Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Л. П. Евстафьева

Дидактические материалы

Геометрия

10 11

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Л. П. Евстафьева

Геометрия

Дидактические материалы

10–11 классы

Пособие для общеобразовательных организаций

2-е издание, с дополнениями

Москва «Просвещение»

УДК 373.167.1
ББК 22.151.72
Е26

12+

Серия «Академический школьный учебник» основана в 2005 году.

Проект «Российская академия наук, Российская академия образования, издательство «Просвещение» — российской школе».

Руководители проекта: вице-президент РАН акад. ***В. В. Козлов***, президент РАО акад. ***Н. Д. Никандров***, д-р пед. наук, чл.-корр. РАО ***А. М. Кондаков***.

Научные редакторы серии: акад.РАО, д-р пед. наук ***А. А. Кузнецов***, акад. РАО, д-р пед. наук ***М. В. Рыжаков***, д-р экон. наук ***С. В. Сидоренко***.

Автор выражает благодарность ***В. А. Евстафьеву*** за оказание технической помощи при написании книги.

Евстафьева Л. П.

Е26 Геометрия. Дидактические материалы. 10—11 классы: пособие для общеобразоват. организаций / Л. П. Евстафьева; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». — 2-е изд., с доп. — М. : Просвещение, 2014. — 94 с. : ил. — (Академический школьный учебник). — ISBN 978-5-09-028101-0.

Данное пособие содержит самостоятельные работы и тесты по геометрии. Они предназначены для работы с учебником «Геометрия, 10—11» авторов А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика.

УДК 373.167.1
ББК 22.151.72

ISBN 978-5-09-028101-0

Предисловие

Дидактические материалы к учебнику содержат самостоятельные работы в двух вариантах и тесты.

Самостоятельные работы написаны к каждому параграфу, а зачастую и к каждому пункту параграфа, но это не означает, что учитель обязан проводить каждую самостоятельную работу, мало того, он может использовать их для опроса отдельных учащихся, а не всего класса. Это особенно удобно, если дидактические материалы есть в кабинете математики на каждого ученика.

Сложных задач в работах практически нет, так как короткие самостоятельные работы направлены на отработку понятий данного пункта или параграфа. Они помогают учителю следить за усвоением конкретного материала.

Самостоятельные работы представлены в двух вариантах одного уровня сложности и рассчитаны в основном на 10—15 минут. Самостоятельные работы для 10 класса содержат большое количество рисунков, которые подскажут ученику, как правильно изобразить те или иные объекты стереометрии, чтобы в дальнейшем он мог делать это самостоятельно. На наш взгляд, удобно работать с дидактическими материалами на уроке, если они есть у каждого ученика.

Тестов на повторение планиметрии в десятом классе два, причем тест № 1 посвящен треугольникам, а тест № 2 — другим фигурам плоскости. Предусматривается, конечно, что предварительно учитель повторяет с учащимися основные теоретические вопросы курса планиметрии, может быть составлен список необходимых формул.

Так как в программу 10—11 классов включены вопросы планиметрии, то им посвящается несколько самостоятельных работ и тесты. Заметим, что первый тест по теме «Треугольники» может быть дан в начале 10 класса для определения уровня знаний учащихся за 7—9 классы.

Остальные тесты написаны к главам учебника. Предусматривается, что они могут быть выполнены как в классе, так и дома для подведения итогов каждой главы. Например, учащиеся могут дома работать с тестами, а на следующем уроке каждый учащийся получает лишь часть теста в качестве контрольной работы.

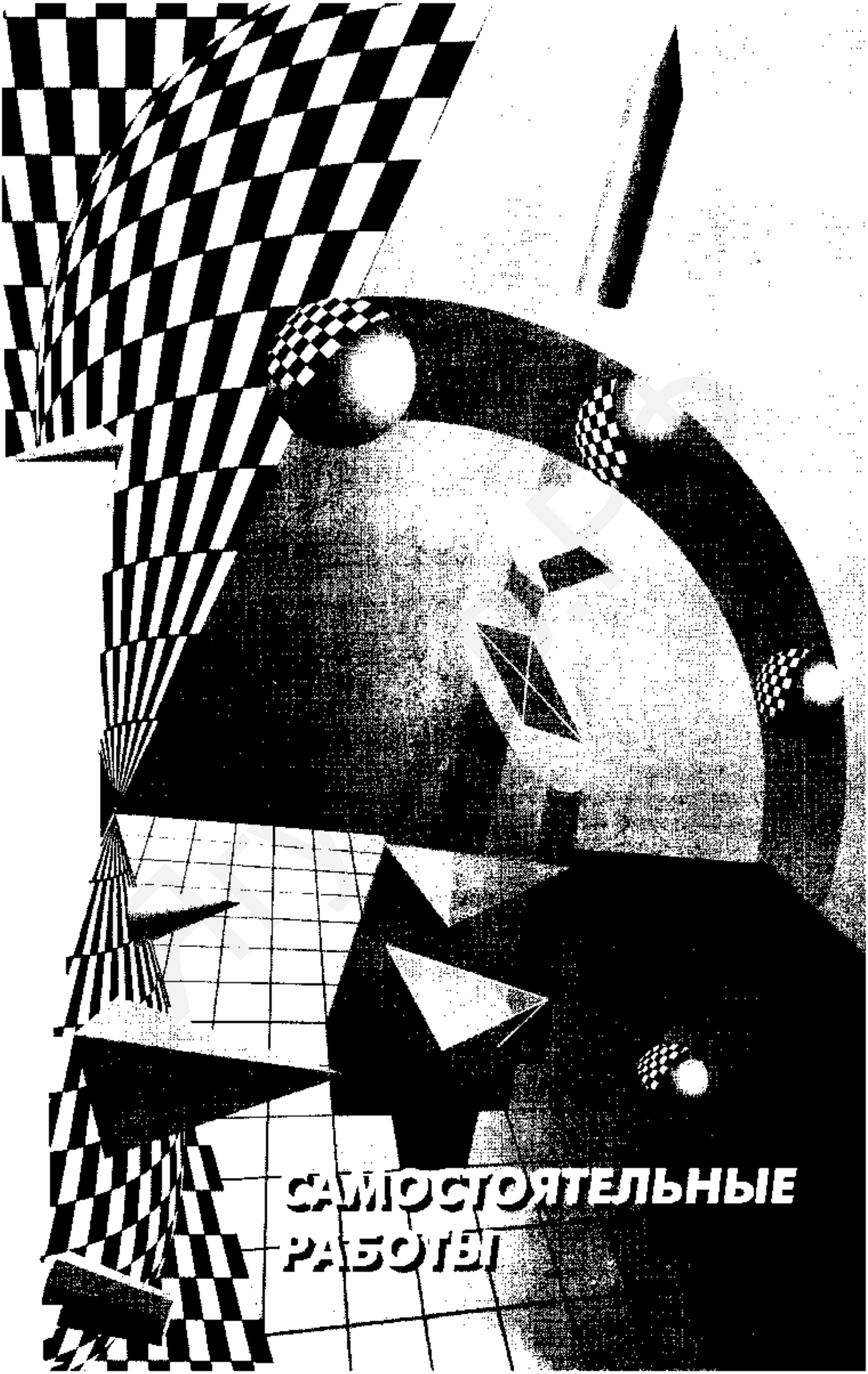
В конце книги есть еще два теста (№ 4 и № 5), которые можно использовать при повторении всего курса геометрии за 10—11 классы.

Проверка знаний с помощью тестов является достаточно новым в нашей стране видом контроля обучения. Тесты чаще используются учителем для проверки знаний учеников и, к сожалению, реже используются учениками для самоконтроля. Думается, что тесты можно успешно использовать и с той и с другой целью.

При работе с тестами каждому ученику предлагается персональный листок с заданиями. В данной системе тестов к каждому тесту дается 4 варианта ответов, из которых ровно один правильный, его и должен назвать ученик. Если тестирование происходит в классе, то целесообразно выдать каждому ученику табличку для ответов типа:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

в пустые клеточки которой ученик и вписывает верный, по его мнению, ответ, указывая любую букву: А, Б, ... Если же ученик имеет возможность отмечать прямо в книге, то нужный ответ он обводит, подчеркивает, выделяет как-то иначе по договоренности с учителем.



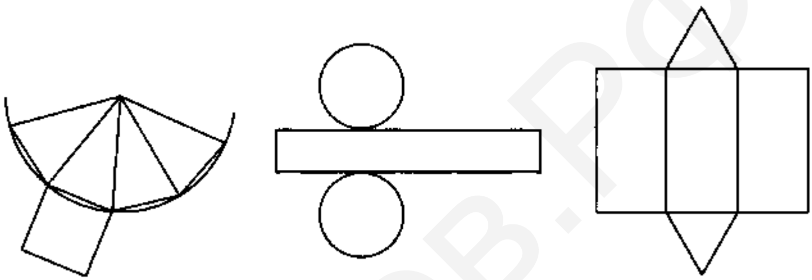
САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

10 КЛАСС

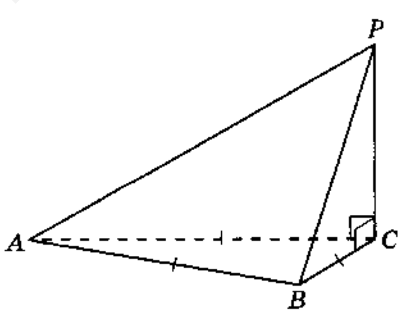
С-1 **К введению**

Вариант 1

1. Развертки каких геометрических фигур изображены? Нарисуйте эти геометрические фигуры.

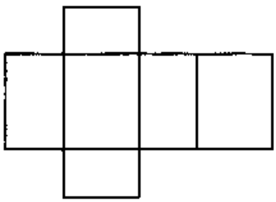
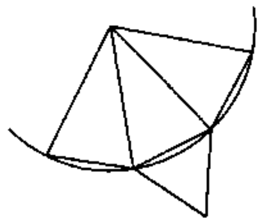
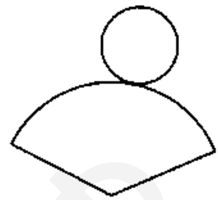


2. а) Какое из утверждений верно: *треугольник APB — разносторонний*; *треугольник APB — равнобедренный*; *треугольник APB — равносторонний?*
б) Изобразите среднюю линию треугольника APB, параллельную AB.
в) Изобразите высоту треугольника ABC, проведенную из вершины C.

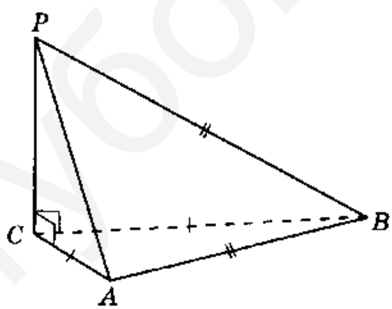


Вариант 2

1. Развертки каких геометрических фигур изображены? Нарисуйте эти геометрические фигуры.

2. а) Какое из утверждений верно: *треугольник APB — разносторонний*; *треугольник APB — равнобедренный*; *треугольник APB — равносторонний?*
б) Изобразите среднюю линию треугольника APB, параллельную AB.
в) Изобразите высоту треугольника ABC, проведенную из вершины C.



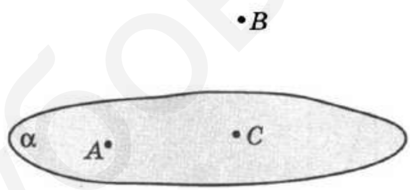
ГЛАВА I ОСНОВАНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

С-2 **К пп. 1.1—1.3**

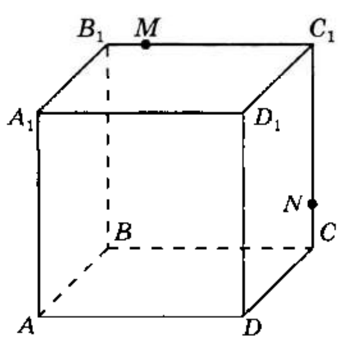
Вариант 1

1. Изобразите две пересекающиеся плоскости α и β. Изобразите точки A и D, общие для плоскостей α и β; точку B, принадлежащую α, но не принадлежащую β; точку C, принадлежащую β, но не принадлежащую α. Назовите прямую: а) лежащую и в плоскости α, и в плоскости β; б) лежащую в плоскости α, но не лежащую в плоскости β; в) не лежащую ни в одной из плоскостей.

2. Точки A и C расположены на плоскости α, а точка B — вне плоскости α. Как расположены по отношению к плоскости α середины отрезков AB и AC? Пусть точка C — середина отрезка AD. Изобразите точку D. Лежит ли она в плоскости α?



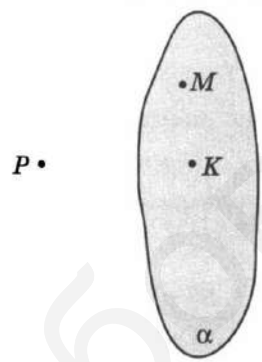
3. В плоскости какой грани куба лежит прямая MN? Изобразите точку пересечения прямой MN с плоскостью (ABD).



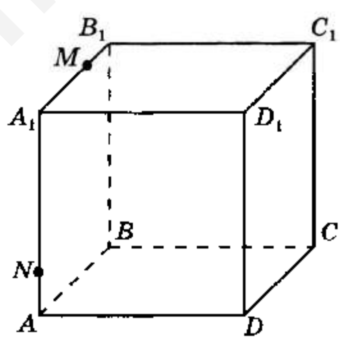
Вариант 2

1. Изобразите две пересекающиеся плоскости α и β. Изобразите точки M и A, общие для плоскостей α и β; точку K, принадлежащую α, но не принадлежащую β; точку P, принадлежащую β, но не принадлежащую α. Назовите прямую: а) лежащую и в плоскости α, и в плоскости β; б) лежащую в плоскости α, но не лежащую в плоскости β; в) не лежащую ни в одной из плоскостей.

2. Точки M и K расположены на плоскости α, а точка P — вне плоскости α. Как расположены по отношению к плоскости α середины отрезков MK и PK? Пусть точка K — середина отрезка MA. Изобразите точку A. Лежит ли она в плоскости α?

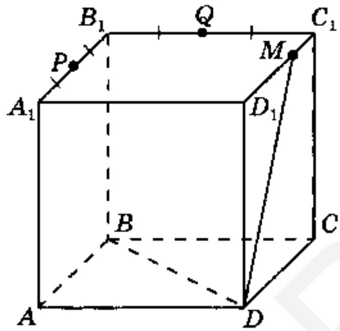


3. В плоскости какой грани куба лежит прямая MN? Изобразите точку пересечения прямой MN с плоскостью (ABD).



Вариант 1

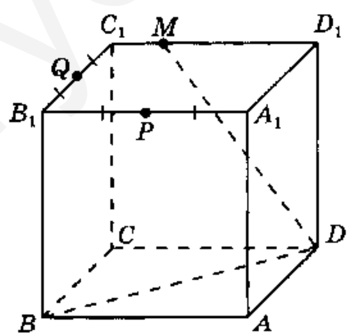
Ребро куба равно 6. Точки P и Q — середины A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, а точка M делит отрезок C_1D_1 в отношении $2:1$.



1. Найдите расстояние между точками: а) B и D; б) M и D; в) P и Q; г) P и B.
2. Назовите вершины куба, принадлежащие: а) одному полупространству с границей (BMD); б) разным полупространствам с границей (BMD).

Вариант 2

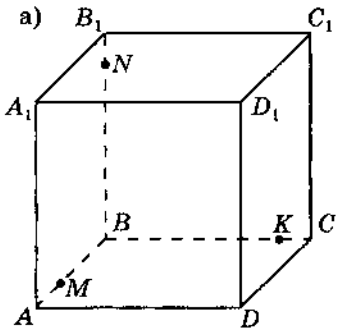
Ребро куба равно 6. Точки P и Q — середины A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, а точка M делит отрезок C_1D_1 в отношении $2:1$.

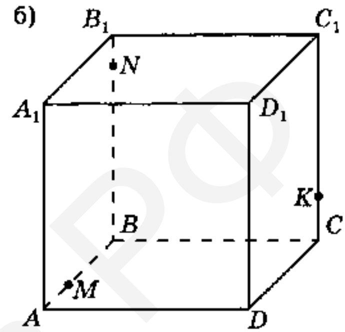


1. Найдите расстояние между точками: а) B и D; б) M и D; в) P и Q; г) P и B.
2. Назовите вершины куба, принадлежащие: а) одному полупространству с границей (BMD); б) разным полупространствам с границей (BMD).

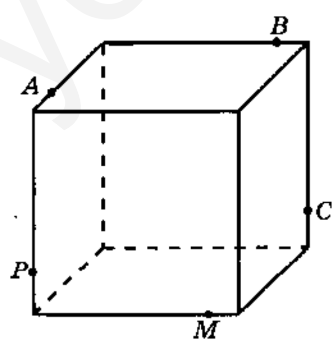
Вариант 1

1. Изобразите фигуру, образованную линиями пересечения плоскости MNK с гранями куба. Закрасьте получившуюся фигуру.





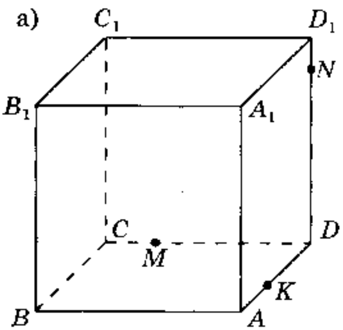
2. а) Имеется пять точек пространства, таких, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проводится прямая. Сколько различных прямых можно провести?

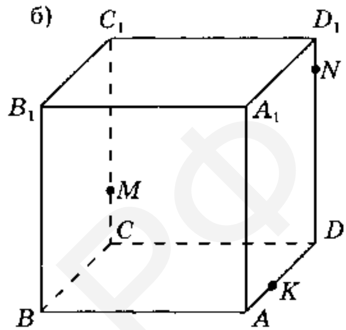


б) Какая из прямых, определяемых парой указанных точек, лежит в плоскости верхней грани куба, а какая не лежит ни в одной из плоскостей граней куба?

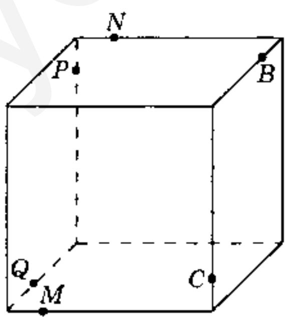
Вариант 2

1. Изобразите фигуру, образованную линиями пересечения плоскости MNK с гранями куба. Закрасьте получившуюся фигуру.





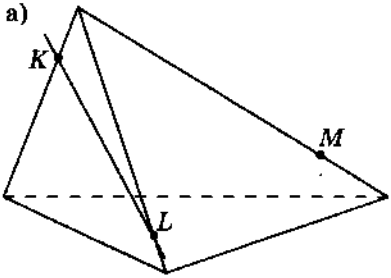
2. а) Имеется шесть точек пространства, таких, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проводится прямая. Сколько различных прямых можно провести?

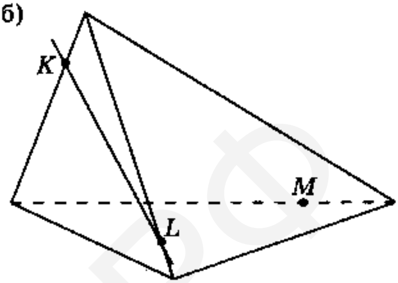


б) Какая из прямых, определяемых парой указанных точек, лежит в плоскости верхней грани куба, а какая не лежит ни в одной из плоскостей граней куба?

Вариант 1

1. Изобразите фигуру, образованную линиями пересечения плоскости, определенной прямой KL и точкой M, с гранями тетраэдра. Закрасьте эту фигуру.

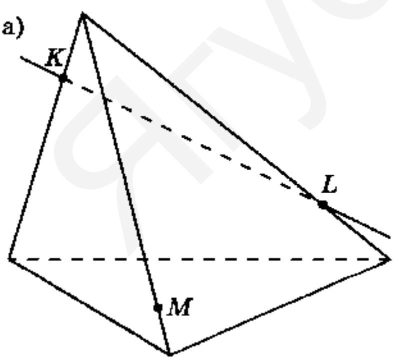


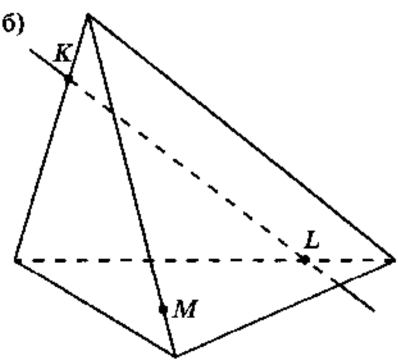


2. Прямые a и b пересекаются в точке O, прямые a и c пересекаются в точке M. Изобразите прямые a, b и c, если прямая c: а) пересекает плоскость, в которой лежат a и b; б) лежит в плоскости, в которой лежат a и b.

Вариант 2

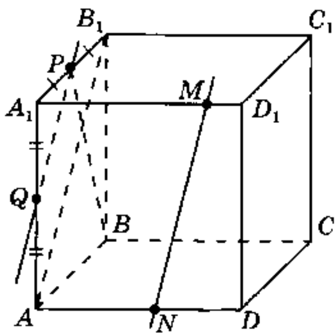
1. Изобразите фигуру, образованную линиями пересечения плоскости, определенной прямой KL и точкой M, с гранями тетраэдра. Закрасьте эту фигуру.





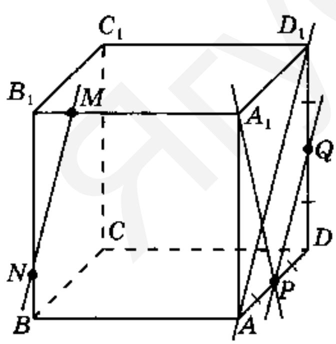
2. Прямые b и c пересекаются в точке P, прямые a и b пересекаются в точке Q. Изобразите прямые a, b и c, если прямая a: а) лежит в плоскости, в которой лежат c и b; б) пересекает плоскость, в которой лежат c и b.

Вариант 1



Дано изображение куба.
Каково взаимное расположение (на модели куба) следующих пар прямых:
1) QP и AB_1, если Q и P — середины AA_1 и A_1B_1;
2) AB_1 и BP;
3) MN и AB_1;
4) MN и BC;
5) MN и DD_1?
Для пересекающихся прямых укажите точку пересечения, для скрещивающихся и параллельных прямых укажите признак, на который опираетесь.

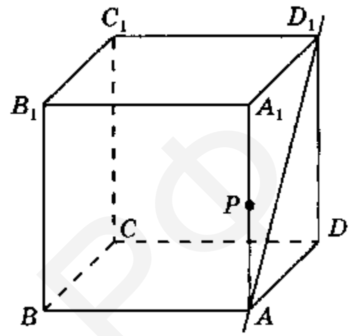
Вариант 2



Дано изображение куба.
Каково взаимное расположение (на модели куба) следующих пар прямых:
1) QP и AD_1, если Q и P — середины DD_1 и AD;
2) AD_1 и A_1P;
3) MN и AD_1;
4) CD и A_1P;
5) MN и AB?
Для пересекающихся прямых укажите точку пересечения, для скрещивающихся и параллельных прямых укажите признак, на который опираетесь.

Вариант 1

1. Через точку P — середину A_1A проведите прямую: а) $PQ \parallel AD_1$; б) $PL \times AD_1$; $PR \overset{\cdot}{-} AD_1$, где знак $\times$ означает пересекающиеся прямые, а знак $\overset{\cdot}{-}$ — скрещивающиеся прямые.

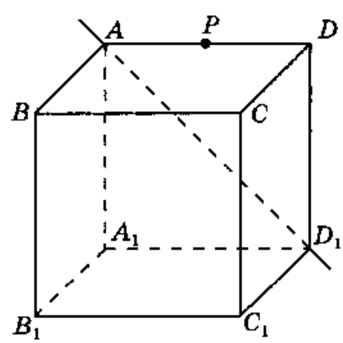


2. Изобразите плоскость и в ней пересекающиеся прямые a и b. Изобразите прямые c, d и m, такие, что: а) $c \parallel a$ и $c \times b$; б) $d \overset{\cdot}{-} a$ и $d \times b$; в) $m \overset{\cdot}{-} a$ и $m \overset{\cdot}{-} b$.

3. Изобразите две пересекающиеся по прямой a плоскости α и β. Верно ли утверждение, что если M — точка плоскости α, а K — точка плоскости β, то прямые MK и a скрещиваются? Ответ обоснуйте.

Вариант 2

1. Через точку P — середину AD проведите прямую: а) $PQ \parallel AD_1$; б) $PL \times AD_1$; $PR \overset{\cdot}{-} AD_1$, где знак $\times$ означает пересекающиеся прямые, а знак $\overset{\cdot}{-}$ — скрещивающиеся прямые.



2. Изобразите плоскость и в ней параллельные прямые a и b. Изобразите прямые c, d и m, такие, что: а) $c \overset{\cdot}{-} a$ и $c \times b$; б) $d \overset{\cdot}{-} a$ и $d \overset{\cdot}{-} b$; в) $m \times a$ и $m \times b$.

3. Изобразите две пересекающиеся по прямой m плоскости α и β. Верно ли утверждение, что если A — точка плоскости β, а B и C — точки плоскости α, причем $BC \parallel m$, то прямые AB и m скрещиваются? Ответ обоснуйте.

Вариант 1

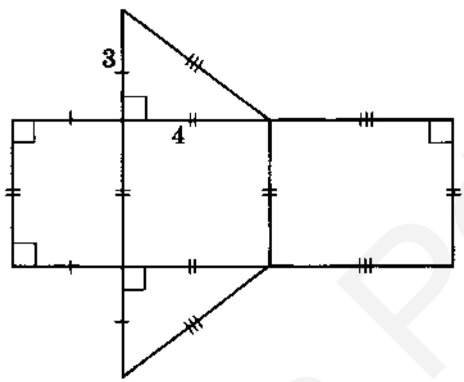
1. Изобразите плоскость α и точки M и K на ней, а точку C вне плоскости α. Пусть $CM = CK = 13$, а $MK = 10$.
а) Изобразите прямую, проходящую через точку C, перпендикулярную прямой MK.
б) Вычислите расстояние от точки C до прямой MK.
в) Вычислите площадь треугольника MKC.
2. Изобразите пирамиду, в основании которой параллелограмм $ABCD$, а вершина — точка P. Выделите другим цветом пирамиду $PMKC$, где точка M — середина AB, а точка K — точка отрезка AD, причем $AK : KD = 2 : 1$.

Вариант 2

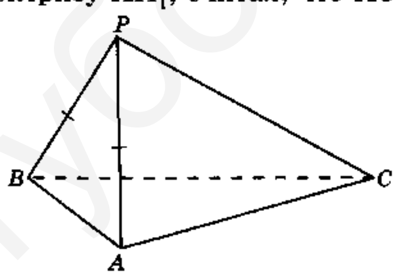
1. Изобразите плоскость β и точки A и B на ней, а точку P вне плоскости β. Пусть $PA = PB = 17$, а $AB = 30$.
а) Изобразите прямую, проходящую через точку P, перпендикулярную прямой AB.
б) Вычислите расстояние от точки P до прямой AB.
в) Вычислите площадь треугольника APB.
2. Изобразите пирамиду, в основании которой трапеция $ABCD$, а вершина которой — точка P. Выделите другим цветом пирамиду $PMKC$, где точка M — середина AB, а точка K — точка отрезка AD, причем $AK : KD = 3 : 1$.

Вариант 1

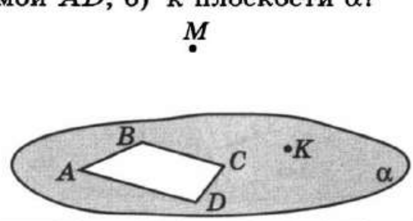
1. Изобразите ту геометрическую фигуру, развертка которой изображена. Опишите эту фигуру. По данным на развертке найдите площадь каждой грани полученной фигуры.



2. Пусть $PABC$ — изображение тетраэдра. Изобразите, учитывая данные на рисунке: а) в треугольнике APB высоту PP_1; б) в треугольнике PBC медиану PP_2; в*) в треугольнике ABC биссектрису AA_1, считая, что $AC : AB = 3 : 1$.

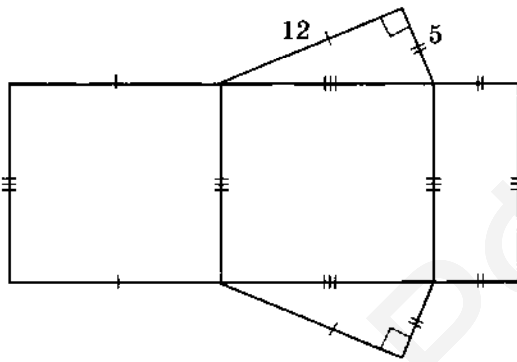


3. $ABCD$ — трапеция. Точка K на плоскости ABC, а M вне ее. Изобразите прямые MP и KE, пересекающие прямую BC. Как расположены прямые MP и KE по отношению: а) к прямой AD; б) к плоскости α?

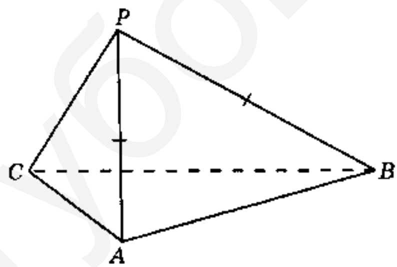


Вариант 2

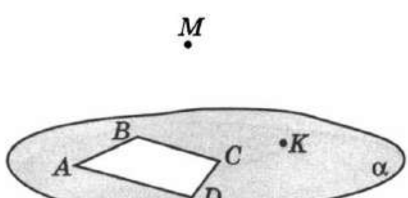
1. Изобразите ту геометрическую фигуру, развертка которой изображена. Опишите эту фигуру. По данным на развертке найдите площадь каждой грани полученной фигуры.



2. Пусть $PABC$ — изображение тетраэдра. Изобразите, учитывая данные на рисунке: а) в треугольнике APB высоту PP_1, б) в треугольнике PBC медиану PP_2; в*) в треугольнике ABC биссектрису CC_1, считая, что $BC : AC = 3 : 1$.



3. $ABCD$ — трапеция. Точка K на плоскости ABC, а M вне ее. Изобразите прямые MP и KE, пересекающие прямую AD. Как расположены прямые MP и KE по отношению: а) к прямой BC; б) к плоскости α?

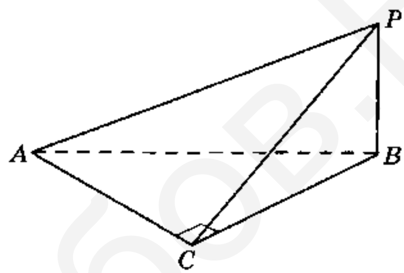


ГЛАВА II ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

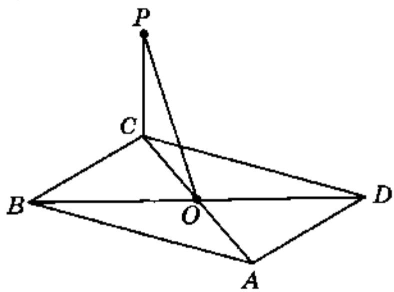
С-10 **К пп. 6.1–6.3**

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, а $BP \perp (ABC)$. Какие из утверждений верны: а) $PA > PB$; б) $PC < PB$; в) $AP = PC$; г) $AP > PC$?

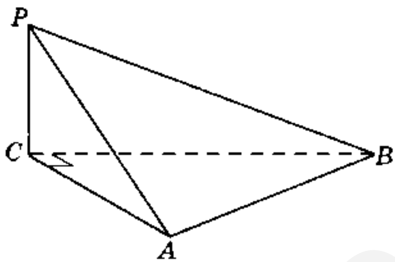


2. $ABCD$ — ромб. $S_{ABCD} = 24$; $BD = 6$; $CP \perp (ABC)$; $CP = 3$. Найдите длину отрезка OP.

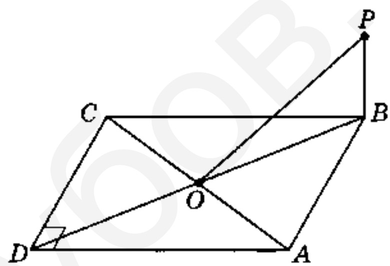


Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 38°$, а $PC \perp (ABC)$. Какие из утверждений верны: а) $PC > PB$; б) $PA > PC$; в) $PB = PA$; г) $PB > PA$?



2. $ABCD$ — прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. $PB \perp (ABCD)$; $PB = 12$ см. Найдите длину отрезка PO.



С-11 **К п. 7.1**

Вариант 1

1. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть ребро куба равно a см. а) Докажите, что $A_1B_1 \perp (AA_1D_1D)$. б) Докажите, что треугольник A_1B_1D прямоугольный. в) Найдите длины отрезков A_1D и B_1D. г) Найдите тангенс угла B_1DA_1.

2. К плоскости ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр OP через точку O пересечения диагоналей. Сделайте рисунок. Докажите, что $BD \perp (OPC)$.

Вариант 2

1. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть ребро куба равно b см. а) Докажите, что $B_1C_1 \perp (CC_1D_1D)$. б) Докажите, что треугольник C_1B_1D прямоугольный. в) Найдите длины отрезков C_1D и B_1D. г) Найдите тангенс угла DB_1C_1.

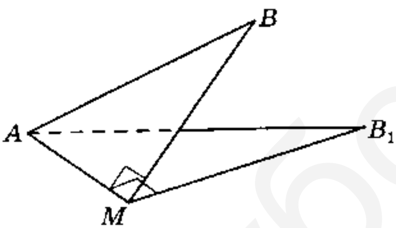
2. К плоскости ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр OP через точку O пересечения диагоналей. Сделайте рисунок. Докажите, что $AC \perp (OPD)$.

С-12 **К п. 7.1**

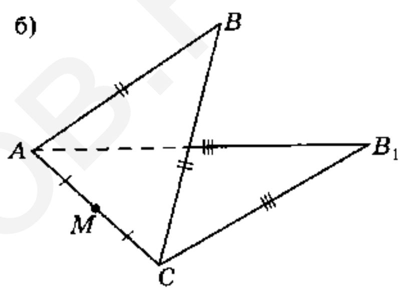
Вариант 1

Соедините точки B и B_1 на каждом из рисунков. На отрезке BB_1 отметьте произвольную точку P. Докажите, что $\angle AMP = 90°$.

а)



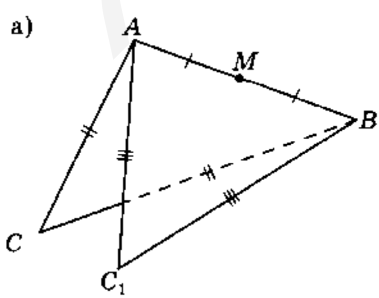
б)



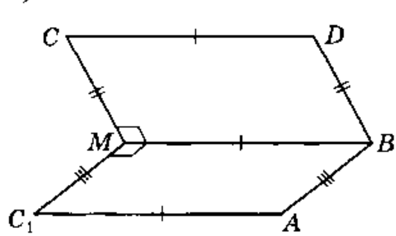
Вариант 2

Соедините точки C и C_1 на каждом из рисунков. На отрезке CC_1 отметьте произвольную точку P. Докажите, что $\angle BMP = 90°$.

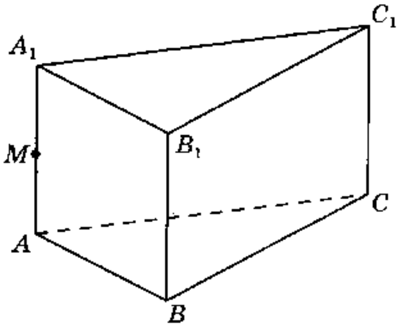
а)



б)

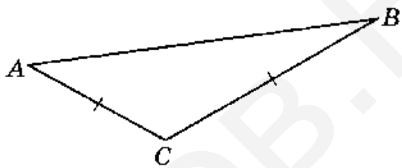


Вариант 1

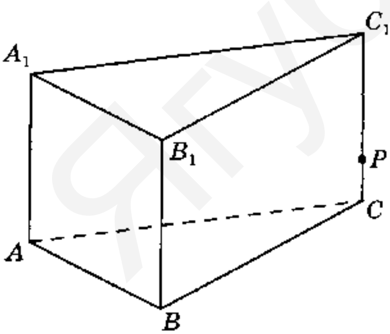


1. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма. Изобразите сечение призмы той плоскостью, в которой лежат все перпендикуляры к ребру AA_1, проходящие через точку M.

2. Определите углы треугольника ABC, если плоскость, перпендикулярная BC, содержит прямую AC.

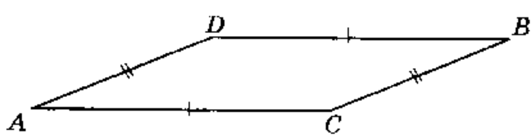


Вариант 2



1. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма. Изобразите сечение призмы той плоскостью, в которой лежат все перпендикуляры к ребру CC_1, проходящие через точку P.

2. Определите углы параллелограмма $ACBD$, если плоскость, перпендикулярная BC, содержит прямую AC.



С-14

К пп. 7.1—7.3

Вариант 1

1. Прямая m перпендикулярна плоскости α. Изобразите в плоскости α треугольник ABC, такой, что прямые AB и AC скрещиваются с прямой m, а прямая BC пересекается с прямой m.
2. К плоскости равнобедренного треугольника ABC, где $AB = BC$, $\angle B = 30°$ и $AC = 4$, проведен перпендикуляр через центр окружности, описанной вокруг этого треугольника, — точку O. На нем отложен отрезок $OP = 3$. Найдите расстояние от точки P до вершин треугольника ABC.

Вариант 2

1. Прямая m перпендикулярна плоскости α. Изобразите в плоскости α треугольник ABC, такой, что прямые AB и AC пересекаются с прямой m, а прямая BC скрещивается с прямой m.
2. К плоскости равнобедренного треугольника ABC, где $AB = BC$, $\angle B = 45°$ и $AC = 4$, проведен перпендикуляр через центр окружности, описанной вокруг этого треугольника, — точку O. На нем отложен отрезок $OP = 2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки P до вершин треугольника ABC.

С-15

К пп. 8.1—8.3

Вариант 1

1. а) Изобразите трапецию $ABCD$, ее среднюю линию MN и точку K вне плоскости трапеции. Изобразите прямую, проходящую через точку K и параллельную прямой MN. Каким еще прямым, изображенным на рисунке, эта прямая будет параллельна?

б) Еще раз изобразите трапецию $ABCD$, ее среднюю линию MN и точку P на MN. Известно, что в трапеции нет прямого угла. Через точку P проходит плоскость β, перпендикулярная прямой MN. Изобразите ее. Каким еще прямым, изображенным на рисунке, она перпендикулярна?

2. Изобразите пирамиду $PABC$. Пусть высота этой пирамиды PO находится внутри пирамиды. Изобразите ее. Изобразите точку K — середину PC и точку L — середину OC. Докажите, что $KL \perp (ABC)$.

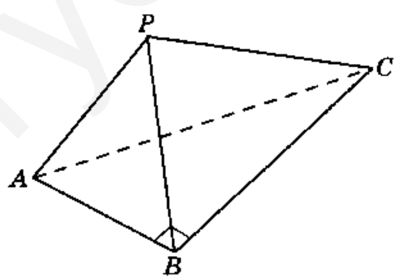
Вариант 2

1. а) Изобразите параллелограмм $ABCD$, его среднюю линию MN и точку K вне плоскости параллелограмма. Изобразите прямую, проходящую через точку K и параллельную прямой MN. Каким еще прямым, изображенным на рисунке, эта прямая параллельна?
б) Еще раз изобразите параллелограмм $ABCD$, $\angle A \neq 90°$, его среднюю линию MN и точку P на MN. Через точку P проходит плоскость β, перпендикулярная прямой MN. Изобразите ее. Каким еще прямым, изображенным на рисунке, она будет перпендикулярна?
2. Изобразите пирамиду $PABC$. Пусть высота этой пирамиды PO находится внутри пирамиды. Изобразите ее. Изобразите точку K — середину PA и точку L — середину OA. Докажите, что $KL \perp (ABC)$.

С-16 К пп. 9.1—9.2

Вариант 1

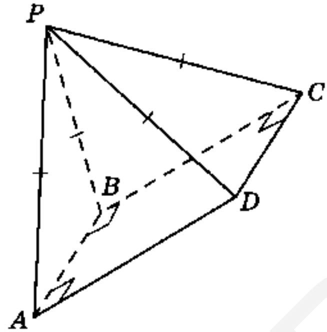
1. По данным рисунка изобразите перпендикуляр к плоскости (ABC), проходящий через точку P. Найдите его длину, если $AB = 6$, $BC = 8$, $PC = 10\sqrt{2}$, а ребра PA, PB и PC пирамиды равны.



2. Изобразите $PABCD$ — правильную четырехугольную пирамиду и ее высоту PO. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной BD, считая, что все ребра этой пирамиды равны a.

Вариант 2

1. По данным рисунка изобразите перпендикуляр к плоскости (ABC), проходящий через точку P. Найдите его длину, если $AB = 6$, $BC = 8$, $PC = 10\sqrt{2}$.



2. Изобразите $PABCD$ — правильную четырехугольную пирамиду и ее высоту PO. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и перпендикулярной AC, считая, что все ребра этой пирамиды равны a.

С-17 К п. 10.2

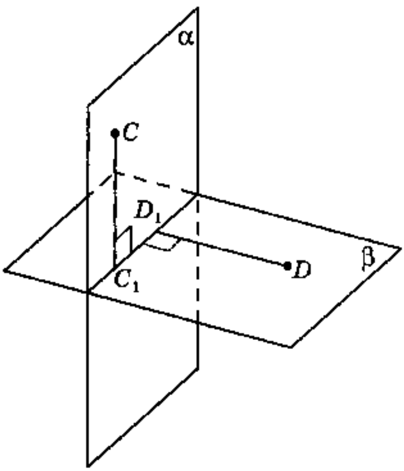
Вариант 1

1. К плоскости треугольника ABC, у которого $\angle C = 90°$, через точку C проведена прямая m, перпендикулярная к плоскости (ABC). Докажите, что плоскость, определяемая прямой m и точкой A, перпендикулярна плоскости, определяемой точкой B и прямой m.
2. В пирамиде $PABC$ $(PAB) \perp (ABC)$. Площадь треугольника PAB равна 40, а $AB = 16$. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 2

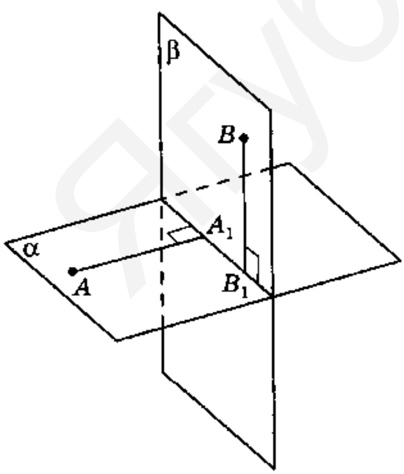
1. К плоскости треугольника ABC, у которого $\angle B = 90°$, через точку B проведена прямая n, перпендикулярная к плоскости (ABC). Докажите, что плоскость, определяемая прямой n и точкой C, перпендикулярна плоскости, определяемой прямой n и точкой A.
2. В пирамиде $PABC$ $(PAC) \perp (ABC)$. Площадь треугольника PAC равна 40, а $AC = 20$. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 1



Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Точка C лежит в плоскости α, а точка D — в плоскости β. Отрезки CC_1 и DD_1 — перпендикуляры к линии пересечения плоскостей (C_1D_1). Найдите длину отрезка CD, если $CC_1 = DD_1 = 4$ и $C_1D_1 = 2$.

Вариант 2



Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Точка A лежит в плоскости α, а точка B — в плоскости β. Отрезки AA_1 и BB_1 — перпендикуляры к линии пересечения плоскостей (A_1B_1). Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = BB_1 = A_1B_1 = 3$.

С-19

К п. 10.3

Вариант 1

1. В основании пирамиды лежит прямоугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. PO — высота пирамиды, M — середина AD. Докажите, что: а) $(BPD) \perp (ABC)$; б) $AD \perp (PMO)$; в) $(PMO) \perp (PAD)$.

2. Изобразите пирамиду $PABC$, в основании которой лежит треугольник ABC, $\angle C = 90°$. Две ее боковые грани, проходящие через AB и AC, перпендикулярны плоскости основания. Найдите высоту пирамиды, если $AC = 8$, $CB = 6$, $PB = 10\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. В пирамиде $PABC$ PB — высота, $PA = PC$, M — середина AC. Докажите, что: а) $(PBA) \perp (ABC)$; б) $AC \perp (PMB)$; в) $(PMB) \perp (APC)$.

2. Изобразите пирамиду $PABC$, в основании которой лежит треугольник ABC, $\angle C = 90°$. Две ее боковые грани, проходящие через AB и AC, перпендикулярны плоскости основания. Найдите высоту пирамиды, если $AC = 4$, $CB = 3$, $PB = 5\sqrt{2}$.

С-20

К пп. 11.1—11.2

Вариант 1

1. Прямые c и d перпендикулярны прямой a и проходят через точку O этой прямой. Прямые m и n тоже перпендикулярны прямой a, но проходят через точку P этой прямой. Может ли прямая m иметь общие точки с прямыми c и d?

2. Плоскости α и β параллельны. Прямая a перпендикулярна плоскости α. Точка C лежит в плоскости β. Точки A и B — точки пересечения прямой a с плоскостями α и β соответственно. Найдите AB, если $AC = 7{,}5$, а $BC = 4{,}5$.

Вариант 2

1. Прямые c и d перпендикулярны прямой m и проходят через точку K этой прямой. Прямые a и b тоже перпендикулярны прямой m, но проходят через точку L этой прямой. Может ли прямая c иметь общие точки с прямыми a и b?

2. Плоскости α и β параллельны. Прямая a перпендикулярна плоскости β. Точка D лежит в плоскости α. Точки A и B — точки пересечения прямой a с плоскостями α и β соответственно. Найдите AD, если $AB = 2{,}5$, а $BD = 6{,}5$.

С-21 К п. 11.3

Вариант 1

1. PO — высота пирамиды $PABC$. M — точка на ребре PA. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной PO и проходящей через точку M.
2. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной грани PDC и проходящей через точку O — точку пересечения диагоналей оснований (обоснования не нужны).
3. α, β, γ — три различные плоскости, a — прямая. $a \perp \alpha$, $a \perp \beta$, $\gamma \parallel \alpha$. Как расположены β и γ?

Вариант 2

1. PO — высота пирамиды $PABC$. N — точка на ребре PB. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной PO и проходящей через точку N.
2. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной грани APD и проходящей через точку O — точку пересечения диагоналей оснований (обоснования не нужны).
3. α, β, γ — три различные плоскости, m — прямая. $m \perp \gamma$, $m \perp \beta$, $\beta \parallel \alpha$. Как расположены плоскости α и γ?

С-22 К пп. 12.1—12.2

Вариант 1

1. Сторона BC треугольника ABC лежит в плоскости α, а точка A не лежит в ней. M и K — точки сторон AB и AC соответственно, причем $AM : MB = 1 : 3$. $CK : AK = 3 : 1$. а) Докажите, что $MK \parallel \alpha$. б) Пусть O — точка плоскости α, не лежащая на прямой BC. Изобразите линию пересечения плоскости MOK и плоскости α.
2. Прямая a параллельна плоскости β. Прямые b и c лежат в плоскости β и пересекаются в точке M. Докажите, что хотя бы одна из них скрещивается с прямой a.

Вариант 2

1. Сторона KM треугольника KPM лежит в плоскости β, а точка P не лежит в ней. B и C — точки сторон PK и PM соответственно, причем $KB : BP = 2 : 1$, $PC : CM = 1 : 2$. а) Докажите, что $BC \parallel \beta$. б) Пусть O — точка плоскости β, не лежащая на прямой MK. Изобразите линию пересечения плоскости MOK и плоскости α.
2. Прямая b параллельна плоскости α. Прямые a и c лежат в плоскости α и пересекаются. Верно ли утверждение, что прямая b скрещивается и с прямой a, и с прямой c?

С-23 К пп. 12.1—12.2

Вариант 1

1. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его сечение плоскостью AA_1M, где M — середина ребра B_1C_1.
2. Изобразите тетраэдр $PABC$ и точку M на ребре PC, такую, что $PM : MC = 1 : 2$. Изобразите сечение тетраэдра плоскостью, параллельной плоскости (ABC) и проходящей через точку M. Пусть площадь треугольника ABC равна S. Чему равна площадь сечения?
3. Плоскости α и β параллельны. Прямая m лежит в плоскости α, а прямая n — в плоскости β. Каким может быть взаимное расположение прямых m и n?

Вариант 2

1. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его сечение плоскостью (AA_1M), где M — середина ребра C_1D_1.
2. Изобразите тетраэдр $PABC$ и точку M на ребре PC, такую, что $PM : MA = 1 : 3$. Изобразите сечение тетраэдра плоскостью, параллельной плоскости (ABC) и проходящей через точку M. Пусть площадь сечения равна S. Чему равна площадь основания?
3. Плоскости α и β параллельны. Прямая m пересекает плоскость α, а прямая n лежит в плоскости β. Каким может быть взаимное расположение прямых m и n?

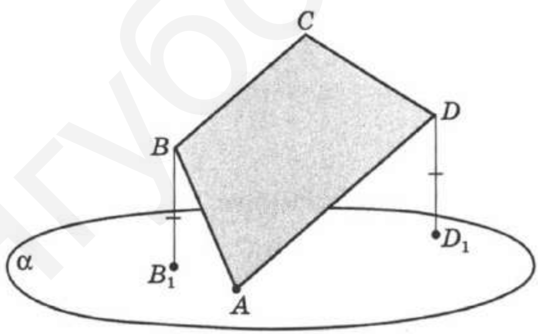
ГЛАВА III ПРОЕКЦИИ. РАССТОЯНИЯ. УГЛЫ

С-24 **К п. 13.1**

Вариант 1

1. Вершины треугольника ABC расположены вне плоскости α. $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$, причем точки A_1, B_1 и C_1 лежат в плоскости α. Известно, что $AA_1 = CC_1$ и $CC_1 < BB_1$. а) Изобразите проекцию на плоскость α треугольника ABC и точки пересечения медиан треугольника ABC. б) Верны ли утверждения: 1) треугольник ABC и его проекция имеют равные стороны; 2) периметр треугольника ABC меньше периметра его проекции?

2. $ABCD$ — трапеция. Точка A лежит в плоскости α, а точки B, C и D не лежат в плоскости α. $BB_1 \perp \alpha$, $DD_1 \perp \alpha$, причем точки B_1 и D_1 лежат в плоскости α. Известно, что $BB_1 = DD_1$. Изобразите, используя свойства проекций, проекцию трапеции $ABCD$ на плоскость α.



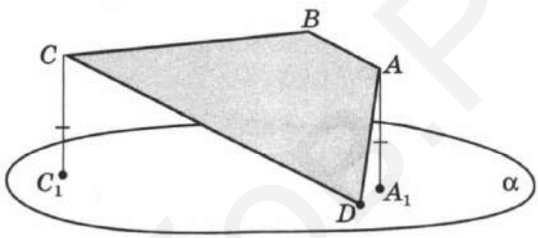
3. Пусть четырехугольник $AB_1C_1D_1$ — проекция трапеции $ABCD$ из задачи 2. Верны ли следующие утверждения? Почему?

а) $AB_1C_1D_1$ — трапеция.
б) $AC = AC_1$.
в) $BD = B_1D_1$.
г) $P_{\Delta ACD} = P_{\Delta AC_1D_1}$.

Вариант 2

1. Вершины треугольника ABC расположены вне плоскости α. $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$, причем точки A_1, B_1 и C_1 лежат в плоскости α. Известно, что $AA_1 = BB_1$ и $CC_1 < AA_1$. а) Изобразите проекцию на плоскость α треугольника ABC и точки пересечения медиан треугольника ABC. б) Верны ли утверждения: 1) треугольник ABC и его проекция имеют равные стороны; 2) периметр треугольника ABC больше периметра его проекции?

2. $ABCD$ — трапеция. Точка D лежит в плоскости α, а точки B, C и A не лежат в плоскости α. $AA_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$, причем точки A_1 и C_1 лежат в плоскости α. Известно, что $AA_1 = CC_1$. Изобразите проекцию трапеции $ABCD$ на плоскость α.

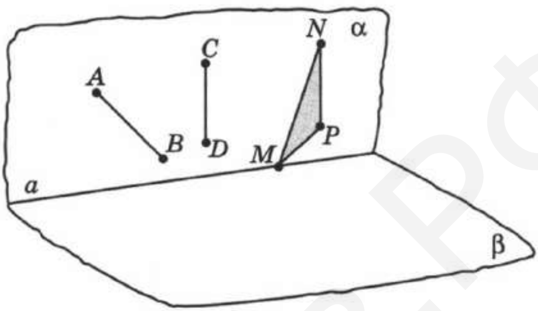


3. Пусть четырехугольник $A_1B_1C_1D$ — проекция трапеции $ABCD$ из задачи 2. Верны ли следующие утверждения? Почему?

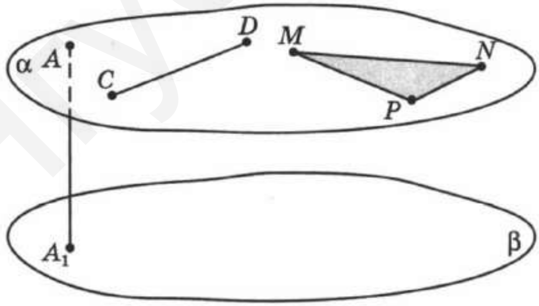
а) $A_1B_1C_1D$ — трапеция.
б) $AC = A_1C_1$.
в) $BD = B_1D$.
г) $P_{\Delta ACD} = P_{\Delta A_1C_1D}$.

Вариант 1

1. Плоскости α и β перпендикулярны, a — линия их пересечения. Точки A, B, C, D, N, P и M лежат в плоскости α, причем только прямая $CD \perp a$. Изобразите проекции на плоскость β отрезков AB, CD и треугольника MNP.

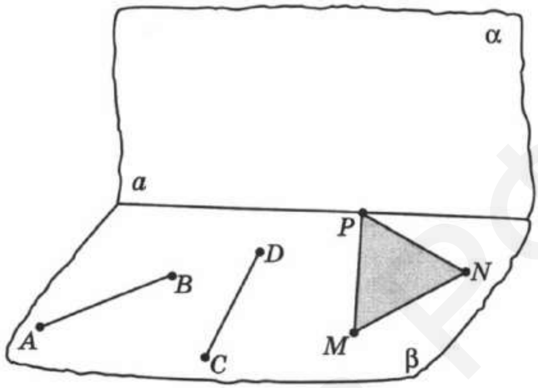


2. Плоскости α и β параллельны, $AA_1 \perp \beta$. Точки A, C, D, N, P и M лежат в плоскости α, точка A_1 лежит в плоскости β. Изобразите проекции на плоскость β отрезка CD и треугольника MNP.

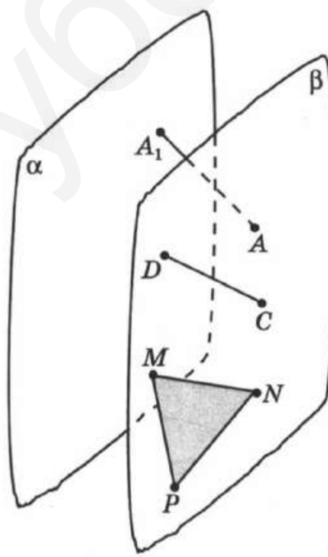


Вариант 2

1. Плоскости α и β перпендикулярны, a — линия их пересечения. Точки A, B, C, D, N, P и M лежат в плоскости β, причем только прямая $CD \perp a$. Изобразите проекции на плоскость α отрезков AB, CD и треугольника MNP.



2. Плоскости α и β параллельны, $AA_1 \perp \alpha$. Точки A, C, D, N, P и M лежат в плоскости β, точка A_1 лежит в плоскости α. Изобразите проекции на плоскость α отрезка CD и треугольника MNP.



С-26 К п. 13.3

Вариант 1

1. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть ребро куба равно 6. Найдите расстояния между точками: а) B_1 и C; б) M и D, где M — середина C_1D_1; в) A_1 и O, где O — центр квадрата $ABCD$.

2. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$ и точку O пересечения диагоналей основания. Найдите расстояние от точки P до точки O, если сторона основания равна $4\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5.

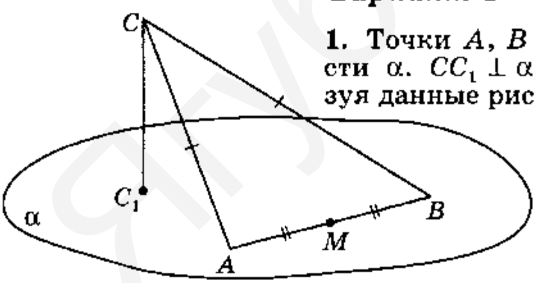
Вариант 2

1. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть ребро куба равно 8. Найдите расстояния между точками: а) B_1 и A; б) M и C, где M — середина C_1D_1; в) B_1 и O, где O — центр квадрата $ABCD$.

2. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$ и точку O пересечения диагоналей основания. Найдите расстояние от точки P до точки O, если сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5.

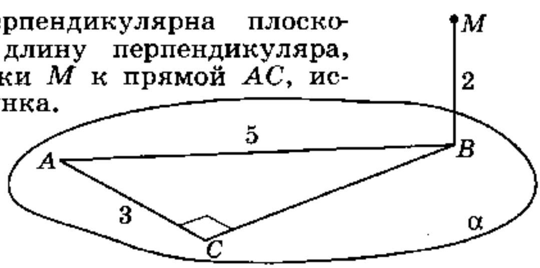
С-27 К п. 13.2

Вариант 1



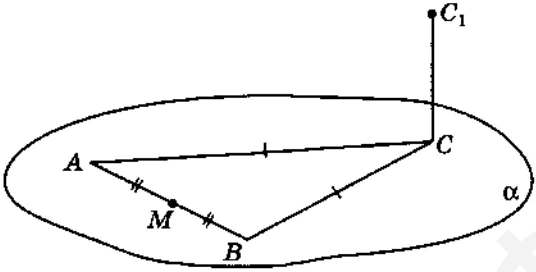
1. Точки A, B и C_1 лежат в плоскости α. $CC_1 \perp \alpha$. Докажите, используя данные рисунка, что $C_1M \perp AB$.

2. Прямая MB перпендикулярна плоскости ABC. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из точки M к прямой AC, используя данные рисунка.

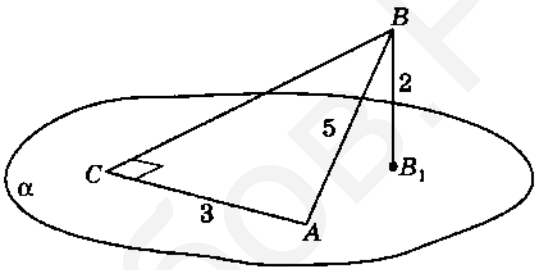


Вариант 2

1. Точки A, B и C_1 лежат в плоскости α. $CC_1 \perp \alpha$. Докажите, используя данные рисунка, что $C_1M \perp AB$.



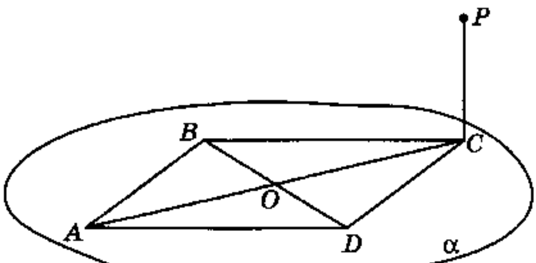
2. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из точки B_1 к прямой AC, если $BB_1 \perp \alpha$, точки B_1, A и C лежат в плоскости α, а точка B не лежит в плоскости α.



С-28 К п. 13.2

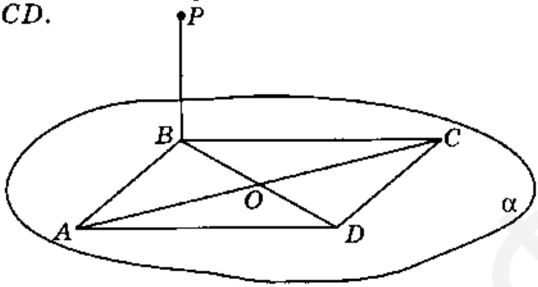
Вариант 1

$ABCD$ — прямоугольник, в котором точка O — точка пересечения диагоналей, треугольник COD правильный, со стороной 4. Прямая CP перпендикулярна плоскости ABC. $PC = 3$. Найдите расстояние от точки P до прямых AC, AD и BD.



Вариант 2

$ABCD$ — ромб, в котором треугольник ABD правильный, со стороной 6. Прямая BP перпендикулярна плоскости ABC. $BP = 4$. Найдите расстояние от точки P до прямых AB, AC и CD.



С-29 К пп. 14.1—14.3

Вариант 1

$ABCD$ — прямоугольник. Сторона AD лежит в плоскости α, а точка C не лежит в этой плоскости. Найдите расстояния до плоскости α от прямых AB и BC и от точки M — середины AB, если $AB = 5\sqrt{2}$ и отрезок AB образует со своей проекцией на плоскость α угол 45°.

Вариант 2

$ABCD$ — прямоугольник. Сторона AB лежит в плоскости α, а точка C не лежит в этой плоскости. Найдите расстояния до плоскости α от прямых AD и DC и от точки M — середины AD, если $AD = 4\sqrt{3}$ и отрезок AD образует со своей проекцией на плоскость α угол 60°.

С-30 К пп. 14.1—14.3

Вариант 1

1. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α, а основание BC отстоит от нее на 10 см. Сделайте рисунок. Найдите расстояние от точки M — точки пересечения диагоналей трапеции до плоскости α, если $BC : AD = 1 : 3$.

2. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки M, K и P — середины ребер AD, DC и D_1C_1 соответственно. Найдите расстояния между плоскостями AA_1C_1 и MKP, считая, что ребро куба $5\sqrt{2}$ см.

Вариант 2

1. Основание BC трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α, а основание AD отстоит от нее на 12 см. Сделайте рисунок. Найдите расстояние от точки M пересечения диагоналей трапеции до плоскости α, если $AD : BC = 4 : 1$.

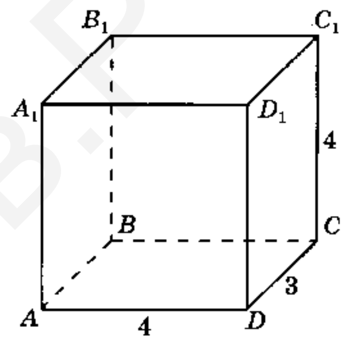
2. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки M, N и P — середины ребер AD, AB и A_1B_1 соответственно. Найдите расстояния между плоскостями (BB_1D_1) и (MNP), считая, что ребро куба $6\sqrt{2}$ см.

С-31 К пп. 15.2—15.3

Вариант 1

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, длины сторон которого указаны на рисунке. Найдите величину угла или значение какой-либо тригонометрической функции для угла между прямыми:

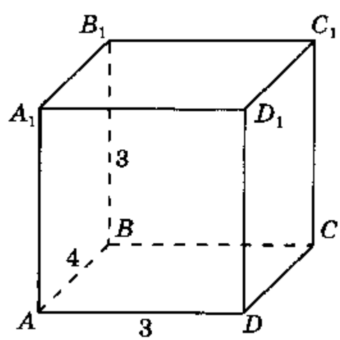
а) AA_1 и CD;
б) AA_1 и CC_1;
в) AB_1 и DC;
г) A_1D и AB;
д) B_1D и BB_1;
е) B_1C и AD.



Вариант 2

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, длины сторон которого указаны на рисунке. Найдите величину угла или значение какой-либо тригонометрической функции для угла между прямыми:

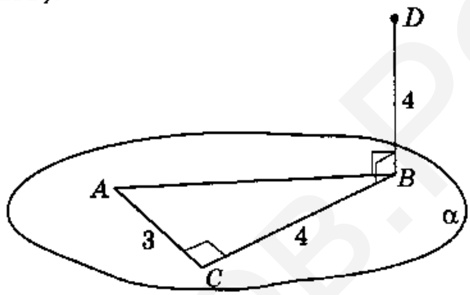
а) CC_1 и AB;
б) BB_1 и DD_1;
в) B_1C и AD;
г) D_1C и AB;
д) BD_1 и DD_1;
е) BC и A_1D.



Вариант 1

По данным рисунка найдите величину или укажите значение какой-либо тригонометрической функции угла между прямой и плоскостью:

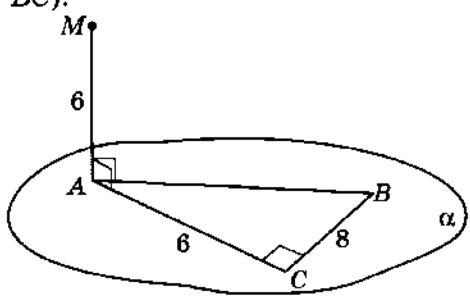
а) $\angle(DB;\ \alpha)$;
б) $\angle(AB;\ \alpha)$;
в) $\angle(DA;\ \alpha)$;
г) α и прямой, перпендикулярной к AC, проведенной из точки D;
д) $\angle((DBC);\ AC)$.



Вариант 2

По данным рисунка найдите величину или укажите значение какой-либо тригонометрической функции угла между прямой и плоскостью:

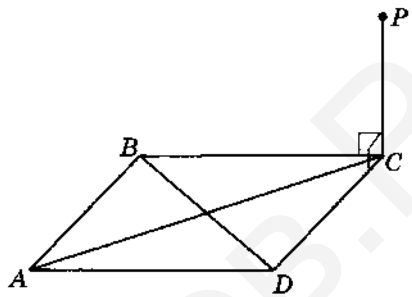
а) $\angle(AM;\ \alpha)$;
б) $\angle(MB;\ \alpha)$;
в) $\angle(BC;\ \alpha)$;
г) α и прямой, перпендикулярной к BC, проведенной из точки M;
д) $\angle((MAC);\ BC)$.



Вариант 1

$ABCD$ — ромб, в котором $BD = 6$. CP — перпендикуляр к плоскости (ABC). $CP = 3$, а расстояние от точки P до прямой BD равно 5. Найдите угол (или значение какой-либо его тригонометрической функции) между прямой и плоскостью:

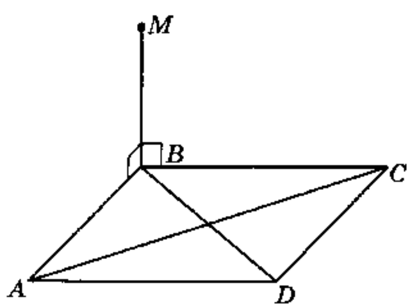
а) $\angle(PC; (ABC))$;
б) $\angle(PA; (ABC))$;
в) $\angle(PD; (ABC))$;
г) $\angle(BD; (APC))$.



Вариант 2

$ABCD$ — ромб, в котором $AC = 8$. BM — перпендикуляр к плоскости (ABC). $BM = 4$, а расстояние от точки M до прямой AC равно 5. Найдите угол (или значение какой-либо его тригонометрической функции) между прямой и плоскостью:

а) $\angle(BM; (ABC))$;
б) $\angle(MD; (ABC))$;
в) $\angle(MA; (ABC))$;
г) $\angle(AC; (MBD))$.



С-34 К пп. 15.3—15.4

Вариант 1

1. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина C удалена от плоскости α на 6 см. Известно, что $CA = CB = 13$ см, $AB = 10$ см. Какова величина угла между плоскостями (ABC) и α?

2. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α, а точка C находится на расстоянии $2{,}4\sqrt{2}$ см от плоскости α, $CA = 6$ см, $CB = 8$ см. Докажите, что $\angle((ACB); \alpha) = 45°$.

Вариант 2

1. Сторона BC треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина C удалена от плоскости α на 2,5 см. Известно, что $AC = AB = 13$ см, $BC = 24$ см. Какова величина угла между плоскостями (ABC) и α?

2. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α, $CA = 8$ см, $CB = 6$ см. Докажите, что если $\angle((ACB); \alpha) = 60°$, то вершина C удалена от плоскости α на $2{,}4\sqrt{3}$ см.

С-35 К пп. 15.3—15.4

Вариант 1

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 3. Найдите тангенсы углов наклона бокового ребра к плоскости основания и боковой грани к плоскости основания.

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, а высота равна $4\sqrt{3}$. Найдите тангенсы углов наклона бокового ребра к плоскости основания и боковой грани к плоскости основания.

Вариант 2

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6, а высота равна 4. Найдите тангенсы углов наклона бокового ребра к плоскости основания и боковой грани к плоскости основания.

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12, а высота равна $4\sqrt{3}$. Найдите тангенсы углов наклона бокового ребра к плоскости основания и боковой грани к плоскости основания.

С-36 К повторению

Вариант 1

1. Основанием прямой призмы служит треугольник ABC, у которого $AB = BC = 7$ см, $AC = 2$ см. Через сторону AC проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания, пересекающая противолежащее боковое ребро в точке D. Определите площадь сечения призмы плоскостью (ACD) и длину отрезка BD.

2. Точки M, N и P делят соответственно ребра AA_1, BB_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении $3 : 1$, $1 : 3$ и $3 : 1$, считая от основания $A_1B_1C_1D_1$. Изобразите сечение куба плоскостью (MNP). Каково взаимное расположение следующих прямых и плоскостей: а) MN и A_1D_1; б) MN и линии пересечения плоскостей (MNP) и (DD_1C_1); в) MN и (DD_1C_1C); г) B_1C_1 и (MNP)?

Вариант 2

1. Основанием прямой призмы служит треугольник ABC, у которого $AB = BC = 7$ см, $AC = 2$ см. Через сторону AC проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания, пересекающая противолежащее боковое ребро в точке D. Определите площадь сечения призмы плоскостью (ACD) и длину отрезка BD.

2. Точки M, N и P делят соответственно ребра BB_1, CC_1 и DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении $3 : 1$, $1 : 3$ и $3 : 1$, считая от основания $A_1B_1C_1D_1$. Изобразите сечение куба плоскостью (MNP). Каково взаимное расположение следующих прямых и плоскостей: а) MN и A_1B_1, б) MN и линии пересечения плоскостей (MNP) и (AA_1D_1); в) MN и (AA_1D_1); г) B_1C_1 и (MNP)?

С-37 К повторению

Вариант 1

В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $AC = 12$, $BC = 16$. Вне плоскости (ABC) взята точка M. Оказалось, что $MA = MB = MC = 10\sqrt{2}$. На каком расстоянии находится точка M от: а) плоскости (ABC); б) прямой BC? Найдите величины углов или укажите значения какой-либо их тригонометрической функции: а) $\angle(MB; (ABC))$; б) $\angle(MC; (ABC))$; в) $\angle((MAB); (ABC))$; г) $\angle((MBC); (ABC))$.

Вариант 2

В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $AC = 12$, $BC = 16$. Вне плоскости (ABC) взята точка M. Оказалось, что она удалена от плоскости (ABC) на 10 и равноудалена от всех вершин треугольника ABC. На каком расстоянии находится точка M от: а) вершин треугольника ABC; б) прямой BC? Найдите величины углов или укажите значения какой-либо их тригонометрической функции: а) $\angle(MA; (ABC))$; б) $\angle(MC; (ABC))$; в) $\angle((MAB); (ABC))$; г) $\angle((MAC); (ABC))$.

С-38 К повторению

Вариант 1

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а высота равна 4. Найдите косинусы углов между: а) боковым ребром и плоскостью основания; б) боковой гранью и плоскостью основания; в) двумя соседними боковыми гранями; г*) двумя противоположными боковыми гранями.

Вариант 2

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8, а высота равна 3. Найдите косинусы углов между: а) боковым ребром и плоскостью основания; б) боковой гранью и плоскостью основания; в) двумя соседними боковыми гранями; г*) двумя противоположными боковыми гранями.

11 КЛАСС

ГЛАВА IV ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФИГУРЫ

С-1 К пп. 16.1—16.3

Вариант 1

1. Плоскость α проходит через центр шара. Длина линии пересечения плоскости α и поверхности шара равна 6π см. Чему равны диаметр сферы и площадь сечения шара плоскостью α?
2. Плоскость, пересекающая шар, удалена от центра шара на 3 см. Прямоугольный треугольник, вписанный в сечение шара этой плоскостью, имеет гипотенузу, равную 8 см. Чему равен диаметр шара?

Вариант 2

1. Плоскость α проходит через центр шара. Площадь сечения шара плоскостью α равна 16π см^2. Чему равны диаметр шара и длина линии пересечения плоскости α с поверхностью шара?
2. Плоскость, пересекающая шар, удалена от центра шара на 4 см. Прямоугольный треугольник, вписанный в сечение шара этой плоскостью, имеет гипотенузу, равную 6 см. Чему равен диаметр шара?

С-2 К п. 16.3

Вариант 1

1. Сфера касается плоскости α в точке M. На плоскости α взята точка K, удаленная от точки M на 12, а от центра шара на 13. Чему равен диаметр шара?
2. Две параллельные плоскости α и β касаются сферы с центром O. Прямая a проходит через центр сферы, образует с плоскостью α угол 45° и пересекает плоскости α и β в точках A и B соответственно. $AB = 10\sqrt{2}$. Найдите радиус шара.

Вариант 2

1. Сфера касается плоскости α в точке P. На плоскости α взята точка K, удаленная от точки P на 5, а от центра шара на 13. Чему равен диаметр шара?
2. Две параллельные плоскости α и β касаются сферы с центром O. Прямая a проходит через центр сферы, образует с плоскостью α угол $60°$ и пересекает плоскости α и β в точках A и B соответственно. $AB = 10\sqrt{3}$. Найдите радиус шара.

С-3 К пп. 16.1—16.4

Вариант 1

1. Плоскости α и β параллельны. Одна из них касается шара, а другая пересекает его. Найдите площадь сечения шара указанной плоскостью, если расстояние между плоскостями равно 32, а радиус шара 41.
2. AB — диаметр сферы, AC — хорда сферы. Найдите расстояние от точки B до точки C, если $AB = 41$, $AC = 9$.

Вариант 2

1. Плоскости α и β параллельны. Одна из них касается шара, а другая пересекает его. Найдите площадь сечения шара указанной плоскостью, если расстояние между плоскостями равно 50, а радиус шара 41.
2. AB — диаметр сферы, BC — хорда сферы. Найдите расстояние от точки A до точки C, если $AB = 41$, $BC = 40$.

С-4 К п. 18.3

Вариант 1

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат с площадью 2,56 дм^2. Найдите площадь основания цилиндра.
2. Высота цилиндра 8 м, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси. На каком расстоянии от оси проведено сечение, если это сечение — квадрат?

Вариант 2

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите его площадь, если площадь основания цилиндра $1{,}69\pi$ дм^2.
2. Радиус основания цилиндра 10 дм. На расстоянии 8 дм от оси проведено сечение, параллельное оси цилиндра. Это сечение — квадрат. Найдите высоту цилиндра.

С-5 К п. 18.3

Вариант 1

Прямоугольник, стороны которого 5 дм и 6 дм, вращается вокруг большей стороны. Найдите длину диагонали осевого сечения получившегося цилиндра и тангенс угла наклона этой диагонали к основанию цилиндра.

Вариант 2

Прямоугольник, стороны которого 5 дм и 6 дм, вращается вокруг меньшей стороны. Найдите длину диагонали осевого сечения получившегося цилиндра и синус угла наклона этой диагонали к основанию цилиндра.

С-6 К п. 19.2

Вариант 1

В конусе, образованном вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг меньшего катета, найдите:
а) расстояние от центра основания до образующей конической поверхности;
б) площадь сечения, параллельного основанию и удаленного от вершины на 1,5 см;
в) площадь осевого сечения.

Вариант 2

В конусе, образованном вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг большего катета, найдите:
а) расстояние от центра основания до образующей конической поверхности;
б) площадь сечения, параллельного основанию и удаленного от вершины на 2 см;
в) площадь осевого сечения.

С-7 К п. 19.2

Вариант 1

1. Осевое сечение конуса — правильный треугольник. Найдите его площадь, если площадь основания конуса 4π см^2.
2. Вершина конуса — точка P. Хорда AB основания конуса стягивает дугу в 60°. Угол между плоскостью PAB и плоскостью основания конуса равен α. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если радиус основания равен R, а высота конуса $R\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. Осевое сечение конуса — правильный треугольник, площадь которого $4\sqrt{3}$ см^2. Найдите площадь основания конуса.
2. Вершина конуса — точка P. Хорда AB основания конуса стягивает дугу в 90°. Угол между плоскостью PAB и плоскостью основания конуса равен α. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если радиус основания равен R, а высота конуса $R\sqrt{3}$.

С-8 К п. 19.2

Вариант 1

1. В конусе сечение, параллельное основанию, делит его высоту в отношении 2 : 3. Чему равна площадь сечения, если площадь основания 50 см^2?
2. Образующая поверхности конуса наклонена к основанию под углом 60°. Найдите радиус шара, вписанного в этот конус, если высота конуса равна H.

Вариант 2

1. В конусе сечение, параллельное основанию, делит его высоту в отношении 2 : 5. Чему равна площадь основания, если площадь сечения 8 см^2?
2. Образующая поверхности конуса наклонена к основанию под углом 60°. Найдите радиус шара, вписанного в этот конус, если радиус основания конуса равен R.

С-9 К пп. 21.1—21.2

Вариант 1

1. Изобразите развертку прямой призмы, в основании которой равнобедренный треугольник.

2. Изобразите развертку прямой призмы, в основании которой ромб с углом $45°$.

3. Изобразите развертку прямоугольного параллелепипеда, измерения которого a, $1{,}5a$ и $2a$.

Вариант 2

1. Изобразите развертку прямой призмы, в основании которой прямоугольный треугольник.

2. Изобразите развертку прямой призмы, в основании которой равнобедренная трапеция с углом $45°$.

3. Изобразите развертку прямоугольного параллелепипеда, измерения которого m, $2m$ и $2{,}5m$.

С-10 К пп. 21.1—21.2

Вариант 1

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 6, а высота 8. Диагональ B_1D наклонена к основанию $ABCD$ под углом α, а к боковой грани DD_1C_1C под углом β. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sin\beta$.

2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6, а высота 8. Диагональ B_1D наклонена к основанию ABC под углом α, а к боковой грани AA_1B_1B под углом β. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sin\beta$.

Вариант 2

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8, а высота 6. Диагональ DB_1 наклонена к основанию $ABCD$ под углом α, а к боковой грани AA_1B_1B под углом β. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sin\beta$.

2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8, а высота 6. Диагональ BA_1 боковой грани BB_1A_1A наклонена к основанию ABC под углом α, а к боковой грани CC_1B_1B под углом β. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$.

С-11 К пп. 21.1—21.2

Вариант 1

1. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ расстояния от бокового ребра AA_1 до двух других боковых ребер BB_1 и CC_1 равны 4 и 7. Боковые грани AA_1B_1B и AA_1C_1C образуют между собой двугранный угол 120°. Найдите расстояние между ребрами BB_1 и CC_1.
2. В прямой треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 5, 7 и 10. Докажите, что в основании такой призмы тупоугольный треугольник.

Вариант 2

1. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 5, 8 и 10. Докажите, что один из двугранных углов, образованных боковыми гранями, тупой.
2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ расстояния от бокового ребра BB_1 до двух других боковых ребер AA_1 и CC_1 равны 5 и 7. Боковые грани BB_1C_1C и BB_1A_1A образуют между собой двугранный угол 120°. Найдите расстояние между ребрами AA_1 и CC_1.

С-12 К пп. 21.1—21.2

Вариант 1

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Найдите тангенс угла наклона плоскости (B_1C_1D) к плоскости $(ABCD)$.
2. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = 4$, $AD = 5$, $\angle A = 45°$. Высота параллелепипеда равна $3\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла наклона плоскости (B_1C_1D) к плоскости $(ABCD)$.

Вариант 2

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 2$. Найдите тангенс угла наклона плоскости (A_1B_1C) к плоскости $(ABCD)$.
2. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб $ABCD$, в котором $AB = 6$. $\angle A = 60°$. Высота параллелепипеда равна $4\sqrt{3}$. Найдите тангенс угла наклона плоскости (A_1B_1C) к плоскости $(ABCD)$.

С-13 К пп. 22.1—22.3

Вариант 1

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна 8, а радиус описанной вокруг основания окружности равен 6. Найдите: а) длину стороны основания; б) длину бокового ребра; в) длину апофемы; г) синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания; д) тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания.

2. В пирамиде $PABC$ грани ABP и ABC взаимно перпендикулярны. Найдите длину высоты пирамиды, проведенной из точки P, если $PA = PB = AB = 4$.

Вариант 2

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10, а радиус вписанной в основание окружности равен 4. Найдите: а) длину стороны основания; б) высоту пирамиды; в) длину апофемы; г) синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания; д) тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания.

2. В пирамиде $MABC$ грани MBC и ABC взаимно перпендикулярны. Найдите длину высоты пирамиды, проведенной из точки M, если $MB = MC = 4\sqrt{2}$ и $\angle BMC = 90°$.

С-14 К пп. 22.1—22.3

Вариант 1

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M — середину AB, N — середину BC, параллельно ребру PD. Определите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 6, а боковое ребро равно $8\sqrt{2}$.

Вариант 2

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M — середину CB, N — середину CD, параллельно ребру PA. Определите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 8.

С-15 К п. 26.1

Вариант 1

Диагональ осевого сечения цилиндра вращения равна 10, отношение радиуса основания к высоте цилиндра равно 3 : 8. Найдите:

а) объем цилиндра;

б) объем призмы, одной из боковых граней которой является осевое сечение цилиндра, а в основании лежит равнобедренный треугольник, вписанный в основание цилиндра.

Вариант 2

Диагональ осевого сечения цилиндра вращения равна 20, отношение высоты цилиндра к радиусу основания равно 3 : 2. Найдите:

а) объем цилиндра;

б) объем призмы, одной из боковых граней которой является осевое сечение цилиндра, а в основании лежит треугольник с углом 30°, вписанный в основание цилиндра.

С-16 К п. 26.1

Вариант 1

В основании прямой призмы лежит треугольник ABC, в котором $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle A = 60°$. Сечение A_1BC наклонено к основанию под углом α, тангенс которого равен $\sqrt{7}$. Докажите, что объем призмы равен 108.

Вариант 2

В основании прямой призмы лежит треугольник ABC, в котором $BC = 6$, $BA = 8$, $\angle B = 120°$. Объем призмы равен 84. Пусть сечение призмы плоскостью (B_1AC) наклонено к основанию под углом α. Докажите, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{13}{14}$.

С-17

К п. 27.1

Вариант 1

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна a и образует с боковой гранью, являющейся квадратом, угол 45°. Докажите, что объем этого параллелепипеда равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

2. Все ребра наклонной треугольной призмы равны 4 см, а объем этой призмы 24 см^3. Докажите, что угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60°.

Вариант 2

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна m и образует с боковой гранью, являющейся квадратом, угол 60°. Докажите, что объем этого параллелепипеда равен $\frac{\sqrt{3}}{16}m^3$.

2. Все ребра наклонной треугольной призмы равны 6 см, а объем этой призмы $27\sqrt{6}$ см^3. Докажите, что угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 45°.

С-18

К п. 27.2

Вариант 1

1. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120°. Определите объем конуса, если его образующая равна l.
2. В пирамиде $PABC$ грани PAB и ABC взаимно перпендикулярны. В треугольнике PAB $\angle P = 90°$, $PA = PB = 2$. Треугольник ABC — правильный. Найдите объем пирамиды $PABC$.

Вариант 2

1. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120°. Определите объем конуса, если его высота равна h.
2. В пирамиде $PABC$ грани PAB и ABC взаимно перпендикулярны. В треугольнике PAB $PA = PB = AB = 4$, в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Найдите объем пирамиды $PABC$.

С-19 К п. 27.2

Вариант 1

1. Все боковые ребра пирамиды равны 13. В основании пирамиды — прямоугольник с диагональю 24 и углом между диагоналями 30°. Найдите объем пирамиды.
2. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. В основании пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетом 8. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Все боковые ребра пирамиды равны 17. В основании пирамиды — прямоугольник, площадь которого $225\sqrt{3}$, а угол между диагоналями 60°. Найдите объем пирамиды.
2. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 45°. В основании пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите объем пирамиды.

С-20 К п. 27.3

Вариант 1

1. Площадь сечения, удаленного от центра шара на 4 см, равна 9π см^2. Найдите объем шара.
2. В конус, осевое сечение которого правильный треугольник со стороной a, вписан шар. Докажите, что объем шара V вычисляется по формуле $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{54}$.

Вариант 2

1. Объем шара равен $\frac{500\pi}{3}$ см^3. Найдите площадь сечения, удаленного от центра на 3 см.
2. Вокруг конуса, осевое сечение которого правильный треугольник со стороной a, описан шар. Докажите, что объем шара V вычисляется по формуле $V = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$.

С-21

К п. 27.2

Вариант 1

1. Высота конуса равна 12, а его образующая равна 13. Конус пересечен плоскостью, параллельной плоскости его основания и делящей его высоту в отношении 1 : 4, считая от вершины. Найдите объем получившегося усеченного конуса.
2. В пирамиде $PABC$ отрезок PO — высота, а точка K, лежащая на высоте PO, делит ее в отношении 1 : 2, считая от вершины. Через точку K проведено сечение, параллельное основанию. Какую часть объем усеченной пирамиды составляет от объема пирамиды $PABC$?

Вариант 2

1. Радиус основания конуса равен 5, а образующая его равна 13. Конус пересечен плоскостью, параллельной плоскости его основания и делящей его высоту в отношении 2 : 3, считая от вершины. Найдите объем получившегося усеченного конуса.
2. В пирамиде $PABC$ отрезок PO — высота, а точка K, лежащая на PO, делит ее в отношении 1 : 3, считая от вершины. Через точку K проведено сечение, параллельное основанию. Какую часть объем усеченной пирамиды составляет от объема пирамиды $PABC$?

С-22

К п. 28.2

Вариант 1

1. Объем шара равен 36π см^3. Найдите площадь поверхности шара.
2. Металлический цилиндр, радиус основания которого 2 см, а высота 9 см, переплавили в шар. Найдите площадь поверхности шара.

Вариант 2

1. Площадь поверхности шара равна 36π см^2. Найдите объем шара.
2. Металлический конус, радиус основания которого 2 см, а высота 8 см, переплавили в шар. Найдите площадь поверхности шара.

С-23 К п. 28.3

Вариант 1

1. В основании прямой призмы лежит треугольник, одна из сторон которого $2\sqrt{2}$ см, а противолежащий ей острый угол равен $45°$. Высота призмы равна 5. Найдите площадь поверхности цилиндра, описанного вокруг такой призмы.
2. Основанием цилиндра служит круг, вписанный в ромб со стороной $4\sqrt{3}$ и углом $60°$. Высота цилиндра равна диаметру основания. Найдите площадь поверхности цилиндра.

Вариант 2

1. В основании прямой призмы лежит треугольник, одна из сторон которого $2\sqrt{3}$ см, а противолежащий ей острый угол равен $60°$. Высота призмы равна 5. Найдите площадь поверхности цилиндра, описанного вокруг такой призмы.
2. Основанием цилиндра служит круг, вписанный в ромб со стороной $6\sqrt{2}$ и углом $45°$. Высота цилиндра равна диаметру основания. Найдите площадь поверхности цилиндра.

С-24 К п. 28.4

Вариант 1

1. Образующая конуса равна 10 и наклонена к основанию под углом α, тангенс которого равен $\frac{3}{4}$. Найдите площадь поверхности конуса.
2. Объем конуса равен 96π см^3. Отношение высоты этого конуса к радиусу основания равно $4 : 3$. Докажите, что площадь поверхности конуса равна 96π см^2.

Вариант 2

1. Образующая конуса равна 13 и наклонена к основанию под углом β, тангенс которого равен $\frac{12}{13}$. Найдите площадь поверхности конуса.
2. Площадь поверхности конуса равна 96π см^2. Отношение образующей поверхности этого конуса к радиусу основания равно $5 : 3$. Докажите, что объем конуса равен 96π см^3.

ГЛАВА V ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ПЛОЩАДИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С-25 К пп. 28.2—28.3

Вариант 1

Металлический конус, радиус основания которого равен 2 см, а высота 8 см, переплавлен в шар. Сравните площади поверхностей конуса и шара.

Вариант 2

Металлический цилиндр, радиус основания которого равен 2 см, а высота 9 см, переплавлен в шар. Сравните площади поверхностей цилиндра и шара.

С-26 К пп. 28.1—28.3

Вариант 1

1. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны a.
2. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$, если сторона основания ее равна a, а боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Верно ли, что площадь поверхности пирамиды $PABC$ вдвое меньше площади поверхности пирамиды $PABCD$?

Вариант 2

1. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если диагональ боковой грани равна d, а высота призмы составляет 0,6 этой диагонали. Верно ли, что площадь поверхности призмы $ABDA_1B_1D_1$ вдвое меньше площади поверхности данной призмы?
2. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания ее равна a, а боковая грань наклонена к основанию под углом 60°.

С-27 К пп. 28.1—28.3

Вариант 1

Сторона основания правильной треугольной призмы равна a. Диагональ боковой грани образует с другой боковой гранью угол 45°. Докажите, что объем этой призмы равен $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$, а площадь полной поверхности $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{6})$.

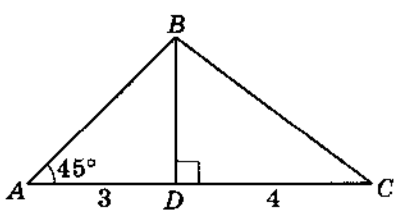
Вариант 2

Диагональ боковой грани равна d и образует с другой боковой гранью угол 30°. Докажите, что объем этой призмы равен $\frac{d^3\sqrt{2}}{12}$, а площадь полной поверхности $\frac{d^2\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{24})}{6}$.

С-28 К пп. 28.1—28.3

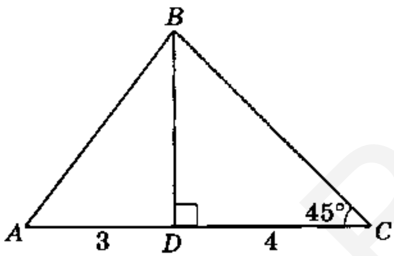
Вариант 1

1. Все боковые ребра треугольной пирамиды равны и наклонены к плоскости основания под углом α, тангенс которого равен $\frac{8}{13}$. В основании ее лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите объем пирамиды.
2. Используя данные рисунка, найдите площадь поверхности тела, полученного вращением треугольника ABC вокруг стороны AC.



Вариант 2

1. Все боковые грани треугольной пирамиды наклонены к основанию под углом, тангенс которого равен 2. В основании ее лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите объем пирамиды.
2. Используя данные рисунка, найдите площадь поверхности тела, полученного вращением треугольника ABC вокруг стороны AC.



С-29 К пп. 28.1—28.3

Вариант 1

1. В основании наклонной треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной 6. Боковое ребро, равное 10, образует с основанием угол 60°. Найдите объем призмы.
2. В наклонной треугольной призме боковое ребро AA_1, равное 10, удалено от ребер BB_1 и CC_1 на расстояния 6 и 4. Грани AA_1B_1B и AA_1C_1C образуют угол 60°. Найдите объем призмы и площадь ее боковой поверхности.

Вариант 2

1. В основании наклонной четырехугольной призмы лежит ромб со стороной 6, один из углов которого равен 60°. Боковое ребро, равное $5\sqrt{2}$, образует с основанием угол 45°. Найдите объем призмы.
2. В наклонной треугольной призме боковое ребро BB_1, равное $2\sqrt{3}$, удалено от ребер AA_1 и CC_1 на расстояния 7 и 8. Грани AA_1B_1B и BB_1C_1C образуют угол 120°. Найдите объем призмы и площадь ее боковой поверхности.

С-30 К пп. 28.1—28.3

Вариант 1

1. Боковые ребра тетраэдра попарно перпендикулярны и равны 4 м, 5 м и 6 м. Найдите площадь поверхности тетраэдра и его объем.

2. В конусе проведено сечение, параллельное основанию и делящее высоту пополам. Какую часть площади боковой поверхности конуса составляет боковая поверхность усеченного конуса?

Вариант 2

1. Боковые ребра тетраэдра попарно перпендикулярны и равны 5 дм, 6 дм и 8 дм. Найдите площадь поверхности тетраэдра и его объем.

2. В конусе проведено сечение, параллельное основанию и делящее высоту пополам. Какую часть объема конуса составляет объем усеченного конуса?

С-31 По задачам главы V

Вариант 1

Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, периметр основания которых 24 см, а высота в 2 раза меньше одной из сторон основания. Обозначив высоту параллелепипеда h, выразите объем параллелепипеда как функцию от h. Найдите размеры того параллелепипеда, у которого наибольший объем.

Вариант 2

Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, периметр основания которых 18 см, а одна из сторон основания в 2 раза меньше высоты параллелепипеда. Обозначив длину одной из сторон основания параллелепипеда a, выразите объем параллелепипеда как функцию от a. Найдите размеры того параллелепипеда, у которого наибольший объем.

ГЛАВА VI КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

С-32 К пп. 29.2—29.3

Вариант 1

1. Изобразите координатную прямую Ox и на ней точки $A\ (-3)$, $B\ (\sqrt{2})$, $C\ (1)$, $D\ (5)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
2. Изобразите систему координат xOy и на ней точки $A\ (-3;\ 2)$, $B\ (1;\ 5)$, $C\ (5;\ -1)$, $D\ (1;\ -4)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
3. Изобразите систему координат xyz и в ней точки $A\ (-3;\ 2;\ 4)$, $B\ (2;\ -3;\ -5)$, $C\ (4;\ 2;\ 0)$. Сравните расстояния $|AC|$ и $|BC|$.
4. Даны координаты трех точек: $B\ (1;\ 3;\ 2)$, $C\ (-1;\ 3;\ 4)$, $A\ (m;\ 0;\ 0)$. При каких значениях m треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C?

Вариант 2

1. Изобразите координатную прямую Ox и на ней точки $A\ (-5)$, $B\ (-1)$, $C\ (\sqrt{3})$, $D\ (5)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
2. Изобразите систему координат xOy и на ней точки $A\ (-1;\ 5)$, $B\ (-4;\ 1)$, $C\ (2;\ -3)$, $D\ (5;\ 1)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
3. Изобразите систему координат xyz и в ней точки $A\ (-2;\ 3;\ -4)$, $B\ (3;\ -2;\ 5)$, $C\ (-2;\ -4;\ 0)$. Сравните расстояния $|AC|$ и $|BC|$.
4. Даны координаты трех точек: $B\ (2;\ 3;\ 1)$, $C\ (4;\ 3;\ -1)$, $A\ (0;\ 0;\ m)$. При каких значениях m треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C?

С-33 К пп. 29.4—29.5

Вариант 1

1. Напишите уравнение окружности на плоскости xOy с центром в точке $A\ (-2;\ 3)$ радиуса 2.
2. Напишите уравнение сферы в системе координат xyz с центром в точке $A\ (-2;\ 3;\ 1)$ радиуса 3.
3. Какую фигуру задает уравнение $x^2 + (y - 4)^2 = 2$: а) на плоскости xOy; б) в системе координат xyz?
4. Напишите уравнение сферы с диаметром AB, если $A\ (-2;\ 3;\ 0)$ и $B\ (2;\ -1;\ 4)$.
5. Изобразите множество точек пространства, заданных уравнением $x + y = 3$. Начните с пересечения его с плоскостью xOy.

Вариант 2

1. Напишите уравнение окружности на плоскости xOy с центром в точке A (3; −2) радиуса 3.

2. Напишите уравнение сферы в системе координат xyz с центром в точке A (3; −2; 1) радиуса 2.

3. Какую фигуру задает уравнение $(x-3)^2 + y^2 = 3$: а) на плоскости xOy; б) в системе координат xyz?

4. Напишите уравнение сферы с диаметром AB, если A (3; −2; 0) и B (−1; 2; 4).

5. Изобразите множество точек пространства, заданных уравнением $x - y = 4$. Начните с пересечения его с плоскостью xOy.

С-34 К пп. 30.1—30.2

Вариант 1

1. Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и вектор $\overrightarrow{AA_1}$. а) Вычислите $|\overrightarrow{AA_1}|$, если $AB = 3$, $AD = 4$, $B_1D = 13$.

б) Найдите в грани CDD_1C_1 вектор, равный вектору $\overrightarrow{AA_1}$; вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AA_1}$; вектор, не коллинеарный вектору $\overrightarrow{AA_1}$, но не перпендикулярный ему.

2. Изобразите правильную треугольную пирамиду $PABC$ с основанием ABC. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Верны ли утверждения: а) $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC}$; б) $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PC}|$; в) $\overrightarrow{PO} \perp \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{BC}$?

Вариант 2

1. Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и вектор $\overrightarrow{BC}$. а) Вычислите $|\overrightarrow{BC}|$, если $AB = 4$, $B_1D = 10$, а $\angle(B_1D; (DD_1C_1C)) = 60°$. б) Найдите в грани ADD_1A_1 вектор, равный вектору $\overrightarrow{BC}$; вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{BC}$; вектор, не коллинеарный вектору $\overrightarrow{BC}$, но не перпендикулярный ему.

2. Изобразите правильную треугольную пирамиду $MABC$ с основанием ABC. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Верны ли утверждения: а) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$; б) $|\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$; в) $\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{AB}$?

С-35 К пп. 30.3—30.4

Вариант 1

Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. Назовите вектор: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$, б) $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1D_1}$; г) $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1B_1} - \overrightarrow{AB_1}$.
2. Запишите $\overrightarrow{A_1C}$ в виде суммы трех векторов.
3. Запишите $\overrightarrow{CB}$ в виде разности двух векторов.
4. Пусть O — точка пересечения диагоналей грани AA_1B_1B. Отложите от точки A вектор, равный $-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DC_1}$, и вектор, равный $\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Вариант 2

Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. Назовите вектор: а) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{D_1A_1} - \overrightarrow{CD_1}$.
2. Запишите $\overrightarrow{B_1D}$ в виде суммы трех векторов.
3. Запишите $\overrightarrow{DC}$ в виде разности двух векторов.
4. Пусть O — точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C. Отложите от точки D вектор, равный $\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$, и вектор, равный $-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B_1A}$.

С-36 К пп. 30.1—30.5

Вариант 1

1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, точка M — середина ребра B_1C_1, точка N — середина ребра DC. Представьте в виде $k \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, где k, p и q — числа, следующие векторы: $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NA_1}$, $\overrightarrow{MN}$.
2. В тетраэдре $MABC$ $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$, точка P — середина ребра BC. Представьте в виде $k \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, где k, p и q — числа, следующие векторы: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{MO}$, где точка O — центр тяжести треугольника ABC.

Вариант 2

1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, точка M — середина ребра A_1B_1, точка N — середина ребра BC. Представьте в виде $k \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, где k, p и q — числа, следующие векторы: $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{NA_1}$, $\overrightarrow{MN}$.

2. В тетраэдре $PABC$ $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, точка P — середина ребра AB. Представьте в виде $k \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, где k, p и q — числа, следующие векторы: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{PO}$, где точка O — центр тяжести треугольника ABC.

С-37 К пп. 31.1—31.2

Вариант 1

1. Известны координаты двух точек: $A\ (-2;\ 3;\ 5)$, $B\ (5;\ -1;\ -1)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ и длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если точка O — начало координат.

2. Даны координаты двух точек: $M\ (3{,}2;\ 0;\ -5{,}6)$, $N\ (x;\ y;\ z)$. Найдите x, y, z, если $\overrightarrow{MN} : (-2;\ 10;\ -12)$.

3. Даны координаты точек: $A\ (3{,}2;\ 0;\ -5{,}6)$, $B\ (-2{,}8;\ 4;\ -3{,}6)$. Точка C — середина AB. Найдите координаты $\overrightarrow{AC}$.

4. Известны координаты точек: $A\ (0;\ 0;\ 2)$, $B\ (3;\ 0;\ 5)$, $M\ (-6;\ 0;\ 6)$. Лежит ли точка M на прямой AB?

5. Даны координаты точек: $A\ (2;\ 3;\ 4)$, $B\ (5;\ -1;\ 6)$, $C\ (7;\ -2;\ 1)$, $D\ (4;\ 2;\ -1)$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Вариант 2

1. Известны координаты двух точек: $A\ (3;\ -2;\ 5)$, $B\ (-1;\ 5;\ -1)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ и длину вектора $\overrightarrow{BA}$, если точка O — начало координат.

2. Даны координаты двух точек: $P\ (1;\ -4;\ 3)$, $Q\ (x;\ y;\ z)$. Найдите x, y, z, если $\overrightarrow{QP} : (-12;\ -2;\ 10)$.

3. Даны координаты точек: $C\ (0;\ -3{,}2;\ 5{,}6)$, $D\ (-4;\ 2{,}8;\ 3{,}6)$. Точка A — середина CD. Найдите координаты $\overrightarrow{DA}$.

4. Известны координаты точек: $C\ (6;\ 0;\ -6)$, $D\ (5;\ 0;\ 3)$, $P\ (2;\ 0;\ 0)$. Лежит ли точка P на прямой CD?

5. Даны координаты точек: $A\ (-1;\ 2;\ 4)$, $B\ (1;\ -2;\ 7)$, $C\ (6;\ -1;\ 5)$, $D\ (4;\ 3;\ 2)$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

С-38 К п. 31.3

Вариант 1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 2. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{B_1A} \cdot \overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Докажите, что $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\vec{a}\,(4;\ 5;\ -2)$ и $\vec{b}\,(7;\ -8;\ -6)$.

3. Вычислите $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, если $\vec{a}\,(1;\ 2;\ 2)$ и $\vec{b}\,(4;\ 0;\ -3)$.

4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$. Вычислите $(-\vec{a}) \cdot \vec{b}$, $(-\vec{a}) \cdot (-\vec{b})$, $3\vec{a} \cdot (-\vec{b})$.

Вариант 2

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 2. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{DB}$.

2. Докажите, что $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\vec{a}\,(6;\ 8;\ -7)$ и $\vec{b}\,(2;\ -5;\ -4)$.

3. Вычислите $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, если $\vec{a}\,(0;\ 3;\ -4)$ и $\vec{b}\,(2;\ 1;\ 2)$.

4. $\vec{c} \cdot \vec{d} = -3$. Вычислите $\vec{c} \cdot (-\vec{d})$, $(-\vec{c}) \cdot (-\vec{d})$, $3\vec{d} \cdot (-\vec{c})$.

С-39 К п. 31.3

Вариант 1

1. Известны координаты векторов: $\vec{a}\,(1;\ 0;\ 1)$, $\vec{b}\,(2;\ 1;\ 0)$, $\vec{c}\,(0;\ 3;\ -6)$, $\vec{d}\,(1;\ 2;\ 1)$; $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$. Докажите, что $\vec{x} \parallel \vec{c}$ и $\vec{x} \perp \vec{d}$.

2. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$. Вычислите: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

Вариант 2

1. Известны координаты векторов: $\vec{a}\,(-1;\ 0;\ 1)$, $\vec{b}\,(1;\ -2;\ 0)$, $\vec{c}\,(6;\ -8;\ -2)$, $\vec{d}\,(0;\ 2;\ -8)$, $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Докажите, что $\vec{x} \parallel \vec{c}$ и $\vec{x} \perp \vec{d}$.

2. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$. Вычислите: $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

С-40 К п. 31.3

Вариант 1

1. Известны координаты точек: $A\ (-1;\ 2;\ 3)$, $B\ (3;\ 2;\ 0)$, $C\ (-2;\ 3;\ 0)$, $D\ (1;\ 3;\ 4)$. Определите величину угла между прямыми AB и CD.

2. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$,

$|\vec{c}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = 90°$, $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 60°$.

Вариант 2

1. Известны координаты точек: $A\ (-1;\ 2;\ 3)$, $B\ (3;\ 2;\ 0)$, $C\ (-2;\ 3;\ 0)$, $D\ (1;\ 3;\ 1)$. Определите величину угла между прямыми AC и BD.

2. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$,

$|\vec{c}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 90°$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$.

С-41 К п. 31.4

Вариант 1

1. Известны координаты точек: $A\ (-1;\ 2;\ 3)$, $B\ (3;\ 1;\ 0)$. Напишите уравнение плоскости β, перпендикулярной прямой AB и проходящей через точку $M\ (1;\ 1;\ -1)$. Лежат ли на плоскости β точки $D\ (0;\ 0;\ 0)$ и $P\ (2;\ -19;\ 7)$?

2. Плоскость β задана уравнением $2x - 3y + z = 6$. Найдите координаты точки пересечения этой плоскости с осями координат. Изобразите эти точки и линии пересечения плоскости с координатными плоскостями.

Вариант 2

1. Известны координаты точек: $C\ (-2;\ 3;\ 0)$, $D\ (1;\ 2;\ -4)$. Напишите уравнение плоскости δ, перпендикулярной прямой CD и проходящей через точку $M\ (1;\ -1;\ 1)$. Лежат ли на плоскости δ точки $O\ (0;\ 0;\ 0)$ и $P\ (2;\ 3;\ 1)$?

2. Плоскость δ задана уравнением $2x + 3y + z = 6$. Найдите координаты точки пересечения этой плоскости с осями координат. Изобразите эти точки и линии пересечения плоскости с координатными плоскостями.

ГЛАВА VII ПЛАНИМЕТРИЯ

С-1 (Треугольник и его элементы)

Вариант 1

1. В треугольнике со сторонами 18, 24 и 30 найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.
2. В треугольнике со сторонами 4 см и 8 см и углом между ними 120° найдите длины высоты и биссектрисы, проведенных к большей стороне.

Вариант 2

1. В треугольнике со сторонами 40, 32 и 24 найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.
2. В треугольнике со сторонами 4 см и 10 см и углом между ними 60° найдите длины высоты и биссектрисы, проведенных к средней по длине стороне.

С-2 (Треугольник и его элементы)

Вариант 1

1. В треугольнике ABC, где $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $AC = 18$ см, проведена окружность, касающаяся сторон AB и BC, центр которой (точка P) лежит на стороне AC. Найдите длину PB.
2. В треугольнике со сторонами 9, 18 и 12 проведена медиана к большей стороне. Найдите синус угла между медианой и средней по длине стороной.

Вариант 2

1. В треугольнике MPK, где $MP = 36$ см, $MK = 24$ см, $KP = 30$ см, проведена окружность, касающаяся сторон MK и KP, центр которой (точка O) лежит на стороне MP. Найдите длину отрезка OK.
2. В треугольнике со сторонами 6, 8 и 12 проведена медиана к большей стороне. Найдите синус угла между медианой и меньшей по длине стороной.

С-3 (Треугольники и вписанные (описанные) окружности)

Вариант 1

1. Определите радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами $5\sqrt{3}$, $\sqrt{21}$ и 6.

2. Определите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C прямой, $AB = 17$ см, $\operatorname{tg}\angle A = \frac{8}{15}$.

Вариант 2

1. Определите радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами $2\sqrt{3}$, 5 и $\sqrt{7}$.

2. Определите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C прямой, $AB = 26$ см, $\operatorname{tg}\angle B = \frac{5}{12}$.

С-4 (Треугольник и окружность)

Вариант 1

1. Катеты прямоугольного треугольника 6 см и 16 см. Определите диаметр окружности, проходящей через вершину прямого угла, вершину большего острого угла и середину большего катета.

2. Вычислите площадь круга, описанного вокруг треугольника, одна из сторон которого равна 6 см, а углы, к ней прилежащие, $23°$ и $37°$.

Вариант 2

1. Катеты прямоугольного треугольника 9 см и 24 см. Определите радиус окружности, проходящей через вершину прямого угла, вершину большего острого угла и середину большего катета.

2. Вычислите площадь круга, описанного вокруг треугольника, одна из сторон которого равна $5\sqrt{2}$ см, а углы, к ней прилежащие, $111°$ и $24°$.

С-5 (Четырехугольники)

Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен $60°$, $AB = 6$ см, биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E, причем $\frac{BE}{EC} = \frac{3}{2}$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

2. Периметр ромба равен 40 см, а сумма диагоналей равна 28 см. Найдите площадь ромба.

Вариант 2

1. В параллелограмме $ABCD$ угол D равен $120°$, $DC = 4$ см, биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M, причем $\frac{AM}{MD} = \frac{5}{2}$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

2. Периметр прямоугольника равен 34 см, а его площадь равна 60 см^2. Найдите сумму его диагоналей.

С-6 (Четырехугольники и окружности)

Вариант 1

1. Вокруг параллелограмма описана окружность радиуса 10 см. Угол между диагоналями параллелограмма равен $30°$. Найдите площадь параллелограмма.

2. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность с центром P. $PC = 6$ см, $PD = 8$ см. Найдите радиус окружности и среднюю линию трапеции.

Вариант 2

1. Вокруг параллелограмма описана окружность радиуса 6 см. Площадь параллелограмма равна 36 см^2. Найдите угол между диагоналями параллелограмма.

2. Вокруг окружности с центром M описана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Найдите радиус окружности и среднюю линию трапеции, если $MA = 12$ см, $MB = 9$ см.

Задачи для самостоятельной работы дома

Треугольники

1. В прямоугольном треугольнике ABC катет $CA = 15$, катет $CB = 20$. На гипотенузе AB взята точка D, такая, что $AD = 4$. Найдите длину отрезка CD.

(*Ответ:* 13.)

2. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна 13 см, а тангенс одного из углов равен $\frac{5}{12}$. Найдите площадь треугольника.

(*Ответ:* 120 см^2.)

3. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой 17 и катетом 15 найдите расстояния от точки пересечения медиан до меньшего катета.

(*Ответ:* 5.)

4. В прямоугольном треугольнике с катетами 15 см и 20 см найдите расстояния от точки пересечения медиан до гипотенузы.

(*Ответ:* 4.)

5. В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки 5 см и 3 см, считая от вершины. Найдите длины сторон треугольника.

(*Ответ:* $4\sqrt{5}$ см; $4\sqrt{5}$ см; 8 см.)

6. В прямоугольном треугольнике косинус одного из углов равен $\frac{5}{13}$. Площадь треугольника равна 120 см^2. Внутри треугольника взята точка P, удаленная от большего катета на 2 см, а от гипотенузы на 4 см. Найдите расстояния от точки P до меньшего катета.

(*Ответ:* 14 см.)

7. Докажите, что если катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза равна c, то радиус вписанной окружности можно найти по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$.

8. В прямоугольный треугольник с катетами $3\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$ вписана окружность. Найдите расстояние от ее центра до вершины прямого угла.

(*Ответ:* 2.)

9. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки 30 см и 40 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

(*Ответ:* 14 см.)

10. Пусть BB_1 — медиана треугольника ABC, в котором $AC = 4{,}8$ см, $\angle A = 35°$, $BB_1 = 2{,}4$ см. Найдите величину угла B.

(*Ответ:* 55°.)

11. В окружность радиуса 2,6 см вписан треугольник с периметром 12 см. Одна из сторон треугольника равна 4,8 см. Найдите площадь треугольника, если известно, что в нем нет тупого угла.

(*Ответ:* 4,8 см^2.)

12. Две стороны треугольника имеют длины 35 см и 14 см, а биссектриса угла между ними равна 12 см. Найдите площадь этого треугольника.

(*Ответ:* 232,5 см^2.)

13. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки P и Q так, что $AP : PB = 1 : 1$, $BQ : QC = 8 : 1$. Какую часть составляет площадь треугольника PQB от площади четырехугольника $APQC$?

(*Ответ:* 0,8.)

14. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 16. Чему равен радиус окружности, проходящей через вершину прямого угла, середину большего катета и вершину острого угла, противоположного этому катету?

(*Ответ:* 5.)

15. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 10 см, а к боковой стороне — 12 см.

(*Ответ:* 75 см^2.)

16. В треугольник ABC, у которого сторона BC равна $2\sqrt{13}$, сторона AC равна 6, вписана окружность с центром P. Угол BPC вдвое больше угла BAC. Найдите площадь треугольника ABC.

(*Ответ:* $12\sqrt{3}$.)

17. В треугольник вписана окружность. Одна из сторон разделена точкой касания на отрезки 6 см и 8 см. Найдите длины других сторон треугольника, если радиус окружности равен 4 см.

(*Ответ:* 13 см, 15 см.)

18. Рассматриваются все треугольники, сумма двух сторон которых равна 6 см, а угол между ними 45°. Изобразите тот треугольник, который имеет наибольшую сторону.

(*Ответ:* 3 см и 3 см.)

19. В равнобедренный треугольник с основанием 6 см и углом при вершине 120° вписываются все возможные прямоугольники, две вершины которых лежат на основании. Изобразите этот треугольник и тот из прямоугольников, который имеет наибольшую площадь.

(*Ответ:* две вершины прямоугольника — середины боковых сторон треугольника.)

20. Периметр прямоугольного треугольника равен 60, а сумма квадратов длин всех сторон 1250. Найдите длину высоты, проведенной к гипотенузе.

(*Ответ:* 12.)

21. Длины медиан прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, равны $\sqrt{244}$ и $\sqrt{601}$. Найдите длину гипотенузы.

(*Ответ:* 26.)

22. Длина медианы прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 10, а к одному из катетов — $4\sqrt{13}$. Найдите длину третьей медианы.

(*Ответ:* $\sqrt{73}$.)

23. В треугольнике ABC $BC = 26$ см, $AC = 28$ см, $AB = 30$ см. Найдите площадь части треугольника, заключенной между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B.

(*Ответ:* 36 см^2.)

24. Основание равнобедренного треугольника 16 см, а боковая сторона 10 см. Найдите отношение длин окружностей, описанной вокруг этого треугольника и вписанной в него.

(*Ответ:* $\frac{25}{8}$.)

25. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки длиной 8 см и 10 см, а центр вписанной в этот треугольник окружности делит эту биссектрису в отношении 3 : 2, считая от вершины. Найдите длины сторон треугольника.

(*Ответ:* 12 см, 15 см, 18 см.)

26. Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен 15 см, а радиус вписанной в него окружности — 6 см. Найдите площадь треугольника.

(*Ответ:* 216 см^2.)

27. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата, построенного на гипотенузе.

(*Ответ:* 1.)

28. В треугольнике ABC проведены две медианы $AA_1 = 15$ см и $CC_1 = 18$ см. Медианы пересекаются под прямым углом. Найдите площадь треугольника ABC.

(*Ответ:* 180 см^2.)

29. Длины сторон треугольника относятся как 12 : 39 : 45. Площадь его равна 96 см^2. Определите радиусы окружностей, вписанной в этот треугольник и описанной вокруг него.

(*Ответ:* 3 см, 16,25 см.)

30. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки 5 см и 3 см, считая от вершины. Найдите длины сторон треугольника.

(*Ответ:* 10 см, 10 см, 12 см.)

31. Стороны треугольника имеют длины 13, 14 и 15. Построена окружность радиуса 5, концентрическая окружности, вписанной в данный треугольник. Найдите длины хорд, отсекаемых ею от сторон треугольника.

(*Ответ:* 6.)

32. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM. Точка O — центр вписанной в этот треугольник окружности делит эту биссектрису на отрезки BO и OM, такие, что $BO : OM = 2 : 1$. $AC = 7$, $BC = 8$. Найдите длину стороны AB.

(*Ответ:* 6.)

33. Периметр треугольника ABC равен 28. BB_1 и AA_1 — биссектрисы треугольника, пересекающиеся в точке O. Известно, что $AB = BB_1$ и $BO = 2OB_1$. Найдите длину стороны AB.

(*Ответ:* 8.)

34. На стороне AB треугольника ABC взята точка P так, что $BP = \frac{1}{4}AB$, $\angle ACP = 60°$, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка CP.

(*Ответ:* 2.)

35. Одна из сторон треугольника в 3 раза короче другой. Найдите величину угла между ними, если отношение длины биссектрисы этого угла к длине большей стороны равно $\frac{\sqrt{2}}{4}$. (*Ответ:* 90°.)

36. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отложены отрезки $AM = 3$, $AN = 7$, $BN = 3$. Найдите площадь треугольника CMN, если $CM = 6$.

(*Ответ:* $\frac{3\sqrt{39}}{2}$.)

37. Стороны AB и BC треугольника ABC пересечены двумя прямыми, параллельными стороне AC. Получившиеся при этом фигуры равновелики. Найдите длины отрезков, образовавшихся на стороне AB, если $AB = 3$.
(*Ответ:* $\sqrt{3}$; $\sqrt{6}-\sqrt{3}$; $3-\sqrt{6}$.)

38. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Угол BOC вдвое больше угла BAC. $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 8$. Найдите длину AB.

(*Ответ:* 2 или 6.)

39. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CK. Площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPK равна 2, $PK = 2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

(*Ответ:* 4,5.)

40. В треугольнике ABC $AB = BC = 6$ см. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке P так, что $BP : PC = 2 : 1$. Найдите длину высоты, проведенной к основанию треугольника ABC.

(*Ответ:* $\sqrt{30}$ см.)

41. В прямоугольном треугольнике ABC (AB — гипотенуза) медиана CM равна 12 см, а расстояние от середины катета AC до гипотенузы равно 3 см. Найдите площадь треугольника ABC.

(*Ответ:* 72 см^2.)

42. BP — медиана треугольника ABC. Известно, что $BC : BP : BA = 4 : 3 : 6$, $CA = 2\sqrt{17}$ см. Найдите периметр треугольника ABC.

(*Ответ:* $10+2\sqrt{17}$ см.)

43. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен $\sqrt{2}-1$. Найдите длину высоты, проведенной к основанию.

(*Ответ:* 1.)

44. Катеты прямоугольного треугольника a и $2a$. На большем из них как на диаметре построена окружность. На какие отрезки окружность делит гипотенузу?

(*Ответ:* $\frac{a\sqrt{5}}{5}$; $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$.)

Метод координат

1. На координатной плоскости xOy расположен прямоугольный треугольник ABC. Вершина прямого угла C лежит на положительной полуоси ординат, точка A имеет координаты (2; 0), а абсцисса вершины B равна 8. Найдите ординату точки B, если площадь треугольника равна 34.

(*Ответ:* 10 или 32,5.)

2. Даны точки A (–5; 4), B (3; 2), C (–2; 7). Докажите, что треугольник ABC прямоугольный, и запишите уравнение окружности, описанной вокруг этого треугольника.

(*Ответ:* $(x+1)^2+(y-3)^2=17$.)

3. Точки A и B — точки пересечения прямой $y=2x+1$ и окружности $(x+1)^2+(y-2)^2=5$. Найдите координаты точки C, принадлежащей окружности, если угол ABC прямой и абсцисса точки A меньше абсциссы точки B.

$\left(\textit{Ответ: } \left(-\frac{7}{5}; \frac{21}{5}\right).\right)$

4. В треугольнике ABC $CA=CB$, CM — медиана и A (–3; 2), C (1; 6). Напишите уравнение окружности, описанной вокруг треугольника ACM.

(*Ответ:* $(x+1)^2+(y-4)^2=8$.)

5. Точка P лежит на прямой $2x-y+5=0$ и равноудалена от центров окружностей $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ и $(x+2)^2+(y-3)^2=11$. Найдите координаты точки P.

(*Ответ:* (–3; –1).)

Четырехугольники

1. Рассматриваются всевозможные прямоугольники с периметром 12 см. Каковы размеры того из них, у которого наибольшая площадь?

(*Ответ:* квадрат со стороной 3 см.)

2. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADC=100°$, $\angle BAC=60°$, $\angle ACB=40°$. Найдите угол BDC.

(*Ответ:* 60°.)

3. Можно ли вписать окружность в равнобокую трапецию с основаниями 2 см и 8 см и высотой 4 см?

(*Ответ:* да.)

4. Диагонали равнобедренной трапеции пересекаются под углом $60°$. Площадь трапеции равна $9\sqrt{3}$. Найдите длину высоты трапеции.

(*Ответ:* 3 или $3\sqrt{3}$.)

5. Боковые стороны трапеции лежат на взаимно перпендикулярных прямых. Основания трапеции 4 и 10. Найдите сумму квадратов диагоналей трапеции.

(*Ответ:* 116.)

6. В равнобедренной трапеции одно из оснований вдвое больше другого. Диагональ делит острый угол при основании пополам. Найдите периметр трапеции, если ее площадь равна $27\sqrt{3}$ см^2.

(*Ответ:* 30 см.)

7. Длины оснований трапеции $2\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$. Длины боковых сторон равны $2\sqrt{3}$. Найдите расстояние от середины одной боковой стороны до прямой, на которой лежит другая боковая сторона.

(*Ответ:* 4,5.)

8. В трапеции $ABCD$ основания AB и CD. $AB = 30$ и $CD = 24$, $AD = 3$, $\angle BAD = 60°$. Диагонали пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника BCM.

(*Ответ:* $10\sqrt{3}$.)

9. Вокруг окружности радиуса 5 см описан параллелограмм с острым углом $45°$. Найдите площадь параллелограмма.

(*Ответ:* $100\sqrt{2}$ см^2.)

10. У параллелограмма, описанного вокруг окружности радиуса 7, одна из диагоналей равна 20. Найдите радианную меру большего угла параллелограмма.

$\left(\textit{Ответ:}\ \arccos\left(-\frac{1}{50}\right).\right)$

11. В квадрате $ABCD$ взята точка M, такая, что углы MAD и MDA составляют по $15°$. Найдите величины углов треугольника MBC.

(*Ответ:* все углы равны $60°$.)

12. Найдите площадь параллелограмма, высота которого 4 см, а длины диагоналей 5 см и $2\sqrt{13}$ см.

(*Ответ:* 36 см^2.)

13. Четырехугольник $ABCD$ выпуклый, в нем угол CDA прямой, $DC = 2$, $DA = 3$, $AB = 3$, $BC = 1$. Найдите тангенс угла BDA.

(*Ответ:* $4-\sqrt{3}$.)

14. Определите величину острого угла ромба в радианах, если площадь ромба равна S, а площадь вписанного в него круга равна Q.

(*Ответ:* $\arcsin \frac{4Q}{\pi S}$.)

15. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, диаметром которой является AB. Угол между прямыми AD и BC равен α. Найдите отношение CD к AB.

(*Ответ:* $\cos \alpha$.)

Окружность и круг

1. Точка O делит хорду некоторой окружности в отношении $1 : 4$. Найдите длину самой короткой хорды, проходящей через точку O, если длина данной хорды 10 см.

(*Ответ:* 8 см.)

2. Площадь кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями, равна S. Больший радиус равен длине меньшей окружности. Выразите через S радиус меньшей окружности.

$\left(\textit{Ответ: } \sqrt{\frac{S}{\pi \cdot (4\pi^2 - 1)}}.\right)$

3. Из точки A к кругу проведена касательная AB и секущая ACD. Определите площадь треугольника CDB, если площадь треугольника ABC равна 20, а $AC : CB = 2 : 3$.

(*Ответ:* 45.)

4. В круге с диаметром AB проведена хорда CD. AB и CD пересекаются в точке M так, что $CM = 3$, $MD = 4$. Известно, что радиус окружности равен 4. Найдите величину угла между прямыми AB и CD.

(*Ответ:* $\arccos \frac{1}{4}$.)

5. Две окружности, радиусы которых R и $3R$, касаются друг друга внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная. Определите площадь фигуры, ограниченной касательной и двумя окружностями.

(*Ответ:* $\frac{R^2}{6} \cdot (24\sqrt{3} - 11\pi)$.)

6. Дуга AB окружности с центром в точке O радиуса R содержит α градусов. Найдите длину хорды AB.

(*Ответ:* $2R \sin \frac{\alpha}{2}$.)

7. Радиус круга равен 13 см. В нем проведены две хорды: $AB = 15{,}6$ см и $BC = 10$ см. Найдите длину хорды AC.

(*Ответ:* 22,4 см или 6,4 см.)

8. Треугольник ABC со стороной $AB = 4$ и углом A, равным $60°$, вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$. Найдите длину средней линии этого треугольника, параллельной AC, и расстояние между точками, в которых продолжение средней линии пересекает окружность.

(*Ответ:* $\sqrt{6}+1$; $2\sqrt{10}$.)

9. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Точка O — точка пересечения его диагоналей. $AB = CD = 10$, $AD > BC$. Расстояние от точки B до стороны AD равно 6, а площадь треугольника OAD равна 50. Найдите длины сторон AD и BC и радиус окружности.

(*Ответ:* 20; 4; $5\sqrt{5}$.)

10. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его сторону AB в точке M, а сторону BC в точке K. Найдите величину угла BMC, если $KC : BC = 1 : 2$, $BK : AM = 2 : 7$, угол ABC равен $60°$.

$\left(\textit{Ответ: } \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right).\right)$

11. Окружности с центрами O_1 и O_2 имеют общую хорду AB, при этом угол AO_1B равен $60°$. Отношение длины первой окружности к длине второй равно $\sqrt{2}$. Найдите величину угла AO_2B.

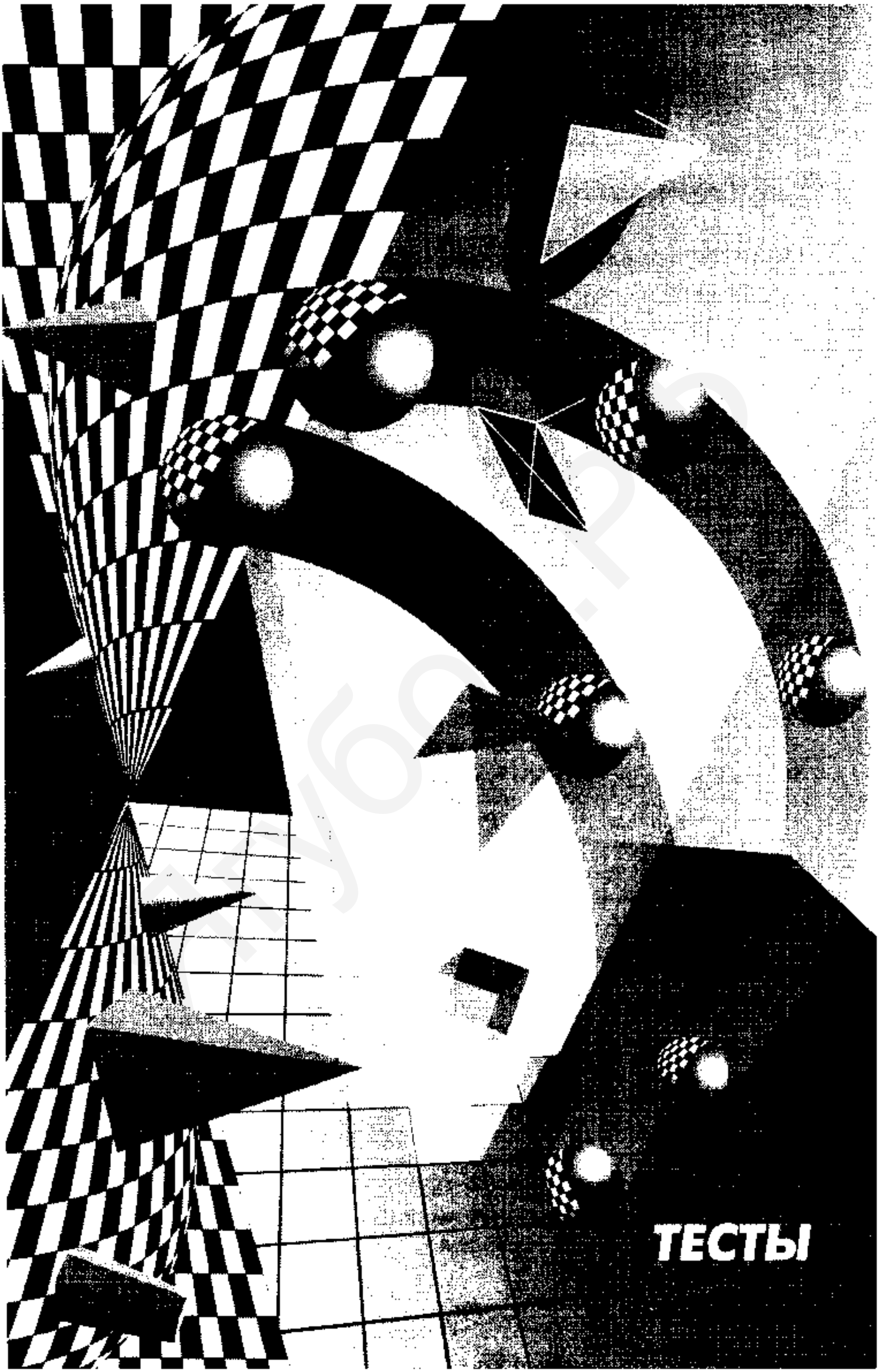
(*Ответ:* $90°$.)

12. Расстояние между центрами окружностей с радиусами 1 см и 4 см равно $5\sqrt{3}$ см. К ним проведена общая внешняя касательная. Найдите радиус окружности, которая касается двух данных окружностей и общей касательной.

(*Ответ:* 1 см или 9 см.)

13. В сектор окружности с углом $60°$ вписан круг, касающийся радиусов и дуги, ограничивающей сектор. Во сколько раз площадь сектора больше площади этого круга?

(*Ответ:* в 1,5 раза.)


ТЕСТЫ

10 КЛАСС

Тест №1 (Повторение планиметрии)

1. В треугольнике ABC со сторонами 5 см, 12 см и 13 см синус меньшего из углов равен:
   а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{5}{13}$; г) $\frac{5}{7}$.
2. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 90°, а основание треугольника равно 12 см. Площадь треугольника равна:
   а) 72 см^2; б) 36 см^2; в) $12\sqrt{2}$ см^2; г) $36\sqrt{3}$ см^2.
3. В треугольнике ABC со сторонами 5, 12 и 15 косинус большего из углов равен:
   а) $\frac{5}{12}$; б) $-\frac{4}{5}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) $-\frac{7}{15}$.
4. В треугольнике ABC, где угол C прямой, $CA = 12$, $CB = 16$, медиана, проведенная к гипотенузе, равна:
   а) 10; б) 7,5; в) 8; г) 6.
5. В треугольнике ABC, где $\angle A = 75°$, $\angle B = 45°$, $AC = \sqrt{6}$, длина стороны AB равна:
   а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 3; г) $1{,}5\sqrt{6}$.
6. В треугольнике ABC, где $AB = 12$ дм, $AC = 15$ дм и $\angle A = 30°$, сторона AC разделена точками K и P на равные отрезки $AK = KP = PC$, тогда площадь треугольника BPC равна:
   а) 1,5 м^2; б) 0,15 м^2; в) 12 дм^2; г) 60 дм^2.
7. В треугольнике ABC $AB = 6$, $AC = 4$ и $\angle A = 60°$, треугольник MNP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{3}{2}$. Большая сторона треугольника MNP равна:
   а) $3\sqrt{7}$; б) $7\sqrt{3}$; в) 12; г) 9.
8. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $BC = 10{,}5$ см, AK — биссектриса. Длина большего из отрезков BK и KC равна:
   а) 6 см; б) 4,5 см; в) 5,25 см; г) 7 см.
9. Две стороны равнобедренного треугольника равны 6 см и 14 см. Площадь этого треугольника равна:
   а) 98 см^2; б) $3\sqrt{187}$ см^2; в) 84 см^2; г) $6\sqrt{187}$ см^2.
10. В треугольнике ABC $BA = 8$ см, $BC = 10$ см. На сторо-

не BA отложен отрезок BM, равный 5 см, а на стороне BC — отрезок BK, равный 4 см. Площадь треугольника MBK составляет от площади треугольника ABC:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 0,4.

11. Если в треугольнике ABC угол A тупой, $\sin A = \frac{12}{13}$, $AB = 13$, $AC = 3$, то длина стороны BC равна:

а) $4\sqrt{14}$; б) $4\sqrt{17}$; в) $4\sqrt{11}$; г) $4\sqrt{13}$.

12. В прямоугольном треугольнике высота и биссектриса, проведенные из вершины прямого угла, образуют угол 15°. Косинус угла, смежного с меньшим углом этого треугольника, равен:

а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. Периметр прямоугольного треугольника равен 72 м, а радиус вписанной в него окружности равен 6 м. Тогда диаметр описанной вокруг этого треугольника окружности равен:

а) 30 м; б) 15 м; в) 24 м; г) 12 м.

14. В ABC вписана окружность с центром O. Луч AO пересекает сторону BC в точке K. $AB = 13$, $AC = 15$, $BK = 6{,}5$. Площадь треугольника ABC равна:

а) 80 см^2; б) 84 см^2; в) 87,5 см^2; г) 90 см^2.

Тест № 2 (Повторение планиметрии)

1. Если в параллелограмме $ABCD$ AM — биссектриса угла A делит сторону BC на отрезки $BM = 2$ см, $MC = 4$ см, то периметр параллелограмма равен:

а) 20 см; б) 16 см; в) нельзя определить; г) 24 см.

2. Периметр ромба равен 40 см, а одна из диагоналей 12 см, тогда радиус вписанной в ромб окружности равен:

а) 9,6 см; б) 4,8 см; в) 4 см; г) 5,6 см.

3. В прямоугольнике $ABCD$ $BC > AB$, диагональ AC равна 13, расстояние от точки B до AC равно 6, тогда тангенс угла CAD равен:

а) 0,6; б) 1; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{3}$.

4. В прямоугольнике $ABCD$ $\angle BCA = 30°$, $AC = 10$, тогда площадь прямоугольника равна:

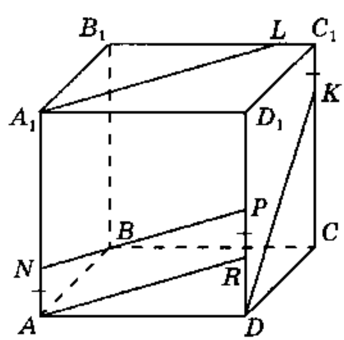
а) $25\sqrt{3}$; б) 25; в) 75; г) 37,5.

5. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина BC. Площадь параллелограмма 12, тогда площадь треугольника AMD:

а) 6; б) 8; в) определить нельзя; г) 4.

6. В окружность радиуса 6,5 вписан параллелограмм, одна из сторон которого равна 5, тогда другая сторона равна:
а) 10; б) 7; в) нельзя определить; г) 12.
7. В параллелограмм вписана окружность радиуса 3. Один из углов параллелограмма равен 30°. Периметр параллелограмма равен:
а) определить нельзя; б) 48; в) 36; г) 40.
8. В равнобокую трапецию вписана окружность. Боковая сторона трапеции равна 8. Средняя линия трапеции равна:
а) 6; б) 12; в) 8; г) 10.
9. В трапеции $ABCD$, где $AB \parallel CD$, O — точка пересечения диагоналей. $AB : CD = 1 : 3$. Площадь треугольника AOD равна 5, тогда площадь треугольника COD равна:
а) 15; б) 20; в) 45; г) 10.
10. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, O — точка пересечения диагоналей. Площадь треугольника AOB равна 10, тогда площадь треугольника COD равна:
а) 10; б) 12; в) определить нельзя; г) 8.
11. Диагонали параллелограмма 8 и 12, а одна из сторон $2\sqrt{19}$. Диагонали параллелограмма пересекаются под углом:
а) 50°; б) 60°; в) все другие ответы неверны; г) 90°.
12. Сумма всех углов правильного многоугольника 720°. Его сторона равна 4. Площадь этого многоугольника равна:
а) $24\sqrt{3}$; б) $24\sqrt{2}$; в) 48; г) $12\sqrt{6}$.
13. Площадь правильного восьмиугольника равна $72\sqrt{2}$ см^2, тогда радиус окружности, в которую он вписан, равен:
а) 8; б) 9; в) 6; г) определить нельзя.
14. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, $BC = 10$, $\angle A = 45°$, $\angle D = 30°$. Высота трапеции равна 10. Площадь трапеции равна:
а) $150+50\sqrt{3}$; б) 120; в) $100+70\sqrt{3}$; г) 150.

Тест № 3 (Главы I и II)



1. Из слов «да», «нет» вычеркните, глядя на рисунок куба, ненужное так, чтобы утверждение оказалось верным (здесь знак $\dot{-}$ обозначает скрещивающиеся прямые, а знак × — пересекающиеся прямые или прямые и плоскости):
а) $A_1L \parallel NP$ да, нет;

б) $NP \parallel AR$ да, нет;
в) $A_1L \underline{\cdot} DD_1$ да, нет;
г) $NP \times BB_1$ да, нет;
д) $A_1L \times D_1C_1$ да, нет;
е) $NP \times AD$ да, нет;
ж) $A_1L \parallel (ABC)$ да, нет;
з) $A_1L \parallel (NAP)$ да, нет;
и) $KD \times (A_1B_1C_1)$ да, нет;
к) $(NAP) \parallel (BB_1C_1)$ да, нет;
л) $KD \perp (AD)$ да, нет;
м) $NA \perp AL$ да, нет.

2. На примере данного куба опровергните утверждения:
а) Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

б) Если две прямые лежат в параллельных плоскостях, то они параллельны.

в) Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны между собой.

г) Если две прямые скрещиваются с третьей прямой, то они скрещиваются между собой.

д) Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости.

Тест № 4 (Глава III)

1. В треугольнике ABC $AB = AC$, $\angle A = 150°$, $AC = 10$. Проведена прямая BD, перпендикулярная плоскости ABC. Расстояние от прямой BD до прямой AC равно:
а) 5; б) $5\sqrt{3}$; в) $5\sqrt{2}$; г) невозможно определить.

2. В треугольнике ABC $AB = AC$, $\angle A = 150°$, $AC = 10$. Через точку B проведен перпендикуляр к плоскости ABC и на нем отложен отрезок $BD = 12$. Расстояние от точки D до прямой AC равно:
а) 15; б) $15\sqrt{3}$; в) 13; г) $13\sqrt{3}$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 8$, $AB = 10$. Катет AC расположен в плоскости α, а точка B удалена от плоскости α на 4. Тангенс угла наклона плоскости треугольника ABC к плоскости α равен:
а) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; б) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 8$, $AB = 10$. Гипотенуза AB расположена в плоскости α, а точка C удалена от плоскости α на 2,4. Синус угла наклона плоскости треугольника ABC к плоскости α равен:
а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 1.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания 6, а боковое ребро 8. Косинус угла наклона диагонали C_1B грани BB_1C_1C к плоскости основания равен:
а) 0,6; б) 0,8; в) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{3}{4}$.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания 6, а боковое ребро 8. Синус угла наклона диагонали C_1B грани BB_1C_1C к плоскости боковой грани AA_1B_1B равен:
а) $\frac{6\sqrt{3}}{17}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{10}$; в) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; г) 1,7.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $BC = 4$ см. Точка M находится вне плоскости треугольника ABC и удалена от нее на расстояние 3 см. При этом она равноудалена от всех вершин треугольника ABC. Точка M удалена от каждой из вершин на:
а) 4 см; б) 6,5 см; в) 5 см; г) 2 см.

8. Площадь треугольника ABC равна 84 см^2, а его периметр равен 42 см. Точка M находится вне плоскости треугольника и удалена от этой плоскости на расстояние 3 см. При этом она равноудалена от всех сторон треугольника ABC. Точка M удалена от каждой из сторон на расстояние:
а) 5 см; б) 2 см; в) 4 см; г) 10,4 см.

9. Сторона AC треугольника ABC расположена на плоскости α, а вершина B — вне плоскости α. Плоскость ABC перпендикулярна плоскости α. Если $BC = 10$, $\cos C = 0{,}8$, то точка B удалена от плоскости α на расстояние:
а) 8; б) 6; в) 5; г) 10.

10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре BB_1 взята точка K, такая, что $B_1K : KB = 1 : 2$. В кубе построено сечение плоскостью KAC. Тангенс угла наклона этого сечения к плоскости ABC равен:
а) 2; б) $\sqrt{2}$; в) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; г) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4 расстояние между прямыми C_1C и B_1D равно:

а) 4; б) $2\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{2}$; г) определить невозможно.

12. Равнобокая трапеция $ABCD$, где $BC \parallel AD$, расположена так, что AD лежит в плоскости α, а точка B в плоскости α не лежит. $AB = CD = 5$, $BC = 6$, $AD = 12$. Плоскость трапеции наклонена к плоскости α под углом $30°$. Расстояние от прямой BC до плоскости α равно:

а) 2; б) 3; в) 4; г) определить невозможно.

13. Квадрат $ABCD$ и правильный треугольник PDC не лежат в одной плоскости. Диагональ квадрата равна $8\sqrt{2}$ см. Точка P удалена от прямой AB на расстояние 10 см. Косинус угла между плоскостями квадрата и треугольника равен:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{3}}{16}$; г) 0,8.

14. Ромб $ABCD$ со стороной 4 см и углом $60°$ и правильный треугольник PDC не лежат в одной плоскости. Точка P удалена от прямой AB на расстояние 2 см. Косинус угла между плоскостями ромба и треугольника равен:

а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) 0; г) 0,4.

11 КЛАСС

Тест № 1 (Пространственные фигуры. Глава IV)

1. Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 12,5. $AB = 12$, $BC = 16$, $AC = 20$. Расстояние от центра сферы до плоскости ABC равно:
   а) 7,5; б) 10; в) 6; г) 5.
2. Стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. $AB = 41$, $AC = 40$, $BC = 9$. Расстояние от центра сферы до плоскости ABC равно:
   а) 3; б) 2; в) 4; г) 6.
3. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм, в котором $AB = 6$, $AD = 10$, $\angle BAD = 45°$. Параллелепипед пересечен плоскостью ADK, причем точка K находится на ребре CC_1. Если $(\widehat{(ADK)\,(ABC)}) = 45°$, то площадь сечения параллелепипеда плоскостью ADK равна:
   а) $60\sqrt{2}$; б) 60; в) нельзя определить; г) $60\sqrt{3}$.
4. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Если $CA = CB = CC_1 = 2\sqrt{2}$, то площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины ребер C_1A_1, C_1B_1, B_1B, равна:
   а) $2\sqrt{3}$ см²; б) $3\sqrt{3}$ см²; в) $1{,}5\sqrt{3}$ см²; г) определить невозможно.
5. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны по 2 см. Углы A_1AB и A_1AC — острые и равны между собой. Площадь грани BB_1C_1C равна:
   а) 4 см²; б) $2\sqrt{2}$ см²; в) $2\sqrt{3}$ см²; г) определить невозможно.
6. В прямом круговом цилиндре высотой 5 см проведен отрезок MN длиной 13 см, концы которого лежат на окружностях верхнего и нижнего оснований. Если радиус основания 10 см, то расстояние от оси цилиндра до отрезка MN равно:
   а) $6\sqrt{3}$ см; б) 4,5 см; в) 8 см; г) 10 см.
7. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ двугранный угол при боковом ребре AA_1 равен 120°, расстояния от ребра A_1A до ребер B_1B и C_1C равны соответственно 4 см и 6 см. Тогда если $A_1A = \sqrt{19}$ см, то площадь грани BB_1C_1C равна:
   а) $19\sqrt{3}$ см²; б) $4\sqrt{19}$ см²; в) 38 см²; г) $2\sqrt{3}$ см².

8. Если диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с основанием угол 45°, с одной из боковых граней угол 30°, то с другой боковой гранью эта диагональ образует угол:

а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) arctg 2.

9. Если в правильной треугольной пирамиде тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания равен a, то тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания равен:

а) a; б) $\frac{1}{2}a$; в) $\frac{2}{3}a$; г) $2a$.

10. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны по $5\sqrt{5}$ см, значит, высота пирамиды равна:

а) 5 см; б) 10 см; в) $10\sqrt{2}$ см; г) $7\sqrt{5}$ см.

11. В основании пирамиды лежит параллелограмм, диагонали которого 6 см и 8 см. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Площадь каждой боковой грани равна:

а) 12 см²; б) 16 см²; в) 20 см²; г) 8 см².

12. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, в котором биссектриса делит катет на отрезки 3 и 5. Боковая грань, содержащая гипотенузу основания, — правильный треугольник, плоскость которого перпендикулярна к плоскости основания. Площадь сечения, проходящего через медиану к гипотенузе основания и вершину пирамиды, равна:

а) 25; б) $25\sqrt{3}$; в) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{25}{2}$.

13. Осевое сечение конуса — треугольник, две стороны которого равны 8 см и 20 см. Угол наклона образующей к плоскости основания равен:

а) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{6}$; б) arcsin 0,4; в) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$; г) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

14. В конус с высотой PO вписали правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$ (основание пирамиды вписано в основание конуса). Оказалось, что все ребра пирамиды равны. Если радиус основания конуса равен R, то расстояние от центра основания конуса до боковой грани пирамиды равно:

а) $R\sqrt{3}$; б) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{R}{2}$; г) $R\sqrt{2}$.

15. В основании пирамиды $PABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $AC = 15$, $BC = 14$. Проекцией вершины P на плоскость ABC является точка O — точка высоты, проведенной к стороне BC. Ребро PA наклонено к основанию под углом 45°, а боковая грань PBC под углом 75°. Площадь боковой грани PBC равна:

а) $14\sqrt{3}$; б) $56\sqrt{2}$; в) 28; г) $28\sqrt{6}$.

Тест № 2 (Объемы тел)

1. В прямоугольном параллелепипеде длины трех диагоналей граней, выходящих из одной вершины параллелепипеда, равны соответственно 5, $\sqrt{34}$ и $\sqrt{41}$. Объем параллелепипеда равен:

   а) 60; б) $10\sqrt{34}$; в) $10\sqrt{41}$; г) 120.

2. В основании наклонного параллелепипеда лежит параллелограмм, диагонали которого 8 и 10, а угол между ними 30°. Боковое ребро пирамиды равно 10 и наклонено к основанию под углом 60°. Объем параллелепипеда равен:

   а) 199; б) $75\sqrt{3}$; в) $100\sqrt{3}$; г) 150.

3. Все ребра наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a. Боковая грань AA_1C_1C — ромб с углом 60° при вершине A. Плоскость этой грани перпендикулярна к плоскости основания. Объем призмы равен:

   а) $\frac{3}{4}a^3$; б) $\frac{3}{8}a^3$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$; г) $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

4. Объем правильной треугольной призмы равен $2\sqrt{6}$ дм³. Диагональ боковой грани наклонена к плоскости другой грани под углом 30°. Сторона основания этой призмы равна:

   а) 2; б) 4; в) 1,5; г) $2\sqrt{2}$.

5. Радиус основания цилиндра равен 3 см. Диагональ осевого сечения наклонена к основанию под углом α, синус которого 0,8. Объем этого цилиндра равен:

   а) 288π см³; б) 216π см³; в) 72π см³; г) 100π см³.

6. Шар с центром O касается плоскости α в точке M. На плоскости проведена прямая a, которая удалена от точки M на 12 см, а от точки O на 13 см. Объем шара равен:

   а) $\frac{520\pi}{3}$ см³; б) $\frac{169\pi}{9}$ см³; в) 200π см³; г) $\frac{500\pi}{3}$ см³.

7. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник, площадь которого $4\sqrt{3}$ дм². Объем этого конуса равен:

   а) $\frac{8\pi}{3}$ дм³; б) $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ дм³; в) $\frac{10\pi\sqrt{3}}{3}$ дм³; г) $12\pi\sqrt{3}$ дм³.

8. Прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетом 6 вращают вокруг большего катета. Объем полученного тела вращения равен:

а) 96π; б) $76{,}8\pi$; в) 120π; г) 144π.

9. Прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетом 6 вращают вокруг гипотенузы. Объем полученного тела вращения равен:

а) 96π; б) $76{,}8\pi$; в) 120π; г) 144π.

10. В основании пирамиды — трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $AB = 13$, $AD = 14$, $BD = 15$. Все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом $\operatorname{arctg}\frac{16}{13}$. Объем пирамиды равен:

а) 130; б) 150; в) 360; г) 160.

11. В основании пирамиды — трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $BC = 8$, $AD = 18$. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом $45°$. Объем такой пирамиды равен:

а) 450; б) 390; в) 288; г) 312.

12. В основании пирамиды $PABCD$ — квадрат $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом $45°$. Диагональ основания равна $2\sqrt{2}$ дм. Объем такой пирамиды равен:

а) 3 дм^3; б) $\frac{8}{3}$ дм^3; в) $\frac{7}{3}$ дм^3; г) $2\sqrt{2}$ дм^3.

13. В основании пирамиды $PABCD$ — ромб $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом $45°$, угол ABC равен $120°$. Высота пирамиды равна h. Объем пирамиды равен:

а) $\frac{1}{3}h^3$; б) $\frac{1}{3}h^3$; в) $2h^3\frac{\sqrt{3}}{9}$; г) $\frac{2}{9}h^3$.

14. Все грани пирамиды наклонены к основанию под углом $60°$. Площадь основания равна 20 дм^2. Радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен 4 дм. Объем пирамиды равен:

а) 80 дм^3; б) 120 дм^3; в) 40π дм^3; г) 90π дм^3.

15. Все грани пирамиды наклонены к основанию под углом $60°$. Площадь основания равна 20 дм^2. Площадь полной поверхности равна:

а) 40 дм^2; б) 60 дм^2; в) 80 дм^2; г) 65 дм^2.

Тест № 3 (Площади поверхностей тел. Векторы)

1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, в котором $AB = AC = 10$ и медиана $BM = \sqrt{97}$. Высота призмы равна 5. Площадь полной поверхности призмы равна:

   а) 256; б) 288; в) 394; г) 300.

2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно 10, двугранный угол при боковом ребре AA_1 равен 120°. Ребро AA_1 удалено от ребер BB_1 и CC_1 на расстояния, отношение которых равно $\frac{2}{3}$, а расстояние от BB_1 до CC_1 равно $3\sqrt{19}$. Площадь боковой поверхности этой призмы равна:

   а) $150+30\sqrt{19}$; б) $45\sqrt{19}$; в) $100+10\sqrt{19}$;

   г) $19\sqrt{19}+75$.

3. В цилиндр вписана правильная треугольная призма со стороной основания a и высотой $a\sqrt{3}$. Площадь полной поверхности цилиндра равна:

   а) $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$; б) $3\pi a^2$; в) $\frac{8}{3}\pi a^2$; г) $\frac{4}{3}\pi a^2$.

4. В конус вписана правильная треугольная пирамида со стороной основания a и высотой $a\sqrt{3}$. Площадь полной поверхности конуса равна:

   а) $\frac{1}{3}\pi a^2(1+\sqrt{10})$; б) $\pi a^2(\sqrt{3}+1)$; в) $\pi a^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

   г) $\pi a^2(\sqrt{6}+\sqrt{10})$.

5. В основании пирамиды $PABC$ лежит треугольник ABC, в котором $CA = 10$, $CB = 24$, $AB = 26$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, грань PAC наклонена к нему под углом 45°. Площадь полной поверхности этой пирамиды равна:

   а) $120(6+\sqrt{3})$; б) $120(6+\sqrt{2})$; в) $120(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

   г) $120(8+\sqrt{2})$.

6. В основании пирамиды $PABC$ лежит треугольник ABC, в котором $CA = 10$, $CB = 24$, $AB = 26$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, грань PAC наклонена к нему под углом 45°. Площадь поверхности сферы, описанной вокруг пирамиды, равна:

   а) 1252π; б) $13\,854\pi$, в) 1502π; г) 1604π.

7. В основании пирамиды — ромб с диагоналями 12 см и 16 см. Все боковые грани наклонены к плоскости осно-

вания под углом 60°. Площадь поверхности шара, вписанного в эту пирамиду, равна:

а) $30{,}84\pi$; б) $30{,}72\pi$; в) $20\sqrt{3}\pi$; г) $24\sqrt{34}$.

8. Известны координаты точек: $A\ (-1;\ 2;\ 1)$, $B\ (3;\ -1;\ 1)$, $P\ (-5;\ -2;\ 5)$, $Q\ (1;\ -2;\ -3)$. $\vec{a} = 2\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{PQ}$. Сумма координат вектора $\vec{a}$ равна:

а) 0; б) −2; в) 2; г) 3.

9. Известны координаты точек: $A\ (-1;\ 2;\ 1)$, $B\ (3;\ -1;\ 1)$, $P\ (-5;\ -2;\ 5)$, $Q\ (1;\ -2;\ -3)$. Косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{PQ}$ равен:

а) −0,48; б) 0,24; в) 0,48; г) 0.

10. Векторы $\vec{a}\ (4;\ m;\ m+5)$ и $\vec{b}\ (m-9;\ 9;\ 2m)$ коллинеарны при m, равном:

а) 12; б) −7,5; в) −3; г) 9,4.

11. Векторы $\vec{a}\ (4;\ m+2;\ -2)$ и $\vec{b}\ (m-6;\ 2;\ m)$ перпендикулярны при m, равном:

а) −2,4; б) 2; в) −7,5; г) 5.

12. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 120°$. Скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$ равно:

а) 12; б) −12; в) 18; г) −18.

13. Плоскости $2x - 3y + 5z = 10$ и $-5x + 7{,}5y - 12{,}5z = -25$:

а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны; г) пересекаются под углом 60°.

14. Плоскости $2x - 3y + 5z = 10$ и $11x + 4y - 2z = 6$:

а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны; г) пересекаются под углом 60°.

Тест № 4 (Повторение всего курса геометрии. Планиметрия)

1. Две вершины квадрата лежат на окружности радиуса R, а две другие — на касательной к этой окружности. Длина диагонали квадрата равна:

а) $1{,}6\sqrt{2}R$; б) $\frac{4R\sqrt{2}}{5}$; в) $\frac{8}{5}R^2\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{2}R$.

2. Две вершины квадрата лежат на одной окружности радиуса 5, а две другие вершины — на другой окружности радиуса $\sqrt{13}$, имеющей с первой окружностью общий центр. Площадь квадрата равна:

а) 36; б) 2; в) 9 или 0,5; г) 36 или 2.

3. Основания трапеции 4 и 8. Длина отрезка, проходяще-

го через точку пересечения ее диагоналей параллельно основаниям трапеции, концы которого лежат на боковых сторонах, равна:

а) 6; б) $\frac{16}{3}$; в) 5; г) 7,5.

4. Вокруг окружности радиуса $2\sqrt{2}$ описана равнобедренная трапеция, основания которой относятся как 2 : 1. Длина диагонали этой трапеции равна:
а) 7; б) 9; в) $\sqrt{78}$; г) $\sqrt{38}$.

5. Если стороны треугольника имеют длины $6\sqrt{5}$; $8\sqrt{5}$; $10\sqrt{5}$, то медиана и биссектриса, проведенные к средней стороне, имеют длины:
а) $2\sqrt{65}$ и 15; б) $2\sqrt{13}$ и $3\sqrt{5}$; в) $2\sqrt{85}$ и 15; г) $2\sqrt{65}$ и 14.

6. В прямоугольном треугольнике медиана и биссектриса, проведенные к большему катету, равны соответственно $3\sqrt{61}$ и $5\sqrt{13}$. Тогда длина большего катета равна:
а) 15; б) 36; в) 39; г) $12\sqrt{3}$.

7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке O. Отрезок AB равен 12. Отношение отрезков AO к OA_1 равно 4 : 3, BO к OB_1 равно 3 : 2. Площадь треугольника ABC равна:
а) $35\sqrt{23}$; б) $23\sqrt{35}$; в) 156; г) 221.

8. В треугольнике ABC: $BC = 17$, $AC = 10$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$. Длина стороны AB равна:
а) 21; б) 12; в) 9; г) 10.

9. На основании равнобедренного треугольника, как на диаметре, построена окружность, которая делит боковые стороны в отношении 1 : 3, считая от вершины треугольника. Радиус окружности равен 3, тогда площадь треугольника равна:
а) $9\sqrt{7}$; б) $6\sqrt{15}$; в) $3\sqrt{15}$; г) $18\sqrt{7}$.

10. Отношение сторон параллелограмма равно 2 : 3, его диагонали пересекаются под углом 60°. Косинус тупого угла параллелограмма равен:
а) $\frac{\sqrt{69}}{12}$; б) $-\frac{\sqrt{69}}{12}$; в) $\frac{\sqrt{45}}{12}$; г) $-\frac{\sqrt{45}}{12}$.

11. Рассматриваются всевозможные равнобедренные трапеции, боковая сторона которых равна 3, а одно из оснований — 7. Другое основание трапеции, имеющей наибольшую площадь, равно:
а) 9; б) 10; в) 12; г) 15.

12. Уравнение окружности, проходящей через точки $A\,(5;-3)$ и $B\,(-2;-4)$, и центр которой лежит на пря-

мой, проходящей через точки C (–2; 1) и P (0; –3), имеет вид:

а) $(x-2)^2+(y+7)^2=25$; б) $(x+2)^2+(y-1)^2=4$;
в) $(x+7)^2+(y-2)^2=25$; г) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

13. Вершины треугольника ABC заданы своими координатами: $A(-2;\ 3)$, $B(4;\ -5)$, $C(6;\ 3)$. Точки M и P – середины сторон AB и BC соответственно. На прямой AC взята точка K, такая, что угол KMP равен 45°. $KA > KC$. Координаты точки K:

а) (3; 5); б) (5; 3); в) (4; 3); г) (3; 4).

14. Сторона треугольника равна 12, а углы, к ней прилежащие, равны 11°54′ и 18°06′. Тогда длина окружности, описанной вокруг этого треугольника, равна:

а) 12π; б) 24π; в) 144π; г) $12\pi^2$.

15. В правильный шестиугольник вписан круг площадью S. Тогда площадь шестиугольника равна:

а) $\dfrac{2\sqrt{3}S}{\pi}$; б) $\dfrac{3\sqrt{2}S}{\pi}$; в) $\dfrac{3\sqrt{2S}}{\pi}$; г) $\dfrac{6\pi}{\sqrt{S}}$.

Тест № 5 (Повторение всего курса геометрии. Стереометрия)

1. В пирамиду $PABC$ вписана пирамида $PADEF$ так, что ее основание – ромб $ADEF$ вписан в треугольник ABC. Точки D, E, F лежат на сторонах AB, BC и AC соответственно. Известно, что $BE : EC = 3 : 2$, $AE = 24$, $DF = 18$. Объем пирамиды $PADEF$ составляет от объема пирамиды $PABC$ такую часть:

а) $\dfrac{12}{25}$; б) $\dfrac{7}{24}$; в) 0,8; г) 0,23.

2. Вокруг прямоугольного параллелепипеда описана сфера диаметра $6\sqrt{3}$ см. Известно, что в этот параллелепипед можно вписать сферу. Тогда ее радиус равен:

а) $2\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) 3; г) $3\sqrt{3}$.

3. Вокруг шара радиуса 4 описана правильная треугольная призма. Радиус шара, описанного вокруг этой призмы, равен:

а) $4\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{5}$; в) $2\sqrt{15}$; г) $4{,}5\sqrt{5}$.

4. В основании пирамиды $PABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого 6 см и 8 см пересекаются под прямым углом. Высота пирамиды 10 см. Объем пирамиды $PA_1B_1C_1D_1$, где точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA, равен:

а) 30 см³; б) 36 см³; в) 24 см³; г) 40 см³.

5. В треугольной пирамиде две боковые грани равны. Если косинусы трех плоских углов при вершине пирамиды равны $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$, то косинус угла между равными боковыми гранями равен:

а) $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{1}{5}$; в) $\frac{6}{5}$; г) $-0{,}3$.

6. В конус вписан шар и вокруг него описан шар. Радиус вписанного шара равен 1, а описанного — 5. Расстояние между центрами шаров равно:

а) $\sqrt{15}$; б) 4; в) $\sqrt{17}$; г) 10.

7. В конус, у которого радиус основания равен 15, а образующая — 25, вписан шар. Длина линии, по которой касаются поверхность шара и поверхность конуса, равна:

а) 16π; б) 20; в) 12π; г) 48.

8. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна 9, а расстояние от нее до противолежащего бокового ребра равно 12. Тогда объем призмы равен:

а) 36; б) 108; в) 63; г) 54.

9. Основанием наклонной призмы служит равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней — ромб, меньшая диагональ которого равна $\frac{2}{3}a$. Эта грань перпендикулярна к плоскости основания. Объем призмы равен:

а) $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$; б) $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$; в) $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$; г) $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

10. В основании прямой призмы, высота которой 25, лежит треугольник со сторонами 5, 12 и 13. Расстояние от центра вписанной в этот треугольник окружности до самой дальней от него вершины призмы равно:

а) 30; б) 27; в) $20\sqrt{3}$; г) $15\sqrt{5}$.

11. Все плоские углы при вершине треугольной пирамиды прямые. Боковые ребра пирамиды равны 10, 16 и $8\sqrt{5}$. Радиус шара, описанного вокруг этой пирамиды, равен:

а) $8\sqrt{2}$; б) 14; в) 13; г) $4\sqrt{2}$.

12. На поверхности шара взяты три точки A, B и C, такие, что хорды AB, BC и CA имеют длины 40, 40 и 48. Расстояние от центра шара до плоскости ABC равно 60. Радиус шара равен:

а) 50; б) 65; в) 60; г) 100.

13. На поверхности шара взяты три точки A, B и C, такие, что хорды AB, BC и CA имеют длины 40, 40 и 48. В плоскости ABC проведены прямые, касательные к

сфере. Радиус шара равен 15. Расстояние от центра шара до плоскости ABC равно:

а) 9; б) 10; в) 12; г) 20.

14. В правильной треугольной призме стороны оснований равны a; боковые ребра равны $2a$. Через одну из сторон основания проводится плоскость под углом $60°$ к плоскости основания. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна:

а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.

15. В правильной треугольной призме все ребра равны a. Через одну из сторон основания проводится плоскость под углом $60°$ к плоскости основания. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна:

а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$; в) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Серия «Академический школьный учебник»

Евстафьева Лариса Петровна

ГЕОМЕТРИЯ

Дидактические материалы
10—11 классы

Пособие для общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *С. В. Дубова*
Художники *А. С. Побезинский, О. Г. Иванова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор и верстальщик *И. М. Капранова*
Корректор *Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01.
Подписано в печать с оригинал-макета 16.01.14. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$.
Бумага газетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 4,06. Тираж 1500 экз. Заказ № м 704 (Пг-Sm).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1
Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru