22 ПЛАНИМЕТРИЯ

Планиметрией называют раздел геометрии, в котором изучают свойства фигур, расположенных в одной плоскости. Основными геометрическими фигурами на плоскости являются *точка* и *прямая*.

22.1. Углы и прямые

Часть прямой линии, ограниченная с одной стороны и неограниченная с другой, называется *полупрямой* или *лучом*. Полупрямые прямой a, на которые она разбивается точкой A, называются дополнительными. Часть прямой линии, ограниченная с двух сторон, называется *отрезком*.

Углом называется фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки (рис. 22.1). Эту точку называют вершиной угла (точка O), а лучи – сторонами угла (лучи OA и OB).

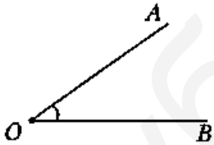

Рис. 22.1

Рис. 22.2

Угол называется *развернутым*, если его стороны являются дополнительными прямыми одной прямой. На рисунке 22.2 угол AOB развернутый.

Основной единицей измерения углов является угол в один градус (обозначается $1°$), равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла.

Развернутый угол равен $180°$.

Наряду с градусной мерой угла употребляется и радианная мера. Один *радиан* равен $\frac{180}{\pi}$ градусов.

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми. На рисунке 22.3 углы AOC и BOC являются смежными. *Сумма смежных углов равна* $180°$.

Прямым углом называется угол, равный 90° (рис. 22.4).

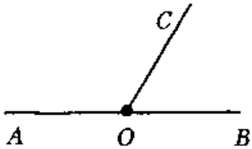

Рис. 22.3

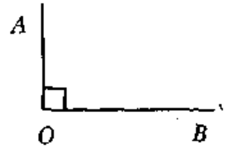

Рис. 22.4

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого. На рисунке 22.5 углы AOC и DOB – вертикальные. *Вертикальные углы равны.*

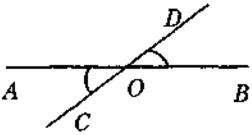

Рис. 22.5

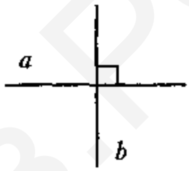

Рис. 22.6

Взаимное расположение прямых на плоскости

Две прямые на плоскости могут пересекаться, быть параллельными, или совпадать.

В результате пересечения двух прямых получаем две пары вертикальных углов: углы AOC и BOD, AOD и BOC на рисунке 22.5.

Прямые, которые пересекаются под прямым углом, называются взаимно перпендикулярными: прямые a и b на рисунке 22.6. Через каждую точку прямой можно провести только одну перпендикулярную к ней прямую.

Прямые, которые не пересекаются, называются параллельными. Через каждую точку плоскости можно провести прямую, параллельную данной прямой, и притом только одну.

Если две параллельные прямые AB и CD пересечь третьей прямой AC (секущей), то при этом получим две пары внутренних односторонних и две пары внутренних накрест лежащих углов.

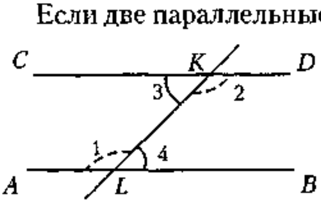

Рис. 22.7

На рисунке 22.7 углы ALK и CKL, а также углы BLK

и DKL внутренние односторонние, а углы ALK и DKL, а также углы BLK и CKL внутренние накрест лежащие.

Накрест лежащие углы равны ($\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ на рисунке 22.7), а сумма внутренних односторонних углов равна 180° ($\angle 1 + \angle 3 = 180°$ и $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ на рисунке 22.7).

Признаки параллельности прямых:

1) если прямая c параллельна прямым a и b, то прямые a и b параллельны;

2) если внутренние накрест лежащие углы прямых a и b с секущей c равны или сумма внутренних односторонних углов равна $180°$, то прямые a и b параллельны.

22.2. Многоугольник

Многоугольником $A_1A_2...A_n$ называется фигура, состоящая из точек $A_1, A_2, ..., A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ называют *вершинами* многоугольника, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ – его *сторонами.* Две вершины называются *смежными*, если они соединяются стороной многоугольника.

Диагональю многоугольника называют отрезок, соединяющий две несмежные вершины.

Многоугольник называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону.

Сумму внутренних углов произвольного выпуклого многоугольника находят по формуле $S_n = 180° \cdot (n-2)$, где n – число сторон (углов) многоугольника.

Периметром многоугольника называют сумму длин всех его сторон.

Многоугольник называется *правильным*, если все его стороны равны и все его углы равны.

22.3. Соотношения между сторонами и углами в треугольнике

Сумма углов любого треугольника равна $180°$.

Любая сторона треугольника меньше суммы длин двух других его сторон.

1. Рассмотрим **прямоугольный треугольник**: a и b – катеты,

c – гипотенуза, α – острый угол (рис. 22.8).

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы треугольника равен сумме квадратов его катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:

1) $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе);

2) $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе);

3) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему).

4) если катет лежит против угла $30°$, то он равен половине гипотенузы.

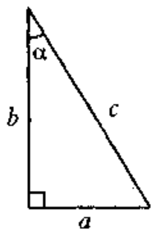

Рис. 22.8

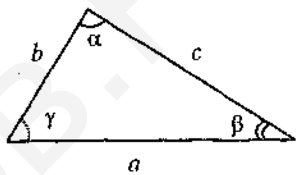

Рис. 22.9

2. Рассмотрим **косоугольный треугольник**: a, b, c – стороны, α, β, γ – противолежащие им углы (рис. 22.9).

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих же сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha .$$

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

22.4. Линии в треугольнике

1. *Биссектрисой* треугольника называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, заключенный между вершиной треугольника и точкой пересечения биссектрисы угла и стороны треугольника.

***Свойства биссектрисы треугольника*:**

1) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник;

2) биссектриса делит сторону треугольника на отрезки пропорциональные двум другим его сторонам ($\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ на рис. 22.10).

2. *Медианой* треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

***Свойства медианы треугольника*:**

1) медиана делит треугольник на два равновеликих (имеющих равные площади) треугольника;

2) медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины;

3) если медиана проведена к гипотенузе, то она равна половине гипотенузы.

3. *Высотой* треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противолежащую сторону.

***Свойства высоты треугольника*:**

1) если высота проведена из вершины равнобедренного треугольника на его основание, то она является так же биссектрисой и медианой этого треугольника;

2) если высота проведена из вершины прямого угла треугольника к гипотенузе, то она является средним геометрическим проекции катетов на гипотенузу: $h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$ (рис. 22.11).

3) для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a, h_b, h_c и радиусом вписанной окружности r выражается формулой $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

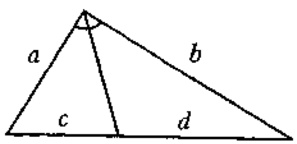

Рис. 22.10

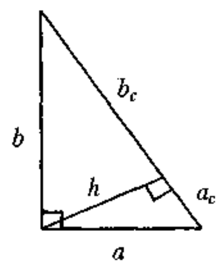

Рис. 22.11

22.5. Формулы для вычисления площади треугольника

Для вычисления площади треугольника можно применять одну из следующих формул:

1) $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, где a – сторона равностороннего треугольника;

2) $S=\frac{1}{2}ah_a$, где a – сторона, h_a – высота, проведенная к стороне a произвольного треугольника;

3) $S=\frac{1}{2}ab$, где a и b – катеты прямоугольного треугольника;

4) $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, где a и b – стороны, α – угол между ними произвольного треугольника;

5) формула Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – стороны, p – полупериметр произвольного треугольника и $p=\frac{a+b+c}{2}$.

22.6. Признаки равенства и подобия треугольников

Два треугольника *равны*, если выполняется одно из следующих условий:

1) две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника;

2) два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и стороне другого треугольника;

3) три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.

Два треугольника *подобны*, если:

1) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между соответственными сторонами, равны;

2) два угла одного треугольника равны двум углам другого;

3) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

Площади подобных треугольников (многоугольников) пропорциональны квадратам их соответственных линий.

22.7. Четырехугольники

1. *Параллелограммом* называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.

Рассмотрим параллелограмм: a, b – смежные стороны, h_a – высота, проведенная к стороне a, α – острый угол, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями (рис. 22.12).

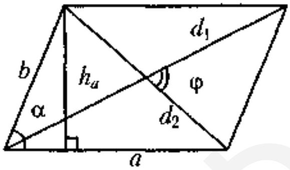

Рис. 22.12

Свойства параллелограмма:

1) противолежащие стороны параллелограмма равны;

2) противолежащие углы параллелограмма равны;

3) диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам;

4) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Площадь параллелограмма можно вычислить по одной из формул: $S = ah_a$; $S = ab\sin\alpha$; $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.

Периметр параллелограмма можно вычислить по формуле

$$P = 2\cdot(a+b).$$

2. *Ромбом* называется параллелограмм, все стороны которого равны.

Рассмотрим ромб: a – сторона, α – острый угол, h – высота, d_1, d_2 – диагонали (рис. 22.13).

Ромбу присущи все свойства параллелограмма и следующие специальные ***свойства***:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

2) диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.

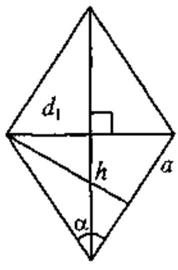

Рис. 22.13

Периметр ромба можно вычислить по формуле $P = 4a$.

Площадь ромба можно вычислить по одной из формул:

$$S = ah\ ;\ S = a^2 \sin\alpha;\ S = \frac{1}{2}d_1 d_2 .$$

3. *Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

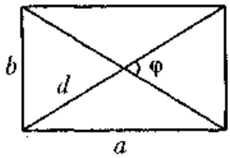

Рис. 22.14

Рассмотрим прямоугольник: a, b – смежные стороны, $d_1 = d_2$ диагонали, φ – угол между диагоналями (рис. 22.14). Прямоугольнику присущи все свойства параллелограмма.

Периметр прямоугольника можно вычислить по формуле

$$P = 2\cdot(a+b) .$$

Площадь прямоугольника можно вычислить по одной из формул:

$$S = ab\ ;\ S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi .$$

4. *Квадратом* называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

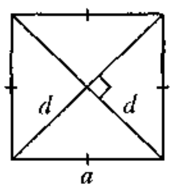

Рис. 22.15

Рассмотрим квадрат: a – сторона, $d_1 = d_2$ – диагонали (рис. 22.15). Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Периметр квадрата можно вычислить по формуле $P = 4a$.
Площадь квадрата можно вычислить по одной из формул:

$$S = a^2\ ;\ S = \frac{1}{2}d^2 .$$

5. *Трапецией* называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются основаниями, а не параллельные стороны – боковыми. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобедренной.

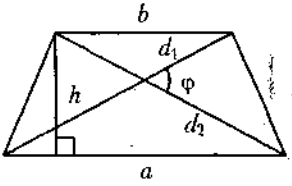

Рис. 22.16

Рассмотрим трапецию: a, b – основания, h – высота, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями (рис. 22.16).

Площадь трапеции можно вычислить по одной из формул:

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h\,,\ S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi\,.$$

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Свойства средней линии трапеции:

1) средняя линия трапеции равна полусумме оснований;

2) средняя линия трапеции параллельна основаниям.

22.8. Окружность и круг

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от некоторой данной точки, называемой центром окружности.

Отрезок, соединяющий центр окружности и любую точку окружности, называется *радиусом* окружности. На рисунке 22.17 отрезки OA, OB и OD – радиусы окружности, причем $R = OA = $ $= OB = OD$.

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности. На рисунке 22.17 отрезки AC и AB – хорды.

Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром окружности. Диаметр состоит из двух радиусов. На рисунке 22.17 хорда AB – диаметр окружности и $AB = 2R$.

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью, включая точки окружности.

Круговым сектором называется часть круга, ограниченная радиусами и дугой, на которую опираются радиусы.

Круговым сегментом называется часть круга, отсекаемая хордой.

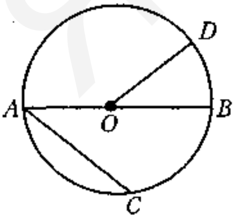

Рис. 22.17

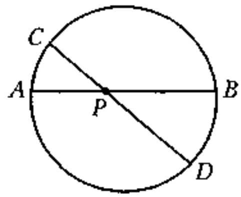

Рис. 22.18

Свойство пересекающихся хорд: если через точку P, лежащую внутри окружности, проведены две хорды AB и CD, то произведения отрезков хорд равны: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ (рис. 22.18).

Свойства касательных:

1) отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны ($AB = AC$ на рисунке 22.19);

2) радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания ($OB \perp AB$ на рисунке 22.19).

Если окружность вписана в угол, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла (на рисунке 22.19 луч AO – биссектриса угла CAB).

Свойство касательной и секущей: если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению секущей и ее внешней части ($AB^2 = AC \cdot AD$ на рисунке 22.20).

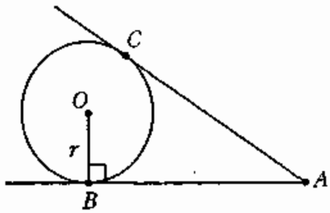

Рис. 22.19

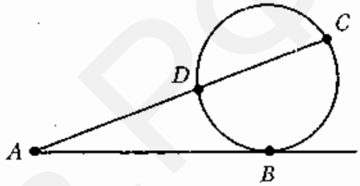

Рис. 22.20

Свойства линий в касающихся и пересекающихся окружностях:

1) линия центров двух пересекающихся окружностей проходит через их точку касания;

2) общая внутренняя касательная двух внешним образом касающихся окружностей перпендикулярна их линии центров;

3) общая касательная двух внутренним образом касающихся окружностей перпендикулярна их линии центров;

4) общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их линии центров и делится точкой их пересечения пополам.

Длины и площади:

$C = 2\pi R$ – ***длина окружности*** радиуса R;

$l = \dfrac{C}{360^\circ} n^\circ = \dfrac{2\pi R}{360^\circ} n^\circ$ – ***длина дуги окружности*** радиуса R с центральным углом n°;

$S = \pi R^2$ – ***площадь круга*** радиуса R;

$S_{сект.} = \dfrac{S_{кр}}{360^\circ} n^\circ = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ} n^\circ$ – ***площадь кругового сектора*** радиуса R с центральным углом n°.

22.9. Вписанные и центральные углы

Угол является *центральным*, если его вершина лежит в центре окружности, а стороны являются радиусами окружности (угол AOB на рис. 22.21). Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.

Угол является *вписанным* в окружность, если его вершина лежит на окружности, а стороны являются непересекающимися хордами этой окружности (угол ACB на рис. 22.22).

Свойства углов, вписанных в окружность:

1) угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла: на рисунке 22.23 $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$;

2) вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 22.24);

3) вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые (рис. 22.25).

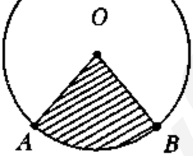

Рис. 22.21

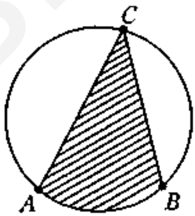

Рис 22.22

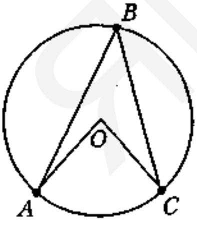

Рис. 22.23

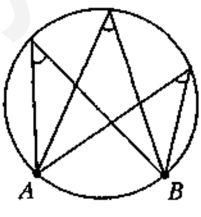

Рис. 22.24

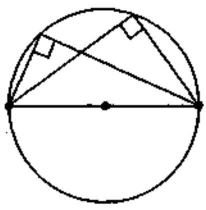

Рис. 22.25

23. 10. Вписанная и описанная окружность

Окружность *вписана* в n-угольник, если она касается всех его сторон (рис. 22.26).

***Свойства вписанной окружности*:**

1) в любой треугольник можно вписать окружность;

2) в четырехугольник $ABCD$ (рис. 22.26) можно вписать окружность, если суммы длин его противолежащих сторон равны:

$$AD + BC = AB + DC .$$

Окружность *описана* около n-угольника, если все его вершины лежат на окружности (рис. 22.27).

***Свойства описанной окружности*:**

1) около любого треугольника можно описать окружность;

2) около четырехугольника $ABCD$ (рис. 22.27) можно описать окружность, если суммы его внутренних противолежащих углов равны: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

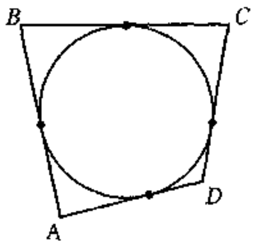

Рис. 22.26

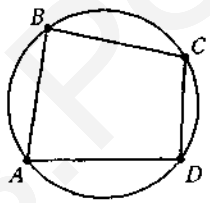

Рис. 22.27

Расположение центров окружностей, вписанных в треугольник:

а) в произвольном треугольнике центр окружности расположен в треугольнике;

б) центром окружности является точка пересечения биссектрис треугольника;

в) в равностороннем треугольнике центром окружности является точка пересечения высот, биссектрис, медиан треугольника;

г) в равнобедренном треугольнике центр окружности лежит на биссектрисе треугольника, проведенной из вершины к его основанию.

Расположение центров окружностей, описанных около треугольников:

а) если треугольник остроугольный, то центр окружности лежит в треугольнике:

– в правильном треугольнике центром окружности является точка пересечения высот, биссектрис, медиан (центры вписанной и описанной окружностей совпадают, точка O на рис. 22.28);

– в равнобедренном треугольнике центр окружности лежит на биссектрисе треугольника, проведенной из вершины к его основанию (точка O на рис. 22.29);

б) если треугольник прямоугольный, то центр окружности лежит на середине гипотенузы (точка O на рис. 22.30);

в) если треугольник тупоугольный, то центр окружности лежит вне треугольника (точка O на рис. 22.31).

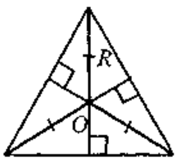

Рис. 22.28

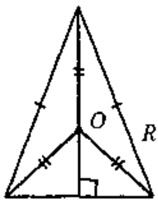

Рис. 22.29

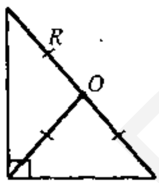

Рис. 22.30

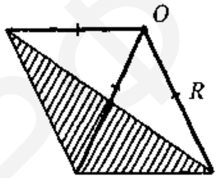

Рис. 22.31

22.11. Формулы для вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей

R – радиус описанной, r – радиус вписанной окружности.

Для ***равностороннего*** треугольника со стороной a:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}},\ r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Для ***произвольного треугольника*** со сторонами a, b, c и площадью S: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

Для ***прямоугольного треугольника*** с катетами a, b и гипотенузой c: $R = \frac{c}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Для ***квадрата*** со стороной a и диагональю d: $R = \frac{d}{2}$, $r = \frac{a}{2}$.

Для ***прямоугольника*** с диагональю d: $R = \frac{d}{2}$.

Для ***ромба*** с высотой h: $r = \frac{h}{2}$.

Для ***трапеции*** с высотой h, при условии, что в трапецию можно вписать окружность: $r = \frac{h}{2}$.

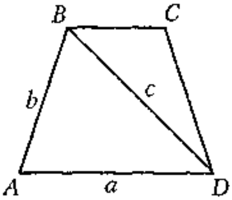

Рис. 22.32

Если около трапеции $ABCD$ (рис. 22.32) можно описать окружность, то: 1) проведя диагональ трапеции и рассмотрев один из полученных треугольников, например, треугольник ABD со сторонами a, b, c и площадью S; 2) по формуле $R = \frac{abc}{4S}$ найдем радиус окружности описанной около треугольника ABD, а значит и около трапеции $ABCD$.

22.12. Шестиугольник

Рассмотрим ***правильный шестиугольник*** со стороной a.

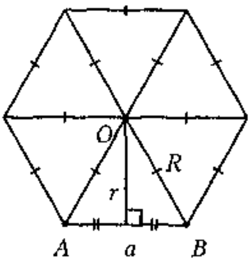

Рис. 22.33

Правильный шестиугольник состоит из шести правильных треугольников (рис. 22.33). Точка O (точка пересечения его больших диагоналей) является центром вписанной и описанной окружностей.

Периметр правильного шестиугольника можно вычислить по формуле $P = 6a$.

Площадь правильного шестиугольника можно вычислить по формуле

$$S = 6S_{\Delta AOB} = 6\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Радиусы вписанной и описанной окружностей можно вычислить по формулам:

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \; R = a.$$

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все варианты правильных ответов (1–3):

1. Вертикальными являются углы (рис. A):

1) 1 и 3;	2) 1 и 7;
3) 5 и 7;	4) 2 и 6;
5) 6 и 8;	6) 3 и 5.

2. Смежными являются углы (рис. A):

1) 1 и 2;	2) 1 и 6;
3) 2 и 3;	4) 7 и 8;
5) 7 и 6;	6) 5 и 8.

3. Если прямые a и b параллельны (рис. A), то:

1) $\angle 1 = \angle 7$;
2) $\angle 6 = \angle 4 = \angle 2$;
3) $\angle 4 + \angle 7 = 180°$;
4) $\angle 8 = \angle 6 = \angle 2$;
5) $\angle 4 + \angle 5 = 180°$;
6) $\angle 3 = \angle 6$.

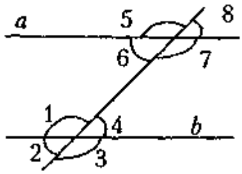

Рис. А

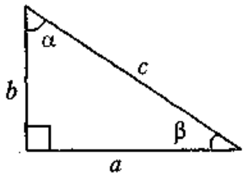

Рис. Б

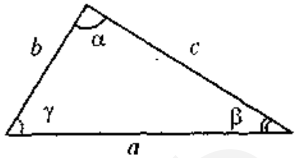

Рис. В

Установите соответствие (4–11):

4. Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике (рис. $Б$):

1) $\frac{a}{b}$;
а) $\operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\frac{b}{a}$;
б) $\sin\beta$;

3) $\frac{a}{c}$;
в) $\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\frac{b}{c}$.
г) $\cos\beta$.

5. Соотношение меду сторонами и углами в произвольном треугольнике (рис. $В$):

1) c^2;
2) b^2;
3) $\cos\gamma$;
4) $\frac{b}{\sin\beta}$.

а) $\frac{c}{\cos\gamma}$;
б) $\frac{a}{\sin\alpha}$;
в) $\frac{c\sin\alpha}{a}$;
г) a^2+b^2;
д) $a^2+b^2-2ab\cos\gamma$;
е) $a^2+c^2-2ac\cos\beta$;
ж) $a^2+c^2-2ac\cos\alpha$;
з) $a^2+b^2-2ab\cos\alpha$.

6. Периметр многоугольника:

МНОГОУГОЛЬНИК	ФОРМУЛА
1) квадрат со стороной a;	а) $a+b+c$;
2) ромб со стороной b;	б) $a+b+2c$;
3) параллелограмм со сторонами a и b;	в) $2(a+b)$;
4) равнобедренная трапеция с основаниями a, b и боковой стороной c;	г) nb 4
5) правильный n-угольник со стороной b.	д) $4b$;
	е) $2a^2$;
	ж) $4a$.

7. Площадь многоугольника:

МНОГОУГОЛЬНИК	ФОРМУЛА
1) правильный треугольник со стороной a;	а) $S=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$;
2) квадрат с диагональю d;	б) $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$;
3) параллелограмм со сторонами a, b и углом α между ними;	в) $S=ab$;
4) ромб с диагоналями d_1 и d_2;	г) $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$;
5) правильный шестиугольник со стороной a;	д) $S=\frac{1}{2}(a+b)h$;
6) трапеция с диагоналями d_1, d_2 и углом φ между ними .	е) $S=\frac{1}{2}d^2$;
	ж) $S=\frac{1}{2}d_1d_2$;
	з) $S=ab\sin\alpha$.

8. Свойства четырехугольника

1) в четырехугольник можно вписать окружность, если;	а) суммы его противолежащих углов равны $180°$;
2) около четырехугольника можно описать окружность, если.	б) сумма его внутренних углов равна $360°$;
	в) его противолежащие стороны попарно раны;

г) суммы длин противолежащих сторон не равны;

д) суммы длин противолежащих сторон равны.

9. Радиус окружности, вписанной в многоугольник:

ФОРМУЛА

1) $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$;

2) $r=\frac{2S}{a+b+c}$;

3) $r=\frac{a+b-c}{2}$;

4) $r=\frac{a}{2}$;

5) $r=\frac{h}{2}$.

МНОГОУГОЛЬНИК

а) равнобедренная трапеция с основаниями a, b и боковой стороной c;

б) правильный многоугольник со стороной a;

в) ромб с высотой h;

г) квадрат со стороной a;

д) треугольник с катетами a, b и гипотенузой c;

е) треугольник со сторонами a, b, c и площадью S;

ж) треугольник со стороной a .

10. Радиус окружности, описанной около многоугольника:

ФОРМУЛА

1) $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$;

2) $R=\frac{abc}{4S}$;

3) $R=\frac{c}{2}$;

4) $R=\frac{d}{2}$.

МНОГОУГОЛЬНИК

а) треугольник со сторонами a, b, c и площадью S;

б) треугольник с катетами a, b и гипотенузой c;

в) прямоугольник с диагональю d;

г) треугольник со стороной a;

д) ромб со стороной a;

е) равнобедренная трапеция с основаниями a, b и боковой стороной c.

11. Окружность:

ФОРМУЛА	ПРИМЕНЕНИЕ
1) $C = 2\pi R$;	а) длина дуги окружности радиуса R с центральным углом $n°$;
2) $l = \frac{\pi R}{180°} n°$;	б) длина окружности радиуса R;
3) $S = \pi R^2$;	в) длина хорды окружности радиуса R;
4) $S = \frac{\pi R^2}{360°} n°$.	г) площадь круга радиуса R;
	д) площадь кругового сектора радиуса R с центральным углом $n°$;
	е) площадь кругового сегмента.

Укажите все правильные варианты ответов:

12. Свойства касательных к окружности:

1) отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны;

2) отрезки касательных, проведенных из разных точек к окружности, равны;

3) радиус окружности перпендикулярен касательной;

4) радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания;

5) если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению секущей и ее внешней части;

6) если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка секущей равен произведению секущей и касательной.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Вариант правильного ответа	1, 3, 5	1, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5	1 – в; 2 – а; 3 – г; 4 – б	1 – д; 2 – е; 3 – в; 4 – б	1 – ж; 2 – д; 3 – в; 4 – б; 5 – г

Номер задания	7	8	9	10	11	12
Вариант правильного ответа	1 – г; 2 – е; 3 – з; 4 – ж; 5 – а; 6 – б	1 – д; 2 – а	1 – ж; 2 – е; 3 – д; 4 – г; 5 – в	1 – г; 2 – а; 3 – б; 4 – в	1 – б; 2 – а; 3 – г; 4 – д	1; 4, 5

Примеры

Пример 1. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной равной 5 см проведена медиана боковой стороны. Найдите основание треугольника, если медиана равна 4 см.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами $AB = CB = 5$ см и медианой $AO = 4$ см (рис. 22.34).

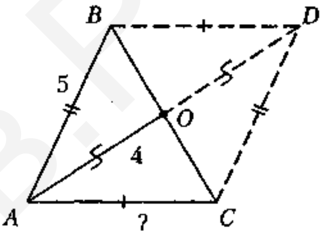

Рис. 22.34

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$. Тогда диагональ параллелограмма $AD = 8$ см. По свойству диагоналей параллелограмма получим: $AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$ или $64 + 25 = 2 \cdot 25 + 2AC^2$, откуда $AC = \sqrt{19{,}5}$ см.

Ответ: $\sqrt{19{,}5}$ см.

Пример 2. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона соответственно равны 5 и 10 см. Найдите биссектрису угла при основании треугольника.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC (рис. 22.35). Согласно условию задачи $AC = 5$ см, $AB = BC = 10$ см. Проведем биссектрису AD угла BAC. Полагая $CD = x$ см, запишем $BD = (10 - x)$ см. По свойству биссектрисы треугольника получим: $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{AB}{DB}$ или $\dfrac{5}{x} = \dfrac{10}{10 - x}$, $10 - x = 2x$, откуда $x = \dfrac{10}{3}$ см.

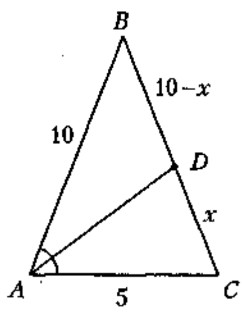

Рис. 22.35

Найдем косинус угла ACB. По теореме косинусов получим:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C,$$

или $100 = 25 + 100 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos\angle C$, откуда $\cos\angle C = \frac{1}{10}$.

Биссектрису AD найдем из треугольника ADC. По теореме косинусов $AD^2 = 25 + \frac{100}{9} - 2 \cdot 5 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{295}{9}$, откуда $AD = \frac{\sqrt{295}}{3}$ см.

Ответ: $\frac{\sqrt{295}}{3}$ см.

Пример 3. Из внешней точки к окружности проведены касательная и секущая. Длина касательной составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Определите длину секущей, если длина касательной равна 6 см.

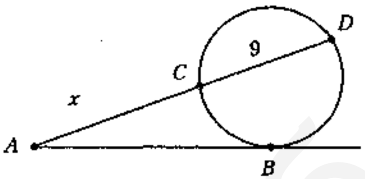

Рис. 22.36

Решение. Отметим вне окружности точку A и проведем из этой точки к окружности секущую AD и касательную AB (рис. 22.36). Определим внутренний отрезок секущей: $CD = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$ см.

Пусть внешний отрезок секущей $AC = x$ см. По свойству касательной и секущей запишем:

$$AB^2 = AD \cdot AC, \text{ или } 36 = (x+9) \cdot x,\ x^2 + 9x - 36 = 0,\ x = 3.$$

Тогда $AD = 3 + 9 = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

Пример 4. Дана точка P, удаленная на 7 см от центра окружности радиуса 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18см. В каком отношении точка P делит хорду?

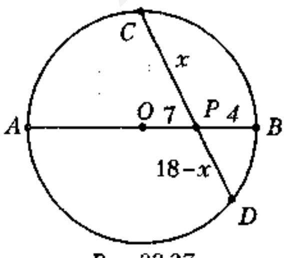

Рис. 22.37

Решение. Рассмотрим окружность (рис. 22.37) радиуса $R = AO = BO = 11$ см. Отметим на диаметре AB точку P так, что $OP = 7$ см, $PB = 4$ см. Через точку P проведем хорду $CD = 18$ см. Тогда, если $CP = x$ см, то $PD = (18 - x)$ см.

По свойству пересекающихся хорд имеем: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ или

$18 \cdot 4 = x(18-x)$, $x^2 - 18x + 72 = 0$, откуда $x_1 = 12$, $x_2 = 6$. Получили отрезки длиной 12 и 6см. Тогда $CP : PD = 2:1$.

Ответ: $2:1$.

Пример 5. В круговой сектор, дуга которого содержит $60°$, вписан круг. Найдите процентное отношение площади этого круга к площади сектора.

Решение. В круговой сектор ABC (рис. 22.38) впишем круг с центром в точке O: $OK = R_{кр.}$, $BD = R_{сект.}$. Поскольку прямая BC является касательной к кругу, то $OK \perp BK$. Согласно условию задачи $\angle ABC = 60°$, тогда $\angle OBK = 30°$, так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

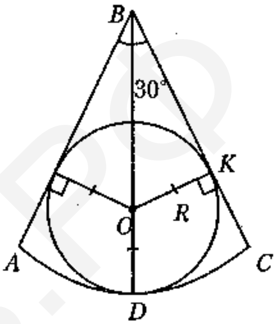

Рис. 22.38

Рассмотрим ΔOBK: $OB = 2OK = 2R_{кр.}$ (по свойству катета, лежащего против угла $30°$). Так как $R_{сект.} = BO + DO$, то $R_{сект.} = 3R_{кр.}$. Найдем площадь круга и площадь сектора:

$$S_{кр.} = \pi R_{кр.}^2;\ S_{сект.} = \frac{\pi R_{сект.}^2}{360°} \cdot 60° = \frac{\pi 9 R_{кр.}^2}{6} = \frac{3\pi R_{кр.}^2}{2}.$$

Составим отношение площади круга к площади сектора:

$$\frac{S_{кр.}}{S_{сект.}} = \frac{\pi R_{кр.}^2 2}{3\pi R_{кр.}^2},\ \frac{S_{кр.}}{S_{сект.}} = \frac{2}{3} \text{ или } \frac{200}{3}\%.$$

Ответ: $66\frac{2}{3}\%$.

Пример 6. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник равен 3см. Найдите площадь треугольника.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Точка O является центром вписанной в треугольник окружности (рис. 22.39). Так как радиусы вписанной в треугольник окружности перпендикулярны сторонам треугольника в точках касания, то

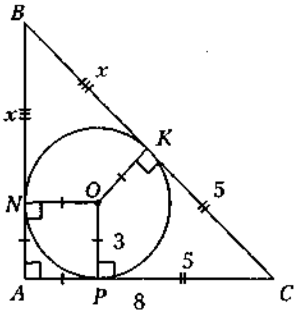

Рис. 22.39

имеем квадрат $ANOP$ со стороной 3 см. Если катет $AC=8$ см, а сторона квадрата $AP=3$ см, то $PC=5$ см.

Пусть отрезок $NB=x$ см. По свойству касательных $CP=CK=5$ см и $BN=BK=x$ см. Тогда по теореме Пифагора $BC^2=AC^2+AB^2$ или $25+10x+x^2=64+9+6x+x^2$, откуда $4x=48$, $x=12$ см.

Найдем катет AB:

$$AB=AN+BN=3+12=15 \text{ (см)}.$$

Найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB,\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 15=60\,(\text{см}^2).$$

Ответ: 60 см^2.

Пример 7. Длины оснований равнобедренной трапеции относятся как 5 : 12, а длина ее высоты равна 17 см. Вычислите площадь круга, описанного около трапеции, если известно, что средняя линия трапеции равна ее высоте.

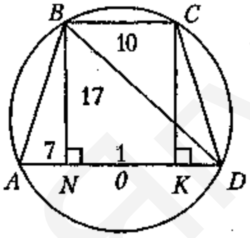

Рис. 22.40

Решение. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ (рис. 22.40) и проведем диагональ трапеции BD. Радиус окружности, описанной около треугольника ABD, найдем по формуле

$$R=\frac{AB\cdot BD\cdot AD}{4\cdot S_{\Delta ABD}}=\frac{AB\cdot BD\cdot AD}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot BN},$$

$$R=\frac{AB\cdot BD}{2\cdot BN}.$$

Зная, что $BC:AD=5:12$ и вводя коэффициент пропорциональности k, получим $BC=5k$, $AD=12k$. Так как длина средней линии трапеции равна высоте трапеции, то $\frac{1}{2}(5k+12k)=17$, откуда $k=2$. Тогда $BC=10$ см, $AD=24$ см.

Поскольку четырехугольник $BCKN$ является прямоугольником, то $NK=10$ см, тогда $AN=KD=\frac{1}{2}(24-10)=7$ (см). Согласно теореме Пифагора запишем:

$$AB=\sqrt{AN^2+BN^2}\ ,\ AB=\sqrt{17^2+7^2}=\sqrt{338}\ (\text{см});$$

$$BD=\sqrt{BN^2+ND^2}\ ,\ BD=\sqrt{17^2+17^2}=17\sqrt{2}\ (\text{см}).$$

Найдем радиус окружности, описанной около треугольника ABD, а, следовательно, и около трапеции $ABCD$:

$$R=\frac{\sqrt{338}\cdot 17\sqrt{2}}{2\cdot 17}=\frac{2\cdot 13}{2}=13\ (\text{см}).$$

Согласно формуле $S=\pi R^2$ найдем площадь круга:

$$S=169\pi\ \text{см}^2.$$

Ответ: 169π см^2.

Пример 8. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 2 см, периметр равен 23 см. Найдите площадь трапеции.

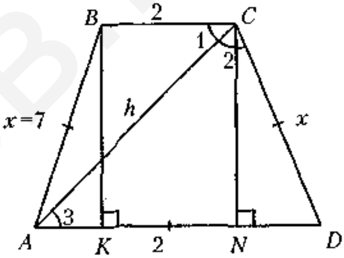

Рис. 22.41

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 22.41) и проведем ее диагональ AC. Углы 1 и 3 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC с секущей AC. Так как диагональ AC является биссектрисой угла BCD, то $\angle 1=\angle 2$. В таком случае треугольник ACD – равнобедренный с боковыми сторонами CD и AD.

Пусть $AB=CD=AD=x$ см. Согласно условию задачи $P_{тр.}=23$ см и $23=2+3x$, откуда $x=7$ см. Так как $KN=2$ см, то $AK=ND=$ $=\frac{1}{2}\cdot(7-2)=\frac{5}{2}$ (см). Рассмотрим ΔABK : по теореме Пифагора $h=\sqrt{49-\frac{25}{4}}=\frac{3\sqrt{19}}{2}$.

Согласно формуле $S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot h$ найдем площадь трапеции:

$$S=\frac{1}{2}\cdot(7+2)\cdot\frac{3\sqrt{19}}{2}=\frac{27\sqrt{19}}{4}\ (\text{см}^2).$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{19}}{4}$ см^2.

Пример 9. В трапеции длины оснований равны 5 и 10, а длины диагоналей равны 13 и 14. Найдите площадь трапеции.

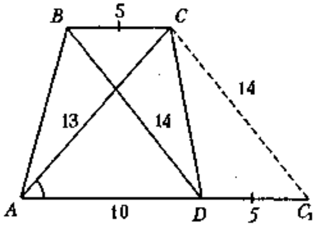

Рис. 22.42

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 22.42). На продолжении стороны AD отложим отрезок DC_1, равный отрезку BC, то есть $DC_1=5$. Имеем параллелограмм $DBCC_1$ ($BC=DC_1$, $BC\parallel DC_1$), значит $BD=CC_1=14$.

Так как $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta CDC_1}=\frac{1}{2}5h_{тр.}$, то $S_{тр.}=S_{ACC_1}$.

Площадь треугольника ACC_1 найдем по формуле Герона:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$.

Получим: $S=\sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6}=\sqrt{4^2\cdot3^2\cdot7^2}=4\cdot3\cdot7=84$.

Ответ: 84.

Пример 10. В большем из двух концентрических кругов проведена хорда длиной 32 см, которая касается меньшего круга. Определите отношение длин меньшей и большей окружностей, если ширина образовавшегося кольца равна 8 см.

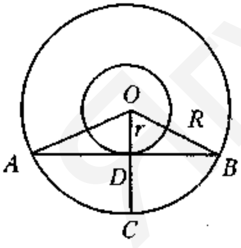

Рис. 22.43

Решение. Рассмотрим два круга с общим центром в точке O (рис. 22.43). Пусть R – радиус большего круга, а r – радиус меньшего круга, AB – хорда, касающаяся меньшего круга. Тогда $OD=r$, $OA=OB=OC=R$ и $OC=OD+DC$. Поскольку ширина образовавшегося кольца равна 8 см, то $R-r=8$ см и $OD=R-8$.

Так как хорда AB касается меньшего круга, то $AB\perp OD$, тогда OD высота и медиана равнобедренного треугольника AOB и $AD=DB=16$ см.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ODB. По теореме Пифагора $OB^2=OD^2+DB^2$ или $R^2=(R-8)^2+16^2$, $R^2=R^2-16R+64+16^2$, $16R=64+16^2$, откуда $R=20$ см и $r=20-8=12$ (см).

Найдем отношение длин меньшей и большей окружностей:

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{2\pi\cdot r}{2\pi\cdot R}=\frac{r}{R}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

Ответ: $3:5$.

Пример 11. Круг разделен на два сегмента хордой, равной стороне правильного вписанного треугольника. Найдите отношение площадей этих сегментов.

Решение. Рассмотрим круг радиуса R и правильный треугольник ABC, вписанный в круг (рис. 22.44). Так как вписанный в окружность угол ABC равен $60°$, то соответствующий ему центральный угол AOC равен $120°$. Найдем площадь треугольника AOC: $S_{AOC}=\frac{1}{2}R^2\sin 120°=\frac{\sqrt{3}R^2}{4}$.

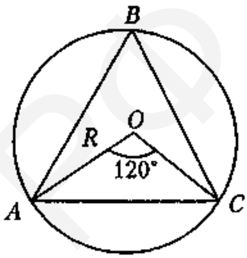

Рис. 22.44

Найдем площадь сектора AOC:

$$S_{сект.}=\frac{\pi R^2}{360°}\cdot 120°=\frac{\pi R^2}{3}.$$

Найдем площадь сегмента, вычитая из площади сектора AOC площадь треугольника AOC:

$$S_{сегм.1}=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}=\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}.$$

Найдем площадь второго сегмента, вычитая из площади круга площадь первого сегмента:

$$S_{сегм.2}=\pi R^2-\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}=\frac{R^2\left(8\pi+3\sqrt{3}\right)}{12}.$$

Найдем отношение площадей этих сегментов:

$$\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}:\frac{R^2\left(8\pi+3\sqrt{3}\right)}{12}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Основание равнобедренного треугольника равно 30, а длина боковой стороны 25. Найдите высоту треугольника, проведенную к боковой стороне.

2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см. Радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно равны $\frac{8}{3}$ и $\frac{25}{3}$ см. Найдите основание треугольника.

3. Дан треугольник со сторонами 5, 7 и 9 см. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне треугольника. Найдите отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.

4. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15 см. Найдите отрезки, на которые точка касания вписанной окружности делит гипотенузу.

5. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если основание его равно 3, а длина высоты, проведенной к основанию, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

6. В треугольнике длины сторон относятся как 4 : 3 : 2. В него вписан полукруг с диаметром, лежащим на большей стороне. Найдите отношение площади круга к площади треугольника.

7. Определите острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении 4 : 5.

8. В треугольнике с основанием 25 см проведен отрезок, параллельный основанию. Найдите длину половины этого отрезка, если площадь полученной трапеции составляет 0,75 площади треугольника.

9. Длина основания равнобедренного треугольника равна 10, а длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $3\sqrt{10}$. Найдите длину боковой стороны треугольника.

10. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC составляет с основанием AC угол, котангенс которого равен 2. Найдите синус угла ABC.

11. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найдите сумму длин катетов треугольника.

12. В треугольнике длины двух сторон составляют 3 и 6 см. Найдите периметр треугольника, если сумма высот, проведенных к этим сторонам, в два раза больше третьей высоты.

13. В прямоугольный треугольник с углом $30°$ вписан ромб со стороной 6 см, причем угол $60°$ у них общий, а все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите полупериметр треугольника.

14. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна $\sqrt{3}$ и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найдите площадь треугольника.

15. В прямоугольном треугольнике длины медиан катетов равны 6 и 8 см. Найдите длину гипотенузы треугольника.

16. В правильный треугольник вписан квадрат, сторона которого равна $2\sqrt{3}-3$. Найдите сторону треугольника.

17. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание равно 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекающие от данного треугольника два прямоугольных треугольника. Найдите сумму периметров этих треугольников.

18. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник.

19. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Длина отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника, равна $18\sqrt{2}$ см. Найдите длину основания треугольника.

20. Через вершины произвольного четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям. Найдите отношение площади четырехугольника, образованного этими прямыми, к площади данного четырехугольника.

21. Ромб, у которого сторона равна меньшей диагонали, равновелик кругу радиуса $\sqrt{3\pi}$. Определите сторону ромба.

22. Середины двух смежных сторон квадрата соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Радиус круга, вписанного в образовавшийся треугольник, равен $2\sqrt{5}-\sqrt{2}$ см. Найдите площадь квадрата.

23. Площадь прямоугольника равна 9 см^2, а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна $60°$. Найдите отношение большей и меньшей стороны прямоугольника.

24. В квадрате, сторона которого рана 2, середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Найдите площадь внутреннего треугольника.

25. Квадрат, площадь которого равна 2, срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определите площадь этого восьмиугольника.

26. Определите сторону ромба, зная, что площадь его равна 6, а длины диагоналей относятся как 2 : 3.

27. В ромб, который делится своей диагональю на два правильных треугольника, вписана окружность. Найдите радиус окружности, если сторона ромба равна $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

28. Площадь ромба равна 150 $см^2$, а одна из его диагоналей равна 15 см. Найдите высоту ромба.

29. На сторонах ромба как на диаметрах построены полуокружности, обращенные внутрь ромба. Определите площадь полученной розетки, если диагонали ромба равны 6 и 8.

30. В параллелограмме *ABCD* диагональ *BD* перпендикулярна стороне *AB*. Длины сторон *AB* и *AD* соответственно равны $\sqrt{13}$ и 7. Найдите диагонали параллелограмма.

31. В параллелограмме со сторонами 12 и 4 см проведены диагонали. Найдите разность между периметрами двух смежных треугольников.

32. В параллелограмме *ABCD* высота, проведенная из вершины *B* тупого угла к стороне *AD*, делит ее в отношении 5 : 3, считая от вершины *D*. Найдите отношение *AD* к *AB*, если отрезок *AC* в два раза длиннее отрезка *BD*.

33. Величина одного из углов параллелограмма равна $120°$, а меньшая диагональ равна $2\sqrt{31}$ см. Высота параллелограмма равна $5\sqrt{3}$ см. Найдите большую диагональ параллелограмма.

34. В ромб с углом $150°$ вписан круг, а в круг – квадрат. Найдите отношение площади ромба к площади квадрата.

35. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на серединах сторон первого, а в этот квадрат вписан круг. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь круга?

36. В квадрате *ABCD* точка *E* – середина стороны *BC*, а точка *F* – середина стороны *CD*. Найдите тангенс угла *EAF*.

37. Разность между площадью круга и площадью вписанного в него квадрата равна $2\sqrt{3}(\pi-2)$. Найдите периметр правильного шестиугольника, вписанного в этот круг.

38. Вычислите площадь трапеции *ABCD* ($AD \parallel BC$), если длины ее оснований относятся как 5 : 3 и площадь треугольника *ADM* равна 50 $см^2$, где *M* – точка пересечения прямых *AB* и *CD*.

39. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найдите полупериметр трапеции, если ее площадь равна 12 $см^2$, а длина высоты равна 2 см.

40. Один из углов трапеции равен $30°$, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, перпендикулярны. Найдите длину меньшей боковой стороны трапеции, если длины оснований равны 8 см и 12 см.

41. Разность длин оснований равнобедренной трапеции равна 14 см, а сумма длин ее оснований равна 28 см. Вычислите площадь трапеции при условии, что в эту трапецию можно вписать окружность.

42. Около круга описана равнобедренная трапеция с острым углом $60°$. Длина средней линии трапеции равна 4 см. Найдите диаметр круга.

43. В трапеции диагонали равны 4 и 7, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 5. Найдите сумму длин оснований трапеции.

44. Основания трапеции равны 4 и 3, углы при большем основании равны $30°$ и $60°$. Найдите площадь трапеции.

45. Вычислите площадь трапеции, параллельные стороны которой соответственно равны 16 и 44 см, а непараллельные – 17 и 25 см.

46. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

47. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 2. Определите диаметр круга, если угол при основании трапеции равен $150°$.

48. В равнобедренной трапеции сумма длин оснований равна 64 см. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите ее площадь.

49. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найдите отношение площадей треугольников, прилегающих к боковым сторонам трапеции.

50. Окружность радиуса 7,5 см вписана в равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 17 см. Найдите разность длин оснований трапеции.

51. Найдите высоту равнобедренной трапеции с основаниями 9 и 21 см, если длина окружности, описанной около этой трапеции, равна $21{,}25\pi$ см.

52. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Их вершины, лежащие вне треугольника, последовательно соединены. Определите площадь полученного шестиугольника, если сторона данного треугольника равна $\sqrt[4]{3}$.

53. Внутри круга взята точка K на расстоянии 13 см от центра. Через эту точку проведена хорда. Точка K делит хорду на отрезки, длины которых равны 14 и 4 см. Найдите диаметр круга.

54. В равносторонний треугольник вписана окружность радиуса $\sqrt{3}$. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найдите радиусы этих окружностей.

55. Каждая из трех равных окружностей радиуса $\sqrt{3}$ касается двух других. Найдите площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

56. В правильный треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Найдите площадь образовавшегося кольца, если сторона треугольника равна 2.

57. В окружность, длина которой равна $2\sqrt{3}\pi$, вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник, в который вписана новая окружность. Найдите длину этой окружности.

58. В окружности проведены две хорды $AB = 2$ и $AC = 3$. Длина дуги AB в два раза меньше длины дуги AC. Найдите радиус окружности.

59. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами $90°$ и $60°$. Найдите длины окружностей, если квадрат расстояния между их центрами равен $2\sqrt{3}+4$.

60. В сегмент, дуга которого $60°$, вписан квадрат. Вычислите площадь квадрата, если площадь круга равна $\left(29+4\sqrt{51}\right)\pi$.

61. Две окружности радиусов 6 см и 3 см касаются внешним образом. Найдите расстояния от точки касания окружностей до их общих касательных.

62. В сектор AOB с радиусом $\sqrt{2}+1$ и углом $90°$ вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги AB. Найдите радиус окружности.

63. В пересечение равных кругов вписан ромб. Найдите площадь ромба, если радиус каждой из окружностей равен 7,5 см, а квадрат стороны ромба равен 45 см^2.

64. В острый угол, равный $60°$, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус большей окружности равен 3. Найдите радиус меньшей окружности.

65. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус большей окружности, если радиусы меньшей и средней окружностей равны 2 и 4 см.

66. Круг, радиус которого равен $\sqrt{2}$, разделен на два сегмента хордой, равной стороне вписанного квадрата. Определите площадь меньшего из этих сегментов.

67. Определите площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями, длины которых равны 3π и 2π.

68. В правильный шестиугольник, сторона которого равна 2, вписана окружность, и около него же описана окружность. Определите площадь кругового кольца, заключенного между этими окружностями.

69. Круг радиуса 3 разделен двумя концентрическими с ним окружностями на три равновеликие фигуры. Найдите радиусы этих окружностей.

70. Сторона квадрата, вписанного в окружность, отсекает сегмент, площадь которого равна $(2\pi-4)$ см^2. Найдите сторону квадрата.

Ответы: **1.** 24. **2.** 16 см. **3.** 3,75 и 5,25 см. **4.** 5 и 12 см. **5.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **6.** $\frac{3\pi\sqrt{15}}{25}$. **7.** $40°$ и $50°$. **8.** 6,25 см. **9.** $4\sqrt{10}$. **10.** 0,96. **11.** 7 см. **12.** 13 см. **13.** $13{,}5+4{,}5\sqrt{3}$ см. **14.** $3\sqrt{3}$. **15.** $4\sqrt{5}$ см. **16.** 1. **17.** 24 см. **18.** 25π см^2. **19.** 36 см. **20.** 2. **21.** $\pi\sqrt[4]{12}$. **22.** 144 см^2. **23.** $\sqrt{3}$. **24.** 1,5. **25.** $4(\sqrt{2}-1)$. **26.** $\sqrt{6{,}5}$. **27.** 2. **28.** 12 см. **29.** $12{,}5\pi-24$. **30.** 6 и $2\sqrt{22}$. **31.** 8 см. **32.** 2. **33.** $2\sqrt{91}$ см. **34.** 4. **35.** $\frac{\pi}{8}$. **36.** 0,75. **37.** $6\sqrt[4]{12}$. **38.** 32 см^2. **39.** $6+2\sqrt{2}$ см. **40.** 2 см. **41.** $98\sqrt{3}$ см^2. **42.** $2\sqrt{3}$ см. **43.** $\sqrt{30}$. **44.** $\frac{7\sqrt{3}}{8}$. **45.** 450 см^2. **46.** 100. **47.** 1. **48.** 1024 см^2. **49.** 1. **50.** 16 см. **51.** 8 см. **52.** $3(1+\sqrt{3})$. **53.** 30 см. **54.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **55.** $6(2\sqrt{3}+3)$. **56.** π. **57.** $1{,}5\pi$. **58.** $\frac{4}{\sqrt{7}}$. **59.** 4π и $2\sqrt{2}\pi$. **60.** 1. **61.** 0 и 4 см. **62.** 1. **63.** 36 см^2. **64.** 1. **65.** 6 см. **66.** $\frac{\pi}{2}-1$. **67.** $\frac{5\pi}{4}$. **68.** π. **69.** $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$. **70.** 4 см.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Если около правильного шестиугольника со стороной 2 описать окружность и в этот же шестиугольник вписать окружность, то площадь образовавшегося кольца будет равна	1) π^2; 2) $0{,}2\pi^2$; 3) 3π; 4) 2π; 5) π.
2	В треугольнике ABC проведена высота BD. Если $BD=4$, $BC=4\sqrt{5}$, а $AB=4\sqrt{2}$, то площадь треугольника равна	1) 48; 2) 24; 3) 18; 4) 96; 5) 74.
3	Если один из внутренних углов треугольника равен $56°$, а внешний угол при второй вершине равен $94°$, то внешний угол этого треугольника при третьей вершине равен	1) $150°$; 2) $30°$; 3) $124°$; 4) $142°$; 5) $38°$.
4	Прямая, параллельная стороне правильного треугольника, делит высоту, проведенную к этой стороне, в отношении $1:3$, считая от вершины. Если половина длины отрезка этой прямой, заключенного между другими сторонами треугольника, равна 1,125, то радиус окружности, описанной около треугольника, равен	1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$; 3) $3\sqrt{3}$; 4) 1; 5) 3.
5	Окружность диаметра 5 вписана в ромб $ABCD$ и касается стороны AD в точке N. Если площадь ромба равна 65, то длина отрезка AN равна	1) 6,5; 2) 2,25; 3) 2,5; 4) 0,5; 5) 5,5.

№	Задания	Варианты ответов
6	На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $AD=6$, $DC=8$. Если высота треугольника, проведенная из вершины A, равна 7, то длина перпендикуляра DH, проведенного на сторону BC, равна	1) 7; 2) 4; 3) 3; 4) 1,2; 5) 2.
7	В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Большая диагональ составляет с меньшей боковой стороной угол $60°$. Если длина меньшей диагонали равна 10, то сумма длин оснований трапеции равна	1) 25; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 5; 4) 10; 5) 20.
8	Если две стороны треугольника равны 7 и 5, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 3, то площадь треугольника равна	1) $12\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{6}$; 3) $6\sqrt{6}$; 4) $7{,}5\sqrt{3}$; 5) $3{,}75\sqrt{3}$.
9	Продолжение общей хорды AB двух окружностей пересекает их общую касательную MN в точке K. Если $KA=8$, а расстояние MN между точками касания равно 24, то длина отрезка AB равна	1) 14; 2) 7; 3) 10; 4) 16; 5) 21.
10	Если в равнобокой трапеции меньшее основание равно боковой стороне и равно 4, а площадь трапеции $8+4\sqrt{3}$, то острый угол трапеции равен	1) $30°$; 2) $38°$; 3) $15°$; 4) $45°$; 5) $70°$.
11	Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K так, что $BK=4$. Если площадь параллелограмма равна 12, а величина угла A равна $30°$, то длина отрезка CK равна	1) 21; 2) 2; 3) 6; 4) 8; 5) 1,5.

№	Задания	Варианты ответов
12	Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Если площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S, то периметр параллелограмма равен	1) $\frac{4R^3}{S}$; 2) $\frac{16R^3}{S}$; 3) $8RS$; 4) RS^2; 5) $\frac{R^2}{2S}$.
13	Окружность с центром в точке O проходит чёрез вершину A треугольника ABC, касается прямой BC в точке B и пересекает сторону AC в точке D. Если $\angle AOB = 110°$, $\angle ABD = 120°$, то угол C равен	1) 130°; 2) 25°; 3) 10°; 4) 40°; 5) 95°.
14	Две стороны остроугольного треугольника равны 20 см и 23,2 см. Если радиус вписанной в треугольник окружности равен 6,4 см, то радиус описанной около этого треугольника окружности равен	1) 16 см; 2) 13 см; 3) 9,5 см; 4) 14 см; 5) 14,5 см.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	5	2	4	3	4	2	5
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	3	1	2	2	4	5