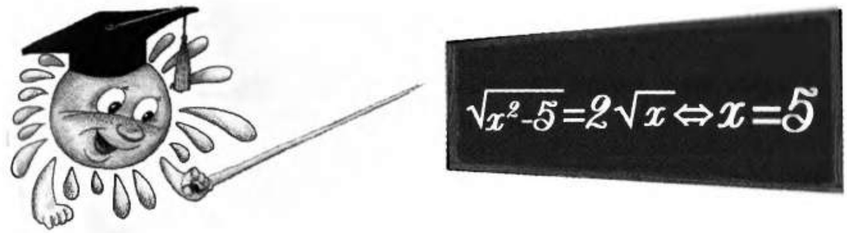
МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ



С.И. Колесникова

ЕГЭ
Математика

Иррациональные уравнения

2010

МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ

ЕГЭ

Математика

Иррациональные уравнения

Москва 2010

УДК 373.167.1:51+51 (075.3)
ББК 22.1я721
К60

Колесникова С.И.
К60 Иррациональные уравнения. ЕГЭ. Математика / С.И. Колесникова. – Москва: ООО «Азбука-2000», 2010. – 72 с. (Серия «МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ», выпуск 1).

Книга адресована, прежде всего, старшеклассникам, сдающим ЕГЭ. Также она будет полезна и учителям средней школы.

Настоящий выпуск пособия состоит из заданий по теме «Иррациональные уравнения». Любая задача может быть включена в часть первую (серия В) ЕГЭ по математике 2010 или любого другого года, а также разобрана на уроках математики по рассматриваемой теме.

В книге систематизированы наиболее эффективные методы и способы решения иррациональных уравнений. Пособие распутает паутину непонятности тем, кто не очень силен в математике, и поможет аккуратно всё расставить по полочкам тем, чей уровень знаний довольно высок.

УДК 373.167.1:51+51 (075.3)
ББК 22.1я721

По вопросам приобретения обращаться:
Телефон: (495) 787-24-95
E-mail: potential@potential.org.ru

ISBN 978-5-91333-008-6

Введение

Математика есть лучшее и даже единственное изучение природы.

Д.И. Писарев

В конце каждого учебного года школьники, как правило, сдают учебники в библиотеку. Где найти материал для повторения конкретной темы? Конечно же, в пособиях серии **«МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ»**.

В данном пособии систематизированы все наиболее эффективные методы и способы решения **иррациональных уравнений**.

По этому пособию можно заниматься, начиная с 9-го класса. И неважно, какой дальнейший путь вы себе выберете: колледж, институт, университет… Математика пригодится вам всегда. Ведь ещё Платон сказал своему собеседнику: «Разве ты не заметил, что способный к математике изощрён во всех науках в природе?».

В пособии собраны задания из уже прошедших ЕГЭ и вступительных экзаменов в разные вузы. Есть простые задания, есть и более сложные, но когда вы увидите, что их решения могут быть простыми и понятными, математика перестанет казаться вам непостижимым предметом. Более того, вам станет интересно.

Как вы обычно решаете задачи? После записи решения принято его проверить или даже выполнить заново отдельные операции. И иногда уже после переписывания на чистовик вам в голову ударяет мысль: ой, в формуле перепутал знак! Если это домашняя работа, некоторые всё зачёркивают (получается грязновато), а более аккуратные школьники забеливают неверные строки. Решение начинается заново…

А что делать на ЕГЭ? Там исправления недопустимы. Любая описка или элементарная арифметическая ошибка сводит всю задачу на нет, т. к. в бланк вписывается только ответ. И времени на дополнительную проверку тоже нет.

Вывод: нужно научиться решать предложенные задачи быстро, оптимально и без ошибок. Пособие, которое вы держите в руках, позволит вам освоить именно такие высокоэффективные подходы к решению целых классов задач. Вы разовьёте в себе внимательность, собранность, научитесь аккуратно и точно решать без черновиков многие задачи.

Пособие составлено таким образом, чтобы помещённые в нём задания и методы решений были в равной степени понятны для учащихся профильных математических и гуманитарных классов. И те и другие смогут найти для себя интересные задачи, а главное, открыть неизвестные им ранее «элегантные» методы решений. Поэтому наше пособие одинаково полезно для любого старшеклассника и станет надёжным помощником при подготовке к ЕГЭ.

В данном выпуске собраны задачи, любая из которых может быть включена в ЕГЭ-2010. В серию В нужно помещать задачи с простыми ответами. Это дает возможность решающему разобраться в задаче, не блуждая в дебрях вычислений. Для непрофильного класса некоторые задания могут показаться сложными – тогда их можно отнести к серии С. Задачи с ответами в виде промежутка формально не относятся к серии В, и их можно включать в серию С и для профильного класса, чтобы проверить умение логически рассуждать при оформлении решения.

Примечание. В пособиях нашей серии часто будут использоваться выведенные условия равносильности (УР). В данном выпуске это условия равносильности для корней – они обозначаются как (УР К), а затем следует номер, например, «Условия равносильности для корней номер 1» – (УР К1).

Часть I

§ 1. Иногда кажется, что уравнение иррациональное

1. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2+2x+1}=5-3x$.

Ответ. 3.

▶ На первый взгляд, это – иррациональное уравнение. На самом деле, это – уравнение с двумя модулями. В нём главное – узнать полный квадрат и не забывать, что $\sqrt{x^2}=|x|$:

$$\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2+2x+1}=5-3x \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+1)^2}=5-3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-3|-|x+1|=5-3x.$$

Теперь раскроем модули:

$$\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2+2x+1}=5-3x \Leftrightarrow |x-3|-|x+1|=5-3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 3, \\ x-3-x-1=5-3x \end{cases} \Leftrightarrow x=3; \\ \begin{cases} -1\le x<3, \\ 3-x-x-1=5-3x \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; \\ \begin{cases} x<-1, \\ 3-x+x+1=5-3x \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$$

При решении удобно заполнить табличку,

$x-3$	–	–	+
$x+1$	–	+	+

-1 3

где мы расставили знаки выражений $(x-3)$ и $(x+1)$ на числовой оси. Затем воспользовались правилом раскрытия модулей:

Поэтому решениями будут лишь 2 и -1. Сумма квадратов всех корней уравнения равна 5.

Ответ. 5. ◀

Запишем решение такого уравнения в общем виде:

$$f(x)\sqrt{g(x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0, \\ \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)=0. \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{(УР К0)}$$

▶Теперь оформим решение с учётом найденного условия равносильности (УР К0):

$$(x+3)\sqrt{2+x-x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+x-x^2=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0; \\ \begin{cases} 2+x-x^2\ge 0, \\ x+3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1\pm 3}{2}; \\ \begin{cases} x=-3, \\ 2-3-9<0 \Rightarrow \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Сумма квадратов всех корней уравнения равна 5.

Ответ. 5.

Отметим, что решения уравнения $f(x)=0$ должны *принадлежать* области определения квадратного корня. При этом можно не находить ОДЗ, а лишь подставить найденные корни в соответствующее неравенство, определяющее ОДЗ. ◀

8. $\sqrt{81-25x}-\sqrt{5x-9}=2\sqrt{18-5x}$.

9. $\sqrt{x+4}\left(25-x^2\right)=0$.

10. $(4x-7)\sqrt{x^2-1}=0$.

11. $(5x-1)\sqrt{x^2-16}=0$.

12. $(x-3)\sqrt{x^2-4}=0$.

13. $(5x-7)\sqrt{x^2-2x-3}=0$.

14. $(x^2-4)\sqrt{2x-x^2}=0$.

§ 3. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=a^2$

В заданиях 15 - 21 найдите сумму квадратов всех корней соответствующего уравнения

15. $\sqrt{x^2-3x-15}=5$.
Ответ. 89.

▶ При решении этого уравнения обычно школьники сначала находят ОДЗ:

$$x^2-3x-15\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\ \frac{3-\sqrt{69}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{69}}{2};\ +\infty\right),$$

затем решают уравнение $\sqrt{x^2-3x-15}=5$, $x^2-3x-15=25$, $x^2-3x-40=0$, $x=\frac{3\pm 13}{2}$. Так как происходило возведение в квадрат, могли появиться лишние корни. Поэтому школьники проверяют, принадлежат ли корни ОДЗ, и получают, что сумма квадратов всех корней уравнения равна 89.

Ответ. 89. ◀

Что можно сказать? Решение верное, ответ верный. Однако сделано довольно много *лишней* работы:

во-первых, *не надо* было решать неравенство при нахождении ОДЗ, да и вообще не надо в задачах такого типа искать ОДЗ, т. к. решалось уравнение $x^2-3x-15=25$, где левая часть (подкоренное выражение) всегда неотрицательно, и *ОДЗ выполняется* автоматически;

во-вторых, не надо проверять, принадлежат ли корни ОДЗ, т. к. при таком способе решения они *всегда* принадлежат ОДЗ.

Рассмотрим уравнение такого типа в общем виде :

$$\sqrt{f(x)} = a^2.$$

Отметим, что в ОДЗ обе части уравнения *неотрицательны*, и возведение в квадрат приводит к *равносильному* в ОДЗ уравнению. Но после возведения в квадрат *подкоренное* выражение становится равным *квадрату* правой части, т. е. всегда неотрицательно – ОДЗ выполнено *автоматически*, т. е. мы получаем условие равносильности:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = a^2 \Leftrightarrow f(x) = a^4} \qquad \text{(УР К1)}$$

Никакая проверка не нужна.

►Теперь оформим решение с помощью найденного условия равносильности (УР К1):

$$\sqrt{x^2 - 3x - 15} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 15 = 25 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 13}{2} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 89.$$

Ответ. 89. ◄

16. $\sqrt{x^2 - 3x - 20} = 2\sqrt{5}$.

17. $\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3$.

18. $\sqrt{x^2 - 16x + 16} = 4$.

19. $\sqrt{x^2 - 2x + 9} = 3$.

20. $\sqrt{x^2 - 5x + 144} = 12$.

21. $\sqrt{x^2 + 5x - 14} = 6$.

§ 4. Уравнение вида $\alpha^2\sqrt{x+a}+\beta^2\sqrt{x+b}=const$. Монотонность

22. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.

Ответ. 2.

► Чтобы решить это уравнение, обе части придётся дважды возводить в квадрат. Так? Так. Однако, имея в виду то, что мы решаем ЕГЭ, попробуем повнимательней всмотреться в подкоренные выражения. Оба слагаемых монотонно возрастают на всей области определения, значит, монотонно возрастает левая часть уравнения. А монотонная функция принимает любое свое значение только в одной точке. Поэтому, если уравнение имеет решение, то только одно. Иногда его удаётся найти устно. Как такие точки искать?

Прежде всего надо пробовать подставлять такие числа, чтобы корни извлекались нацело. Например, в нашем примере можно подставить $x=2$: $\sqrt{4-3}+\sqrt{8+1}=4$.

Ответ. 2. ◄

Но для решения этим способом, конечно, нужен опыт.

Иногда, как мы видели, уравнение $\alpha^2\sqrt{x+a}+\beta^2\sqrt{x+b}=const$ можно решить устно, если корни хорошие. Если же корень «не просматривается», то обе части придётся дважды возводить в квадрат. Также можно решить уравнение $\alpha^2\sqrt{f(x)+a}+\beta^2\sqrt{f(x)+b}=const$, если после замены переменных оно легко решается.

23. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}=\sqrt{28-2x}$.

Ответ. 6.

Первый способ.

▶ Заметим, что слева стоит сумма двух монотонно возрастающих функций, а справа – монотонно убывающая, поэтому равенство возможно лишь в одной точке. Подставим точку, когда извлекаются все корни: $x=6$.

Ответ. 6. ◀

Второй способ.

▶ Задачу можно решить и «в лоб», возводя дважды в квадрат:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}=\sqrt{28-2x} \Leftrightarrow x+3+2\sqrt{x+3}\sqrt{x-5}+x-5=28-2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\sqrt{x-5}=15-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 15-2x\geq 0, \\ (x+3)(x-5)=(15-2x)^2, \\ x-5\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\leq x\leq \dfrac{15}{2}, \\ 3x^2-58x+240=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{29\pm 11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ. 6. ◀

В заданиях 24 - 34 найдите корень (или сумму корней, если их несколько) соответствующего уравнения

24. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4.$

25. $\sqrt{x+9}\ +\ \sqrt{2x+4}\ =5.$

26. $7\sqrt{x-9}+\sqrt{x+24}=35.$

27. $\sqrt[5]{x-7}+\sqrt[5]{2x+16}=3.$

28. $5\sqrt{2x+5}+\sqrt{7x-10}=17.$

29. $3\sqrt{4x+10}+\sqrt{14x+5}=8\sqrt{3}.$

30. $5\sqrt{x+10}+\sqrt{3,5x-20}=17\sqrt{2}.$

31. $\sqrt{2x+11}+\sqrt{4x+29}=4.$

32. $\sqrt{3x-8}+\sqrt{2}\sqrt{x+10}=10.$

33. $\sqrt{9x+31}+\sqrt{x+3}=2\sqrt{-x-2}.$

34. $\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+22}=3$.

35. $\sqrt{3x+15}+\sqrt{5x+26}=7$.

§ 5. Замена переменных в иррациональном уравнении

36. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения

$$\sqrt{2x^2-6x+5}+\sqrt{4x^2-12x+17}=4.$$

Ответ. 5.

▶ Уравнение довольно громоздкое. Присмотритесь внимательней к подкоренным выражениям. Там «почти» одинаковые квадратные трёхчлены! Как упростить уравнение?

Сделаем замену переменных: $2x^2-6x=t$. Тогда уравнение примет вид $\sqrt{t+5}+\sqrt{2t+17}=4 \Leftrightarrow t=-4$, т. к. можно воспользоваться монотонностью левой части.

Дальше совсем просто: $2x^2-6x=-4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1. \end{array}\right.$

Ответ. 5. ◀

В заданиях 37 - 38 найдите сумму квадратов всех корней соответствующего уравнения

37. $\sqrt{2x^2-4x+3}+\sqrt{4x^2-8x-3}=\sqrt{39-x^2+2x}.$

38. $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+5x-2}=1.$

В заданиях 39 - 48 найдите корень (или сумму корней, если их несколько) соответствующего уравнения

39. $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2.$

40. $\sqrt{5x+2}+\sqrt{10x-3}=\sqrt{15x+3}.$

41. $\sqrt{2t+4}+\sqrt{t+9}=5.$

42. $2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0.$

43. $8x-2\sqrt{x}-3=0.$

44. $26x^{\frac{2}{3}}-11x^{\frac{1}{3}}-1=0=0.$

45. $\sqrt[4]{21-10x}=12-\sqrt{21-10x}.$

46. $\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2\sqrt{x}-x}.$

47. $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}-\dfrac{4(x-1)}{x+2}=1.$

48. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}+2\sqrt{3x-2}=3x.$

В заданиях 49 - 54 найдите сумму квадратов всех корней соответствующего уравнения

49. $\sqrt{2x^2+4x-23}-\sqrt{x^2+2x-8}=1.$

50. $\sqrt{2x^2+4x-23}-\sqrt{x^2+2x-8}=1$.

51. $21-\dfrac{49}{\sqrt{x^2+2x+25}}=2\sqrt{x^2+2x+25}$.

52. $\sqrt{x^2+6x-3}+11-\dfrac{26}{\sqrt{x^2+6x-3}}=0$.

53. $\sqrt{x^2+x-2}-\dfrac{4}{x^2+x-2}=1$.

54. $\sqrt{2x^2+x+6}-\sqrt{2x^2+x+1}=1$.

§ 6. Уравнение – «монстр» $\sqrt{f(x)}=g(x)$

55. (ЕГЭ) Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{2x^2-7x-3}+x=3$.

Ответ. – 3.

Первый способ (традиционный, но не доведенный до конца)

▶ Обычно школьники так решают это уравнение: «Найдем ОДЗ: $2x^2-7x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\ \dfrac{7-\sqrt{73}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{7+\sqrt{73}}{4};\ +\infty\right)$. Решим уравнение $\sqrt{2x^2-7x-3}=3-x$, возведя обе части в квадрат: $2x^2-7x-3=9-6x+x^2$, $x^2-x-12=0$. Получаем, что $x_1=-3$, $x_2=4$. Проверяем: оба корня принадлежат ОДЗ. Ответ…» ◀

И тут возникает вопрос, как записать два ответа в бланке ЕГЭ? Ясно, что такого в данном случае быть не может. Где-то ошибка? Да. Тогда в чём дело?

Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ встречается везде и всюду: на вступительных экзаменах практически во все вузы, каждый год в ЕГЭ. Как только его не решают! «Монстр» какой-то, а не уравнение!

Несмотря на то, что оно так часто встречается, чёткое решение является редкостью. При решении многие пишут много лишнего (потому увеличивается количество описок и ошибок), а важные условия не учитывают.

Что лишнее?

1) Поиск ОДЗ. Почему? Ведь корень существует только из неотрицательных чисел. Да, это так. Но при решении мы возводим обе части в квадрат и решаем *уравнение* $f(x)=g^2(x)$, в котором правая часть неотрицательна для *любого* решения. Поэтому ОДЗ уравнения при таком способе решения всегда выполняется *автоматически*. В крайнем случае, можно просто записать ОДЗ, но *не надо* тратить энергию на решение неравенства $f(x)\geq 0$! Тем более, что при неправильном нахождении ОДЗ подстановка найденных корней может привести к тому, что они не принадлежат ОДЗ, чего не может быть, т. к. в этой задаче этого не может быть *никогда*.

2) Проверка – принадлежат ли корни ОДЗ?

Конечно, ни 1), ни 2) ошибкой не являются, но происходит потеря времени и энергии.

Почему же получилось два ответа? Где ошибка?

Есть правило: Если не пользоваться равносильными переходами, то в уравнениях, где проводилось возведение в квадрат, *необходимо* делать *проверку*, подставляя найденные корни в *уравнение*, а не в ОДЗ. Этого не было сделано, и это типичная ошибка. На самом деле, подстановка в уравнение дает:

$$\sqrt{2\cdot 9-7\cdot -3-3}=3-(-3)\Leftrightarrow 6=6, \sqrt{2\cdot 16-7\cdot 4-3}=3-4<0\Leftrightarrow \varnothing.$$

Правильный

Ответ. – 3.

Теперь рассмотрим уравнение такого типа в общем виде:

$$\sqrt{f(x)}=g(x).$$

Уравнение имеет решение *только* для $g(x) \ge 0$. В ОДЗ левая часть уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ всегда неотрицательна, и возведение в квадрат в этом случае дает *равносильное* в ОДЗ уравнение, а ОДЗ при этом автоматически выполняется, т. к. решается уравнение $f(x) = g^2(x)$, в котором подкоренное выражение всегда неотрицательно. Мы получаем условие равносильности:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}} \qquad \text{(УР К2)}$$

Отмечаем еще раз: ОДЗ не ищем, а условие $g(x) \ge 0$ проверяем обязательно.

Откуда же могут появиться «лишние» корни?

После возведения в квадрат на самом деле решаются сразу *два* уравнения: $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = -g(x)$, но на *разных* промежутках числовой оси: $\sqrt{f(x)} = g(x)$ там, где $g(x) \ge 0$ и $\sqrt{f(x)} = -g(x)$ там, где $g(x) \le 0$. Поэтому «лишние» или «посторонние» корни появятся, если уравнение $\sqrt{f(x)} = -g(x)$ имеет решение, и лишние корни не появятся, если уравнение $\sqrt{f(x)} = -g(x)$ не имеет решений. Уравнение $f(x) = g^2(x)$ является следствием обоих уравнений.

Проведем *доказательство* найденного равносильного соотношения в традиционной форме.

1. Если число x является решением уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$, то x является и

решением системы $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^2(x), \end{cases}$ т. е.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Действительно, если число x является решением уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$, то $g(x) \geq 0$, а тогда возведение в квадрат приводит к равносильному уравнению $f(x) = g^2(x)$.

2. Если число x является решением системы $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x), \end{cases}$ то x является и

решением уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$, т. е.

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} = g(x).$$

Действительно, т. к. $f(x) = g^2(x)$, то $f(x) \geq 0$ и $\sqrt{f(x)}$ существует. А так как $g(x) \geq 0$, то $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Отсюда и следует, что

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}} \qquad \text{(УР К2)}$$

что и требовалось доказать.

Второй способ

▶ Теперь оформим решение с применением условия равносильности (УР К2):

$$\sqrt{2x^2 - 7x - 3} + x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 7x - 3} = 3 - x \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ 2x^2 - 7x - 3 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x^2 - x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x = \dfrac{1 \pm 7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ. -3. ◀

56. (ЕГЭ) Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{2x+7}-2=x$.

Ответ. 1.

Часто одна и та же задача может быть решена несколькими совершенно разными способами, причём выбор способа зависит не только от знаний, но и от эрудиции решающего, а также от желания решить задачу проще, красивее или быстрее.

Сначала перепишем уравнение в стандартном виде:

$$\sqrt{2x+7}=x+z.$$

Первый способ.

▶ Решим задачу графически. Построим эскизы левой и правой частей уравнения (рис. 1) уравнения $\sqrt{2x+7}=x+2$:

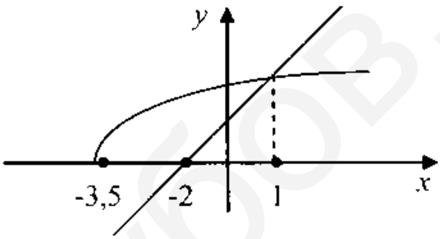


Рис.1

Видно, что пересечение одно. Находится подбором: $x=1$.

Ответ. 1. ◀

Второй способ

▶ Решим уравнение с помощью условия равносильности (УР К2):

$$\sqrt{2x+7}-2=x \Leftrightarrow \sqrt{2x+7}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0, \\ 2x+7=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+2\ge 0, \\ x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ. 1. ◀

Примечание. Для тех, кто графики строить быстро не может, больше подходит второй способ.

В заданиях 57 - 74 найдите корень (или сумму корней, если их несколько) соответствующего уравнения

57. $\sqrt{0,5\left(x^2-3x+4\right)}=x-2$.

58. (ЕГЭ) $\sqrt{21-4x}-x+4=0$.

59. (ЕГЭ) $\sqrt{15x^2+2x+8}+4x=0$.

60. $\sqrt{x+3}=x+1$.

61. (ЕГЭ) $\sqrt{x^2-28}=14+x$.

62. (ЕГЭ) $x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3$.

63. $\sqrt{24-5x}=3-2x$.

64. $\sqrt{2x^3-5x^2-8x+2}=\sqrt{2}\left(x-1\right)$.

65. $\sqrt{2x^2+2x-3}+1=-x$.

66. $2\sqrt{x+3}=x+4$.

67. $\sqrt{x+2}=|x-1|$.

68. $\sqrt{49+4x-x^2}=x+3$.

69. $\sqrt{|x^2+14x+47|-1}=|x+7|-1$.

70. $\sqrt{2x^2-8x+9}=x-1$.

71. $\sqrt{2x^2-21x+4}=2-x$.

72. $\sqrt{2x^2-27x+45}=9-x$.

73. $\sqrt{8x^2+18x+8}=-2x-2$.

74. $\sqrt{8x^2+9x+2}=-2x-1$.

В заданиях 75 - 87 найдите сумму квадратов всех корней соответствующего уравнения

75. $\sqrt{2x^3+2x^2-3x+3}=x+1$.

76. $\sqrt{x^3-3x^2-2x+17}=x+1$.

77. $\sqrt{x^3-5x+13}=x+2$.

78. $\sqrt{2x^3+8x^2-10x}=2-2x$.

79. $\sqrt{4x^3+8x^2-5x}=1-2x$.

80. $6x-\sqrt{3x^3+18x^2-81x}=0$.

81. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$.

82. $\sqrt{2x^2-27x+99}=9-x$.

83. $\sqrt{2x^2-9x+11}=3-x.$

84. $\sqrt{2x^2-6x+9}=x^2-3x+3\,.$

85. $\sqrt{2x^2+2x+4}=x^2+x-2.$

86. $\sqrt{6x-2}=|x+1|\,.$

87. $\sqrt{2x^2-8x+6}=x-1.$

§ 7. Уравнение вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$.

В школе довольно много времени уделяется построению графиков элементарных функций, но затем они почти не находят практического применения. При решении уравнений такого типа они пригодятся.

Рассмотрим подробнее самое простое уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ – уравнение $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$. Его можно решать различными способами.

Приведем три из них.

1. Можно воспользоваться приведенным выше условием равносильности: $\sqrt{ax+b}=cx+d \Leftrightarrow \begin{cases} cx+d\geq 0, \\ ax+b=(cx+d)^2\,. \end{cases}$

2. Можно сразу решить уравнение $ax+b=(cx+d)^2$ (ОДЗ уравнения выполняется автоматически), а затем сделать проверку: подставить найденные решения в заданное уравнение $\sqrt{ax+b}=cx+d.$

Обязательна ли проверка? Да, надо отсечь решения уравнения $-\sqrt{ax+b}=cx+d.$

Рассмотрим решения уравнения на графике.

Начертим эскизы левой и правой частей – например, рис.2.

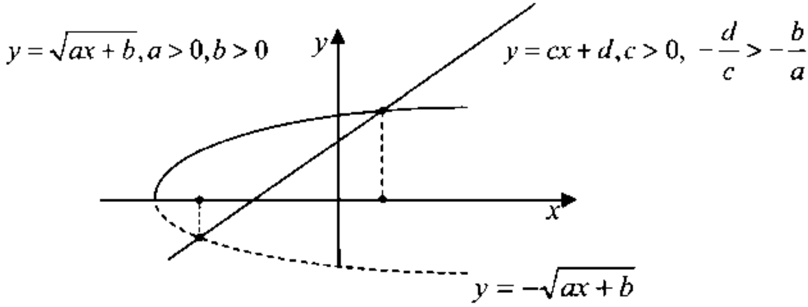


Рис.2.

В данном случае хорошо видно (рис.2), что полупарабола $y=\sqrt{ax+b}$ пересекается лишь с той частью прямой $y=cx+d$, где y принимает неотрицательные значения, а та часть прямой $y=cx+d$, где y принимает отрицательные значения, пересекается с полупараболой $y=-\sqrt{ax+b},\ a>0,\ b>0.$

Но “лишние” корни могут и не появиться (рис.3.) – все зависит от коэффициентов в уравнении, а, значит, от взаимного расположения прямой и полупараболы.

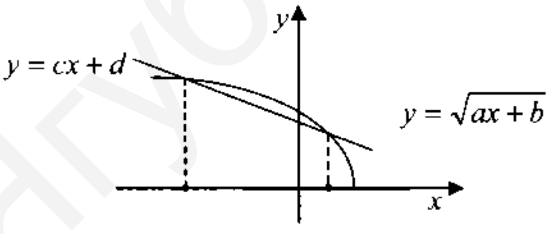


Рис.3.

3. Уравнение вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$ можно также решать с помощью замены переменных, положив $t=\sqrt{ax+b}, t\geq 0$.

Тогда $ax+b=t^2$, и ОДЗ уравнения выполняется *автоматически.* При этом $ax+b-t^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{t^2-b}{a}$, и уравнение (1) в новых переменных примет вид $t=\dfrac{c\left(t^2-b\right)}{a}+d \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ct^2-at-bc+ad=0.$ Задача свелась к нахождению *неотрицательных* решений квадратного уравнения $ct^2-at-bc+ad=0$, что под силу любому школьнику.

Уметь строить эскизы левой и правой частей уравнения $\sqrt{ax+b}=cx+d$ очень полезно. Графическая интерпретация решения такого уравнения помогает быстро решить некоторые задачи ЕГЭ.

Какое утверждение:

1) уравнение имеет два корня одного знака (оба корня или положительны, или оба корня отрицательны),

2) уравнение имеет только один корень, и он отрицателен.

3) уравнение имеет два корня разных знаков,

4) уравнение имеет только один корень, и он положителен,

верно по отношению к корням уравнений 88 -91?

88. $\sqrt{x+4}=3(x+1)$.

Ответ. 2.

▶ Для ответа на поставленный вопрос не обязательно решать уравнение. Часто достаточно аккуратно начертить эскизы левой и правой частей.

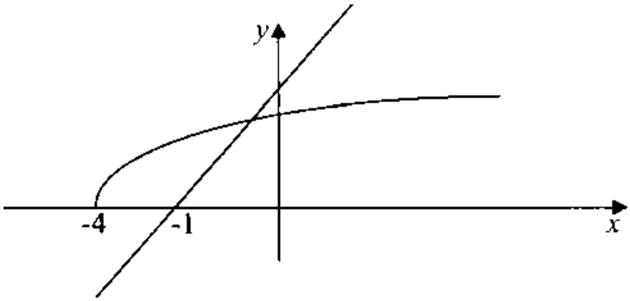


Рис.4.

На оси надо отметить точки пересечений полупараболы и прямой с осями координат. Из рисунка ясно, что пересечение происходит на отрицательной полуоси – это обеспечивается тем, что прямая пересекает ось Ox правее, а ось Oy выше полупараболы.

Ответ. 2). ◀

89. $\sqrt{7-x}=x+1$.

Ответ. 3).

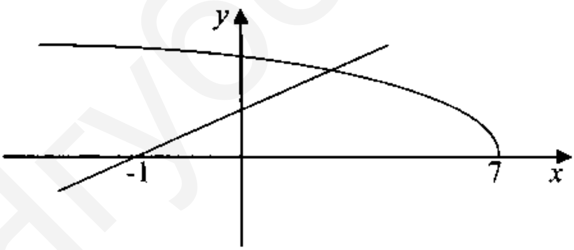


Рис.5.

▶ Из рисунка ясно, что пересечение происходит на положительной полуоси. Это обеспечивается тем, что прямая пересекает отрицательную полуось Ox, а ось Oy ниже полупараболы.

Ответ. 3). ◀

90. $3\sqrt{10-x}=12-x$.

Ответ. 1).

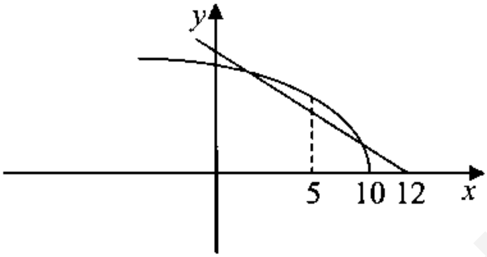


Рис.6.

► Это более трудный пример, т. к. неясно, прямая пересекается с полупараболой (а тогда дважды), касается или вовсе не имеет общих точек с полупараболой. Надо что-то сделать дополнительно, например, подставить такие значения x, при которых корни извлекаются нацело ($x=6, x=9$), или поискать точку ($x=5$), в которой ясно, что расположено выше – прямая или полупарабола.

Ответ. 1). ◄

91. $5\sqrt{7-x}=13-x$.

Ответ. 2).

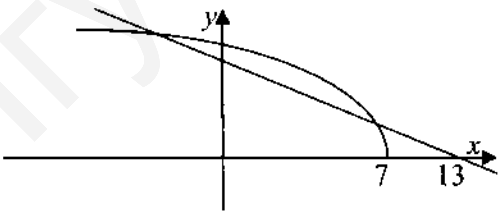


Рис.7.

► Из рисунка ясно, что корней два, и они разных знаков. Это обеспечивается тем, что прямая пересекает ось Ox правее, а ось Oy – ниже полупараболы.

Ответ. 2). ◄

§8. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

92. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^4-4x^2+x+7}.$$

Ответ. 10.

▶ Как решать уравнение, понятно. Но как найти ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2+x+1 \ge 0, \\ x^4-4x^2+x+7 \ge 0? \end{cases}$$

Второе неравенство не решается. Что делать? А его и не надо решать.

Как мы решаем уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$? Возводим в квадрат обе части, получаем $f(x) = g(x)$: две функции равны между собой, а, значит, они имеют одинаковые знаки.

Поэтому решать можно только одно из неравенств, а второе выполнится *автоматически*, в силу решаемого уравнения.

Не говоря о том, что при решении уравнений ОДЗ вообще без надобности находить не надо, а надо проверять найденные корни *подстановкой в уравнение*, если переходы не были равносильными!

Итак, обе части уравнения $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ неотрицательны в ОДЗ, и возведение в квадрат дает равносильное в ОДЗ уравнение. Поэтому

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ в ОДЗ}} \qquad \text{(УР К3)}$$

Можно записать полное условие равносильности (которое включает в себя ОДЗ):

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{array}\right. \end{cases}} \qquad \text{(УР К4)}$$

Теперь видно, что нет необходимости проверять неотрицательность обеих функций – *достаточно* проверить неотрицательность *одной* из них: выбирают ту, для которой неравенство проще проверить.

Если же корни уравнения «нехорошие», например, иррациональные, то иногда лучше решить более простое неравенство, а затем проверить, принадлежит ли корень найденному промежутку.

Когда применять (УР К3), а когда (УР К4)? Лучше сразу *записать* (УР К4), но начинать решать с уравнения. Если видно, что ОДЗ сложное, можно решить уравнение в ОДЗ, т. е. применить сначала (УР К3), а затем заняться ОДЗ.

В нашем примере воспользуемся (УР К4) (второе подкоренное выражение проще, чем первое):

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4-4x^2+x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1=x^4-4x^2+x+7, \\ x^2+x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in R \end{cases} \Leftrightarrow x^4-5x^2+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=3, \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \text{ сумма квадратов равна 10.}$$

Ответ. 10. ◄

В заданиях 93 - 102 найдите корень (или сумму корней, если их несколько) соответствующего уравнения

93. (ЕГЭ) $\sqrt{8-x^2}=\sqrt{2-x}$.

94. $\sqrt{x^2-5}=2\sqrt{x}$.

95. $\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{2x^3-4x^2+x-1}$.

96. $\sqrt{x^3-5x^2+7x-17}=\sqrt{x^3-4x^2-3x+4}$.

97. $\sqrt{x^3-8x^2-7x+2}=\sqrt{x^3-7x^2-18x+20}$.

98. $\sqrt{x^3-7x^2+8x+2}=\sqrt{x^3-8x^2+20x-30}$.

99. $\sqrt{x^3-5x^2+15x-77}=\sqrt{x^3-4x^2+2x-37}$.

100. $\left(\sqrt{2x-7}+\sqrt{2x}\right)^3\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2x-7}\right)=343$.

101. $\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\right)^3=-5$.

102. $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^6\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)^4=64$.

В заданиях 103 - 108 найдите сумму квадратов всех корней соответствующего уравнения

103. $\sqrt{6x^2-x-1}=\sqrt{15+4x-4x^2}$.

104. $\sqrt{4x^3+9x^2-4x+2}=\sqrt{x^2-3x+4}$.

105. $\sqrt{x^2-4x+1}=\sqrt{3x+1}$.

106. $\sqrt{2x^2-4x+5}=\sqrt{3x^2-x+1}$.

107. $\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{4x-10}$.

108. $\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)^5\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)^3=256$.

§ 9. Разные уравнения.

109. Найдите наименьшее целочисленное решение уравнения $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2+x-1}$.

Ответ. -1.

▶ Очень странное уравнение: много радикалов, все квадратные трёхчлены разные. Возведение в квадрат приведёт к очень громоздкому уравнению. Поэтому посмотрим сначала, нет ли одинаковых множителей под знаками корней:

$$\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2+x-1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)(4x+5)}=\sqrt{(x-1)(x+1)}+\sqrt{(x+1)(2x-1)}.$$

Оказывается, есть. Видно, что $x=-1$ является решением. Бо́льшие решения нас не интересуют, поэтому рассмотрим случай, когда $x+1<0$. При таких x под знаком первого корня $\begin{cases}x+1<0,\\4x+5\le 0\end{cases}$ и поэтому $\sqrt{(x+1)(4x+5)}=\sqrt{-(x+1)}\sqrt{-(4x+5)}$ (под знаком остальных корней аналогично). Тогда уравнение перепишется в виде:

$$\sqrt{(x+1)(4x+5)}=\sqrt{(x-1)(x+1)}+\sqrt{(x+1)(2x-1)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1<0,\\\sqrt{-(4x+5)}=\sqrt{-(x-1)}+\sqrt{-(2x-1)}\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{5}{4},\\-4x-5=-x+1-2x+1+2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{5}{4},\\-x-7=2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-7,\\x^2+14x+49=8x^2-12x+4\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<-7,\\7x^2-26x-45=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-7,\\(x-5)(7x+9)=0\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

Наименьшее целочисленное решение – это число –1.

Ответ. –1. ◀

Примечание 1. После того, как было найдено решение $x=-1$, задачу можно решить и по – другому. Речь идет только о *наименьшем целочисленном* решении. Поэтому просто проверим, не является ли число -2 решением уравнения: $\sqrt{4(-2)^2+9(-2)+5}-\sqrt{(-2)^2-1}=\sqrt{3}-\sqrt{3}\neq\sqrt{2(-2)^2+(-2)-1}=\sqrt{5}$.

Нет, не является. Значит, наименьшее целочисленное решение – это число -1.

Примечание 2. Спрашивается, зачем приведено довольно сложное решение, если есть простой ответ на вопрос задачи. Очень просто. Приведен пример преобразований под знаком корня, когда один из множителей отрицателен.

110. Найдите наибольшее целочисленное решение уравнения $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

111. Найдите наибольшее целочисленное решение уравнения $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$.

В заданиях 112 - 141 найдите корень (или сумму корней, если их несколько) соответствующего уравнения

112. $\sqrt{x+8}-\sqrt{5-x}=\sqrt{-x^2-3x+5}$.

Ответ. 1.

▶ Любопытное уравнение! Если перекинуть второй корень направо, чтобы получить после возведения в квадрат равносильное уравнение, то получится очень громоздко. И что делать? Редкий случай – лучше возводить в квадрат обе части *заданного* уравнения.

Это потому, что сумма подкоренных выражений левой части есть константа, а их произведение с точностью до аддитивной постоянной совпадает с квадратным трёхчленом правой части. Поэтому после возведения в квадрат в левой части сократится x и останется уравнение относительно квадратного трехчлена.

Решаем уравнение:

$$\sqrt{x+8}-\sqrt{5-x}=\sqrt{-x^2-3x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+8}-\sqrt{5-x} \ge 0, \\ x+8-2\sqrt{-x^2-3x+40}+5-x=-x^2-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+8}-\sqrt{5-x} \ge 0, \\ -2\sqrt{-x^2-3x+40}=-x^2-3x-8. \end{cases}$$

Теперь решаем уравнение, сделав, для удобства, замену переменных $\sqrt{-x^2-3x+40}=t,\ \ t \ge 0$. Тогда

$$\begin{cases} t>0, \\ -2t=t^2-48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ t^2+2t-48=0 \Leftrightarrow t=-1 \pm 7 \end{cases} \Leftrightarrow t=6.$$

Возвращаемся к старым переменным и проверяем неравенство $\sqrt{x+8}-\sqrt{5-x} \ge 0$:

$$-x^2-3x+40=36 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \Rightarrow \sqrt{-4+8}-\sqrt{5+4}<0 \Rightarrow \varnothing, \\ x=1 \Rightarrow \sqrt{1+8}-\sqrt{5-1}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Можно, а, может быть, и лучше, в этом примере *не пользоваться* равносильными переходами, а в конце сделать обязательно проверку.

Ответ. 1. ◀

113. $\sqrt{x+13}-\sqrt{7-x}=\sqrt{-x^2-6x+31}$.

114. $\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=\sqrt{12}$.

115. $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-12}=1$.

116. $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}-\sqrt{7x+4}=0$.

117. $\sqrt{2x+20}+\sqrt{2x-12}=\sqrt{5x+24}$.

118. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}=\sqrt{5x+6}$.

119. $\sqrt{x+7}\sqrt{3x-2}=3\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}.$

120. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-4}=3.$

121. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x+7}.$

122. $\sqrt[3]{x^3+3x^2+6x-11}=x+1.$

123. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1.$

124. (ЕГЭ) $3+\sqrt{16x|x-2|+9}=4x.$

125. $x\sqrt{x+2}=\sqrt{x^3+x+1}.$

126. $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+\sqrt{45}}+\sqrt{x^2-\sqrt{45}}.$

127. $\sqrt{x+7}\sqrt{x+3}=\sqrt{45}.$

128. $\sqrt{-2x-7}+22=x+\sqrt{(2x-1)^2}.$

129. $\sqrt{x+13}-\sqrt{7-x}=\sqrt{-x^2-6x+31}.$

130. $\sqrt{x+10}-\sqrt{15-x}=\sqrt{-x^2+5x+7}.$

131. $\sqrt{x+2}-\sqrt{11-x}=\sqrt{-x^2+9x-13}.$

132. $\sqrt{x}-\sqrt{13-x}=\sqrt{-x^2+13x-35}.$

133. $\sqrt{x+1}-\sqrt{12-x}=\sqrt{-x^2+11x-23}.$

134. $\sqrt{0,5\left(x^2-3x+4\right)}=x-2$.

135. $\sqrt{x+3}=x+1$.

136. $\sqrt{x-9}\sqrt{x-10}=\sqrt{x-6}$.

137. $\sqrt{x-8}\sqrt{x-12}=\sqrt{x-2}$.

138. $\sqrt{x-11}\sqrt{x-12}=\sqrt{x-3}$.

139. $\sqrt{x+2}\sqrt{x-6}=\sqrt{x+12}$.

140. $2\sqrt{7x-42}=\sqrt{5x-32}\sqrt{x-1}$.

141. $\sqrt{3x+28}\sqrt{x+9}=\sqrt{x+12}$.

В заданиях 142 - 155 найдите сумму квадратов всех корней соответствующего уравнения

142. $\sqrt{160+\sqrt{4x^2-4x+1}}=x+8$.

143. $\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15}$.

144. $\sqrt{4x-1}=2|x-1|$.

145. $x+\sqrt{3+\sqrt{x^2-2x+1}}=4$.

146. $\sqrt{7-\sqrt{x^2-4x+4}}=x-3$.

147. $3x+\sqrt{7+\sqrt{x^2-6x+9}}=18$.

148. $\sqrt{23-4x}=2|x-2|$.

149. $\left(2\sqrt[3]{x}-x-1\right)\sqrt{2x-1}=0$.

150. $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+\sqrt{5}}+\sqrt{x^2-\sqrt{5}}$.

151. $\sqrt{\frac{x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\frac{3}{\sqrt{x(x-1)}}$.

152. $\sqrt{3x^2+5x+6}=1-x$.

153. $3\sqrt{5x-9}=\sqrt{x+3}\sqrt{x+18}$.

154. (ЕГЭ) $\sqrt{9-4x|x-4|}=4x+3$.

155. $\sqrt{2x^2+4x-23}-\sqrt{x^2+2x-8}=1$.

156. Найдите сумму всех целочисленных решений уравнения $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$.

Часть II
Ответы и решения

§ 1. Иногда кажется, что уравнение иррациональное

1. Ответ. 3.

2. Ответ. 2.

3. Ответ. 1,25.

4. Ответ. 0,6.

▶ $\sqrt{25x^2-30x+9}-\sqrt{25x^2+10x+1}=5-15x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |5x-3|-|5x+1|=5-15x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{5}, \\ 5x-3-5x-1=5-15x \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{5}; \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{5} \leq x < \dfrac{3}{5}, \\ 3-5x-5x-1=5-15x \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; \\ \begin{cases} x < -\dfrac{1}{5}, \\ 3-5x+5x+1=5-15x. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}.$$ ◀

5. Ответ. 1.

▶ $\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}=x-3 \Leftrightarrow |x-1|-|x+1|=x-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1, \\ x-1-x-1=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1; \\ \begin{cases} -1 \le x < 1, \\ -x+1-x-1=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; \\ \begin{cases} x < -1, \\ -x+1+x+1=x-3. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1 \blacktriangleleft$$

6. Ответ. –279.

$\blacktriangleright$ $\left(\sqrt{x^2-26x+169}-\sqrt{x^2-12x+36}-7\right)\sqrt{x+24}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-24; \\ \begin{cases} x \ge -24, \\ |x-13|-|x-6|=7 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим уравнение отдельно:

$$|x-13|-|x-6|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-13 \ge 0, \\ x-13-(x-6)=7 \Leftrightarrow \varnothing, \end{cases} \\ \begin{cases} 6 \le x < 13, \\ -(x-13)-(x-6)=7 \Leftrightarrow x=6; \end{cases} \\ \begin{cases} x<6, \\ -(x-13)+(x-6)=7 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 6) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 6]$$

Отсюда следует, что

$\left(\sqrt{x^2-26x+169}-\sqrt{x^2-12x+36}-7\right)\sqrt{x+24}=0 \Leftrightarrow x \in [-24;\ 6]$,

и сумма всех целочисленных решений уравнения равна

$\frac{-24+6}{2}\cdot 31=-279.$ $\blacktriangleleft$

§ 2. ОДЗ и решение

7. Ответ. 5.

8. Ответ. 1,8.

▶ $\sqrt{81-25x}-\sqrt{5x-9}=2\sqrt{18-5x} \Leftrightarrow \sqrt{81-25x}=\sqrt{5x-9}+2\sqrt{18-5x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 81-25x=5x-9+4(18-5x)+4\sqrt{5x-9}\sqrt{18-5x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9-5x=2\sqrt{5x-9}\sqrt{18-5x} \Leftrightarrow 9-5x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{5}$. ◀

9. Ответ. 41.

▶ $$\sqrt{x+4}\left(25-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ \begin{cases} x+4\ge 0, \\ 25-x^2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow 16+25=41.$$ ◀

10. Ответ. 5,0625.

▶ $$(4x-7)\sqrt{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{4} \\ x=\pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{49}{16}+2=5{,}0625.$$ ◀

11. Ответ. 32.

▶ $$(5x-1)\sqrt{x^2-16}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-16=0, \\ \begin{cases} x^2-16\ge 0, \\ 5x-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 4.$$ ◀

12. Ответ. 17.

13. Ответ:10

▶ $$(5x-7)\sqrt{x^2-2x-3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=1\pm 2, \\ \begin{cases} x\in(-\infty;\ -1]\cup[3;\ +\infty), \\ x=\dfrac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow 1+9=10.$$ ◀

14. Ответ. 4.

▶ $\left(x^2-4\right)\sqrt{2x-x^2}=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\sqrt{(2-x)x}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0, \\ \begin{cases} x\in[0;\,2], \\ x=\pm 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x_{1,2}=2, x_3=0 \Rightarrow 0^2+2^2=4$$ ◀

§ 3. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=a^2$

15. Ответ. 89.

16. Ответ. 89.

▶ $\sqrt{x^2-3x-20}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2-3x-20=20 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-40=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm 13}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=8. \end{array}\right.$$ ◀

17. Ответ. 16.

▶ $\sqrt{x^2-4x+9}=3 \Leftrightarrow x^2-4x+9=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4. \end{array}\right.$ ◀

18. Ответ. 256.

19. Ответ. 4.

20. Ответ. 25.

21. Ответ. 125.

▶ $\sqrt{x^2+5x-14}=6 \Leftrightarrow x^2+5x-14=36 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm 15}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-10, \\ x=5. \end{array}\right.$ ◀

§ 4. Уравнение вида $\alpha^2\sqrt{x+a}+\beta^2\sqrt{x+b}=const$. Монотонность

22. Ответ. 2.

23. Ответ. 6.

24. Ответ. 2.

25. Ответ. 0.

26. Ответ. 25.

27. Ответ. 8.

28. Ответ. 2.

29. Ответ. 1/2.

30. Ответ. 8.

▶ $5\sqrt{8+10}+\sqrt{3{,}5\cdot 8-20}=15\sqrt{2}+2\sqrt{2}=17\sqrt{2}$. ◀

31. Ответ. –5.

32. Ответ. 8.

33. Ответ. –3.

▶ Заметим, что слева стоит сумма двух монотонно возрастающих функций, а справа – монотонно убывающая, поэтому равенство возможно лишь в одной точке. Подставим точку, когда извлекаются все корни: $x=-3$. ◀

34. Ответ. –9.

35. Ответ. –2.

§ 5. Замена переменных в иррациональном уравнении

36. Ответ. 5.

37. Ответ. 10.

▶ $\sqrt{2x^2-4x+3}+\sqrt{4x^2-8x-3}=\sqrt{39-x^2+2x}$, $x^2-2x=t$,

$\sqrt{2t+3}+\sqrt{4t-3}=\sqrt{39-t} \Leftrightarrow t=3 \Rightarrow x^2-2x=3 \Leftrightarrow x-1;\ 3$ ◀

38. Ответ. 37.

▶ $\sqrt{t+3}-\sqrt{t-2}=1 \Leftrightarrow t=6 \Rightarrow x^2+5x=6 \Leftrightarrow x=1;-6.$ ◀

39. Ответ. -1.

▶ $\sqrt{3t+7}+\sqrt{5t+14}=4-t \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow x^2+2x=-1 \Leftrightarrow x=-1.$ ◀

40. Ответ. 0,4.

▶ $\sqrt{5x+2}+\sqrt{10x-3}=\sqrt{15x+3}$,

$\sqrt{t}+\sqrt{2t-7}=\sqrt{3t-3} \Leftrightarrow -7+2\sqrt{t}\sqrt{2t-7}=-3 \Leftrightarrow \sqrt{t}\sqrt{2t-7}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 3{,}5 \\ 2t^2-7t=4 \end{cases} \Leftrightarrow t=4 \Rightarrow 5x+2=4 \Leftrightarrow x=0{,}4$ ◀

41. Ответ: 0.

42. Ответ. 4,625. ♦

▶ $2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$,

$2t^2-t-6=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1\pm 7}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x}=2 \Leftrightarrow x=8, \\ \sqrt[3]{x}=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x=-\dfrac{27}{8} \end{array}\right. \Rightarrow 8-\dfrac{27}{8}=4{,}625.$ ◀

43. Ответ. 0,5625.

▶ $8x-2\sqrt{x}-3=0$,

$\begin{cases} t \ge 0, \\ 8t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1\pm 5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow t=\dfrac{3}{4} \Rightarrow x=\dfrac{9}{16}=0{,}5625.$ ◀

44. Ответ. 0,125.

▶ $26x^{\frac{2}{3}} - 11x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ 26t^2 - 11t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{11 \pm 15}{52} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2^3} = 0{,}125.$$ ◀

45. Ответ. -6.

46. Ответ. 16.

▶ $\dfrac{2}{2-\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2\sqrt{x} - x},$

$$\frac{2}{2-t} + \frac{1}{2} = \frac{4}{t(2-t)} \Leftrightarrow \frac{4t + 2t - t^2 - 8}{2t(2-t)} = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 6t + 8}{2t(2-t)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 2, \\ t = 3 \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 16$ ◀

47. Ответ. 2.

▶ $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} - \dfrac{4(x-1)}{x+2} = 1,$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t - \dfrac{4}{t^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ t^3 - t^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$ ◀

48. Ответ. 15 .

▶ $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}} + 2\sqrt{3x-2} = 3x \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{3x-2}} + 2\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x} = 3, \Leftrightarrow 1;2$

$$t + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1;2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{\sqrt{3x-2}} = 1, \\ \dfrac{x}{\sqrt{3x-2}} = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 12x + 8 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 1 \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 6 \pm \sqrt{28} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow 1 + 2 + 12 = 15. ◀$$

49. Ответ. 52.

▶ Пусть $x^2 + 2x - 8 = t \geq 0$. Тогда уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 4x - 23} - \sqrt{x^2 + 2x - 8} = 1$$

примет вид:

$\sqrt{2t - 7} - \sqrt{t} = 1 \Leftrightarrow 2t - 7 = 1 + t + 2\sqrt{t} \Leftrightarrow t - 2\sqrt{t} - 8 = 0 \Leftrightarrow$ $\sqrt{t} = 4 \Leftrightarrow t = 16 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 16 \Leftrightarrow x = -1 \pm 5 \Rightarrow$ сумма квадратов всех корней 52. ◀

50. Ответ. 52.

▶ $\sqrt{2x^2 + 4x - 23} - \sqrt{x^2 + 2x - 8} = 1,$

$\sqrt{2t - 23} - \sqrt{t - 8} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2t - 23} = \sqrt{t - 8} + 1 \Leftrightarrow 2t - 23 = t - 8 + 1 + 2\sqrt{t - 8} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t - 16 = 2\sqrt{t - 8} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 16 \geq 0, \\ t^2 - 32t + 256 = 4t - 32 \Leftrightarrow t = 18 \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow t = 24 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 + 2x = 24 \Leftrightarrow x = -1 \pm 5 \Rightarrow 36 + 16 = 52.$ ◀

51. Ответ. 52.

▶ $21 - \dfrac{49}{\sqrt{x^2 + 2x + 25}} = 2\sqrt{x^2 + 2x + 25},$

$$21 - \frac{49}{t} = 2t \Leftrightarrow 2t^2 - 21t + 49 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{21 \pm 7}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 7, \\ t = \dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 2x + 25} = 7 \\ 2\sqrt{x^2 + 2x + 25} = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 25 = 49, \\ 4x^2 + 8x + 100 = 49 \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = -1 \pm 5 \Rightarrow 16 + 36 = 52.$ ◀

52. Ответ. 50.

▶ $\sqrt{x^2+6x-3}+11-\dfrac{26}{\sqrt{x^2+6x-3}}=0,$

$$\begin{cases} t\ge 0, \\ t+11-\dfrac{26}{t}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0, \\ t^2+11t-26=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-11\pm 15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow$$

$x^2+6x-3=4 \Leftrightarrow x=-3\pm 4 \Rightarrow 49+1=50.$ ◀

53. Ответ . 13.

▶ $\sqrt{x^2+x-2}-\dfrac{4}{x^2+x-2}=1,$

$t^3-t^2-4=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow x^2+x-2=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow 4+9=13;$ ◀

54. Ответ. 3,25.

▶ $\sqrt{2x^2+x+6}-\sqrt{2x^2+x+1}=1,$

$\sqrt{t+5}=1+\sqrt{t} \Leftrightarrow t+5=1+t+2\sqrt{t} \Leftrightarrow \sqrt{t}=2 \Leftrightarrow t=4 \Rightarrow 2x^2+x+1=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm 5}{4} \Rightarrow 1+\dfrac{9}{4}=3{,}25.$ ◀

§ 6. Уравнение – «монстр» $\sqrt{f(x)}=g(x)$

55. Ответ. – 3.

56. Ответ. 1.

57. Ответ. 4.

▶ Воспользуемся (УР К2), т. е. тем, что

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\ge 0 \end{cases};$$

$$\sqrt{0,5\left(x^2-3x+4\right)}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0, \\ x^2-3x+4=2x^2-8x+8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0, \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4. \blacktriangleleft$$

58. Ответ. 5.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{21-4x}-x+4=0 \Leftrightarrow \sqrt{21-4x}=x-4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0, \\ 21-4x=x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0, \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0, \\ x=2\pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=5. \blacktriangleleft$$

59. Ответ. –2.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{15x^2+2x+8}+4x=0 \Leftrightarrow \sqrt{15x^2+2x+8}=-4x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ 15x^2+2x+8=16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x=1\pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2. \blacktriangleleft$$

60. Ответ. 1.

61. Ответ. -8.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{x^2-28}=14+x \Leftrightarrow \begin{cases} 14+x\ge 0, \\ x^2-28=196+28x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14+x\ge 0, \\ -224=28x \end{cases} \Leftrightarrow x=-8. \blacktriangleleft$$

62. Ответ. 4.

$\blacktriangleright$ $x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0, \\ 2x^2-9x+5=x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0, \\ x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=4. \blacktriangleleft$$

63. Ответ. –1,25.

▶ $\sqrt{24-5x}=3-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x\ge 0, \\ 24-5x=9-12x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x\ge 0, \\ 4x^2-7x-15=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7\pm 17}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1{,}25.$ ◀

64. Ответ. 4.

▶ $\sqrt{2x^3-5x^2-8x+2}=\sqrt{2}\left(x-1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2x^3-5x^2-8x+2=2x^2-4x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2x^3-7x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2x^2-7x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7\pm 9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=4$ ◀

65. Ответ. –2.

▶ $\sqrt{2x^2+2x-3}=-x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-1\ge 0, \\ 2x^2+2x-3=\left(x+1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1, \\ x^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$ ◀

66. Ответ. –2.

▶ $2\sqrt{x+3}=x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4\ge 0, \\ 4x+12=x^2+8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4\ge 0, \\ x^2+4x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$ ◀

67. Ответ. 3.

▶ Так как обе части неотрицательны в ОДЗ, то после возведения в квадрат получается равносильное в ОДЗ уравнение, при этом ОДЗ выполняется автоматически.

$$\sqrt{x+2}=|x-1|\Leftrightarrow x+2=x^2-2x+1\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Сумма корней равна 3. ◀

68. Ответ. 4.

В силу (УР К2):

▶ $\sqrt{49+4x-x^2}=x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\ge 0,\\ 49+4x-x^2=x^2+6x+9\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\ge 0,\\ 2x^2+2x-40=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\ge 0,\\ x^2+x-20=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm 9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$ ◀

69. Ответ. –28.

▶ $|x+7|-1=\sqrt{|(x+7)^2-2|-1}$. Пусть $t=|x+7|$, тогда уравнение примет вид

$\sqrt{|t^2-2|-1}=t-1\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1,\\ |t^2-2|-1=t^2-2t+1\Leftrightarrow|t^2-2|=t^2-2t+2=(t-1)^2+1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1,\\ \left[\begin{array}{l}t^2-2=t^2-2t+2\Leftrightarrow t=2,\\ t^2-2=-t^2+2t-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t=1,\end{array}\right.\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2,\\ t=1.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|x+7|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5,\\ x=-9,\end{array}\right.\\ |x+7|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6,\\ x=-8.\end{array}\right.\end{array}\right.\Rightarrow$

$\Rightarrow -5-6-8-9=-28.$ ◀

70. Ответ. 6.

▶ $\sqrt{2x^2-8x+9}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0,\\ 2x^2-8x+9=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0,\\ x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x=3\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=4\end{array}\right.\Rightarrow 2+4=6.$ ◀

71. Ответ. 0.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{2x^2-21x+4}=2-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\geq 0, \\ 2x^2-21x+4=4-4x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\geq 0, \\ x^2-17x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0. \blacktriangleleft$$

72. Ответ. –3.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{2x^2-27x+45}=9-x \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x\geq 0, \\ 2x^2-27x+45=81-18x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-x\geq 0, \\ x^2-9x-36=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm 15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=-3. \blacktriangleleft$$

73. Ответ. –2.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{8x^2+18x+8}=-2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2\geq 0, \\ 8x^2+18x+8=4x^2+8x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1, \\ 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm 3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=-2. \blacktriangleleft$$

74. Ответ. –1.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{8x^2+9x+2}=-2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-1\geq 0, \\ 8x^2+9x+2=4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -\dfrac{1}{2}, \\ 4x^2+5x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm 3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1. \blacktriangleleft$$

75. Ответ. 1, 25.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{2x^3+2x^2-3x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0, \\ 2x^3+2x^2-3x+3=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x^3+x^2-5x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x^3-2x^2+3x^2-3x-2x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ (x-1)\left(2x^2+3x-2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{-3\pm 5}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow 1+\frac{1}{4}=1{,}25. ◀$$

76. Ответ. 20.

▶ $\sqrt{x^3-3x^2-2x+17}=x+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x^3-3x^2-2x+17=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x^3-4x^2-4x+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ (x-4)(x-2)(x+2)=0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=4. \end{array}\right. ◀$$

77. Ответ. 10.

▶ $\sqrt{x^3-5x+13}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x^3-5x+13=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x^3-x^2-9x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ (x-1)\left(x^2-9\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow 1+9=10. ◀$$

78. Ответ. 6.

▶ $\sqrt{2x^3+8x^2-10x}=2-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ 2x^3+8x^2-10x=4-8x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x^3+2x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ (x+2)(x-1)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-1, \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow 1+1+4=6. ◀$$

79. Ответ. 1,5.

▶ $\sqrt{4x^3+8x^2-5x}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0, \\ 4x^3+8x^2-5x=1-4x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \ge 0, \\ 4x^3+4x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \ge 0, \\ (x+1)\left(4x^2-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1{,}5. \blacktriangleleft$$

80. Ответ. 81.

$$\blacktriangleright\ 6x-\sqrt{3x^3+18x^2-81x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ 3x^3+18x^2-81x=36x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ \left(x^2-6x-27\right)x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3\pm 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=9 \end{array}\right. \Rightarrow 0+81=81. \blacktriangleleft$$

81. Ответ. 25.

▶ В силу (УРК2):

$$\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 1+x\sqrt{x^2+24}=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x\left(\sqrt{x^2+24}-x-2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; \\ \begin{cases} x+1 \ge 0 \Rightarrow x+2>0, \\ \sqrt{x^2+24}=x+2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; \\ \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x^2+24=x^2+4x+4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=5. \end{array}\right. \blacktriangleleft$$

82. Ответ. 45.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{2x^2-27x+99}=9-x \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x \ge 0, \\ 2x^2-27x+99=81-18x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-x \ge 0, \\ x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow 36+9=45. \blacktriangleleft$$

83. Ответ. 5.

▶ $\sqrt{2x^2-9x+11}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x\ge 0, \\ 2x^2-9x+11=9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x\ge 0, \\ x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm 1}{2} \end{cases} \Rightarrow 1+4=5.$ ◀

84. Ответ. 9.

▶ $\sqrt{2x^2-6x+9}=x^2-3x+3,$ сделаем замену переменной $t=x^2-3x,$ тогда уравнение примет вид:

$\sqrt{2t+9}=t+3 \Leftrightarrow \begin{cases} t+3\ge 0, \\ 2t+9=t^2+6t+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+3\ge 0, \\ t^2+4t+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=0$

Вернёмся к старой переменной:

$x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow 0+9=9.$ ◀

85. Ответ. 13.

▶ $\sqrt{2x^2+2x+4}=x^2+x-2,$ сделаем замену переменной $t=x^2+x,$ тогда уравнение примет вид:

$\sqrt{2t+4}=t-2 \Leftrightarrow \begin{cases} t-2\ge 0, \\ 2t+4=t^2-4t+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2\ge 0, \\ t^2-6t=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=6.$

Вернёмся к старой переменной:

$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow 9+4=13.$ ◀

86. Ответ. 10.

▶ $\sqrt{6x-2}=|x+1| \Leftrightarrow 6x-2=x^2+2x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=2\pm 1 \Rightarrow 9+1=10.$ ◀

87. Ответ. 26. ♦

▶ $\sqrt{2x^2-8x+6}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2x^2-8x+6=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0, \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0, \\ x=3\pm 2 \end{cases} \Rightarrow 1^2+5^2=26. \blacktriangleleft$$

§ 7. Уравнение вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$.

88. Ответ. 2).

89. Ответ. 3).

90. Ответ. 1).

91. Ответ. 2).

§8 . Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

92. Ответ. 10. ♦

93. Ответ. –2.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{8-x^2}=\sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x^2=2-x, \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1\pm 5}{2}, \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2. \blacktriangleleft$$

94. Ответ. 5.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{x^2-5}=2\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5=4x \Leftrightarrow x=2\pm 3, \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5. \blacktriangleleft$$

95. Ответ. 2,5.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{2x^3-4x^2+x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0, \\ x^2+x-1=2x^3-4x^2+x-1 \end{cases} \Leftrightarrow\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0, \\ 2x^3-5x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2,5. \blacktriangleleft$$

96. Ответ. 7.

▶ $\sqrt{x^3-5x^2+7x-17}=\sqrt{x^3-4x^2-3x+4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-5x^2+7x-17=x^3-4x^2-3x+4, \\ x^3-4x^2-3x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x+21=0 \Leftrightarrow x=5\pm 2, \\ x^3-4x^2-3x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7, \\ 7^3-4\cdot 7^2-3\cdot 7+4>0 \end{cases} \Rightarrow x=7, \\ \begin{cases} x=3, \\ 3^3-4\cdot 3^2-3\cdot 3+4>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing. \end{array}\right.$$ ◀

97. Ответ. 9.

▶ $\sqrt{x^3-8x^2-7x+2}=\sqrt{x^3-7x^2-18x+20} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-8x^2-7x+2=x^3-7x^2-18x+20, \\ x^3-8x^2-7x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-11x+18=0 \Leftrightarrow \dfrac{11\pm 7}{2}, \\ x^3-8x^2-7x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=9, \\ 9^3-8\cdot 9^2-7\cdot 9+2>0, \end{cases} \Leftrightarrow x=9, \\ \begin{cases} x=2, \\ 2^3-8\cdot 2^2-7\cdot 2+2<0 \end{cases} x\in\varnothing. \end{array}\right.$$ ◀

98. Ответ. 8.

▶ $\sqrt{x^3-7x^2+8x+2}=\sqrt{x^3-8x^2+20x-30} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-7x^2+8x+2=x^3-8x^2+20x-30, \\ x^3-7x^2+8x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x+32=0 \Leftrightarrow x=6\pm 2, \\ x^3-7x^2+8x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=8, \\ 8^3-7\cdot 8^2+8\cdot 8+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=8 \\ \begin{cases} x=4, \\ 4^3-7\cdot 4^2+8\cdot 4+2<0 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing. \end{array}\right.$$ ◀

99. Ответ. 8.

▶ $\sqrt{x^3-5x^2+15x-77}=\sqrt{x^3-4x^2+2x-37} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^3-5x^2+15x-77=x^3-4x^2+2x-37, \\ x^3-4x^2+2x-37\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-13x+40=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{13\pm 3}{2}, \\ x^3-4x^2+2x-37\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=8, \\ 8^3-4\cdot 8^2+2\cdot 8-37>0; \end{cases} \Leftrightarrow x=8 \\ \begin{cases} x=5, \\ 5^3-4\cdot 5^2+2\cdot 5-37<0 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing \end{array}\right.$$ ◀

100. Ответ. 8.

▶ $\left(\sqrt{2x-7}+\sqrt{2x}\right)^3\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2x-7}\right)=343 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-7}+\sqrt{2x}\right)^2=49 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-7}+\sqrt{2x}=7, \\ \sqrt{2x-7}+\sqrt{2x}=-7 \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-7}+\sqrt{2x}=7 \Leftrightarrow x=8.$ ◀

101. Ответ. 9.

▶ $\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\right)^3=-5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\right)^2=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-5}-\sqrt{x}=1, \\ \sqrt{x-5}-\sqrt{x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-5}=1+\sqrt{x}, \\ \sqrt{x-5}+1=\sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=1+2\sqrt{x}+x, \\ x-5+2\sqrt{x-5}+1=x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6=2\sqrt{x} \Leftrightarrow \varnothing, \\ \sqrt{x-5}=2 \Leftrightarrow x=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=9.$$ ◀

102. Ответ. 0,25.

▶ $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^6\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)^4=64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)^4\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^4\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^2=64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^4\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^2=64 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^2=4 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=2-\sqrt{x}\Leftrightarrow\begin{cases}2-\sqrt{x}\ge 0,\\ x+2=4-4\sqrt{x}+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 4,\\ 0=1-2\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 4,\\ x=0,25\end{cases}\Leftrightarrow x=0,25 \blacktriangleleft$$

103. Ответ. $-1{,}6$.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{6x^2-x-1}=\sqrt{15+4x-4x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2-x-1=15+4x-4x^2,\\ 15+4x-4x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}10x^2-5x-16=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{665}}{20},\\ x\in\left[-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{5}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{665}}{20}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2^1+x_2^2=\frac{143}{80}=1,7875. \blacktriangleleft$$

104. Ответ. $4{,}5$.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{4x^3+9x^2-4x+2}=\sqrt{x^2-3x+4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+4\ge 0\Leftrightarrow x\in R,\\ 4x^3+9x^2-4x+2=x^2-3x+4.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^3+8x^2-x-2=0\Leftrightarrow 4x^2(x+2)-(x+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)(2x-1)(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=\dfrac{1}{2},\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow 4+0,25+0,25=4,5. \blacktriangleleft$$

105. Ответ. 49.

$$\blacktriangleright\ \sqrt{x^2-4x+1}=\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1\ge 0,\\ x^2-4x+1=3x+1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1\ge 0,\\ x^2-7x=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=7\end{array}\right.\Rightarrow x^2=49. \blacktriangleleft$$

106. Ответ. 17.

▶ $\sqrt{2x^2-4x+5}=\sqrt{3x^2-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4x+5=3x^2-x+1, \\ 2x^2-4x+5\ge 0 \Leftrightarrow x\in R \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-3\pm 5}{2} \Rightarrow 16+1=17.$ ◀

107. Ответ. 25.

▶ $\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{4x-10} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-10\ge 0, \\ x^2-3x=4x-10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x\ge 5, \\ x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7\pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow x^2=25.$ ◀

108. Ответ. 8.

▶ $\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)^5\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)^3=256 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2-4}\right)^2\left(x^2-x^2+4\right)^3=256 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2-4}\right)^2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x^2-4}=2, \\ x+\sqrt{x^2-4}=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-4}=2-x, \\ \sqrt{x^2-4}=-2-x \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-x\ge 0, \\ x^2-4=4-4x+x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} -2-x\ge 0, \\ x^2-4=4+4x+x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow 4+4=8.$ ◀

§ 9. Разные уравнения.

109. Ответ. –1.

110. Ответ. 2.

▶ *Первый способ* (возведение в квадрат).

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\Leftrightarrow x+2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+x-2\sqrt{x-1}=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0,\\ x-2\sqrt{x-1}\ge 0\Leftrightarrow x^2-4x+4\ge 0,\\ 2-x\ge 0,\\ (2-x)^2=\left(x+2\sqrt{x-1}\right)\left(x-2\sqrt{x-1}\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 2,\\ (2-x)^2=(2-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1;\ 2]\Rightarrow x_{\text{наиб}}=2$$

Второй способ (преобразование подкоренного выражения к полному квадрату).

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=2\Leftrightarrow\left|\sqrt{x-1}-1\right|=1-\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\sqrt{x-1}\ge 0,\\ 1-\sqrt{x-1}=1-\sqrt{x-1}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{x-1}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0,\\ \sqrt{x-1}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1;\ 2].\ ◀$$

111. Ответ. 7.

▶ *Первый способ* (возведение в квадрат).

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2+\sqrt{2x-5}+2\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}}+x+2-3\sqrt{2x-5}=8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}}=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2+\sqrt{2x-5}\ge 0,\\ 4-x+\sqrt{2x-5}\ge 0,\\ \left(x-2+\sqrt{2x-5}\right)\left(x+2-3\sqrt{2x-5}\right)=\left(4-x+\sqrt{2x-5}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x-2+\sqrt{2x-5}\geq 0, \\ 4-x+\sqrt{2x-5}\geq 0, \\ \left(x^2-4+(x+2)\sqrt{2x-5}-3(x-2)\sqrt{2x-5}-3(2x-5)\right)=(2x-5)+2(4-x)\sqrt{2x-5}+(4-x)^2 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x-2+\sqrt{2x-5}\geq 0, \\ 4-x+\sqrt{2x-5}\geq 0, \\ x^2-4+(x+2-3x+6-8+2x)\sqrt{2x-5}-6x+15=x^2-6x+11 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (x-2-1{,}5)+\sqrt{2x-5}+1{,}5\geq 0 \Leftrightarrow x\in \text{ОДЗ}, \\ 4-x+\sqrt{2x-5}\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{2x-5}\geq x-4\Leftrightarrow x\in[2{,}5;7]\Leftrightarrow x\in[2{,}5;7]$$

$$\sqrt{2x-5}=x-4\Leftrightarrow\begin{cases} x-4\geq 0, \\ 2x-5=x^2-8x+16 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-4\geq 0, \\ x^2-10x+21=0\Leftrightarrow x=5\pm 2 \end{cases}\Leftrightarrow x=7.$$

Второй способ (преобразование подкоренного выражения к полному квадрату).

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x+4-6\sqrt{2x-5}}=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(2x-5)+2\sqrt{2x-5}+1}+\sqrt{(2x-5)-6\sqrt{2x-5}+9}=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x-5}+\left|\sqrt{2x-5}-3\right|=3\Leftrightarrow\left|\sqrt{2x-5}-3\right|=3-\sqrt{2x-5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3-\sqrt{2x-5}\geq 0, \\ 3-\sqrt{2x-5}=3-\sqrt{2x-5} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-\sqrt{2x-5}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-5\geq 0, \\ \sqrt{2x-5}\leq 3 \end{cases}\Leftrightarrow x\in[2{,}5;\ 7].\ ◀$$

112. Ответ. 1.

113. Ответ. 3.

▶ $\sqrt{x+13}-\sqrt{7-x}=\sqrt{-x^2-6x+31}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+13}-\sqrt{7-x}\ge 0, \\ x+13-2\sqrt{x+13}\sqrt{7-x}+7-x=-x^2-6x+31 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+13}-\sqrt{7-x}\ge 0, \\ 2\sqrt{x+13}\sqrt{7-x}=x^2+6x-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+13}-\sqrt{7-x}\ge 0, \\ 2\sqrt{-x^2-6x+91}=x^2+6x-11 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

$2\sqrt{-x^2-6x+91}=x^2+6x-11$. Замена $x^2+6x-11=t$:

$2\sqrt{80-t}=t \Leftrightarrow 320-4t=t^2 \Leftrightarrow t^2+4t-320=0 \Leftrightarrow t=-2\pm 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+6x-11=16 \Leftrightarrow x=-3\pm 6=$

$$= \left[\begin{array}{l} x=-9 \Rightarrow \sqrt{-9+13}-\sqrt{7+9}<0 \Leftrightarrow \varnothing, \text{одз} \\ x=3 \Rightarrow \sqrt{3+13}-\sqrt{7-3}>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=3. \blacktriangleleft$$

114. Ответ. 2.

▶ $\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=\sqrt{12} \Leftrightarrow x+3+5-x+2\sqrt{x+3}\sqrt{5-x}=12 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\sqrt{5-x}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(5-x)=4, \\ x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-11=0 \Leftrightarrow x=1\pm 2\sqrt{3}, \\ x+3\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1+x_2=2.$ ◀

115. Ответ. 8.

▶ $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-12}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{2x-12}+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+1=2x-12+2\sqrt{2x-12}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-12}=12-x \Leftrightarrow \begin{cases} 12-x\ge 0, \\ 8x-48=144-24x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12-x\ge 0, \\ x^2-32x+192=0 \Leftrightarrow x=16\pm 8 \end{cases} \Leftrightarrow x=8. \blacktriangleleft$$

116. Ответ. 0.

▶ $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}-\sqrt{7x+4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+9}=\sqrt{11x+1}+\sqrt{7x+4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x+9=11x+1+2\sqrt{11x+1}\sqrt{7x+4}+7x+4 \Leftrightarrow -14x+4=2\sqrt{11x+1}\sqrt{7x+4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{11x+1}\sqrt{7x+4}=-7x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} -7x+2\ge 0, \\ (11x+1)(7x+4)=49x^2-28x+4, \Leftrightarrow \\ 11x+1\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x+2\ge 0, \\ (28x+79)x=0, \\ 11x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-\dfrac{79}{28} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0. \blacktriangleleft$$

117. Ответ. 8.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{2x+20}+\sqrt{2x-12}=\sqrt{5x+24} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x+20+2\sqrt{2x+20}\sqrt{2x-12}+2x-12=5x+24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+20}\sqrt{2x-12}=x+16 \Leftrightarrow \begin{cases} x+16\ge 0, \\ 16(x+10)(x-6)=x^2+32x+256, \\ x-6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2+64x-960=x^2+32x+256, \\ x-6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x^2+32x-1216=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-16\pm 136}{15}, \\ x-6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=8. \blacktriangleleft$$

118. Ответ. 2.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}=\sqrt{5x+6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x+5+2\sqrt{2x+5}\sqrt{2x-3}+2x-3=5x+6 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+5}\sqrt{2x-3}=x+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4\ge 0, \\ 4(2x+5)(2x-3)=x^2+8x+16, \\ 2x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3\ge 0, \\ 16x^2+16x-60=x^2+8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3\ge 0, \\ 15x^2+8x-76=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm 34}{15} \end{cases} \Leftrightarrow x=2. \blacktriangleleft$$

119. Ответ. 2.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{x+7}\sqrt{3x-2}=3\sqrt{x-1}\sqrt{x+2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ 3x^2+19x-14=9x^2+9x-18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ 6x^2 - 10x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm 7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \blacktriangleleft$$

120. Ответ. 13.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-4} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{x-4} + 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = x - 4 + 6\sqrt{x-4} + 9 \Leftrightarrow x - 2 = 3\sqrt{x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0, \\ x^2 - 4x + 4 = 9x - 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x^2 - 13x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{13 \pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = 5 \end{array} \right. \Rightarrow 8 + 5 = 13. \blacktriangleleft$$

121. Ответ. 3.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x+7} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 + 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} + x - 2 = 3x + 7 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0, \\ 2x^2 - x - 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0, \\ 2x^2 - x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm 11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3. \blacktriangleleft$$

122. Ответ. 4.

$\blacktriangleright$ $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 6x - 11} = x + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 6x - 11 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow 6x - 11 = 3x + 1 \Leftrightarrow x = 4. \blacktriangleleft$$

123. Ответ. 3.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0, \\ 1 + 4x - x^2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0, \\ 2x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3. \blacktriangleleft$$

124. Ответ. 1,75.

$\blacktriangleright$ $3 + \sqrt{16x|x-2| + 9} = 4x \Leftrightarrow \sqrt{16x|x-2| + 9} = 4x - 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-3\ge 0,\\ 16x|x-2|+9=(4x-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-3\ge 0,\\ 16x|x-2|+9=16x^2-24x+9\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-3\ge 0,\\ 2x|x-2|=2x^2-3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-3>0,\\ 2|x-2|=2x-3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}2x-4=2x-3,\Rightarrow x\in\varnothing\\ 2x-4=-2x+3\Leftrightarrow 4x=7\Leftrightarrow x=1{,}75.\end{array}\right.\end{cases}$$ ◀

125. Ответ. 1.

▶ $x\sqrt{x+2}=\sqrt{x^3+x+1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2(x+2)=x^3+x+1,\\ x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ 2x^2-x-1=0,\\ x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$ ◀

126. Ответ. -3.

▶ $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+\sqrt{45}}+\sqrt{x^2-\sqrt{45}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x=2x^2+2\sqrt{x^4-45}\Leftrightarrow -2x=\sqrt{x^4-45}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0,\\ 4x^2=x^4-45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0,\\ 4x^2=x^4-45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0,\\ x^2=2\pm 7\end{cases}\Leftrightarrow x=-3.$$ ◀

127. Ответ. 2.

▶ $\sqrt{x+7}\sqrt{x+3}=\sqrt{45}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\ge 0,\\ x^2+10x+21=45\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\ge 0,\\ x^2+10x-24=0\Leftrightarrow x=-5\pm 7\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$ ◀

128. Ответ. -28.

▶ $\sqrt{-2x-7}+22=x+\sqrt{(2x-1)^2}\Leftrightarrow\sqrt{-2x-7}+22=x+|2x-1|\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\sqrt{-2x-7}+22=x-2x+1 \Leftrightarrow \sqrt{-2x-7}=-x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-21 \ge 0, \\ -2x-7=x^2+42x+441 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -21, \\ x^2+44x+48=0 \Leftrightarrow x=-22\pm 6 \Leftrightarrow x=-28. \end{cases} \blacktriangleleft$$

129. Ответ. 3.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{x+13}-\sqrt{7-x}=\sqrt{-x^2-6x+31} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+13}-\sqrt{7-x} \ge 0, \\ x+13-2\sqrt{x+13}\sqrt{7-x}+7-x=-x^2-6x+31 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+13}-\sqrt{7-x} \ge 0, \\ -2\sqrt{x+13}\sqrt{7-x}=-x^2-6x+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+13}-\sqrt{7-x} \ge 0, \\ -2\sqrt{-x^2-6x+91}=-x^2-6x+11 \end{cases}$$

Сделаем замену $t=-x^2-6x+91$, тогда

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ -2t=t^2-80 \Leftrightarrow t=-1\pm 9 \end{cases} \Leftrightarrow t=8 \Rightarrow -x^2-6x+91=64 \Leftrightarrow x^2+6x-27=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-3\pm 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-9 \Rightarrow \sqrt{-9+13}-\sqrt{7+9}=2-4<0 \Rightarrow \varnothing; \\ x=3 \Rightarrow \sqrt{3+13}-\sqrt{7-3}=4-2>0 \end{array} \right. \Rightarrow x=3. \blacktriangleleft$$

130. Ответ. 6. $\blacklozenge$

$\blacktriangleright$ $\sqrt{x+10}-\sqrt{15-x}=\sqrt{-x^2+5x+7} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+10}-\sqrt{15-x} \ge 0, \\ x+10-2\sqrt{x+10}\sqrt{15-x}+15-x=-x^2+5x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+10}-\sqrt{15-x} \ge 0, \\ -2\sqrt{x+10}\sqrt{15-x}=-x^2+5x-18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+10}-\sqrt{15-x} \ge 0, \\ -2\sqrt{-x^2+5x+150} = -x^2+5x-18 \end{cases}$$

Сделаем замену $t=\sqrt{-x^2+5x+150}, t \ge 0$, тогда

$$-2t = t^2-168 \Leftrightarrow t^2+2t-168=0 \Leftrightarrow t=-1\pm 13 \Rightarrow t=12 \Rightarrow -x^2+5x+150=144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \Rightarrow \sqrt{16}-\sqrt{9}>0; \\ x=-1 \Rightarrow \sqrt{9}-\sqrt{16}<0 \Rightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x=6. \blacktriangleleft$$

131. Ответ. 7.

132. Ответ. 9.

133. Ответ. 8.

134. Ответ. 4.

▶ Воспользуемся тем, что $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$:

$$\sqrt{0,5\left(x^2-3x+4\right)} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ x^2-3x+4 = 2x^2-8x+8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4. \blacktriangleleft$$

135. Ответ. 1.

$$\blacktriangleright \sqrt{x+3} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x+3 = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \blacktriangleleft$$

136. Ответ. 12.

$$\blacktriangleright \sqrt{x-9}\sqrt{x-10} = \sqrt{x-6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 10, \\ x^2-19x+90 = x-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 10, \\ x^2 - 20x + 96 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12. \blacktriangleleft$$

137. Ответ. 14.

$$\blacktriangleright \sqrt{x-8}\sqrt{x-12} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 12, \\ x^2 - 20x + 96 = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 12, \\ x^2 - 21x + 98 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{21 \pm 7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 14. \blacktriangleleft$$

138. Ответ. 15.

$$\blacktriangleright \sqrt{x-11}\sqrt{x-12} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 12 \ge 0, \\ x^2 - 23x + 132 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 12 \ge 0, \\ x^2 - 24x + 135 = 0 \Leftrightarrow x = 12 \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 15. \blacktriangleleft$$

139. Ответ. 8. ◆

$$\blacktriangleright \sqrt{x+2}\sqrt{x-6} = \sqrt{x+12} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 \ge 0, \\ x^2 - 4x - 12 = x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 \ge 0, \\ x^2 - 5x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm 11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8. \blacktriangleleft$$

140. Ответ. 8. ◆

$$\blacktriangleright 2\sqrt{7x-42} = \sqrt{5x-32}\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 32 \ge 0, \\ 28x - 168 = 5x^2 - 37x + 32 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 32 \ge 0, \\ 5x^2 - 65x + 200 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{65 \pm 15}{10} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8. \blacktriangleleft$$

141. Ответ. –8.

▶ $\sqrt{3x+28}\sqrt{x+9}=\sqrt{x+12} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+28\ge 0, \\ 3x^2+55x+252=x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+28\ge 0, \\ 3x^2+54x+240=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-27\pm 3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=-8.$ ◀

142. Ответ. 25.

▶ $\sqrt{160+\sqrt{4x^2-4x+1}}=x+8 \Leftrightarrow \sqrt{160+|2x-1|}=x+8 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x+8\ge 0, \\ 160+|2x-1|=x^2+16x+64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+8\ge 0, \\ |2x-1|=x^2+16x-96 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+8\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ 2x-1=x^2+16x-96; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1<0, \\ -2x+1=x^2+16x-96 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+8\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ x^2+14x-95=0 \Leftrightarrow x=-7\pm 12; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1<0, \\ x^2+18x-97=0 \Leftrightarrow x=-9\pm\sqrt{178} \Rightarrow x\in\varnothing. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow x^2=25.$ ◀

143. Ответ. 55,5.

▶ $\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}\sqrt{8-x}=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0, \\ 4(x+2)(8-x)=25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0, \\ 4x^2-24x-39=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{12\pm 10\sqrt{3}}{4}=\dfrac{6\pm 5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1^2+x_2^2=\dfrac{111}{2}=55,5.$ ◀

144. Ответ. 6,5.

► $\sqrt{4x-1}=2|x-1| \Leftrightarrow 4x-1=4x^2-8x+4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{6\pm 4}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{2}, \\ x=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$ ◄

145. Ответ. 4.

► $x+\sqrt{3+\sqrt{x^2-2x+1}}=4 \Leftrightarrow x+\sqrt{3+|x-1|}=4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+|x-1|}=4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\ge 0, \\ 3+|x-1|=16-8x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\ge 0, \\ |x-1|=13-8x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\ge 0, \\ x-1=13-8x+x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0, \\ -x+1=13-8x+x^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\ge 0, \\ x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow x=\frac{9\pm 5}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0, \\ x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm 1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow x^2=4.$$ ◄

146. Ответ. 25.

► $\sqrt{7-\sqrt{x^2-4x+4}}=x-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0, \\ 7-x+2=x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0, \\ x^2-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow x^2=25.$$ ◄

147. Ответ. 25 .

▶ $3x+\sqrt{7+\sqrt{x^2-6x+9}}=18 \Leftrightarrow \sqrt{7+|x-3|}=18-3x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18-3x\ge 0, \\ |x-3|=317-108x+9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18-3x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 3, \\ x-3=317-108x+9x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ -x+3=317-108x+9x^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 6, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 3, \\ 9x^2-109x+320=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{109\pm 19}{18}; \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ 9x^2-107x+314=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{107\pm\sqrt{145}}{18} \Leftrightarrow \varnothing; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=5 \Rightarrow x^2=25.$ ◀

148. Ответ. 12,5.

▶ $\sqrt{23-4x}=2|x-2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 23-4x=4x^2-16x+16 \Leftrightarrow 4x^2-12x-7=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm 8}{4} \Rightarrow \left(\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}=12{,}5.$ ◀

149. Ответ. 1,25.

▶ $$\left(2\sqrt[3]{x}-x-1\right)\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}; \\ \begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ 2\sqrt[3]{x}-x-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}; \\ \left\{\begin{array}{l} 2x-1\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x}=1 \Leftrightarrow x=1, \\ \sqrt[3]{x}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x<0; \\ \sqrt[3]{x}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{-1+3\sqrt{5}-15+5\sqrt{5}}{8}=-2+\sqrt{5}<\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}, \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow 1+\frac{1}{4}=1,25. \blacktriangleleft$$

150. Ответ. 5.

$\blacktriangleright$ $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+\sqrt{5}}+\sqrt{x^2-\sqrt{5}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x=2x^2+2\sqrt{x^4-5} \Leftrightarrow -2x=\sqrt{x^4-5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\le 0, \\ x^4-5=4x^2 \Leftrightarrow x^2=2\pm 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\sqrt{5} \Rightarrow x^2=5. \blacktriangleleft$$

151. Ответ. 5.

$\blacktriangleright$ ОДЗ: $x(x-1)>0$.

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\frac{3}{\sqrt{x(x-1)}} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \frac{x}{x-1}+2+\frac{x-1}{x}=\frac{9}{x(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x^2-2x+x^2-2x+1-9}{(x-1)x}=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Оба корня принадлежат ОДЗ. $\blacktriangleleft$

152. Ответ. 5.

$$\blacktriangleright \sqrt{3x^2+5x+6}=1-x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-x\ge 0, \\ 3x^2+5x+6=1-2x+x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\ge 0,\\ 2x^2+7x+5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-7\pm 3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=-1\end{array}\right.\Rightarrow 1+4=5.$$ ◀

153. Ответ. 306.

▶ $$3\sqrt{5x-9}=\sqrt{x+3}\sqrt{x+18}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-9\ge 0,\\ 45x-81=x^2+21x+54\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x-9\ge 0,\\ x^2-24x+135=0\Leftrightarrow x=12\pm 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=15,\\ x=9\end{array}\right.\Rightarrow 225+81=306.$$ ◀

154. Ответ. 0.

155. Ответ. 52.

▶ Пусть $x^2+2x-8=t\ge 0$. Тогда уравнение

$\sqrt{2x^2+4x-23}-\sqrt{x^2+2x-8}=1$ примет вид

$$\sqrt{2t-7}-\sqrt{t}=1\Leftrightarrow 2t-7=1+t+2\sqrt{t}\Leftrightarrow t-2\sqrt{t}-8=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{t}=4\Leftrightarrow t=16\Rightarrow x^2+2x-8=16\Leftrightarrow x=-1\pm 5\Rightarrow 6^2+4^2=52.$$ ◀

156. Ответ. 25.

▶ $$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x+4-6\sqrt{2x-5}}=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(2x-5)+2\sqrt{2x-5}+1}+\sqrt{(2x-5)-6\sqrt{2x-5}+9}=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x-5}+1+\left|\sqrt{2x-5}-3\right|=4\Leftrightarrow\sqrt{2x-5}-3+\left|\sqrt{2x-5}-3\right|=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x-5}-3\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5\ge 0,\\ 2x-5\le 9\end{cases}\Leftrightarrow x\in[2{,}5;7]\Rightarrow 3+4+5+6+7=25.$$ ◀

Оглавление

Иррациональные уравнения.

МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ

ЕГЭ

Математика
Иррациональные уравнения

Подписано в печать 01.12.09. Формат $62x94^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Тираж 3000. Заказ № 1428
Отпечатано в типографии ООО «Азбука-2000»
109544, г. Москва, ул. Рабочая, д. 84