СЕРГЕЙ ТЫЧИНИН

ЕГЭ–2015 по математике для «чайников»: советы репетитора

Часть 5. «Производная функции»

Задания №№ 8, 14

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ВВЕДЕНИЕ

Вниманию учащихся, сдающих ЕГЭ в 2015 году,
предлагается учебное пособие для самостоятельной подготовки

«ЕГЭ-2015 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА»

Пособие состоит из 5 тематических разделов–шагов, в соответствии с которыми, как мне представляется, довольно удобно готовиться к этому экзамену.

А именно:

- ✓ Шаг №1: «Начни с простого…» (задания 1–4)
- ✓ Шаг №2: «Геометрия» (задания 7, 9, 12)
- ✓ Шаг №3: «Простейшие уравнения и преобразования» (задания 6, 10)
- ✓ Шаг №4: «Текстовые задачи» (задания 5, 11, 13)
- ✓ Шаг №5: «Производная функции» (задания 8, 14)

Свои отзывы и пожелания (если они вдруг неожиданно обнаружатся :)
вы можете отправить мне, перейдя по этой ссылке:
http://egeprosto.ru/kontakty

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ В РАБОТЕ!

АВТОР

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ***2***

ОГЛАВЛЕНИЕ ***3***

ГЛАВА 5: «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ» ***4***

ЗАДАНИЕ 8 .... ***5***

ОТСТУПЛЕНИЕ: «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ» 6

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ – ЧТО ЭТО ТАКОЕ? 6

НЕМНОГО О ДЕТАЛЯХ… 8

8.1. НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ГРАФИКУ ФУНКЦИИ 9

8.2. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ 14

8.3. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ САМОЙ ФУНКЦИИ 21

8.4. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ 24

ЗАДАНИЕ B14 .... ***29***

ЗАДАНИЯ №14 1-ГО ТИПА: «НАЙТИ ТОЧКУ МАКСИМУМА ИЛИ МИНИМУМА ФУНКЦИИ» ***30***

ОТСТУПЛЕНИЕ №1: «ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОЙ ФОРМУЛЕ ЭТОЙ ФУНКЦИИ». 30

14.1. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $e^{<\text{ВЫРАЖЕНИЕ}>}$ 33

14.2. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТОЛЬКО ФУНКЦИЮ $x^{<\text{ЧИСЛО}>}$ 39

14.3. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $ln < \text{ВЫРАЖЕНИЕ} >$ ИЛИ $loga < \text{ВЫРАЖЕНИЕ} >$ 45

ЗАДАНИЯ №14 2-ГО ТИПА: «НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ (НАИМЕНЬШЕЕ) ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НА ЗАДАННОМ ОТРЕЗКЕ» ***49***

14.4. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ 50

ОТСТУПЛЕНИЕ №2: «ОСОБЫЕ» УГЛЫ И ЕДИНИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ 50

14.5. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $ln < \text{ВЫРАЖЕНИЕ} >$ 59

14.6. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $e^{<\text{ВЫРАЖЕНИЕ}>}$ 62

14.7. «ЗАМАСКИРОВАННЫЕ» ЗАДАНИЯ 64

14.8. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТОЛЬКО ФУНКЦИЮ $x^{<\text{ЧИСЛО}>}$ 66

14.9. ФУНКЦИЯ НЕ СОДЕРЖИТ ОГРАНИЧИВАЮЩЕГО ИНТЕРВАЛА $[X; X]$ 70

ГЛАВА 5: «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ»

В Главе 5 пойдет речь о так называемой «производной функции» и заданиях 8 и 14, которые подходят с разных сторон к этой самой производной. Главное отличие между ними заключается в следующем: задание №8 предлагает работу с графиками (либо самой функции, либо ее производной), а задание №14 – с формулами.

Если слово «производная» вам совсем ни о чем не говорит, или вызывает смутные воспоминания – внимательно прочитайте Тематическое Отступление «Производная функции». Этого будет достаточно для базового, первичного понимания, а все остальное прояснится в процессе рассмотрения типовых заданий.

ЗАДАНИЕ 8

Производная функции. Именно с ней связано задание №8 предстоящего экзамена. В условии этих заданий дается либо график некой функции, либо график производной этой функции. И по этому графику необходимо либо вычислить значение производной в указанной точке, либо сделать какие-то другие выводы.

По сути, эти задания весьма просты, хотя и занимают 8-е место «в рейтинге» первой части экзамена.

Довольно часто, после прочтения школьного учебника, производная функции кажется чем-то нереально сложным. Настолько сложным, что непонятно даже, «о чем все это».
И даже кажется, что простыми словами объяснить это невозможно.

Именно поэтому – для небольшого прояснения вопроса – сделаем очередное Тематическое Отступление. К сожалению, не такое уж и маленькое.

Но, как обычно, если его читать совсем уж не хочется, то можно попробовать сразу перейти к разбору примеров. Возможно, что его окажется достаточно для успешного решения этих заданий.

ОТСТУПЛЕНИЕ: «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ».

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ – ЧТО ЭТО ТАКОЕ?

1) Не все функции одинаковы. Более того, они во многом очень даже различны.
Сейчас мы обсудим не все их возможные различия, а только некоторые.
А именно – ***скорость их изменения***, то есть убывания или возрастания.

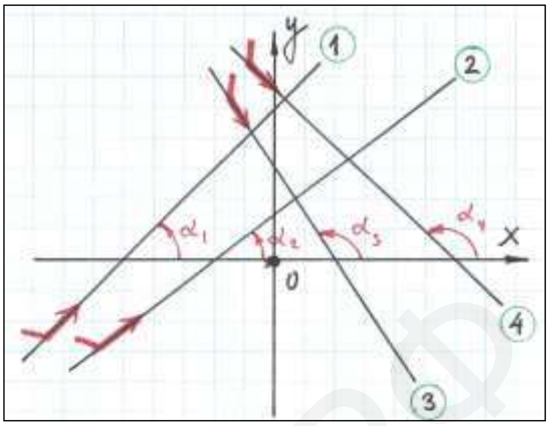


РИСУНОК 8а

Например, функции 1 и 2 – возрастающие (↑), а 3 и 4 – убывающие (↓) (рис. 8а). Отличить друг от друга их очень просто. Если представить некий самолет, который летит по линии функции слева направо, и при этом набирает высоту (↑), то функция возрастает. Если он снижается (↓), то убывает. Функции 1 и 2, как видно, отличаются друг от друга скоростью возрастания («взлета»). А функции 3 и 4 – скоростью убывания («снижения»).

2) В чем же ***измерять скорость*** возрастания или убывания функции?
Самая простая мысль – связать эту скорость с углом наклона прямой линии к горизонту.
И эта мысль совершенно правильна! Однако единицей измерения этой скорости сделали не величину угла в градусах, а тангенс этого угла. То есть ***отношение длин вертикального катета к горизонтальному*** в прямоугольном треугольнике, построенном в створе этого угла (рис. 8б). Именно это отношение и считается равным скорости изменения функции.
И действительно, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, на сколько единиц изменится функция при изменении ее аргумента на 1 единицу.

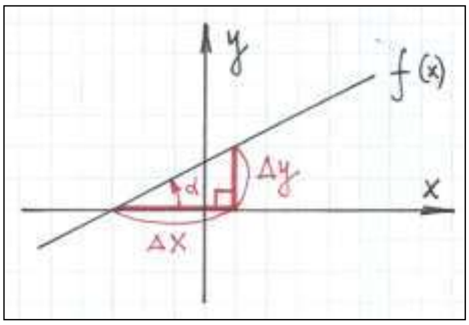


РИСУНОК 8б

Точно так же, как «обычная» скорость, равная $v = \frac{s}{t}$, которая показывает, сколько единиц длины (метров) тело проходит за 1 единицу времени (секунду) (рис. 8в).

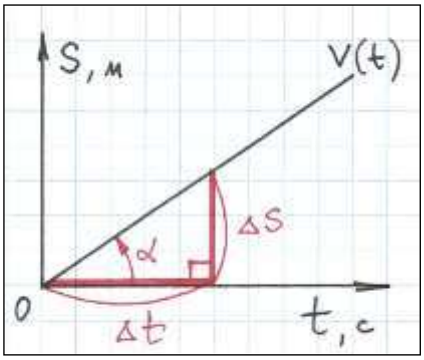


РИСУНОК 8в

3) А как быть, если функция представлена не прямой линией, а кривой (рис. 8г)?
Ведь угол наклона к горизонту этой линии в разных ее точках различен?
В этом случае вопрос решается очень просто. В любой точке графика тангенс угла наклона касательной к горизонту, как уже понятно, и будет равен скорости изменения функции.

4) Итак, мы приходим к простой схеме нахождения производной:
выбрать точку на графике функции → провести в ней касательную к графику → отметить угол между касательной и горизонтом → вычислить тангенс этого угла.
Именно ему и будет равна скорость изменения функции («Элементарно, Ватсон!»).

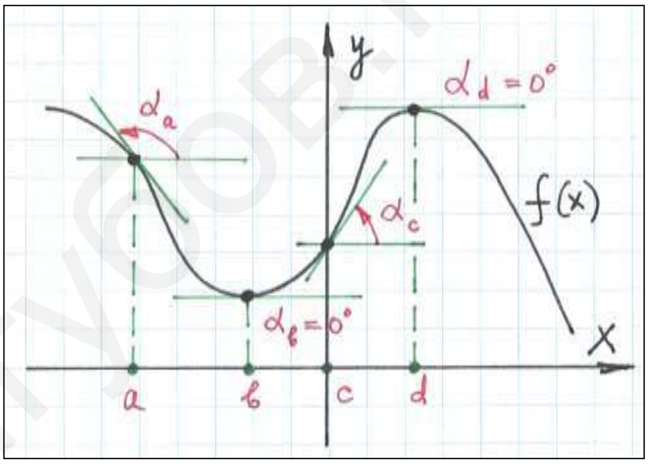


РИСУНОК 8г

5) Итак: производная функции в некоторой ее точке ***равна тангенсу угла наклона касательной к горизонту, и равна скорости изменения*** функции в этой точке.
Если записать последнее предложение в виде формулы, то получится следующее:

$$f'(x_0) = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x_0)$$

А теперь поговорим немного о деталях…

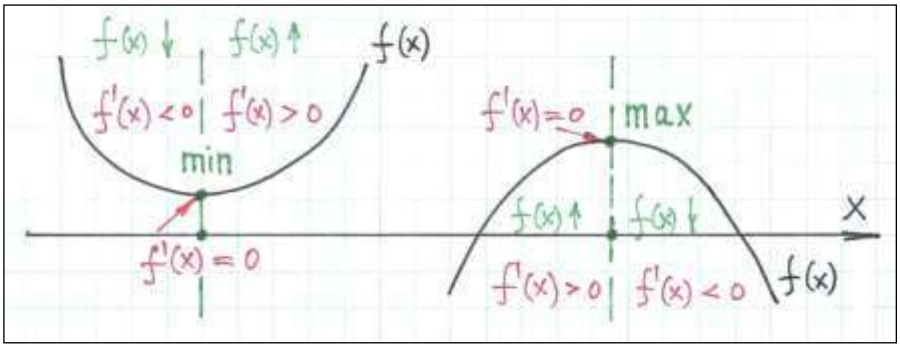


РИСУНОК 8д

Из приведенных выше рисунков можно легко увидеть следующее:

6) Если ***функция*** **↑**, то ее касательная тоже ↑ и угол ее наклона к горизонту $0° < \alpha < 90°$ (при отсчете от $0°$ против часовой стрелки).
Производная такой функции $f'(x) > 0$ (рис. 8г).

7) Если ***функция*** **↓**, то ее касательная тоже ↓ и угол ее наклона к горизонту $90° < \alpha < 180°$. Производная такой функции $f'(x) < 0$ (рис. 8г).

8) Чем ближе угол наклона касательной к вертикали, тем больше скорость ↑ или ↓ функции.

9) ***В точках максимума и минимума*** графика (если таковые есть) касательная всегда горизонтальна. В этих точках $\alpha = 0^0 \rightarrow tg\alpha = 0 \rightarrow f'(x) = 0$.
Таким образом, в этих точках скорость функции не изменяется, а производная равна нулю (рис. 8г).

10) И последнее: допустим, дан ***график производной*** функции и по нему видно, что в некоторой точке $f'(x) = 0$. Как же определить – это точка максимума или минимума? Ответить на этот вопрос поможет рис. 8д.
Глядя на изображенную на нем функцию, можно сделать простые выводы:

Слева от точки максимума ***функция*** ↑ $(f'(x) > 0)$, справа от нее ***функция*** ↓ $(f'(x) < 0)$.
Таким образом, в точке максимума производная меняет знак с « $+$ » на « $-$ ».

Слева от точки минимума ***функция*** ↓ $(f'(x) < 0)$, справа от нее ***функция*** ↑ $(f'(x) > 0)$.
Таким образом, в точке минимума производная меняет знак с « $-$ » на « $+$ ».

Этим и нужно руководствоваться при работе с ***графиком производной*** функции.

Вот и все, что нужно знать о производной. Что может быть проще ☺?

Впрочем, если вам недостаточно этой информации (как говорится в известной рекламе: «одной порции всегда мало»), вы всегда можете увлекательно провести время с каким-нибудь толстым справочником по математике!
А теперь перейдем к примерам, для решения которых и пригодится вся эта теория.

8.1. НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

8.1. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 8.1).

Если задание заключается в ***нахождении производной по графику функции***, то удобен, например, такой порядок работы.

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ).
В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ "$f'(x) = -$", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

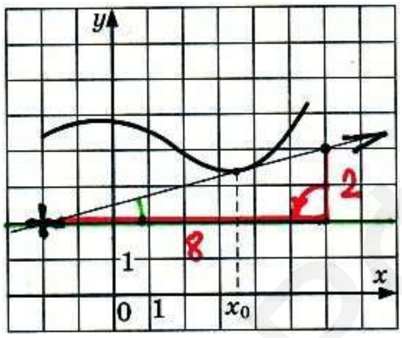


РИСУНОК 8.1

В качестве горизонтальной прямой может быть как ось ОХ, так и другая прямая.
Но обязательно (!) выбранная прямая должна пересекаться с касательной точно на пересечении линий клеток графика.

В нашем примере ось ОХ не может быть выбрана «горизонтом», так как в поле рисунка она не пересекается с касательной. Касательная к графику «возрастающая», отмечаем это стрелкой.

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ ОХ).

В нашем примере в поле рисунка можно отметить только один такой угол.

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

В нашем примере, удобно выбрать, например, треугольник с катетами $\Delta y = 2$ и $\Delta x = 8$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0.

$$f'(\mathrm{x}_0) = +\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0	*,*	*2*	*5*				

8.2. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0.
НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 8.2).

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ).
В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ "$f'(x) = -$", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

В нашем примере в качестве горизонтальной прямой удобно использовать ось OX.

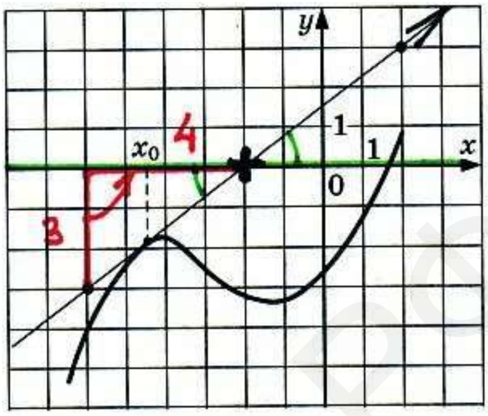


РИСУНОК 8.2

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ OX).

Предложенный рисунок позволяет выделить оба угла.

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

На «левом угле» можно построить треугольник с катетами $\Delta y = 3$ и $\Delta x = 4$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0.

$$f'(\mathrm{x}_0) = +\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\frac{3}{4} = 0{,}75$$

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0	*,*	*7*	*5*				

8.3. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 8.3).

Это задание похоже на два предыдущих.

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ).
В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ "$f'(x) = -$", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

В этом примере касательная «убывающая», значит, знак производной будет отрицательным.

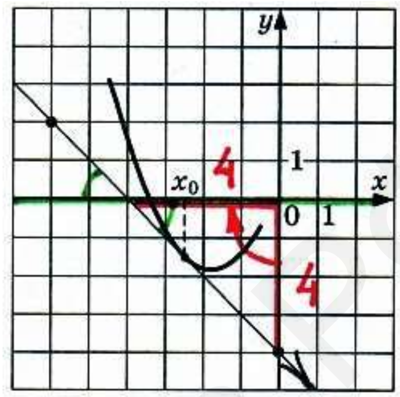


РИСУНОК 8.3

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ ОХ).

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

В качестве варианта можно предложить «правый треугольник» со сторонами $\Delta y = 4$ и $\Delta x = 4$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0.

$$f'(x_0) = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4}{4} = -1$$

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	*1*						

8.4. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0.
НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 8.4).

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ).
В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ "$f'(x) = -$", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

В этом примере касательная опять «убывающая».

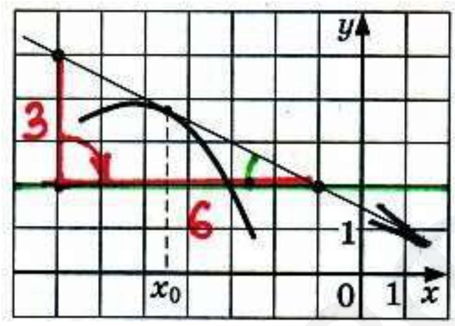


РИСУНОК 8.4

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ ОХ).

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

В качестве варианта можно предложить «левый треугольник» со сторонами $\Delta y = 3$ и $\Delta x = 6$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0.

$$f'(x_0) = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{6} = -0{,}5$$

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	*0*	*,*	*5*				

А теперь рассмотрим несколько примеров с заданиями №8 другого типа.

8.2. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

8.5. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ИНТЕРВАЛЕ $(-1; 17)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. НАЙДИТЕ ДЛИНУ НАИБОЛЬШЕГО ПРОМЕЖУТКА УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ (РИС. 8.5).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

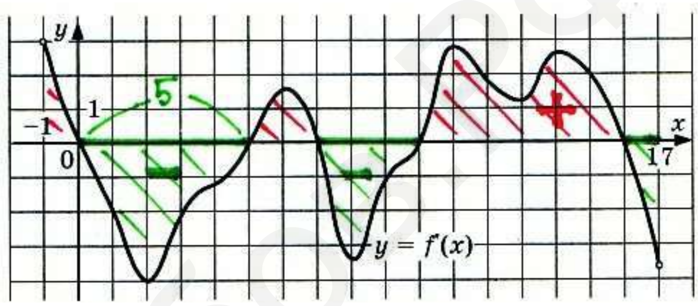


РИСУНОК 8.5

Функция убывает там, где производная $f'(\mathrm{x}) < 0$, и график производной находится ниже оси OX.

Очевидно, что на промежутке $(-1; 17)$ она убывает на 3-х интервалах, и наибольший из них $(0; 5)$. Его длина равна 5.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5							

8.6. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ИНТЕРВАЛЕ $(-8;4)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. В КАКОЙ ТОЧКЕ ОТРЕЗКА $[-5;-1]$ ФУНКЦИЯ $f(x)$ ПРИНИМАЕТ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ (РИС. 8.6)?

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

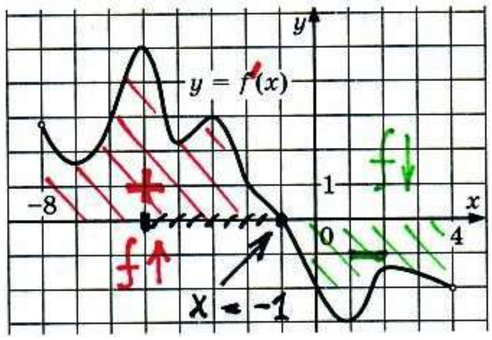


РИСУНОК 8.6

На отрезке $[-5;-1]$, к которому относится вопрос, $f'(x) > 0$ (ее график выше оси OX).
Таким образом, на всем этом отрезке функция $f(x)$ возрастает.
Следовательно, свое наибольшее значение на этом отрезке она принимает в точке $x = -1$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							

8.7. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ИНТЕРВАЛЕ $(-2;10)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. В КАКОЙ ТОЧКЕ ОТРЕЗКА $[0;4]$ ФУНКЦИЯ $f(x)$ ПРИНИМАЕТ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ (РИС. 8.7)?

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

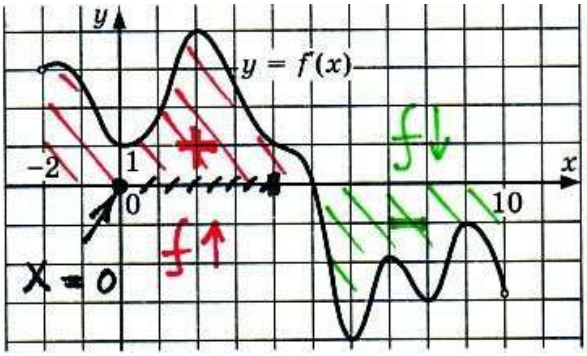


РИСУНОК 8.7

На отрезке $[0;4]$, к которому относится вопрос, $f'(x) > 0$ (ее график выше оси OX).
Таким образом, на всем этом отрезке функция $f(x)$ возрастает.
Скорость ее возрастания изменяется (график «волнится»), но она все время возрастает.
Следовательно, свое наибольшее значение на этом отрезке она принимает в точке $x = 4$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							

8.8. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ПРОМЕЖУТКЕ $(-6; 11)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. УКАЖИТЕ ЧИСЛО ТОЧЕК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ НА ПРОМЕЖУТКЕ $(-5; 8)$ (РИС. 8.8).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

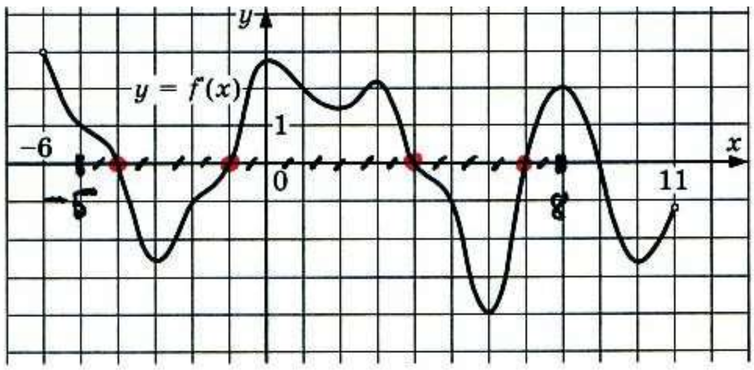


РИСУНОК 8.8

Глядя на график производной, видно, что он пересекает ось OX на промежутке $(-5; 8)$ в 4-х точках, и в этих точках $f'(x) = 0$. Во всех этих точках функция имеет либо максимум, либо минимум (то есть – точки экстремума).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							

8.9. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $f'(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-10;3)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК, В КОТОРЫХ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПРЯМОЙ $y = x + 15$ ИЛИ СОВПАДАЕТ С НЕЙ (РИС. 8.9).

Задачи такого типа (при первой встрече с ними) вызывают затруднение у большинства выпускников. Обычно непонятно даже, с какой стороны к ним вообще нужно подходить.

Между тем, разобраться в них достаточно просто.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

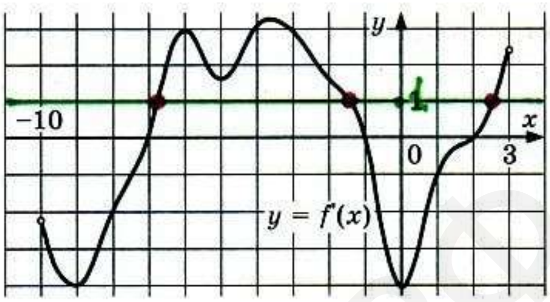


РИСУНОК 8.9

Прямая $y = +\mathbf{1}x + 15$, указанная в условии, имеет производную, равную коэффициенту «при x» и равную $+1$. Такую же производную (то есть тот же наклон к горизонту) будут иметь и все прямые, параллельные ей.

Таким образом, на графике производной $f'(x)$, который дан в условии, всего лишь нужно отметить все точки, в которых $y = f'(x) = +1$.

Таких точек три (3). Это и будет ответом задания.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							

8.10. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $f'(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-1;11)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК, В КОТОРЫХ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПРЯМОЙ $y=-2x-8$ ИЛИ СОВПАДАЕТ С НЕЙ (РИС. 8.10).

Еще одно аналогичное задание.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

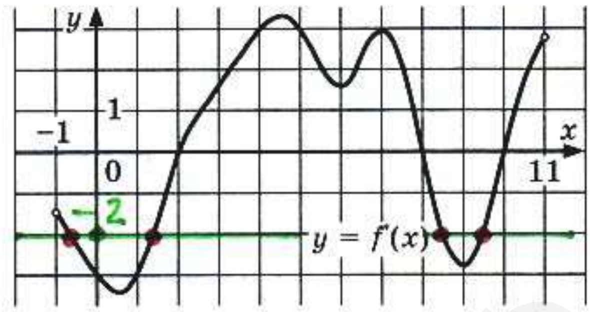


РИСУНОК 8.10

Прямая $y=-\mathbf{2}x-8$, указанная в условии, имеет производную, равную коэффициенту «при x» и равную -2. Такую же производную (то есть тот же наклон к горизонту) будут иметь и все прямые, параллельные ей.

Таким образом, на графике производной $f'(x)$, который дан в условии, всего лишь нужно отметить все точки, в которых $y=f'(x)=-2$.

Таких точек четыре (4). Это и будет ответом задания.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							

8.11. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $f'(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-2; 12)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК, В КОТОРЫХ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПРЯМОЙ $y = 4$ (РИС. 8.11).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

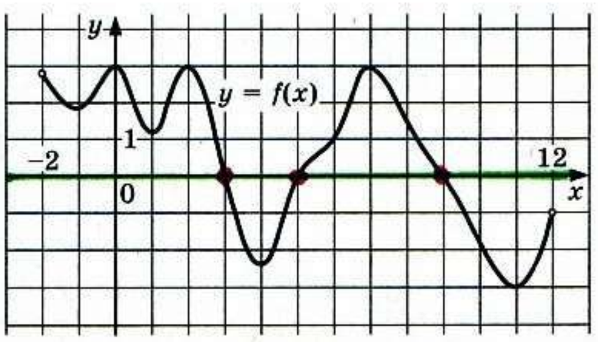


РИСУНОК 8.11

Прямая $y = 4$ ($y = \mathbf{0} \cdot x + 4$), указанная в условии, имеет производную, равную коэффициенту «при x» и равную 0. Такую же производную (то есть тот же наклон к горизонту) будут иметь и все прямые, параллельные ей.

Таким образом, на графике производной $f'(x)$, который дан в условии, всего лишь нужно отметить все точки, в которых $y = f'(x) = 0$.

Таких точек три (3). Это и будет ответом задания.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							

8.3. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ САМОЙ ФУНКЦИИ

8.12. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0.
НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 8.11).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

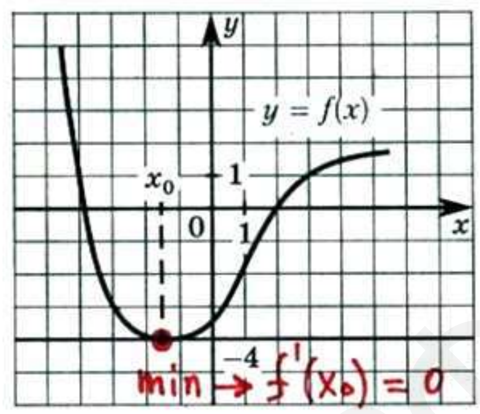


РИСУНОК 8.12

В этом задании требуется найти производную в точке минимума функции.
Касательная к ней уже нарисована, и она горизонтальна. Очевидно, что в этой точке $f'(x) = 0$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0							

8.13. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $f(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-9; 5)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЦЕЛЫХ ТОЧЕК, В КОТОРЫХ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОТРИЦАТЕЛЬНА (РИС. 8.13).

А вот еще одна разновидность задач №8.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

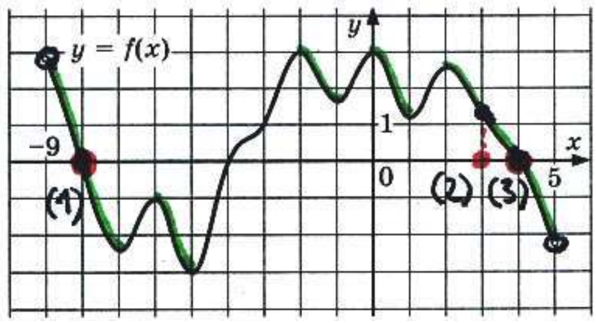


РИСУНОК 8.13

Отрицательным значениям производной соответствуют участки убывания на графике самой функции. Таких участков на заданном графике пять. Как видно на графике, на этих участках всего лишь 3 точки с целым значением «x». А именно: точки $x = -8$; $x = 3$; $x = 4$. Все остальные точки этих участков являются точками экстремума, и в них производная равна нулю.
А крайние точки $x = -9$ и $x = 5$ по условию графику вообще не принадлежат.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							

8.14. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $f(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-7;7)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЦЕЛЫХ ТОЧЕК, В КОТОРЫХ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНА (РИС. 8.14).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

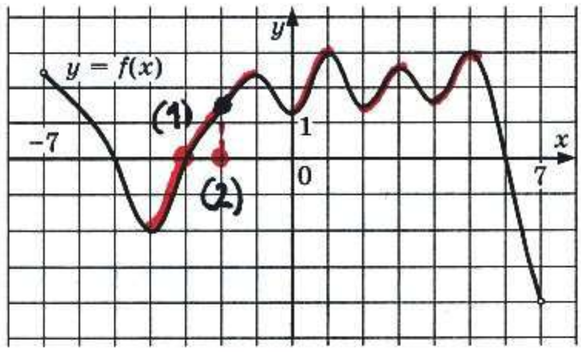


РИСУНОК 8.14

Положительным значениям производной соответствуют участки возрастания на графике самой функции. Таких участков на заданном графике четыре. Как видно на графике, на этих участках всего лишь 2 точки с целым значением «x». А именно: точки $x=-3$; $x=-2$. Все остальные точки этих участков являются точками экстремума, и в них производная равна нулю.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							

8.4. ЗАДАНИЕ ПО ГРАФИКУ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

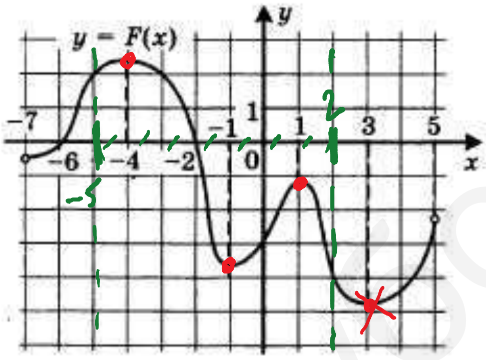
А теперь мы рассмотрим несколько типовых заданий, которые нужно выполнить, работая с графиком так называемой «первообразной функции».

Хорошая новость заключается в том, что понимать, что означает это словосочетание, вообще говоря, не обязательно. Достаточно лишь распознавать эти задания и применять к ним рекомендованные алгоритмы.

Итак, решим несколько наиболее типовых заданий.

8.15.

На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 2]$.



1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

Итак, в условии дается функция, обозначаемая как $F(x)$, и сказано, что она является первообразной для некоторой другой функции.

В переводе на простой язык, в этой (и аналогичных задачах) требуется всего лишь найти общее количество точек максимума и минимума, которые попадают в отрезок, на котором нужно «определить количество решений».

Очевидно, что здесь их на выделенном отрезке 3 (одна точка в этот отрезок не попадает).

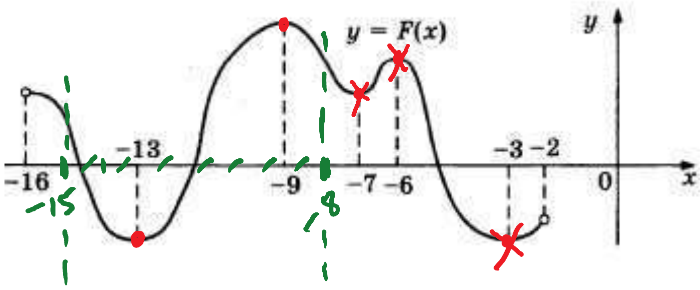
2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							

8.16.

На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ некоторой функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-16; -2)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-15; -8]$.



1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

Еще одна такая же задача.

Распознаем ее формулировку и применяем уже знакомый алгоритм: просто подсчитываем общее количество точек максимума и минимума на приведенном графике.
Здесь их 2 (три точки в этот отрезок не попадают).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

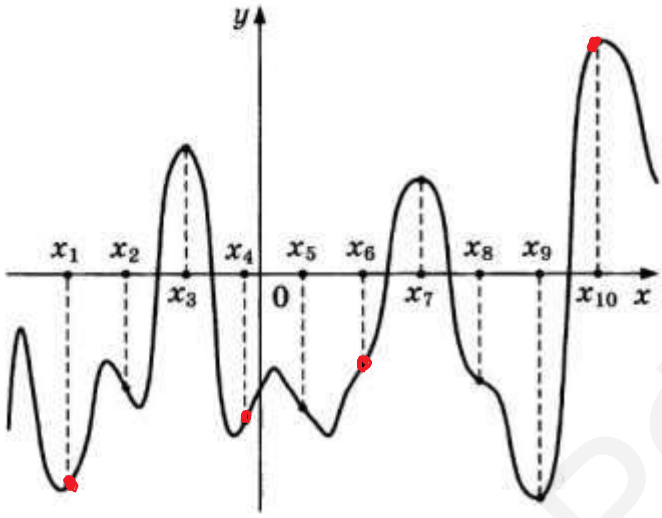
3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							

8.17.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$. Сколько из этих точек являются решением неравенства $f'(x) > 0$?



В подобных задачах слово «первообразная» явно не присутствует. Точно так же, как и ее традиционное обозначение $F(x)$.

В данном задании требуется посчитать количество точек, которые расположены на возрастающих участках графика (где производная больше нуля, т.е. $f'(x) > 0$).

Таких точек на графике насчитывается 4 (остальные расположены либо на убывающих участках, либо совпадают с точками максимума и минимума).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

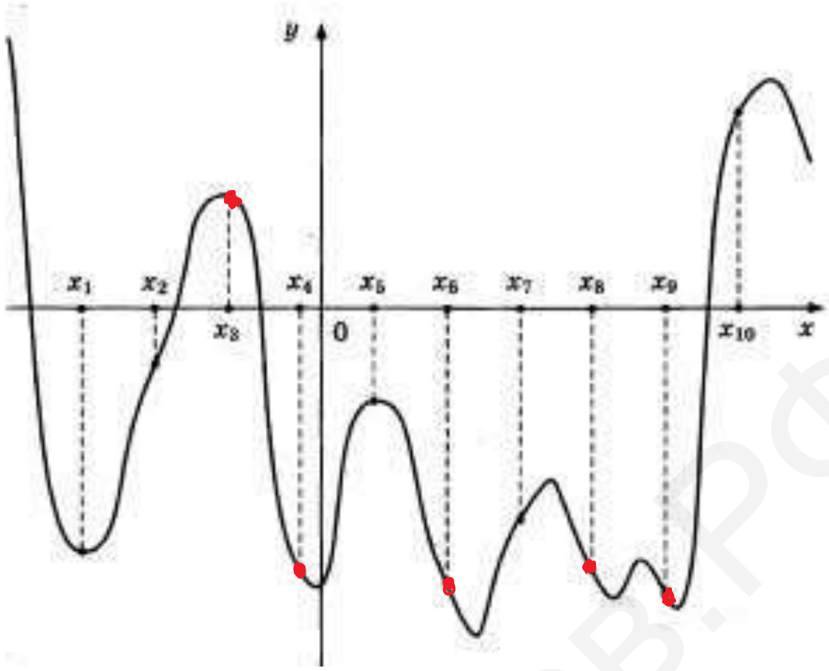
3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							

8.18.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Еще одна задача этой же серии.

В данном задании требуется посчитать количество точек, которые расположены на убывающих участках графика (где производная меньше нуля, т.е. $f'(x) < 0$).

Таких точек на графике насчитывается 5 (остальные расположены либо на возрастающих участках, либо совпадают с точками максимума и минимума).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5							

Вот, собственно таковы они – типичные представители задач «на первообразную».

Таким образом, все достаточно просто – рисуем на графике, анализируем сделанное, приходим к ответу. Вот, собственно, и все! ☺

Основные советы по выполнению заданий №8:

- Отвыкайте от школьных представлений (если они вообще есть), что производная функции – это что-то сложное. Думайте о ней как об обычной скорости;
- Запомните простую логику: если функция возрастает, то ее производная положительна, если убывает – то отрицательна. В точках максимума и минимума, где скорость равна нулю, производная тоже равна нулю;
- Вычисляя значение производной по графику самой функции, соблюдайте предлагаемый порядок действий (задания 8.1 – 8.4);
- Обращайте в 1-ю очередь внимание на то, график чего предложен в условии задания. Если график производной – значит все будет «непривычно и коряво». Замедляйтесь, обязательно делайте на графике цветами дополнительные пометки (обозначайте точки максимума и минимума, зоны выше и ниже горизонтальной оси и т.д.);
- Несмотря на очевидную простоту, для стабильного правильного выполнения задания №8 обычно требуют достаточно долгой тренировки. Тренируйтесь до их полного «вживления в мозг»;
- Работая с задачами «на первообразную», умейте их распознавать, а после этого – применять нужный порядок действий. Это избавит вас от «лишнего понимания», особенно, если его и так нет ☺;
- Обязательно проверяйте сделанное, как бы вы ни были уверены в его правильности.

ЗАДАНИЕ B14

Максимум и минимум. Наибольшее и наименьшее значение функции.
Именно с ними связано последнее задание ЕГЭ.
Говоря более конкретно, «четырнадцатые» представлены задачами двух типов.

Задачи Первого типа.

«Найти точку максимума или минимума функции».
Например, «найдите точку максимума функции $y = (19 - x)e^{19-x}$ ».
В этих заданиях ответом будет значение $\boldsymbol{x}$ (обязательно десятичное).
Смысл этих задач отражен на рис. 14а.

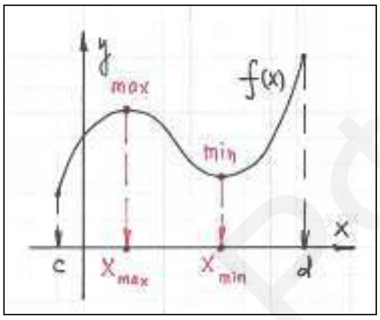


РИСУНОК 14а

Задачи Второго типа.

«Найти наибольшее или наименьшее значение функции y на заданном отрезке аргумента x».
Например, «найдите наибольшее значение функции $y = 12tgx - 12x + 3\pi - 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4}\right]$».
Ответом будет являться значение $\boldsymbol{y}$ (обязательно десятичное).
Смысл этих задач отражен на рис. 14б.

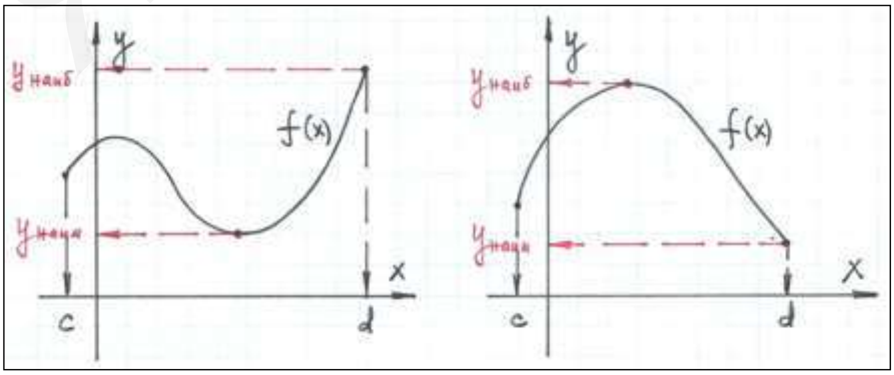


РИСУНОК 14б

При определенном сходстве звучания, эти два типа задач «совсем о разном», и будут далее решаться разными способами. Именно поэтому все примеры решения заданий №14 разбиты на две большие части. Еще раз посмотрите на рисунки 14а и 14б и уясните их отличия!

ЗАДАНИЯ №14 1-ГО ТИПА: «НАЙТИ ТОЧКУ МАКСИМУМА ИЛИ МИНИМУМА ФУНКЦИИ»

Для освежения в памяти минимально необходимой для решения всех заданий №14 информации, сделаем еще одно Тематическое Отступление.

ОТСТУПЛЕНИЕ №1: «ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОЙ ФОРМУЛЕ ЭТОЙ ФУНКЦИИ».

Для успешного решения заданий Первого типа необходимо помнить формулы производной для некоторых ***простейших*** функций (примерно, половину того самого набора функций, производные которых приходилось заучивать в школе).
А также уметь вычислять производную ***«комбинированных»*** функций, составленных из этих простейших. «Комбинированной» мы будем называть функцию, в которой несколько простейших функций соединены знаками сложения, вычитания, умножения или деления.
Например:

$$x-1; \quad 10x; \quad x^2-4x+5; \quad \frac{3}{x}+2x^2-7; \quad x^3-10; \quad \ln x + x; \quad e^x+2x-1; \quad 12e^x$$

Не объясняя «с нуля» всех подробностей, рассмотрим ниже таблицы, в которых приведены производные как собственно простейших функций, так и их комбинаций.

Надеюсь, что внимательный (!) разбор приведенных в таблицах формул
(и всех примеров к ним) сможет заменить многословную теорию по правилам вычисления производной. Тем более что эта тема должна быть вам в общих чертах знакома.

И еще: далее в тексте будет неоднократно встречаться термин ***«сложная функция».***
Под этим понимается функция, более сложная, чем «просто x», и вставленная внутрь другой функции. Можно сказать, что сложная функция по своему устройству похожа на матрешку.
Например:

$$e^{7x}; \quad e^{-x}; \quad \ln 4x; \quad \ln\frac{x}{3}$$

Можно, конечно, придумать и более сложные функции, и даже комбинации из сложных функций, но не будем без нужды увлекаться этим процессом…

РИСУНОК 14в. Производные простейших функций. Примеры вычисления производной сложных функций.

функции	значения производной
$f(x) = C$, где C – число	$f'(x) = C' = 0$
$f(x) = 3$	$f'(x) = 3' = 0$
$f(x) = -10$	$f'(x) = (-10)' = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$
$f(x) = x$	$f'(x) = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = (e^x)' = e^x$ $f'(x) = e^x \cdot (x)'$, если x - сложная функция
$f(x) = e^{-x}$	$f'(x) = (e^{-x})'(-x)' = -1e^{-x} = -e^{-x}$
$f(x) = e^{5x}$	$f'(x) = (e^{5x})'(5x)' = 5e^{5x}$
$f(x) = e^{-3x}$	$f'(x) = (e^{-3x})'(-3x)' = -3e^{-3x}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x)'$, если x - сложная функция
$f(x) = \ln 4x$	$f'(x) = (\ln 4x)'(4x)' = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$
$f(x) = Cx$	$f'(x) = C$ $f'(x) = C \cdot (x)'$, если x - сложная функция
$f(x) = 5x$	$f'(x) = 5$
$f(x) = -7x^2$	$f'(x) = -7 \cdot (x^2)' = -7 \cdot 2x = -14x$
$f(x) = 2x^3$	$f'(x) = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$
$f(x) = 3e^x$	$f'(x) = 3(e^x)' = 3e^x$
$f(x) = 3e^{2x}$	$f'(x) = 3(e^{2x})'(2x)' = 3e^{2x} \cdot 2 = 6e^{2x}$
$f(x) = 4\ln x$	$f'(x) = 4(\ln x)' = {}^4/_x$

И еще одна таблица, чтобы не было скучно!

РИСУНОК 14г.
Производная суммы простейших функций. Примеры вычисления производной суммы сложных функций.

сумма функций	значения производной
$f(x)=(u+v+\cdots)$, где u, v - функции	$f'(x)=(u'+v'+\cdots)$
$f(x)=x^2+3$	$f'(x)=(x^2)'+3'=2x+0=2x$
$f(x)=x^3+x^2-3$	$f'(x)=(x^3)'+(x^2)'-3'=3x^2+2x$
$f(x)=5x^3+3x^2-3$	$f'(x)=5(x^3)'+3(x^2)'-3'=15x^2+6x$
$f(x)=-2x^3+x^2-x$	$f'(x)=-2(x^3)'+(x^2)'-x'=-6x^2+2x-1$
$f(x)=4x^2+5e^x$	$f'(x)=4(x^2)'+5(e^x)'=8x+5e^x$
$f(x)=4x^2+5e^{-3x}$	$f'(x)=4(x^2)'+5(e^{-3x})'(-3x)'$ $=8x+5e^{-3x}(-3)=8x-15e^{-3x}$
$f(x)=x^3+2\ln x$	$f'(x)=(x^3)'+2(\ln x)'=3x^2+{}^2/_x$
$f(x)=x^3+2\ln 5x$	$f'(x)=(x^3)'+2(\ln 5x)'(5x)'=3x^2+10\cdot\frac{1}{5x}=$ $=3x^2+{}^2/_x$

И еще одна таблица!

РИСУНОК 14д.
Производная произведения простейших функций. Примеры вычисления произведения сложных функций.

произведение функций	значения производной
$f(x)=(u\cdot v)$, где u, v – функции	$f'(x)=(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
$f(x)=x\cdot e^x$	$f'(x)=(x\cdot e^x)'=x'\cdot e^x+x(e^x)'=$ $=1\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x(1+x)$
$f(x)=x\cdot e^{5x}$	$f'(x)=(x\cdot e^{5x})'=x'\cdot e^{5x}+x(e^{5x})'(5x)'=$ $=1\cdot e^{5x}+x\cdot e^{5x}\cdot 5=e^{5x}(1+5x)$
$f(x)=x^2\cdot\ln x$	$f'(x)=(x^2\cdot\ln x)'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=$ $=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$
$f(x)=e^{3x}(2x^2-x)$	$f'(x)=(e^{3x})'(3x)'(2x^2-x)+e^{3x}(2x^2-x)'=$ $=3e^{3x}(2x^2-x)+e^{3x}(4x-1)=$ $=e^{3x}(6x^2+x-1)$

Не сомневаюсь в том, что и вид, и содержание этих таблиц вызвали у вас приступ неподдельного интереса и радости познания ☺!

Имейте в виду, что в этих таблицах содержатся только те функции, которые встречаются в реальных вариантах ЕГЭ! В учебниках и справочниках вы их найдете гораздо больше.

Формула производной частного (то есть деления) простейших функций здесь не приводится не случайно. Ниже будет показано, как в решении примеров можно обходиться и без нее.

А теперь перейдем к конкретным примерам заданий, в которых и используются приведенные выше приемы вычисления производных функций.

14.1. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $e^{\langle \text{ВЫРАЖЕНИЕ} \rangle}$

14.1.1. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y = (15 - x)e^{15-x}}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{15-x} отличается от «просто x», то есть функция является сложной. Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени.

$$y' = (15 - x)'e^{15-x} + (15 - x)(e^{15-x})'(15 - x)' = -1e^{15-x} + (15 - x)e^{15-x}(-1) =$$
$$= -e^{15-x} - (15 - x)e^{15-x} = e^{15-x}(x - 16)$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = e^{15-x}(x - 16) = 0$$

$e^{15-x} = 0$ или $x - 16 = 0$

Первое уравнение решений не имеет (график функции $y = e^{\langle \text{степень} \rangle}$ не пересекает ось OX), корень второго уравнения $x = 16$.

Таким образом, функция $y = (15 - x)e^{15-x}$ имеет единственную точку экстремума, которая и будет являться именно точкой минимума (и никак не может оказаться точкой максимума – а иначе что же записывать в ответ?).

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	*6*						

14.1.2. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y = (2x^2 - 34x + 34)e^{x-34}}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{x-34} отличается от «просто x», то есть функция является сложной. Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени (хотя в данном случае она равна 1, и не вносит изменения в итоговую формулу).

$$y' = (2x^2 - 34x + 34)'e^{x-34} + (2x^2 - 34x + 34)(e^{x-34})'(x - 34)' =$$
$$= (4x - 34)e^{x-34} + (2x^2 - 34x + 34)(e^{x-34}) = 2x(x - 15)e^{x-34}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$y' = 2x(x - 15)e^{x-34} = 0$

$x = 0$ или $x - 15 = 0$

В точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 15$ функция имеет точки экстремума.
По условию задания нужно выбрать точку, соответствующую минимуму функции.

3-Й ЭТАП: ВЫБРАТЬ ИЗ НАЙДЕННЫХ ТОЧЕК МАКСИМУМ ИЛИ МИНИМУМ ФУНКЦИИ.

Этот выбор можно сделать двумя способами. Рассмотрим их применительно к решаемому заданию.

Способ 1. Найдем точку минимума функции, анализируя знак ее производной (именно это уже приходилось делать в задании №8).

Нанесем найденные точки экстремума на числовую ось (рис. 14.1.2).

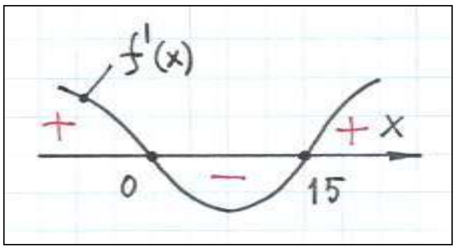


РИСУНОК 14.1.2

Найдем знак производной на одном из интервалов (то есть сделаем так называемую «проверку знака»):

$y'(x) = 2x(x-15)e^{x-34}$

С учетом того, что e^x в любой степени всегда больше нуля, заменим в следующей строке фрагмент e^{x-34} на $(+)$:

$y'(1) = 2 \cdot 1(1-15)e^{1-34} = (+)(-)(+) = (-).$

Проставим знак производной и на остальных интервалах. Вспомним: в точке минимума функции производная меняет знак с $(-)$ на $(+)$, так как в этой точке у самой функции падение сменяется на рост. Ответом будет $x = 15$.

Способ 2. Найдем точку минимума функции без анализа знака ее производной.

Этот способ более простой, но его можно использовать не во всех, а лишь в некоторых (!) случаях. А именно: если между найденными точками экстремума нет разрывов в значении производной. Иными словами – когда производная существует во всех точках между найденными экстремумами (на числовой оси это означает отсутствие «выколотых» точек между экстремумами). Как, например, в этой задаче: производная существует на всем интервале $(0; 15)$.

Примеры случаев, в которых обсуждаемый сейчас Способ №2 ***не применим***, будут приведены в заданиях 14.2.2 и 14.2.3.

Внимание! Если вам все же будет сложно понять различие в применении этих способов (или проще всегда выполнять одно и то же типовое действие), то всегда используйте Способ №1.

Теперь же вернемся к нашей задаче. В рамках 2-го способа, нужно всего лишь сравнить значения самой функции y в точках экстремума. Точке максимума будет соответствовать бо́льшее значение y, а точке минимума – меньшее.

Итак, вычислим значение функции в обеих «экстремальных» точках и определим, какая из них будет точкой минимума:

$y(0) = 34e^{0-34} = 34e^{-34} = \frac{34}{e^{34}} > 0$,

$y(15) = (2 \cdot 15^2 - 34 \cdot 15 + 34)e^{15-34} = -26e^{-19} = \frac{-26}{e^{19}} < 0$

$y(15) < y(0)$

Таким образом, $x_2 = 15$ – точка минимума (ответ), а $x_1 = 0$ – точка максимума.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	*5*						

14.1.3. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y = (x-11)^2 e^{x-4}}$.

Преобразуем для удобства последующего вычисления производной исходную функцию:

$y = (x^2 - 22x + 121)e^{x-4}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{x-34} отличается от «просто x», то есть функция является сложной. Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени (хотя в данном случае ее производная равна 1, и не вносит изменения в итоговую формулу).

$y' = (x^2 - 22x + 121)'e^{x-4} + (x^2 - 22x + 121)(e^{x-4})'(x-4)' =$

$= (2x - 22)e^{x-4} + (x^2 - 22x + 121)e^{x-4} = e^{x-4}(x^2 - 20x + 99)$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$y' = e^{x-4}(x^2 - 20x + 99) = 0$

$e^{x-4} = 0$ или $x^2 - 20x + 99 = 0$

Первое уравнение корней не имеет, а корни второго

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 99}}{2} = \frac{20 \pm 2}{2}$$

$x_1 = 9$ и $x_2 = 11$.

3-Й ЭТАП: ВЫБРАТЬ ИЗ НАЙДЕННЫХ ТОЧЕК МАКСИМУМ ИЛИ МИНИМУМ ФУНКЦИИ.

Способ 1. Найдем точку максимума функции, анализируя знак ее производной.

В некоторых случаях (например, в этом здании) удобнее не делать «проверку знака» на интервале, а поступить по-другому.
В уравнении производной содержится функция $x^2 - 20x + 99$ (парабола типа «ветви вверх»). Именно она «дает» корни $x_1 = 9$ и $x_2 = 11$. Множитель $e^{x-4} > 0$ при любом значении степени. Таким образом, чередование знаков на оси определяется только расположением параболы и уже понятно (рис. 14.1.3).

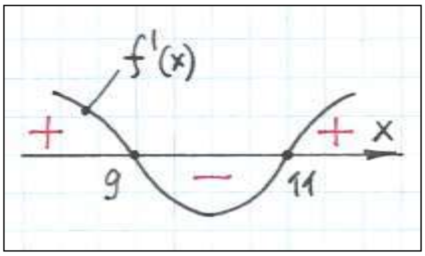


РИСУНОК 14.1.3

В точке максимума функции производная меняет знак с $(+)$ на $(-)$, так как в этой точке у самой функции рост сменяется на падение. Ответом будет $x = 9$.

Способ 2. Найдем точку максимума функции без анализа знака ее производной (поскольку между точками экстремума нет разрыва производной):

$y(9) = (9 - 11)^2 e^{9-4} = 4e^5 > 0,$

$y(11) = 0$

Таким образом, $x_1 = 9$ – точка максимума (ответ), а $x_2 = 11$ – точка минимума.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

9							

14.1.4. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y = (3x^2 - 42x + 42)e^{7-x}}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{7-x} отличается от «просто x», то есть функция является сложной. Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени.

$$y' = (3x^2 - 42x + 42)'e^{7-x} + (3x^2 - 42x + 42)(e^{7-x})'(7-x)' =$$
$$= (6x - 42)e^{7-x} + (3x^2 - 42x + 42)e^{7-x}(-1) = e^{7-x}(-3x^2 + 48x - 84)$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = e^{7-x}(-3x^2 + 48x - 84) = 0$$

$e^{7-x} = 0$ или $-3x^2 + 48x - 84 = 0$

Первое уравнение решений не имеет, а корни второго

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2} = \frac{16 \pm 12}{2}$$

$x_1 = 2$ и $x_2 = 14$.

Поскольку между точками экстремума нет разрыва производной, для нахождения точки минимума можно воспользоваться более простым способом – Способом №2:

$$y(2) = (3 \cdot 2^2 - 42 \cdot 2 + 42)e^{7-2} = (12 - 84 + 42)e^5 = -30e^5 < 0$$

$$y(14) = (3 \cdot 14^2 - 42 \cdot 14 + 42)e^{7-14} = 42e^{-7} = \frac{42}{e^7} > 0$$

Таким образом, $x_1 = 2$ – точка минимума (ответ), а $x_2 = 14$ – точка максимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							

14.2. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТОЛЬКО ФУНКЦИЮ $x^{\langle\text{число}\rangle}$

14.2.1. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y = 6x^2 - x^3}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$y' = 6x - 3x^2$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$y' = 6x - 3x^2 = 0$

$3x(4 - x) = 0$

$x = 0$ или $4 - x = 0$

$x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

Между найденными точками разрыва в значении производной нет. Определим, какая из двух точек будет точкой максимума. Воспользуемся для этого более простым, 2-м способом:

$y(0) = 0$

$y(4) = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 96 - 64 > 0$

Таким образом, $x_1 = 0$ – точка минимума,
а $x_2 = 4$ – точка максимума (ответ).

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							

14.2.2. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ $y = -\frac{x^2+225}{x}$.

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию (для того, чтобы не применять более сложную формулу производной от частного функций):

$y = -\frac{x^2}{x} - \frac{225}{x} = -x - 225x^{-1}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$y' = -1 - (-1)225x^{-2} = -1 + \frac{225}{x^2}$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$y' = -1 + \frac{225}{x^2} = 0$

$\frac{225}{x^2} = 1$

$x^2 = 225; \quad x = \pm\sqrt{225}$

$x_1 = -15$ и $x_2 = 15$.

А это задание – пример того случая, когда искомую точку можно найти ***только Способом №1!*** Это связано с тем, что в знаменателе уравнения $y' = -1 + \frac{225}{x^2}$ содержится x, причем $x \neq 0$.

Таким образом, в точке $x = 0$, которая находится между $x_1 = -15$ и $x_2 = 15$, наблюдается разрыв в значении производной. Иными словами, в точке $x = 0$ производная не существует.

Для определения знаков производной функции применим метод интервалов.

Нанесем числа $-15, 0$ и 15 на ось (рис. 14.2.2а).

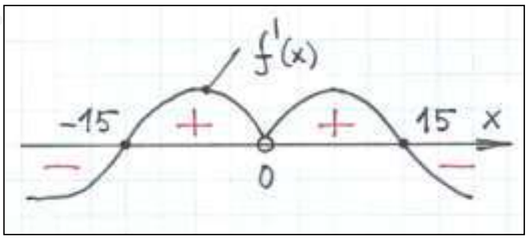


РИСУНОК 14.2.2а

Определим знак производной $y'(x) = -1 + \frac{225}{x^2}$ на одном из интервалов:

$y'(1) = -1 + \frac{225}{1^2} = (+)$.

Проставим остальные знаки, учитывая, что в точке $x = 0$ происходит «отражение волны» (четная степень над $\boldsymbol{x}$). Из полученного рисунка видно, что точке максимума соответствует $x = 15$.

Обратите внимание! Применение 2-го способа поиска точки экстремума дало бы неверный ответ:

$$y(-15) = -\frac{225 + 225}{-15} = \frac{450}{15} > 0$$

$$y(15) = -\frac{225 + 225}{15} = -\frac{450}{15} < 0$$

$$y(-15) > y(15)$$

Из этого следует ***ошибочный*** вывод о том, что $x_1 = -15$ – точка максимума, а $x_2 = 15$ – точка минимума.

Для лучшего понимания ситуации, схематически изобразим график функции, данной в условии (рис. 14.2.2б).

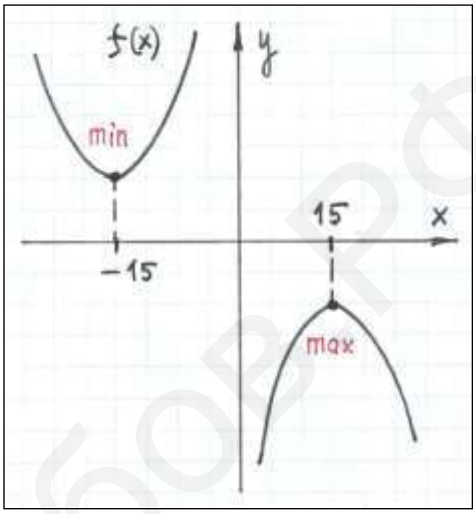


РИСУНОК 14.2.2б

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	***5***						

И еще одно похожее задание…

14.2.3. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $y = \frac{9}{x} + x + 16$.

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию:

$$y = \frac{9}{x} + x + 16 = 9x^{-1} + x + 16$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = (-1)9x^{-2} + 1 = -\frac{9}{x^2} + 1 = 1 - \frac{9}{x^2}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 1 - \frac{9}{x^2} = 0$$

$$\frac{9}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 9; \quad x = \pm\sqrt{9}$$

$x_1 = -3$ и $x_2 = 3$.

В этом задании, подобно предыдущему, искомую точку можно найти, ***только*** используя универсальный Способ №2.
В знаменателе уравнения $y' = 1 - \frac{9}{x^2}$ содержится x, причем $x \neq 0$.

Таким образом, в точке $x = 0$, которая находится между $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$, наблюдается разрыв в значении производной.

Для определения знаков производной функции применим метод интервалов.

Нанесем числа $-3, 0$ и 3 на ось (рис. 14.2.3а).

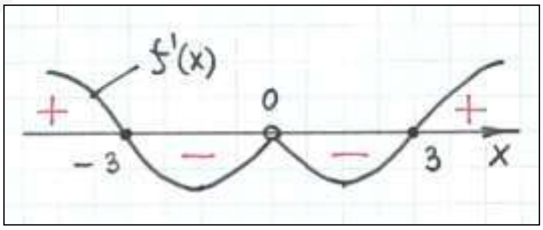


РИСУНОК 14.2.3а

Определим знак производной $y'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$ на одном из интервалов:

$$y'(1) = 1 - \frac{9}{1^2} = (-)$$

Проставим остальные знаки, учитывая, что в точке $x = 0$ происходит «отражение волны» (четная степень над $\boldsymbol{x}$). Из полученного рисунка видно, что точке минимума соответствует $x = 3$.

Обратите внимание! Применение 2-го способа поиска точки экстремума дало бы неверный ответ:

$$y(-3) = -\frac{9}{3} - 3 + 16 = 10$$

$$y(3) = \frac{9}{3} + 3 + 16 = 22$$

$$y(-3) < y(3)$$

Из этого следует ***ошибочный*** вывод о том, что $x_1 = -3$ – точка минимума.

Для лучшего понимания ситуации, схематически изобразим график функции, данной в условии (рис. 14.2.3б).

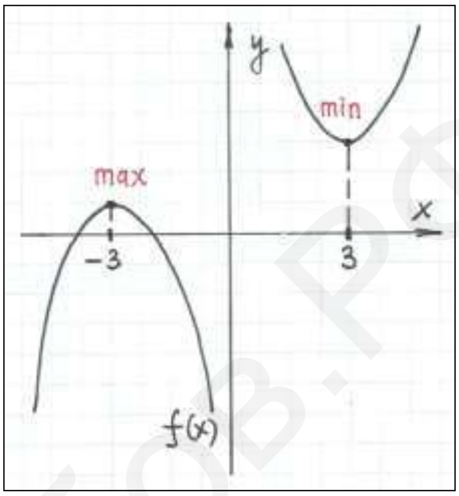


РИСУНОК 14.2.3б

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							

14.2.4. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x}}$.

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию:

$$y = 7 + 6x - 2x^1 x^{\frac{1}{2}} = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = 6 - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = 6 - 3x^{\frac{1}{2}} = 6 - 3\sqrt{x}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 6 - 3\sqrt{x} = 0$$

$$3\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

Поскольку точка $x = 4$ является единственным экстремумом, то она «автоматически» будет точкой максимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							

14.3. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $ln\langle$ВЫРАЖЕНИЕ$\rangle$ ИЛИ $log_a\langle$ВЫРАЖЕНИЕ$\rangle$

14.3.1. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ $\mathbf{y = \ln(x+5) - 2x + 9}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = \frac{1}{x+5}(x+5)' - 2 = \frac{1}{x+5} \cdot 1 - 2 = \frac{1}{x+5} - 2$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = \frac{1}{x+5} - 2 = 0$$

$$\frac{1}{x+5} = \frac{2}{1}$$

$$x + 5 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = -4{,}5$$

Поскольку точка $x = -4{,}5$ является единственным экстремумом (и кандидатом в ответ), то она и будет точкой максимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	4	,	5				

14.3.2. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y = 4x - 4\ln(x+7) + 6.}$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = 4 - \frac{4}{x+7}(x+7)' = 4 - \frac{4}{x+7}\cdot 1 = 4 - \frac{4}{x+7}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 4 - \frac{4}{x+7} = 0$$

$$\frac{4}{x+7} = \frac{4}{1}$$

$$x + 7 = \frac{4\cdot 1}{4} = 1$$

$$x = -6$$

Поскольку точка $x = -6$ является единственным экстремумом, то она и будет точкой минимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	*6*						

14.3.3. НАЙДИТЕ ТОЧКУ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$.

А в этом задании, в отличие от предыдущих, содержится не натуральный логарифм, а, если так можно выразиться, «обычный». И производная от него будет вычисляться несколько иначе.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

А если x – сложная функция, то так:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot x'$$

Эти формулы отсутствуют в таблице производных простейших функций в Тематическом Отступлении (в начале главы), и поэтому приводятся здесь.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = \frac{1}{(x^2 - 6x + 12)\ln 5}(x^2 - 6x + 12)' = \frac{2x - 6}{(x^2 - 6x + 12)\ln 5}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

Это (и подобные ему) задание, можно делать разными способами.

Способ 1.

$$y' = \frac{2x - 6}{(x^2 - 6x + 12)\ln 5} = 0$$

$$\frac{2x - 6}{(x^2 - 6x + 12)\ln 5} = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$x = 3$$

Поскольку точка $x = 3$ является единственным экстремумом, то она и будет точкой минимума.

Способ 2.

Функция $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$ будет наименьшей при наименьшем значении $(x^2 - 6x + 12)$. К этому выводу можно придти, например, такими способами:

1) Нарисовать примерный график функции $y = \log_5 x$. Из него видно, что меньшему значению x соответствует меньшее значение y;
2) Подставить «внутрь логарифма» $\log_5 x$ несколько пробных чисел:

   $\log_5 125 = 3,\quad \log_5 25 = 2,\quad \log_5 1 = 0,\quad \log_5 \frac{1}{5} = -1 \ldots$

   Из полученного ряда следует тот же вывод.

Поскольку функция $y = x^2 - 6x + 12$ описывается параболой с ветвями, направленными вверх, то ее наименьшим значением будет значение y в вершине параболы.

Иными словами, наименьшим значением «внутри скобок» будет значение y при

$x = x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3.$

Причем, в этой точке наименьшее значение исходной функции совпадает с ее точкой минимума.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							

Приведенных выше примеров для понимания схемы решения заданий Первого типа должно быть вполне достаточно. И мы переходим к заданиям Второго типа…

ЗАДАНИЯ №14 2-ГО ТИПА: «НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ (НАИМЕНЬШЕЕ) ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НА ЗАДАННОМ ОТРЕЗКЕ»

Когда учащийся видит задание №14, обычно сразу же «его рука тянется к производной». И в целом это правильное движение! Именно так и принято делать.

Однако при решении многих заданий Второго типа лучше вообще обойтись без использования производной – потому, что их можно решать гораздо проще («а если нет никакой разницы, то зачем переплачивать?»).

А именно: это касается тех заданий Второго типа, в которых предлагаемая функция ***содержит*** $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\ln x$ и e^x.

Делая пособие для «чайников», я старался максимально сжать и упростить многие вопросы. По этой причине некоторые вещи я делаю довольно ненаучно (с точки зрения «правильной» математики). Но эта «ненаучность» не влияет на правильность ответа, и ее можно объяснить следующим:

1) Это пособие адресовано читателю, который не особо силен в математике. Ему нужна простота и экономия сил при подготовке к экзамену. И, конечно же, правильный ответ!
2) Рассказывать о математике в таком стиле мне больше нравиться самому. То есть говорить «о простом – просто».

Так вот, для решения большинства заданий Второго типа (это относится к заданиям 14.4 – 14.6), я предлагаю использовать способ ***«подбора ответа»***, не прибегая к использованию производной вообще. Это и есть один из упомянутых «ненаучных» способов.

Внимание! Предлагаемый способ «подбора ответа» можно применять только для указанных заданий Второго типа, и только на ЕГЭ. И больше нигде!

Секрет способа прост: ключевым моментом подбора ответа в этих заданиях является то, что ответ должен являться десятичным числом. Так задумано в ЕГЭ, и это известно. То есть ответ не должен содержать корней, символов функций и постоянных ($\sqrt{\ }$, $\sin$, $\cos$, $\ln$, π и так далее).
Таким образом, подбирая ответ, мы исходим именно из этого: для ответа нам нужно получить непременно десятичное число, то есть число вида X,X. Все остальные возможные варианты ответов, которые не вписываются в этот шаблон десятичного числа, заранее признаются непригодными и отбрасываются.

Суть предлагаемого способа будет понятна из довольно многочисленных примеров.

14.4. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Некоторые минимально необходимые сведения по тригонометрии уже были даны в задании №7. Но для успешного решения «четырнадцатых» этого недостаточно.

Поэтому сделаем еще одно Тематическое Отступление, в котором некоторая часть информации будет повторена для удобства текущей работы. Просто для того, чтобы «быть под рукой».

ОТСТУПЛЕНИЕ №2: «ОСОБЫЕ» УГЛЫ И ЕДИНИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Итак, для начала приведем таблицу значений тригонометрических функций для «особых» углов 1-й четверти.

	$0°$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Эту таблицу не нужно пытаться запомнить полностью. Достаточно запомнить только значения синуса для углов $30°, 45°$ и $60°$. Значения косинуса для этих же углов чередуются в обратном порядке.

Табличные значения, для углов $0°$ и $90°$ также можно не запоминать. Их можно легко увидеть (представить) на единичной окружности. Как именно это сделать?
Очень просто: значение синуса равно вертикальной координате вращаемой точки (y), а косинуса – горизонтальной (x).
Углу $0°$ на единичной окружности соответствует точка с координатами $(1; 0)$, и значит $\cos 0° = \mathrm{x} = 1$, а $\sin 0° = \mathrm{y} = 0$.
Углу $90°$ на единичной окружности соответствует точка с координатами $(0; 1)$, и значит $\cos 90° = \mathrm{x} = 0$, а $\sin 90° = \mathrm{y} = 1$. Вот и все премудрости.

Подобным образом определяются и значения синуса (косинуса) для углов $180°$ и $270°$. После этого остается заполнить значения тангенса (котангенса), которые получаются как отношение синуса к косинусу (или наоборот). Причем для угла $45°$ значения тангенса и котангенса очевидны: $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$.

Теперь идем дальше. Понятно, что в реально решаемых задачах величины углов могут быть совершенно любыми. Однако в заданиях №14 встречаются только определенные, «особые» углы.

Либо уже перечисленные: $0°$; $30°$, $45°$; $60°$ и $90°$, либо подобные им, изображенные на рисунке 14е. Как правило, в заданиях №14 углы выражены не в градусах, а в радианах.

Примечание.

1) Что такое радианы и для чего они нужны (а также многое другое), мы обсуждать не будем. Как будет показано ниже, «четырнадцатые» можно решать и без этого;

2) Все значения «особых» углов 1 – 4 четвертей, обозначенных на рисунке 15е, запоминать тоже не нужно.

   Достаточно запомнить только значения $\frac{\pi}{6} = 30°$; $\frac{\pi}{4} = 45°$; $\frac{\pi}{3} = 60°$ и $\frac{\pi}{2} = 90°$.

   А теперь вопрос на сообразительность для «продвинутых чайников»: как, помня только эти три значения, можно быстро получить все остальные (естественно, в радианах)? И как это сделать проще всего?

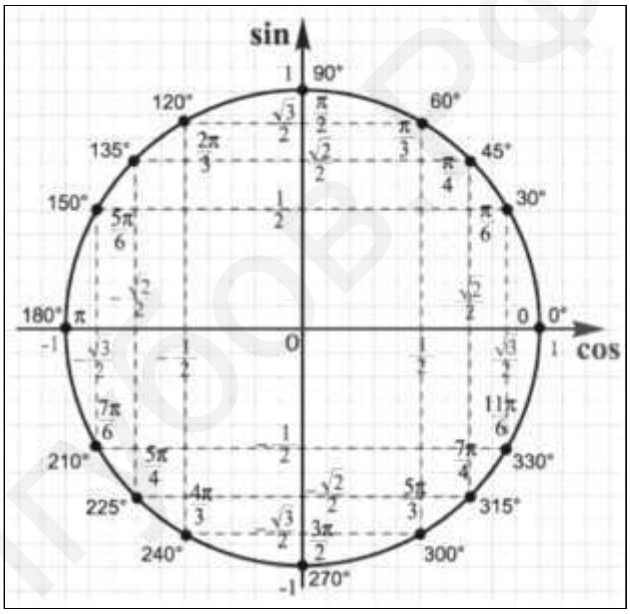


РИСУНОК 14е

Итак, вернемся к рисунку. Глядя на него, легко заметить следующее:

- ✓ Углы, симметричные относительно вертикали, имеют одинаковые значения синусов (то есть координаты y). Например: $60°$ и $120°$, $210°$ и $330°$.
  На рисунке углы с равными синусами соединены горизонтальными прямыми;
- ✓ Углы, симметричные относительно горизонтали, имеют одинаковые значения косинусов (то есть координаты x). Например: $30°$ и $330°$, $135°$ и $225°$.
  На рисунке углы с равными косинусами соединены вертикальными прямыми;
- ✓ Углы, симметричные относительно начала координат, то есть соединенные прямой, проходящей через т.О $(0; 0)$, имеют одинаковые значения тангенса (и котангенса).

При желании можно самостоятельно сделать множество других выводов из довольно простого рассмотрения этого рисунка. Это действительно полезно как для понимания связи между «особыми» углами 2 – 4 четвертей с «особыми» углами 1 четверти, так и для понимания геометрического смысла тригонометрических функций вообще.

А это понимание, в свою очередь, избавит от совершенно ненужного заучивания лишних цифр по всем «особым» углам. Кроме того, работа с единичной окружностью во многих случаях избавит вас от вычислений с помощью «формул приведения», о которых уже говорилось ранее.

А теперь, после недолгого возврата к основам тригонометрии, перейдем к рассмотрению заданий №14 Второго типа, которые содержат ***тригонометрические функции***.

14.4.1. НАЙТИ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = 3\sin x + \frac{36}{\pi}x + 5$ НА ОТРЕЗКЕ $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

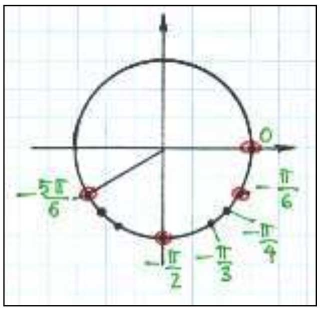


РИСУНОК 14.4.1

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

a) «Превращение» $\sin x$ в число, не содержащее корня.
Это возможно (вспоминаем табличные значения синуса!)
при $x = -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; 0$ (обведены на рис. 14.4.1);

b) Слагаемое $\frac{36}{\pi}x$ в исходной функции должно сократиться. Таким образом, x может быть как 0, так и содержать π – то есть любым. Количество возможных «кандидатов», найденных в предыдущем пункте, не уменьшается.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

$$y(0) = 3\cdot 0 + \frac{36}{\pi}\cdot 0 + 5 = 5$$

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{36}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{6} + 5 = -1{,}5 - 30 + 5 = -25 - 1{,}5 = -26{,}5;$$

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{36}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} + 5 = -1{,}5 - 6 + 5 = -2{,}5;$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3(-1) - \frac{36}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + 5 = -3 - 18 + 5 = -16.$$

Из всех возможных вариантов наименьшим является $y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -26{,}5$.

Его и запишем в ответ.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	2	6	,	5			

14.4.2. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

$$y = \frac{26\sqrt{3}}{3}\cos x + \frac{13\sqrt{3}}{3}x - \frac{13\sqrt{3}\pi}{18} + 11 \text{ НА ОТРЕЗКЕ } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

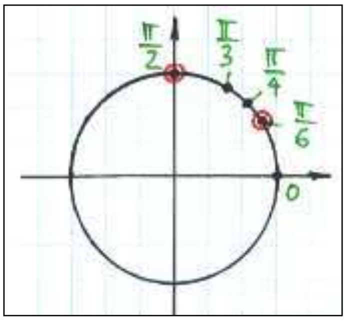


РИСУНОК 14.4.2

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

a) «Превращение» $\cos x$ в число, содержащее (!) $\sqrt{3}$, или в 0.
Это возможно (вспоминаем табличные значения косинуса)
только при $x = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$ (обведены на рис. 14.4.2);

b) Слагаемое $\frac{13\sqrt{3}\pi}{18}$ в исходной функции должно сократиться, то есть x обязательно должен содержать π. Количество возможных «кандидатов», найденных в предыдущем пункте, не уменьшается.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

Варианты решения выглядят так:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{26 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 2} + \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{3 \cdot 6} - \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{18} + 11 = 13 + 11 = 24$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{26 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot 0 + \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{3 \cdot 2} - \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{18} + 11 = 0 + \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{6} - \frac{13\sqrt{3} \cdot \pi}{18} + 11 - \text{не подходит.}$$

Видно, что во втором варианте число π не сокращается, значит этот вариант не подходит.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2	*4*						

14.4.3. НАЙТИ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

$$y = 3\cos x - 15x + 3 \text{ НА ОТРЕЗКЕ } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right].$$

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

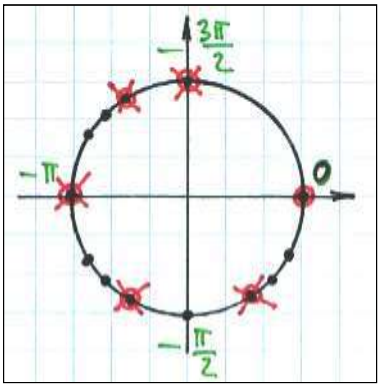


РИСУНОК 14.4.3

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

a) «Превращение» $\cos x$ в число, не содержащее корень.
Возможные значения x обведены на рис. 14.4.3;
b) Слагаемое $15x$ в исходной функции не должно содержать π, а значит равно нулю.
Количество возможных «кандидатов», найденных в предыдущем пункте, уменьшилось до одного.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

$y(0) = 3 \cdot 1 - 15 \cdot 0 + 3 = 6$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

6							

14.4.4. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

$$\boldsymbol{y = 6\cos x + \frac{27}{\pi}x + 3}\ \text{ НА ОТРЕЗКЕ } \left[-\frac{2\pi}{3};\ 0\right].$$

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

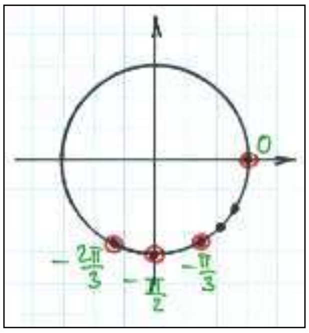


РИСУНОК 14.4.4

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

a) «Превращение» $\cos x$ в число, не содержащее корень.
Возможные значения x обведены на рис. 14.4.4;

b) Число π в слагаемом $\frac{27}{\pi}x$ в исходной функции должно сократиться, то есть x равен нулю или содержит π. Количество возможных «кандидатов», найденных в предыдущем пункте, не уменьшается.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

Варианты решения выглядят так:

$$y(0) = 6 \cdot 1 - \frac{27}{\pi} \cdot 0 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} - \frac{27}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} + 3 = 3 - 9 + 3 = -3$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 6 \cdot 0 - \frac{27}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + 3 = -13{,}5 + 3 = -10{,}5$$

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{27}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} + 3 = -3 - 18 + 3 = -18$$

Наибольшее значение функции $y(0) = 9$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

9							

14.4.5. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = 12\text{tg}x - 12x + 3\pi - 7$ НА ОТРЕЗКЕ $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4}\right]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

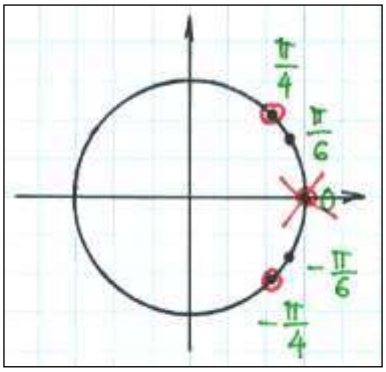


РИСУНОК 14.4.5

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

a) «Превращение» $\text{tg}x$ в число, не содержащее корня.
Возможные значения x обведены на рис. 14.4.5;
b) Слагаемое 3π в исходной функции должно сократиться, то есть x обязательно должен содержать π. Таким образом, «кандидат» $x = 0$ отсеивается (зачеркнут на рисунке).

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

Вычислим значение функции при 2-х оставшихся возможных табличных значениях x:

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 12(-1) + 12\frac{\pi}{4} + 3\pi - 7 = -19 + 6\pi$$

$$y\left(+\frac{\pi}{4}\right) = 12 \cdot 1 - 12\frac{\pi}{4} + 3\pi - 7 = 12 - 7 = 5$$

Первый вариант не подходит, так как содержит несокращаемое число 6π.

Таким образом, десятичным числом является только $y\left(+\frac{\pi}{4}\right) = 5$.

И хотя, на основании сделанных вычислений, нет никаких оснований считать это число именно наибольшим на заявленном отрезке (кроме его «десятичности»), – этот ответ правильный!
Как в этом, так и в других рассмотренных примерах.
Как говорится, «ловкость рук, и никакого обмана» ☺!

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5							

B14.4.6. **НАЙТИ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = 5\mathrm{tg}x - 5x + 6$ НА ОТРЕЗКЕ $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.**

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

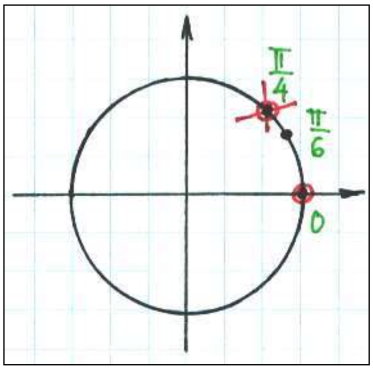


РИСУНОК 14.4.6

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение двух условий:

a) «Превращение» $\mathrm{tg}x$ в число, не содержащее корень.
Это возможно только при $x = 0; +\frac{\pi}{4}$ (рис. 14.4.6);

b) Слагаемое $5x$ не должно содержать π, то есть x может быть только нулем (лишний «кандидат» на рисунке зачеркнут).

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

С учетом второго условия, вариант $x = +\frac{\pi}{4}$ был отброшен как непригодный.

Остается единственное: $y(0) = 5 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

6							

14.5. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $ln\,\langle\text{ВЫРАЖЕНИЕ}\rangle$

Предыдущие примеры содержали одну из тригонометрических функций.
Но кроме них могут встречаться показательная функция (e^x) с основанием $e \approx 2{,}73$,
или логарифмическая с тем же основанием $(\ln x = \log_e x)$.
Эти задания также успешно решаются предложным способом «подбора ответа».

Работа с ними показана в следующих примерах.

14.5.1. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \ln(x+2)^8 - 8x$ НА ОТРЕЗКЕ $[-1,5; 0]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

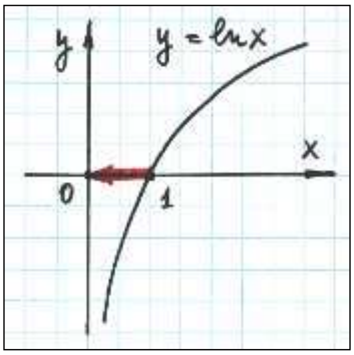


РИСУНОК 14.5а

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение следующего условия: слагаемое $\ln(x+2)^8$ должно исчезнуть.

Это может произойти только тогда, когда «начинка» логарифма (в данном случае это «$(x+2)^8$») равна 1, то есть $(x+2)^8 = 1$. В этом случае $\ln 1 = 0$ (рис. 15.5а).

В нашем примере это означает, что $x+2 = \pm 1$. А значит $x = -1$ или $x = -3$ (выбираем из найденных значений x то, которое будет входить в заданный условием интервал, то есть $x = -1$).

Внимание!
В случае любой ***нечетной*** степени над скобкой в «начинке» логарифма корень будет только один. Это связано с тем, что сама скобка будет равна не ± 1, а только $+1$.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

В связи с тем, что кроме значения $x = -1$ других вариантов нет,

$$y_{\text{наиб}} = y(-1) = 0 - 8 \cdot (-1) = 8$$

И хотя нет никаких оснований считать это число именно наибольшим на заявленном отрезке (кроме его «десятичности»), – этот ответ правильный!

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

8							

14.5.2. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \ln(7x) - 7x + 7$ НА ОТРЕЗКЕ $\left[\frac{1}{14}; \frac{5}{14}\right]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение следующего условия: слагаемое $\ln(7x)$ должно исчезнуть, «превратившись» в нуль.
Это может произойти в том случае, если «начинка» логарифма (в данном случае $7x$) равна 1.

В нашем примере это означает, что $x = \frac{1}{7} = \frac{2}{14}$ (кстати, это число входит в заданный интервал!).
И действительно, $\ln\left(7 \cdot \frac{1}{7}\right) = \ln 1 = 0$.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

В связи с тем, что кроме значения $x = \frac{1}{7}$ других вариантов нет,

$y_{\text{наиб}} = y\left(\frac{1}{7}\right) = 0 - 7 \cdot \frac{1}{7} + 7 = -1 + 7 = 6.$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

6							

14.6. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ФУНКЦИЮ $e^{\langle \text{ВЫРАЖЕНИЕ} \rangle}$

14.6.1. НАЙТИ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = (x^2 - 7x + 7)e^{x-5}$ НА ОТРЕЗКЕ $[4; 6]$.

А этот пример иллюстрирует применение способа «подбора» для функций, содержащих e^x.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

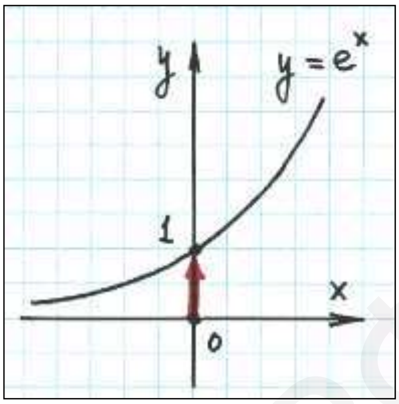


РИСУНОК 14.6б

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение следующего условия: множитель e^{x-5} должен исчезнуть.

Это может произойти только тогда, когда показатель степени (в данном случае $x - 5$) равен нулю. В этом случае $e^0 = 1$ (рис. 14.6б).

В нашем примере это означает, что $x = 5$ (кстати, это число входит в заданный интервал!). И действительно, $e^{5-5} = e^0 = 1$.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

В связи с тем, что кроме значения $x = 5$ других вариантов нет,

$y_{\text{наим}} = y(5) = (5^2 - 7 \cdot 5 + 7) = 25 - 35 + 7 = -3.$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	*3*						

14.6.2. НАЙТИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = (8 - x)e^{x-7}$ НА ОТРЕЗКЕ $[3; 12]$.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.

Поскольку искомое значение y должно быть десятичным числом, необходимо выполнение следующего условия: множитель e^{x-7} должен исчезнуть.
Это может произойти только тогда, когда показатель степени (в данном случае $x - 7$) равен нулю. В этом случае $e^0 = 1$.

В нашем примере это означает, что $x = 7$ (кстати, это число входит в заданный интервал!).
И действительно, $e^{7-7} = e^0 = 1$.

2-Й ЭТАП: ВЫБОР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ.

В связи с тем, что кроме значения $x = 7$ других вариантов нет,

$y_{\text{наиб}} = y(7) = (8 - 7) \cdot 1 = 1.$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1							

Ну что же, вот и закончились задания, которые можно решать «способом подбора ответа». Думаю, что многим читателям такой способ показался забавным и вполне пригодным для применения! Но у кого-то возник вопрос: а как решаются эти задания «правильным способом»? И не лучше ли их решать именно так, не выдумывая никаких подборов?

Конечно можно! Все эти задания можно решать и традиционным способом, используя алгоритм, показанный в заданиях 14.8. Но для этого нужно уметь вычислять производную от всех тригонометрических функций, а также от функций $\ln x$ и e^x (в том числе «комбинированных» и «сложных»). Примеры таких вычислений приведены в таблицах Отступления №1. Именно этого мы избежали, применяя «способ подбора ответа».

Желающие могут потренироваться в решении «правильным способом» самостоятельно!

14.7. «ЗАМАСКИРОВАННЫЕ» ЗАДАНИЯ

14.7.1. НАЙДИТЕ ТОЧКУ, В КОТОРОЙ ФУНКЦИЯ $y = (6 - x)e^{10-x}$ НА ОТРЕЗКЕ $[2; 9]$ ПРИНИМАЕТ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ.

А при решении подобных задач нужно быть очень внимательным!

Она кажется точно такой же, как и две предыдущие … но это не так. Ее нельзя решать «подбором ответа», так как нужно найти не наименьшее значение самой функции (то есть $\boldsymbol{y}$), а «точку, в которой» это происходит (то есть $\boldsymbol{x}$). В этом случае ошибочно считать, что именно $\boldsymbol{y}$ нужно приводить к десятичному числу, как мы делали ранее.

Подобные задачи нужно решать так, как показано в следующем подразделе 14.8.
И, в любом случае, придется вычислять производную функции.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Внимание! Степень функции e^{10-x} отличается от «просто x», то есть функция является сложной. Следовательно, нужно вычислять производную еще и от этой степени.

$$y' = (6-x)'e^{10-x} + (6-x)(e^{10-x})'(10-x)' = -1e^{10-x} + (6-x)e^{10-x}(-1) =$$
$$= -e^{10-x} - (6-x)e^{10-x} = e^{10-x}(x-7)$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = e^{10-x}(x-7) = 0$$

$e^{10-x} = 0$ или $x - 7 = 0$

Первое уравнение решений не имеет (график функции $y = e^{\langle \text{степень} \rangle}$ не пересекает ось ОХ), корень второго уравнения $x = 7$.

Таким образом, функция $y = (6-x)e^{10-x}$ имеет единственную точку экстремума, которая может являться как точкой минимума, так и точкой минимума.

3-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y}$ В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

Найдем приближенные значения функции в найденных точках экстремума и на границах отрезка.

$y(2) = (6-2)e^{10-2} \ = 4e^8 > 0$

$y(7) = (6-7)e^{10-7} \ = -1e^3 \approx -1 \cdot 2{,}7^3 \approx -1 \cdot 3^3 \approx -27$

$y(9) = (6-9)e^{10-9} \ = -3e^1 \approx -3 \cdot 2{,}7^1 \approx -9$

И, хотя и в 2-х последних выражениях приближения достаточно грубые, можно сделать вывод:

$y(7) < y(9) < y(2)$, а значит, в точке $x = 7$ функция принимает наименьшее значение.
И, кроме того, как выяснилось, в ней находится минимум функции.

Очевидно, что $x = 7$ и будет ответом задания.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

7							

14.8. ЗАДАНИЕ СОДЕРЖИТ ТОЛЬКО ФУНКЦИЮ $x^{\langle \text{число} \rangle}$

14.8.1. НАЙДИТЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29}$ НА ОТРЕЗКЕ $[-1; 4]$.

Подобные задания нельзя решить хитрым подбором ответа, как удавалось в заданиях пунктов 14.4 – 14.6, поэтому все придется делать правильно, «по-взрослому».

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$y' = -3x^{3-1} + 3 \cdot 2x^{2-1} + 9 = -3x^2 + 6x^2 + 9$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$-3x^2 + 6x^2 + 9 = 0$

$-x^2 + 2x^2 + 3 = 0$

$x^2 - 2x^2 - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$x_1 = -1$ и $x_2 = 3$.

Одному из этих значений x соответствует точка максимума, а другому точка минимума.
Но в данном случае не нужно выяснять, какая точка чему соответствует.

3-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y}$ В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

$y(4) = -4^3 + 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 29 = -9$

$y(-1) = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) - 29 = -34$

$y(3) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 29 = -2$

Очевидно, что наибольшим является значение $y(3) = -2$. Это и будет ответом задания.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	***2***						

14.8.2. НАЙДИТЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = x^4 + 4x^3 + 5$ НА ОТРЕЗКЕ $[-2; 2]$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$y' = 4x^3 + 12x^2$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$y' = 4x^3 + 12x^2 = 0$

$4x^2(x + 3) = 0$

$x^2 = 0$ или $x + 3 = 0$

$x_1 = 0$ и $x_2 = -3$.

Второй корень не входит в заданный отрезок и далее рассматриваться не будет.

3-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ y В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

$y(0) = 5$

$y(-2) = (-2)^4 + 4(-2)^3 + 5 = 16 - 32 + 5 = -11$

$y(2) = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 5 = 16 + 32 + 5 = 53$

Наибольшим является значение $y(2) = 53$. Это и будет ответом задания.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5	***3***						

14.8.3. НАЙДИТЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \frac{x^2+49}{x}$ НА ОТРЕЗКЕ $[1; 10]$.

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию:

$$y = \frac{x^2}{x} + \frac{49}{x} = x + 49x^{-1}.$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y' = 1 + (-1)49x^{-2} = 1 - \frac{49}{x^2}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y' = 1 - \frac{49}{x^2} = 0$$

$1 - \frac{49}{x^2} = 0$ или $x^2 = 49$

$x_1 = -7$ и $x_2 = 7$.

Корень $x_1 = -7$ не входит в заданный отрезок и далее рассматриваться не будет.

3-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ y В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

$$y(1) = \frac{1+49}{1} = \frac{50}{1} = 50$$

$$y(7) = \frac{49+49}{7} = \frac{98}{7} = 14$$

$$y(10) = \frac{100+49}{10} = \frac{149}{10} = 14{,}9$$

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	*4*	*,*	*9*				

14.8.4. **НАЙДИТЕ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ** $\boldsymbol{y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+1}$ **НА ОТРЕЗКЕ** $\boldsymbol{[0;9]}$**.**

Преобразуем для удобства вычисления производной исходную функцию:

$$y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+1=\frac{2}{3}x\cdot x^{\frac{1}{2}}-3x+1=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+1$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

$$y'=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}-1}-3=x^{\frac{1}{2}}-3=\sqrt{x}-3$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯВ НАЙДЕННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ К НУЛЮ, НАЙТИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (ТО ЕСТЬ МАКСИМУМА И МИНИМУМА).

$$y'=\sqrt{x}-3=0$$

$$\sqrt{x}-3=0$$

$$\sqrt{x}=3$$

$$x=9$$

3-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y}$ В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА И НА ГРАНИЦАХ ЗАДАННОГО ОТРЕЗКА. ВЫБОР ОТВЕТА.

$$y(0)=1$$

$$y(9)=\frac{2}{3}\cdot 9\cdot 3-3\cdot 9+1=18-27+1=-8$$

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	***8***						

14.9. ФУНКЦИЯ НЕ СОДЕРЖИТ ОГРАНИЧИВАЮЩЕГО ИНТЕРВАЛА $[X; X]$

Как правило, задания Второго типа в условии содержат некий интервал, ограничивающий аргумент функции. Однако изредка встречаются и задания, где это условие отсутствует.

Кто-то этого может даже не заметить, а у кого-то это обстоятельство вызывает вопрос: «А как же это решать»? Рассмотрим пример такого, довольно редкого задания.

14.9.1. НАЙДИТЕ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \log_2(x^2 + 18x + 97) + 7$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ.

Это, и подобные ему задания, можно делать разными способами. Рассмотрим два варианта.

Способ 1. Можно вообще обойтись без вычисления производной.

Функция $y = \log_2(x^2 + 18x + 97) + 7$ будет наименьшей при наименьшем значении «внутри скобок» (то есть $x^2 + 18x + 97$).
К этому выводу можно придти, например, такими способами:

3) Нарисовать примерный график функции $y = \log_2 x$. Из него видно, что меньшему значению x соответствует меньшее значение y;
4) Подставить «внутрь логарифма» $\log_2 x$ несколько пробных чисел:

   $\log_2 8 = 3, \qquad \log_2 4 = 2, \qquad \log_2 1 = 0, \qquad \log_2 \frac{1}{2} = -1 \ldots$

   Из этого ряда примеров следует тот же вывод.

Поскольку функция $y = x^2 + 18x + 97$ описывается параболой с ветвями, направленными вверх, то ее наименьшим значением будет значение y в вершине параболы.
Иными словами, наименьшим значением «внутри скобок» будет значение y при

$x = x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{2} = -9.$

Итак,

$y(x_{\text{верш}}) = y(-9) = (-9)^2 - 18 \cdot 9 + 97 = 81 - 162 + 97 = 16.$

Таким образом, наименьшее значение данной в условии функции $y = \log_2(x^2 + 18x + 97) + 7$ равно $y = \log_2 16 + 7 = 4 + 7 = 11.$

Способ 2.

Вычислим производную исходной функции и приравняем ее к нулю:

$$y' = \frac{1}{(x^2 + 18x + 97)\ln 2}(x^2 + 18x + 97)' = \frac{2x + 18}{(x^2 - 6x + 12)\ln 2}$$

$$y' = \frac{2x + 18}{(x^2 - 6x + 12)\ln 2} = 0$$

$2x + 18 = 0; \; x = -9$

Точка $x = -9$ является единственным экстремумом исходной функции. Причем, она будет именно точкой минимума, поскольку она соответствует наименьшему значению «скобки внутри логарифма».

Таким образом, в этом задании в точке минимума функции наблюдается ее наименьшее значение.

$$y_{min} = y_{\text{наим}} = y(-9) = \log_2((-9)^2 - 18 \cdot 9 + 97) + 7 = \log_2 16 + 7 = 4 + 7 = 11$$

Выбирайте тот вариант решения, который вам кажется более удобным. Но понимать желательно оба рассмотренных варианта.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	***1***						

Вот, собственно, и все! Хотелось бы написать еще что-нибудь умное по этому поводу, но больше я ничего придумать не могу ☺. И так получилось много всякого и разного…

Основные советы по выполнению заданий №14:

- Четко различайте между собой задания Первого типа и Второго типа. Эти задания «совсем о разном». Внимательно читайте условие. Помните о том, что могут быть и «замаскированные» задания (см. пример 14.7.1);
- Разбирайте и отрабатывайте задания этих типов раздельно, не давайте им «перемешаться в голове». Уясните смысл этапов работы с ними и обязательно соблюдайте их;
- Запомните таблицу значений тригонометрических функций для «особых углов» 1-й четверти: 0, 30, 45, 60 и 90 градусов;
- Значения этих функций для углов 2 – 4 четвертей определяйте, либо работая с единичной окружностью (смотрите Тематическое Отступление №2), либо используя формулы приведения;
- Внимательно разберитесь с таблицами производных, расположенными в Тематическом Отступлении №1. При необходимости – периодически возвращайтесь к ним. Запомните производные простейших функций и научитесь вычислять производные «комбинированных» и «сложных» функций (все это потребует времени);
- Применяйте прием «подбора ответа» внимательно и осознанно. Он позволяет решать многие задания Второго типа без вычисления производной, и тем самым значительно упрощает работу. Ни в коем случае не применяйте его для заданий Первого типа!
- Как показывает практика, навыки решения заданий №14 нарабатываются достаточно медленно и постепенно. Это связано как с необходимостью освоить и запомнить достаточно разноплановый и объемный материал, так и с разветвленной структурой этого задания.
  Дайте себе на это достаточно времени, «и будет вам щастье!» ☺;
- Обязательно проверяйте сделанное, как бы вы ни были уверены в его правильности.

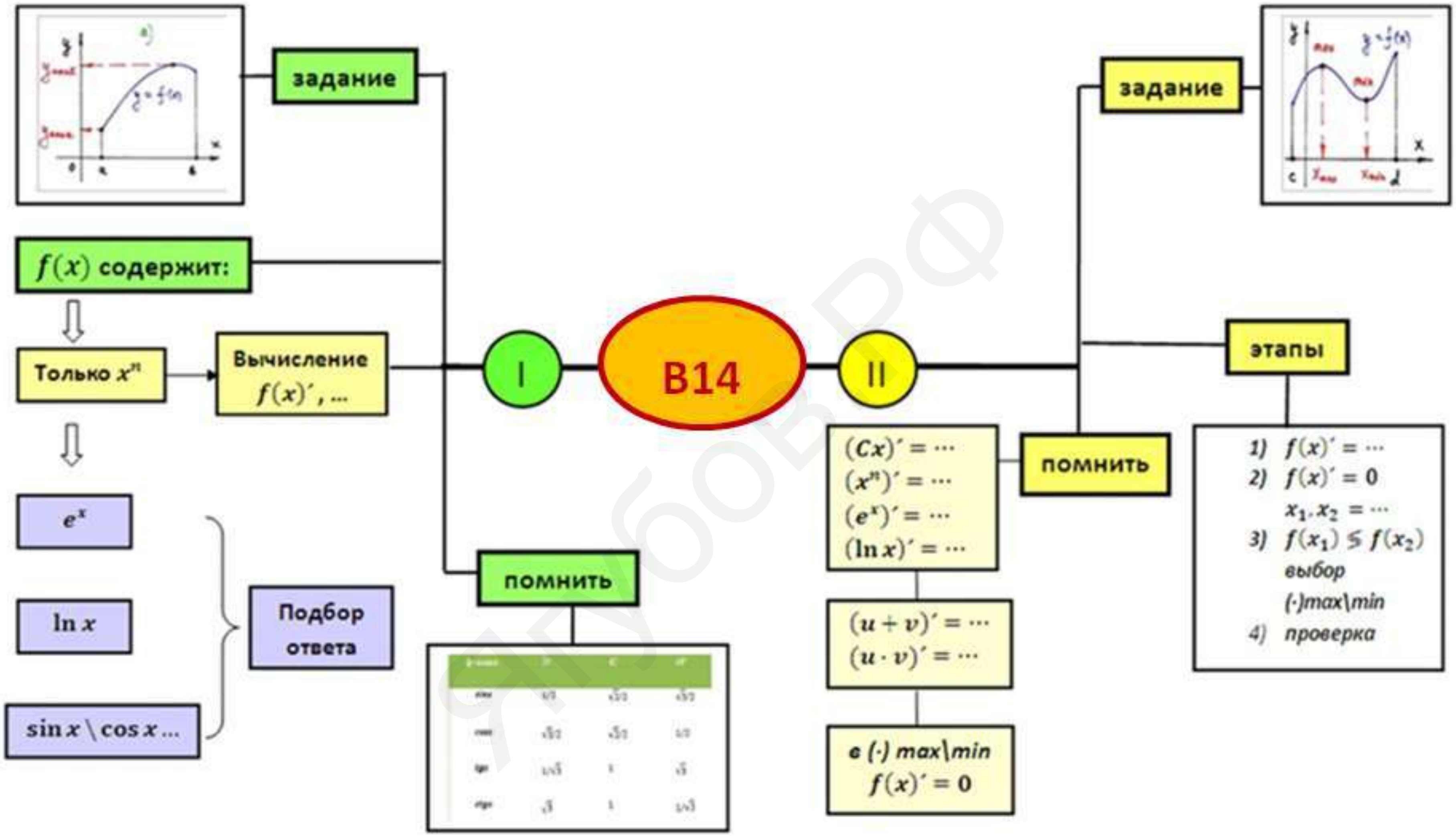
Как всегда, полезно будет сходить в «Открытый банк заданий по математике».

Кроме этого, подведем итоги этой главы очередной картинкой.

На этом мы и завершим последнюю главу «Советов».

УСПЕХОВ ВАМ НА ПРЕДСТОЯЩЕМ ЭКЗАМЕНЕ!

АВТОР


задание
$f(x)$ содержит:
Только x^n
Вычисление $f(x)'$, ...
e^x
$\ln x$
$\sin x \setminus \cos x$ ...
Подбор ответа
помнить
I
B14
II
задание
этапы
$(Cx)' = \cdots$
$(x^n)' = \cdots$
$(e^x)' = \cdots$
$(\ln x)' = \cdots$
помнить
$(u+v)' = \cdots$
$(u \cdot v)' = \cdots$
в (·) max\min
$f(x)' = 0$
1) $f(x)' = \cdots$
2) $f(x)' = 0$
$x_1, x_2 = \cdots$
3) $f(x_1) \leq f(x_2)$
выбор
(·)max\min
4) проверка