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 32 \\ + 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 257 \\ \times 14 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 95 \overline{) 7} \end{array}$$

и запишем их горизонтально в одну строчку:

$$15 + 32 + 9 = \text{ЧТО?}$$

$$257 \times 14 = \text{ЧТО?}$$

$$95 \div 7 = \text{ЧТО?}$$

Теперь арифметическая задача — это **РАВЕНСТВО**, то есть выражение, в котором одна величина **РАВНА** другой, но с подвохом: одна часть равенства (**ОТВЕТ**) **НЕИЗВЕСТНА**. Чтобы узнать ответ, нужно выполнить вычисления.

$$2 + 2 = 3 + 1$$

Равенство: обе части известны.

$$\frac{3 + 75}{13} = \text{ЧТО?}$$

Арифметическая задача: равенство с неизвестной частью.

Алгебра тоже изучает равенства, но с одним маленьким отличием: неизвестный ответ («что?») в них может быть **ГДЕ УГОДНО**. Он не сидит в стороне, а может залезть в середину равенства, порой даже несколько раз. Вот пример алгебраической задачи:

$$2 \times \text{ЧТО?} - 3 = 11$$

Словами эта задача записывается так: если удвоить число и вычесть 3, получим 11. Что это за число?

В алгебре это «что» — всего лишь еще одно число. С ним можно выполнять действия точно так же, как с числом 1, 2 или 6, но вместо «что» мы будем писать x , y или какую-нибудь другую букву.



Мы покажем, как объединять числа и буквы в **АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ** и выполнять действия с ними. Алгебраические выражения, как выражения лица, могут быть простыми или очень сложными.

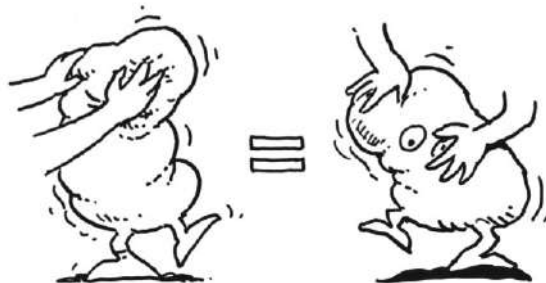
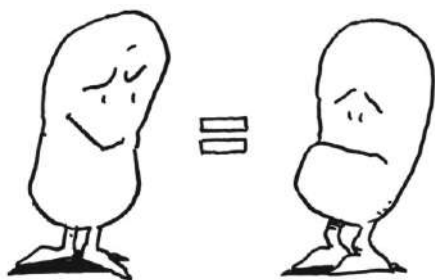
Простое выражение



Выражение посложнее



Самое важное в алгебре — это уравнения. Уравнение указывает, что одно выражение равно другому. Немного «покрутим» выражения...



Исходные выражения исчезнут, неизвестное «что?», или x , останется в одной части уравнения, и мы получим уже знакомую арифметическую задачу. Вот что такое алгебра!

$$x = \frac{3+3}{2}$$

Значит, чтобы изучить алгебру, нужно узнать, как работать с выражениями. Здесь, как и в арифметике, действуют свои правила. Далеко не все преобразования допустимы!

У нас тут
свои законы!



Ладно, ладно!



Начнем с самых простых выражений — чисел. Что-то в нашем рассказе будет тебе уже знакомо, но кое о чем ты узнаешь впервые...

Глава I

Числовая прямая

Числа применяются множеством способов, чаще всего для **ИЗМЕРЕНИЯ** и **СЧЕТА**. Счет — самое натуральное из всех действий, ведь числами 1, 2, 3, 4... можно сосчитать что угодно: яблоки, апельсины и даже песчинки на пляже...



Именно поэтому математики называют числа 1, 2, 3 и так далее **НАТУРАЛЬНЫМИ**, как будто все остальные... ммм... не очень натуральные.



Однако натуральные числа не слишком-то полезны, когда нам нужно не подсчитать, а **ИЗМЕРИТЬ** что-нибудь — например длину ноги.

Ого! Ну и
ЛАСТЫ!



Если встать на линейку, размеченную в каких-нибудь единицах измерения (дюймах, сантиметрах, футах, локтях — не важно), то конец пальца необязательно совпадет с одной из отметок.

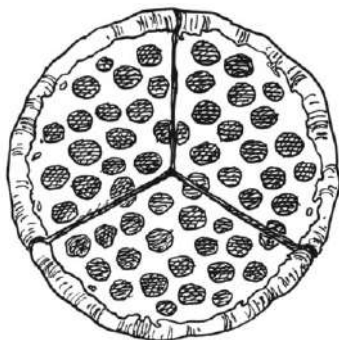


Надо сделать выбор: или отрезать кусочек пальца, или признать, что **МЕЖДУ** целыми числами есть и другие числа, например **ДРОБИ** вида $1/2$ или $35/8$. Уж лучше согласиться с тем, что существуют дроби!



Отрезать кусок
пальца точно
больше, чем
выучить дроби!

Сначала расскажем о дробях как о частях целого. Если разрезать пиццу на 3 одинаковых куска, получится $\frac{1}{3}$ пиццы, 2 таких куска — это $\frac{2}{3}$ пиццы и так далее.

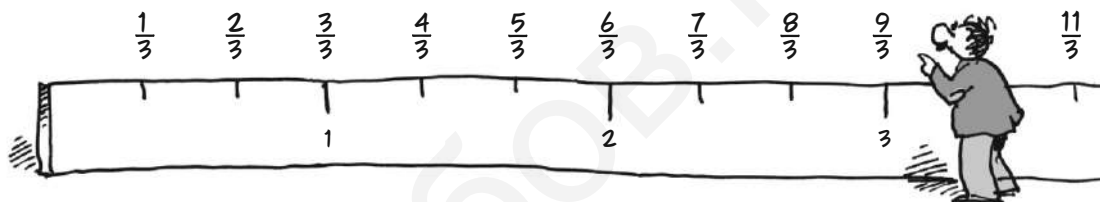


Но все равно непонятно: что же такое дробь? Особый способ деления? Кусок числа?



И сколько кружочков перца на одном куске???

При измерениях дробь — это просто еще одна точка на линейке. Например, $\frac{1}{3}$ обозначает $\frac{1}{3}$ расстояния от 0 до 1. Дробь $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ и так далее тоже обозначают определенные точки на линейке. Ах да: $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{6}{3} = 2$ и так далее!



Другими словами, **ДРОБЬ — ЭТО ЕЩЕ ОДИН ВИД ЧИСЛА**, единицы длины или единицы измерения. Все дроби, все возможные сочетания числителей и знаменателей указывают свои точки на линейке. Если точно измерить длину ноги дробями не получается, то по крайней мере можно очень-очень близко подобраться к результату!



Если нужно измерить не только части тела, нам понадобятся

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

Я всегда сохраняю положительный настрой!

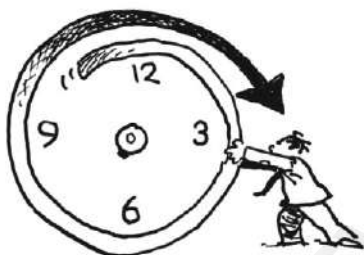
Например...



ТЕМПЕРАТУРА:
Температуры ниже нуля градусов называются отрицательными.

Положительная температура лучше!

ВРЕМЯ: повернем стрелку часов назад и представим, что время отсчитывается вдоль оси.



Нулем можно считать настоящий момент (или любой другой момент времени, например, начало года). Время до него будет отрицательным, после него — положительным.

прошлое (-)



будущее (+)

Я родился в -320 году. До сих пор не пойму, что это значит.

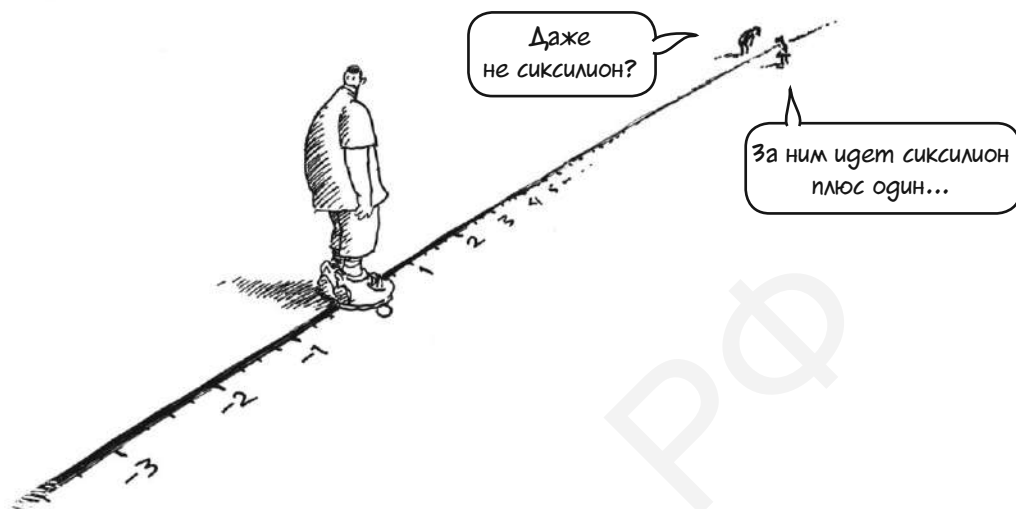


ДЕНЬГИ: Отрицательными бывают даже **ДЕНЬГИ!** Для бухгалтера долг — это **ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ СУММА**. Если ты должен 5 \$, то у тебя «есть» минус пять долларов, или -5 \$.



Ну хоть что-то у меня есть...

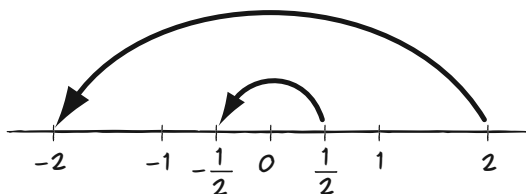
На нашей воображаемой линейке должно найтись место для отрицательных чисел. Они находятся по другую сторону от нуля и отсчитываются влево. Отрицательные числа от положительных отделяет ноль. Представь бесконечную **ЧИСЛОВУЮ ПРЯМУЮ**, которая идет в обе стороны (она бесконечна, потому что самого большого числа нет).



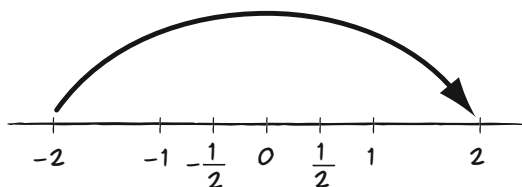
Отрицательная часть числовой прямой ничем не отличается от положительной, но числа на ней идут в другую сторону. Отрицательные числа — **ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ** положительных.



ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ называются числа, симметричные относительно нуля. Если повернуть числовую прямую вокруг нуля, то все числа заменятся на противоположные.



При таком повороте все отрицательные числа попадут на положительную сторону, поэтому **ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА ПРОТИВОПОЛОЖНЫ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ**.



Например, -2 противоположно числу 2 . Это можно записать в виде равенства:

$$-(-2) = 2$$

Минус на минус дает плюс.



Числовая прямая содержит все положительные и отрицательные целые числа и дроби. Нужны ли для измерений какие-то еще числа? Ну вообще-то да...



Как известно, любую дробь можно перевести в десятичную делением в столбик. Переведем дроби $2/3$, $5/8$ и $1/7$:

$$\begin{array}{r} 2,000000 \overline{) 3} \\ -0 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 5,000 \overline{) 8} \\ -48 \\ \hline 20 \\ -16 \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline 0 \end{array}$$

И так далее...

$$\begin{array}{r} 1,00000 \overline{) 7} \\ -7 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -14 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 50 \\ -49 \\ \hline 10 \\ -7 \\ \hline 30 \end{array}$$

И так далее...

При делении целого числа на другое целое возможны только два варианта: десятичная дробь или **ЗАКАНЧИВАЕТСЯ**, как, например, $5/8 = 0,625$,

или **ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЕТСЯ**, например:

$$2/3 = 0,666666666\dots$$

$$1/7 = 0,142857142857142857\dots$$

Почему? Посмотри, как мы делим числа в столбик (слева). Если остаток равен 0, деление прекращается, десятичная дробь заканчивается. А если нет? Возможных остатков не так много, поэтому какой-нибудь из них рано или поздно попадетсЯ снова, и числа начнут повторяться.

Насколько хватает глаз и еще дальше!

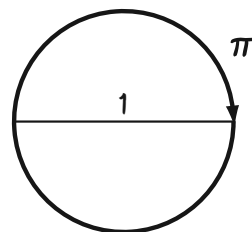


$$\frac{1}{11} = 0,09090909090909\dots$$

Так получилось, что в **НЕКОТОРЫХ** десятичных дробях знаки повторяются беспрерывно. Пример: $\sqrt{2}$, квадратный корень из 2 (это такое число, которое при умножении само на себя дает 2, но об этом позже).

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880\dots$$

Еще одно неповторяющееся число — это «пи» (π), длина окружности с диаметром, равным 1.



$$\pi = 3,14159265358979323846\dots$$

Такие неповторяющиеся числа называются **ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ**. Им тоже нашлось место на числовой прямой.



Между прочим, «иррациональный» вовсе не значит «странный» или «непредсказуемый», хотя когда-то давно, наверное, так и было. Древние греки называли такие числа «алогос» — **НЕЛОГИЧНЫМИ**.



Слово «иррациональный» означает, что такие числа нельзя записать как отношение двух целых, то есть в виде дроби (десятичная запись дроби обязательно должна заканчиваться или повторяться).

1,4142135623730950488016887242096
98029822120140787569262303510542662
90163147265459085332961206869792662
157079632679278215702282197624650519
Точно, да не совсем!
55850737212644121498090100019048384
2266592750559274423397784354148430
0605714701095599716359514022445459
68620147285174186400355130551986015232
923048430871432145886319780236279
952514079896872533491831008829
6406206152583523950547457502877
5996173.

Значит, все числа на числовой прямой делятся на 3 группы:

целые

положительные и отрицательные целые

рациональные

числа, которые можно записать в виде дроби

иррациональные

все остальные

Все вместе эти числа называются действительными. Действительно ли они существуют, как, например, камень или кусок сыра, — решать тебе...



Глава 2

Сложение и вычитание (и кое-что в скобках)

В начальной школе учат: при сложении двух чисел мы считаем, сколько в них всего единиц, а при вычитании, наоборот, отнимаем единицы...



Это правило работает для натуральных чисел, а для других — не всегда. Чтобы изучить алгебру, нужно хорошо освоить сложение и вычитание **ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**.

У меня на -3
яблока меньше,
чем у тебя!

Ты жалуешься или
хвастаешься?



Сначала надо сказать несколько слов о **СКОБКАХ** (без них не обойтись!).



В обычном тексте в скобках указываются примечания и замечания. В математике все иначе!



В математике скобки обозначают **ГРУППИРОВКУ**. Они указывают: все, что записано в скобках, нужно рассматривать как одну величину.

Что ты на меня так смотришь? Не я их сюда поставил!



$2 \times (3 + 4)$ значит «2 умножить на сумму $3 + 4$ », то есть $2 \times 7 = 14$

Скобки помогают избежать вот таких странных, непонятных и противных формул:

$$5 + - 3$$

Плюс-минус?

Брр.

Фу!



$$5 + (-3)$$

5 плюс число «минус 3».

Уже лучше.

Я понял!

Меня больше не тошнит!



Группировка означает вот что: **СНАЧАЛА** нужно выполнить все действия в скобках, а уже **ПОТОМ** — все остальные. Сейчас мы покажем, почему это важно!

СНАЧАЛА сложить $3 + 4$,
ПОТОМ умножить на 2.



И вот еще что: дальше мы редко будем обозначать умножение знаком $\times$. Он слишком похож на x — нашу самую любимую букву в алгебре.

Пошел вон!

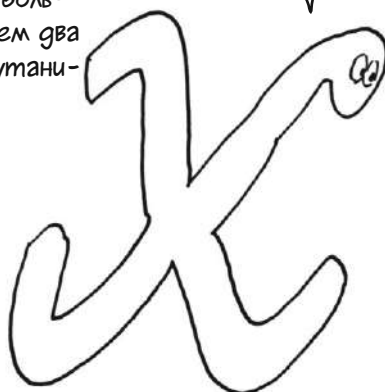


Вместо этого мы будем обозначать умножение маленькой точкой $\cdot$, а если нам захочется сократить запись еще больше, то мы просто запишем два числа рядом. Избежать путаницы нам помогут скобки:

Ну что, x больше нет? Теперь-то мы подружмся?

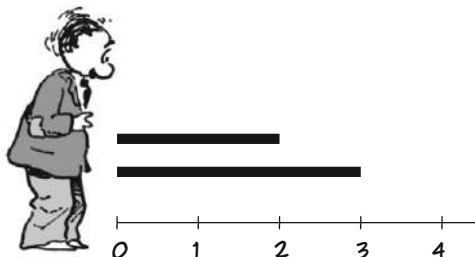
Да, но сперва...

$2(3+4)$

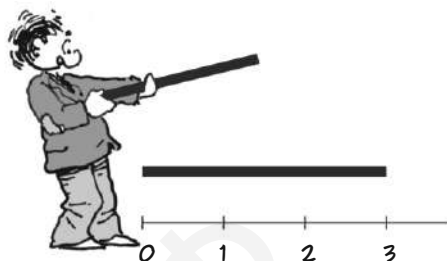


Сперва поговорим о сложении...

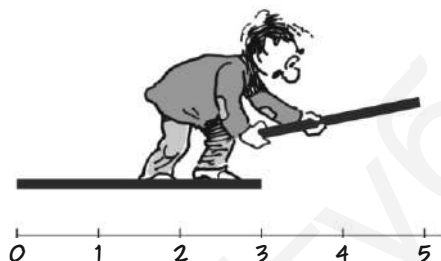
Начнем с того, что по-новому посмотрим на знакомые нам сложение и вычитание **ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**. Два числа (в нашем примере 2 и 3) можно представить как длины отрезков на числовой прямой.



Чтобы сложить числа, оставим один отрезок на месте (не важно какой), приложим второй...



к дальнему концу первого...



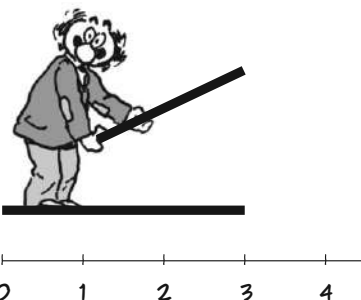
и совместим их. Общая длина отрезков будет их **СУММОЙ**.

Большое дело!

$$3 + 2 = 5$$

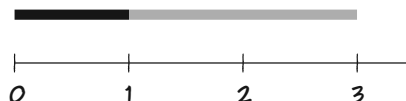


Чтобы вычесть меньшее число из большего, я снова приложу отрезки друг к другу, но на этот раз меньший отрезок будет «смотреть» **ВНУТРЬ**.

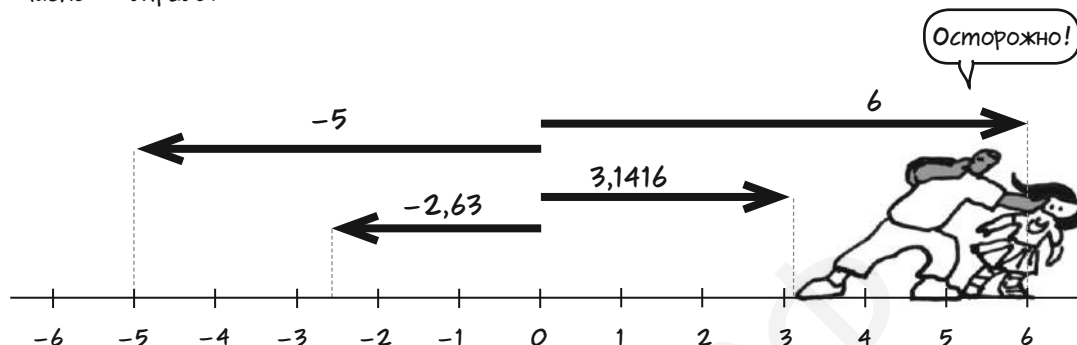


РАЗНОСТЬ — это часть большего отрезка, на которую не наложен меньший отрезок. Это то, что остается, когда мы отнимаем короткий отрезок от длинного.

$$3 - 2 = 1$$

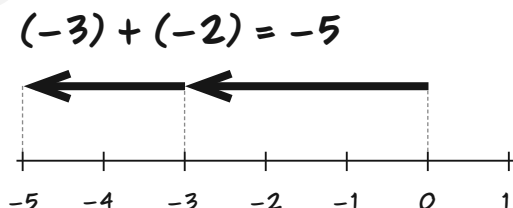
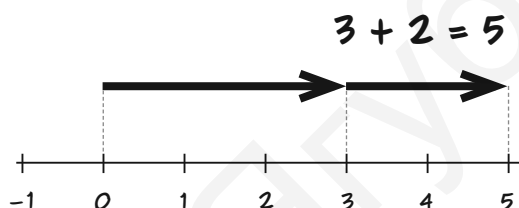


Чтобы представить так все действительные числа (и положительные, и отрицательные), их нужно изобразить не отрезками, а **СТРЕЛКАМИ** с определенной **ДЛИНОЙ** и **НАПРАВЛЕНИЕМ**. Эти стрелки начинаются в нуле и указывают на нужное число. Если стрелка обозначает отрицательное число, она указывает влево, если положительное число — вправо.

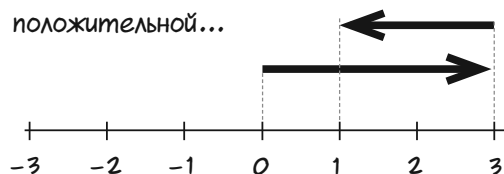


Положительные числа складываются как раньше: начало первой стрелки находится в точке O , а начало второй стрелки мы совместим с концом первой. Конец второй стрелки укажет сумму.

СУММА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ТАК ЖЕ: приложим начало второй стрелки к концу первой, и конец второй стрелки укажет сумму чисел. К примеру, два отрицательных числа складываются так:

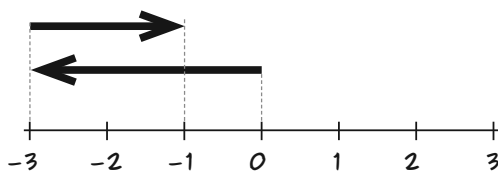


Сумма отрицательного и положительного чисел определяется так же. Она может быть положительной...

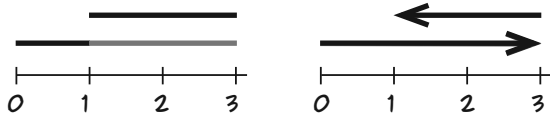


или отрицательной в зависимости от исходных чисел.

$$(-3) + 2 = -1$$



Посмотрим на рисунок на стр. 25, где изображена сумма $3 + (-2)$. Он практически не отличается от рисунка на стр. 24, где изображена разность $3 - 2$.



ПРИБАВИТЬ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО — ЗНАЧИТ ВЫЧЕСТЬ ЕГО «ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ВАРИАНТ».

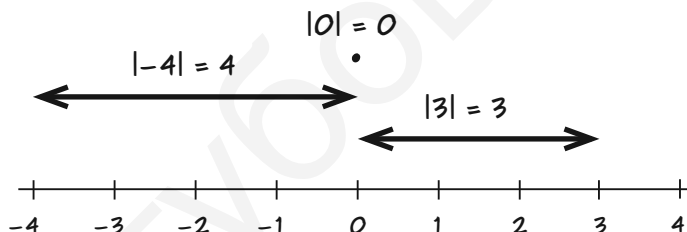
Э-э-э... а сколько тогда будет $3 + (-4)$?

Мм... $3 - 4$? Как отнять 4 из 3?

Читай дальше!



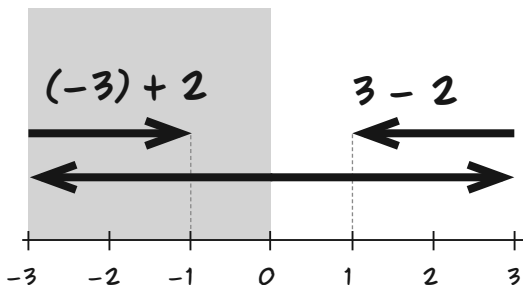
Этот «положительный вариант» числа называется **МОДУЛЕМ** и обозначается вертикальными палочками, вот так: $|-2| = 2$. Модуль числа — это его «размер», длина его стрелки, расстояние от нуля до этого числа. Модуль положительного числа равен самому числу, а $|0| = 0$.



Снова посмотри на рисунок, где изображена сумма $(-3) + 2$. Это зеркальное отражение суммы $3 + (-2)$, или $3 - 2$.

Значит, чтобы найти эту сумму, надо вычесть $3 - 2$ и **ЗАМЕНИТЬ РЕЗУЛЬТАТ НА ПРОТИВОПОЛОЖНЫЙ**.

$$(-3) + 2 = -(3 - 2) = -1$$



Вычитаем и заменяем противоположным!



Вот пошаговая инструкция по сложению любых двух чисел, как положительных, так и отрицательных:



положительное + положительное	отрицательное + отрицательное
складываем как обычно	складываем модули и заменяем противоположным
положительное + отрицательное	
вычитаем меньшее по модулю из большего по модулю. Знак ответа будет таким же, как знак числа, большего по модулю.	

Пример 1. Найти $4 + (-6)$.

4 — положительное, -6 — отрицательное. Вычитаем модули.

$$6 - 4 = 2$$

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ число -6 по модулю больше. Значит, результат будет отрицательным числом.

$$4 + (-6) = -2$$

Пример 2. Найти $(-2) + 9$.

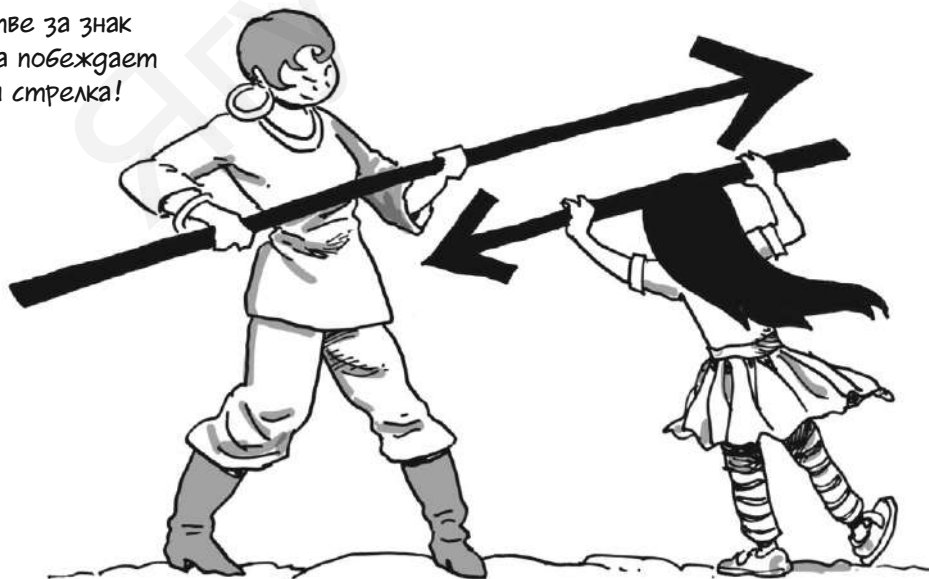
И снова одно число положительное, другое — отрицательное. Выполняем вычитание.

$$9 - 2 = 7$$

На этот раз большее по модулю число **ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ**, 9, поэтому результат останется положительным.

$$(-2) + 9 = 7$$

И в битве за знак ответа побеждает длинная стрелка!



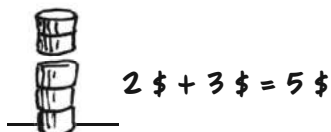
Сложение отрицательных чисел можно выразить при помощи **ДЕНЕГ**. Именно так делал индийский математик **БХАСКАРА**, который, можно сказать, и придумал отрицательные числа примерно 1500 лет назад.



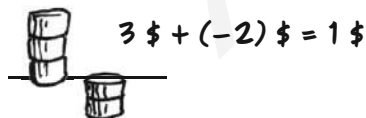
Это все я придумал!

АКТИВЫ, или деньги на руках плюс деньги, которые нам должны, — положительные числа. **ДОЛГИ**, то есть деньги, которые мы должны другим, — отрицательные числа.

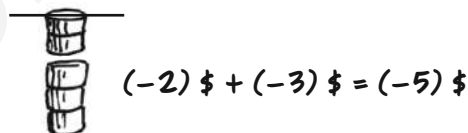
Складываем активы и получаем больший актив.



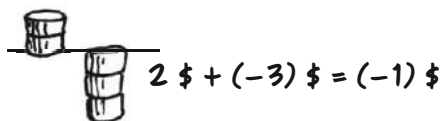
Если у тебя 3 \$ активов и ты должен 2 \$, ты по-прежнему в плюсе: можно отдать долг, и еще останется 1 \$.



Если ты должен 2 \$ Фреду и 3 \$ Фриге, то всего ты должен 5 \$.



Если у тебя 2 \$ активов и ты должен 3 \$, то тебе не хватает 1 \$. У тебя «есть» один отрицательный доллар.



Активы и долги складываются по прежним правилам.

Как может быть иначе?



Вычитание

Пока что мы рассмотрели только вычитание положительных чисел, причем всегда вычитали меньшее число из большего. Но раз мы можем складывать два любых числа, то, значит, и вычитать можно любые числа. Вот как это делается:



Вычитание — это сложение с противоположным числом.



Вычитание — это сложение?

Это правило выполнялось, когда мы вычитали меньшее положительное число из большего: $5 - 3 = 5 + (-3)$. Теперь мы точно так же **ОПРЕДЕЛИМ** вычитание для других чисел. Пример:

$$2 - 3 = 2 + (-3) = -1$$
$$-6 - 7 = -6 + (-7) = -13$$

Внимание: чтобы вычесть отрицательное число, надо прибавить **ПРОТИВОПОЛОЖНОЕ** ему число, а оно **ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ**.

$$9 - (-3) = 9 + 3 = 12$$

Помни: $-(-3) = 3$!

$$-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$$

Вычитаешь долги и богатеешь!



Теперь ты готов решить несколько задач самостоятельно!