20 ВЕКТОРЫ

20.1. Основные понятия и определения

Вектором называют направленный отрезок.

1. Чтобы найти ***координаты вектора***, необходимо из координат конца вектора вычесть соответственные координаты его начала. Если точка $A(x_1;y_1;z_1)$ – начало вектора, а точка $B(x_2;y_2;z_2)$ – конец вектора, то $\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

2. ***Координаты середины отрезка***.

Если точки $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$ концы отрезка, а точка M его середина ($AM=MB$), то $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2};\dfrac{a_2+b_2}{2};\dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$.

2. ***Длину вектора*** (длину отрезка) находят по формуле:

а) $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, если известны координаты точек $A(x_1;y_1;z_1)$ – начала и $B(x_2;y_2;z_2)$ – конца вектора;

б) $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, если известны координаты вектора $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$.

3. Нуль-вектором называется вектор $\overline{AA}$. Начало и конец этого вектора совпадают.

4. Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

5. Коллинеарными называются векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной прямой).

Условие коллинеарности векторов: векторы $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны, то есть $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=k$. При этом, если:

а) $k>0$, то векторы сонаправлены $\left(\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}\right)$;

б) $k<0$, то векторы противоположно направлены $\left(\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}\right)$.

6. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположны, если $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{BA}\right|$ и $\overline{AB}\uparrow\downarrow\overline{BA}$.

7. Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются компланарными.

20.2. Линейные действия над векторами

1. ***Сложение векторов*** на плоскости.

Векторы складывают по правилу треугольника или по правилу параллелограмма:

а) правило треугольника: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ (рис. 20.1);

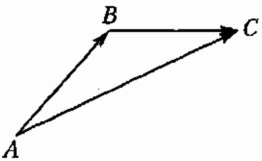

Рис. 20.1

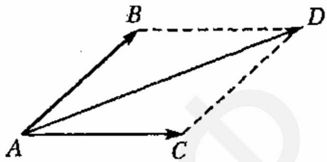

Рис. 20.2

б) правило параллелограмма: $\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AD}$ (рис. 20.2).

2. ***Вычитание векторов*** на плоскости. Чтобы вычесть из вектора $\bar{a}$ вектор $\bar{b}$, необходимо заменить вычитание векторов сложением вектора $\bar{a}$ и вектора $-\bar{b}$: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+\left(-\bar{b}\right)$ (рис. 20.3).

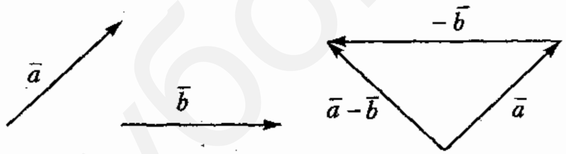

Рис. 20.3

3. ***Сложение векторов с заданными координатами.***

Чтобы сложить (вычесть) векторы с заданными координатами, необходимо сложить (вычесть) их соответствующие координаты:

$$\bar{a}(a_1,a_2,a_3)+\bar{b}(b_1,b_2,b_3)=\overline{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)}.$$

4. ***Умножение вектора на число.***

Чтобы умножить вектор на число, необходимо каждую координату вектора умножить на это число: $k\cdot\overline{(a_1,a_2,a_3)}=\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$

20.3. Скалярное произведение векторов

Формулы для вычисления ***скалярного произведения*** векторов:

а) если известны длины векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и величина α угла между ними, то скалярное произведение векторов находят по формуле

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\alpha;$$

б) если известны координаты векторов $\overline{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\overline{b}(b_1,b_2,b_3)$, то скалярное произведение векторов находят по формуле

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3.$$

Скалярным квадратом вектора $\overline{a}$ называют скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на себя: $\left(\overline{a}\right)^2=\left|\overline{a}\right|^2$.

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ находят по формуле

$$\cos\alpha=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}.$$

Условие перпендикулярности векторов: векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все варианты правильных ответов (1–5):

1. Чтобы найти координаты вектора необходимо:

1) из координат начала вектора вычесть соответственные координаты его конца;

2) из координат конца вектора вычесть соответственные координаты его начала;

3) сложить соответственные координаты начала и конца вектора;

4) найти сумму произведений соответственных координат начала и конца вектора;

5) найти разность произведений соответственных координат начала и конца вектора.

2. Если известны координаты точек $A(x_1;y_1;z_1)$ – начала и $B(x_2;y_2;z_2)$ – конца вектора, то длину вектора $\overline{AB}$ находят по формуле:

1) $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2+(z_2+z_1)^2}$;

2) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$;

3) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 (z_2 - z_1)^2}$;

4) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 x_1)^2 + (y_2 y_1)^2 + (z_2 z_1)^2}$;

5) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

3. Если известны координаты вектора $\overline{a}(x;y;z)$, то длину вектора $\overline{a}$ находят по формуле:

1) $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

2) $\left|\overline{a}\right| = x^2 + y^2 + z^2$;

3) $\left|\overline{a}\right| = x + y + z$;

4) $\left|\overline{a}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$;

5) $\overline{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. Векторы $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ коллинеарны, если:

1) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$;

2) $\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$;

3) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_3}{b_3}$;

4) $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3}$;

5) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

5. Если известны векторы $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ и величина α угла между ними, то скалярное произведение векторов находят по формуле:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\alpha$;

2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \cos\alpha$;

3) $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot a_3 \cdot b_3$;

4) $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$;

5) $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Установите соответствие:

6. Линейные действия с векторами $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$:

ДЕЙСТВИЕ	РЕЗУЛЬТАТ
1) $\bar{a}+\bar{b}$;	а) $\overline{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)}$;
2) $\bar{b}-\bar{a}$;	б) $\overline{(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)}$;
3) $-k\cdot\bar{a}$.	в) $\overline{(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)}$;
	г) $-\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$;
	д) $\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$;
	е) $\overline{(a_1-k;a_2-k;a_3-k)}$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Вариант правилильного ответа	2	2, 5	1, 4	4, 5	1, 5	1 – а; 2 – в; 3 – г.

Примеры

Пример 1. Найдите такое значение m, при котором длина вектора $\bar{a}\left(-2;\ \sqrt{2}m;\ 3\right)$ превосходит длину вектора $\bar{b}\ (-m;\ -5;\ 6)$.

Решение. Найдем длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$|\bar{a}|=\sqrt{(-2)^2+\left(\sqrt{2}m\right)^2+3^2}=\sqrt{2m^2+13},$$

$$|\bar{b}|=\sqrt{(-m)^2+(-5)^2+6^2}=\sqrt{m^2+61}.$$

Поскольку длина вектора $\bar{a}$ превосходит длину вектора $\bar{b}$, то запишем неравенство $\sqrt{2m^2+13}>\sqrt{m^2+61}$. Возведя обе части неравенства в квадрат и приведя подобные слагаемые, получим $2m^2+13>m^2+61$, $m^2>48$, откуда $|m|>4\sqrt{3}$.

Ответ: $|m|>4\sqrt{3}$.

Пример 2. Даны векторы $\bar{a}\ (2-m;\ 4)$, $\bar{b}\ (0;\ -n)$ и $\bar{c}\ (m-1;\ 3)$. Найдите $m+n$, если $\bar{a}=\bar{b}+2\bar{c}$.

Решение. Запишем уравнение $\bar{a}=\bar{b}+2\bar{c}$ в координатной форме: $\left(\overline{2-m;\ 4}\right)=\left(\overline{0;\ -n}\right)+2\left(\overline{m-1;\ 3}\right)$. Умножая координаты вектора $\bar{c}$ на 2 и складывая координаты вектора $\bar{b}$ и соответствующие координаты вектора $2\bar{c}$, получим $\left(\overline{2-m;\ 4}\right)=\left(\overline{0;\ -n}\right)+\left(\overline{2m-2;\ 6}\right)$, $\left(\overline{2-m;\ 4}\right)=\left(\overline{2m-2;\ 6-n}\right)$. Тогда $2-m=2m-2$ и $4=6-n$; откуда $m=\frac{4}{3}$ и $n=2$, а $m+n=3\frac{1}{3}$.

Ответ: $3\frac{1}{3}$.

Пример 3. Найдите произведение чисел k и p, при которых векторы $\bar{a}$ $(k;\ k+2p;\ 4)$ и $\bar{b}$ $(1;\ k+p;\ -2)$ коллинеарны.

Решение. Согласно условию коллинеарности векторов запишем $\frac{k}{1}=\frac{k+2p}{k+p}=\frac{4}{-2}$ или $\begin{cases} k=-2, \\ \frac{k+2p}{k+p}=-2. \end{cases}$ Подставляя значение $k=-2$ в уравнение $\frac{k+2p}{k+p}=-2$, найдем значение p:

$$\frac{-2+2p}{-2+p}=-2,\ p-1=2-p,\ p=1{,}5.$$

Найдем произведение чисел k и p: $-2\cdot 1{,}5=-3$.

Ответ: -3.

Пример 4. Найдите длину вектора $\bar{a}-\bar{b}$, если $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=6$ и $|\bar{a}+\bar{b}|=9$.

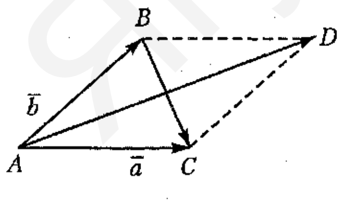

Рис. 20.4

Решение. На векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах построим параллелограмм $ABCD$. Согласно рисунку 20.4 запишем: $\bar{a}+\bar{b}=\overline{AD}$, $\bar{a}-\bar{b}=\overline{BC}$. Тогда $AC=3$, $AB=6$, $AD=9$ и $BC=|\bar{a}-\bar{b}|$.

По свойству диагоналей параллелограмма имеем:

$AD^2+BC^2=2AB^2+2AC^2$ или $9^2+BC^2=2\cdot 6^2+2\cdot 3^2$, $BC^2=9$, откуда $BC^2=3$ и $|\bar{a}-\bar{b}|=3$.

Ответ: 3.

Пример 5. Известно, что $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=6$ и $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$. Найдите значение суммы скалярных произведений векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Решение. 1. Возведем обе части равенства $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=6$ в квадрат и получим $\bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2+2\overline{ab}+2\overline{ac}+2\overline{bc}=36$. Заменим скалярные квадраты векторов квадратами их длин:

$$|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2\left(\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc}\right)=36. \qquad (*)$$

2. Запишем сумму скалярных произведений векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$: $\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc}=x$.

3. Подставляя в равенство (*) значения $|\bar{a}|^2=1$, $|\bar{b}|^2=4$, $|\bar{c}|^2=9$ и $\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc}=x$, получим $1+4+9+2x=36$, откуда $x=11$.

Ответ: 11.

Пример 6. При каком значении n угол между векторами $\bar{a}(6;-2;-n)$ и $\bar{b}(3;\ 0;\ 2n)$ острый?

Решение. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле $\cos\alpha=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$. Согласно условию $0°<\alpha<90°$, значит $\cos\alpha>0$. Так как $|\bar{a}|>0$ и $|\bar{b}|>0$, то $\cos\alpha>0$ при условии, что $\bar{a}\cdot\bar{b}>0$.

Найдем скалярное произведение векторов a и b, и решим неравенство $\bar{a}\cdot\bar{b}>0$: $6\cdot 3+(-2)\cdot 0+(-n)\cdot 2n>0$, $n^2<9$, $|n|<3$, $n\in(-3;\ 3)$.

Ответ: $n\in(-3;\ 3)$.

Пример 7. Векторы $\bar{a}(-5;\ 1;\ 2)$ и $\bar{b}(-1;\ 5;\ -2)$, проведенные из точки C, являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника ABC. Найдите площадь треугольника.

Решение. Площадь треугольника ABC (рис. 20.5) найдем по формуле $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CD$, где CD – высота и медиана $\Delta\, ABC$. По правилу параллелограмма $\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)$, $\overline{CD}=\overline{(-3;\ 3;\ 0)}$.

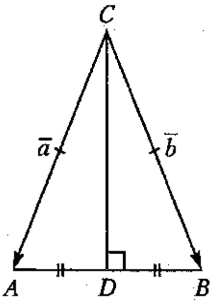

Рис. 20.5

Зная координаты вектора $\overline{CD}$, найдем его длину: $\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. По правилу треугольника $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{b}\quad \overline{a}$, откуда $\overline{AB}(4;\ 4;\ -4)$. Найдем длину вектора $\overline{AB}$: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{16+16+16} = 4\sqrt{3}$.

Найдем площадь треугольника ABC:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{6}.$$

Ответ: $6\sqrt{6}$.

Пример 8. Даны векторы $\overline{a}\ (3;\ -1)$, $\overline{b}\ (-1;\ 2)$ и $\overline{c}\ (1;\ -7)$. Найдите сумму коэффициентов в разложении вектора $\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение. Запишем $\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}=\overline{d}$ и найдем координаты вектора $\overline{d}$: $\overline{d}(3+1-1;\ -1-2+7)$, $\overline{d}(3;\ 4)$. Разложим вектор $\overline{d}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b}$, где x и y – искомые коэффициенты. Зная координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{d}$, получим:

$\overline{(3;\ 4)} = x\overline{(3;\ -1)} + y\overline{(-1;\ 2)}$, $\left(\overline{3;\ 4}\right) = \left(\overline{3x;\ -x}\right) + \left(\overline{-y;\ 2y}\right)$,

$\left(\overline{3;\ 4}\right) = \left(\overline{3x-y;\ -x+2y}\right)$, что равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x-y=3, \\ -x+2y=4; \end{cases} \begin{cases} 3x-y=3, \\ -3x+6y=12; \end{cases} \begin{cases} 3x-y=3, \\ 5y=15; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$$

Тогда $x+y=5$.

Ответ: 5.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каком значении α векторы $\overline{a}\ (-2;\ -3;\ 4)$ и $\overline{b}\ (-\alpha;\ 6;\ -8)$ коллинеарны?

2. Найдите периметр треугольника с вершинами $A(-1;\ 1;\ -2)$, $B(-3;\ -1;\ -3)$ и $C(-7;\ 3;\ -5)$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ заданы векторы $\overline{AB}(3;\ -1;\ -2)$, $\overline{BC}(-2;\ 5;\ 1)$, $\overline{AD}(-3;\ 4;\ 8)$, а также векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – его диагонали. Найдите модули скалярного произведения векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$.

4. В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Известно, что $\overline{AB}(3;\ -5;\ 6)$, $\overline{MN}(-2;\ 1;\ 7)$. Найдите сумму координат вектора $\overline{BC}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ заданы вершины $A(2;\ -5;\ 4)$, $B(1;\ -3;\ 1)$, $C(-3;\ 4;\ -6)$. Найдите сумму координат четвертой вершины параллелограмма.

6. Найдите синус угла между векторами $\overline{a}(3;\ 0;\ -4)$ и $\overline{b}(2;\ 2;\ -1)$.

7. Даны точки $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$, $D(2;\ -3;\ 1)$. Найдите тангенс угла α между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

8. Найдите угол при вершине C в треугольнике с вершинами $A(-4;\ 3)$, $B(-8;\ 7)$ и $C(-1;\ 1)$.

9. Вектор $\overline{a}\ (x;\ 1;\ 12)$ перпендикулярен вектору $\overline{b}\ (1;\ 2;\ 0)$. Найдите модуль вектора $\overline{a}$.

10. Даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, удовлетворяющие условию $\overline{a}=\overline{b}+\overline{c}$. Зная, что $|\overline{a}|=3, |\overline{b}|=4, |\overline{c}|=5$, найдите $\overline{bc}-\overline{ab}-\overline{ca}$.

11. Найдите $|\overline{b}|$, если $|\overline{a}|=4,\ |\overline{a}+\overline{b}|=5$ и $|\overline{a}-\overline{b}|=5$.

12. Длина вектора $\overline{a}+\overline{b}$ равна $\sqrt{13}$. Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}|=4,\ |\overline{b}|=3$.

13. Дан параллелограмм $ABCD$ с основаниями AD и BC. Точка K – середина стороны BC; точка L – середина DC; $\overline{AK}=\overline{a}, AL=\overline{b}$. Выразите $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$ через $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

14. Даны векторы: $\overline{p}(3;-2;1), \overline{q}(-1;1;-2), \overline{r}(2;1;-3), \overline{c}(11;-6;5)$.

Найдите числа x, y, z, если $\overline{c}=x\overline{p}+y\overline{q}+z\overline{r}$.

15. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарные. Найдите значения α и β, если векторы $\overline{c}=\alpha\cdot\overline{a}+\beta\overline{b}$ и $\overline{d}=(\beta+1)\overline{a}+(2-\alpha)\overline{b}$ равны.

16. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB|=|AC|=8$. Точка E делит боковую сторону AB в отношении 3:1, считая от вершины B. Найдите угол между $\overline{CE}$ и $\overline{CA}$, если $|\overline{CA}|=12$.

17. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор по векторам $\overline{DA_1}$, $\overline{DC_1}$ и $\overline{DB_1}$.

18. Векторы $\overline{AB}(-3;\ 4;\ 0)$ и $\overline{AC}(5;\ -2;\ 4)$ служат сторонами треугольника ABC. Найдите длину медианы AM.

Ответы: **1.** -4. **2.** 16. **3.** 4. **4.** 8. **5.** -3. **6.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{38}}{5}$. **8.** $\arccos\frac{21}{\sqrt{1105}}$. **9.** $\sqrt{149}$. **10.** 25. **11.** 3. **12.** 120°. **13.** $\overline{BD}=2(\overline{b}-\overline{a})$; $\overline{AC}=\frac{2}{3}(\overline{a}+\overline{b})$. **14.** $\overline{c}=2\overline{p}-3\overline{q}+\overline{r}$. **15.** $\alpha=\frac{3}{2}$; $\beta=\frac{1}{2}$. **16.** $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$. **17.** $\overline{AA_1}=\overline{DA_1}-\overline{DB_1}+\overline{DC_1}$. **18.** $3\sqrt{2}$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Если известны векторы $\overline{a}(3;\ -2;\ 6)$ и $\overline{b}(-2;\ 0;\ 1)$, то сумма координат вектора $2\overline{a}-\frac{1}{3}\overline{b}$ равна	1) 19; 2) 17; 3) -4; 4) $-4\frac{1}{3}$; 5) $14\frac{1}{3}$.
2	Если известны координаты точек $A(-5;\ 1;\ 6)$, $B(1;\ 4;\ 3)$, $C(6;\ 3;\ 9)$, то модуль вектора $4\overline{AB}+\overline{BC}$ равен	1) $\sqrt{901}$; 2) $\sqrt{998}$; 3) 30; 4) 11; 5) 10.
3	Если векторы $\overline{d}(a;\ -3;\ 2)$ и $\overline{b}(1;\ 2;\ -a)$ перпендикулярны, то значение a равно	1) 6; 2) 5; 3) -6; 4) -3; 5) 2.
4	Если векторы $\overline{a}(2;\ 1;\ -1)$ и $\overline{b}$ коллинеарны и $\overline{a}\cdot\overline{b}=3$, то сумма координат вектора $\overline{b}$ равна	1) 1; 2) 2,5; 3) 2; 4) 23; 5) 5.
5	Угол между диагоналями четырехугольника с вершинами $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$ $C(-4;\ 1;\ 1)$, $D(-5;\ -5;\ 3)$ равен	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{3\pi}{16}$.

№	Задания	Варианты ответов
6	Если известно, что точки $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$ и $C(3;\ -2;\ 1)$ – вершины треугольника, то внешний угол при вершине B равен	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$; 5) $\frac{5\pi}{4}$.
7	Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\frac{2\pi}{3}$ и $\lvert\overline{a}\rvert=3$, $\lvert\overline{b}\rvert=4$, то значение выражения $(\overline{a}+\overline{b})^2$ равно	1) 25; 2) 16; 3) 9; 4) 13; 5) 81.
8	Если известны координаты трех вершин параллелограмма $A(2;\ -3;\ -5)$, $B(-1;\ 3;\ 2)$, $C(6;\ 1;\ 19)$, то произведение координат четвертой вершины равно	1) 56; 2) 350; 3) −108; 4) 54; 5) −540.
9	Если на векторах $\overline{a}(3;\ -5;\ 8)$ и $\overline{b}(-1;\ 1;\ -4)$ построен параллелограмм, то сумма длин его диагоналей равна	1) 12; 2) 10; 3) 41; 4) 17; 5) 20.
10	Если известны координаты точек $A(2;\ 3;\ 6)$ и $B(4;\ 6;\ 8)$, то периметр квадрата $ABCD$ равен	1) $2\sqrt{17}$; 2) $4\sqrt{17}$; 3) $\sqrt{17}$; 4) 17; 5) 36.
11	Если известны координаты точек $A(-3;\ -3;\ -6)$ и $C(-1;\ 0;\ -8)$, то площадь квадрата $ABCD$ равна	1) 8,5; 2) 17; 3) 34; 4) $4\sqrt{17}$; 5) $2\sqrt{17}$.
12	Если известны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, то его площадь равна	1) $4\sqrt{13}$; 2) $2\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{130}$; 4) 7,5; 5) 20.
13	Если известны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ 3)$, $C(-5;\ -2;\ -6)$, то длина медианы CD равна	1) 11; 2) 18; 3) 8; 4) $\sqrt{122}$; 5) $\sqrt{119}$.

№	Задания	Варианты ответов
14	Если $\overline{a}=-\overline{m}+6\overline{n}$, $\overline{b}=3\overline{m}+4\overline{n}$, $\lvert\overline{m}\rvert=2$, $\lvert\overline{n}\rvert=5$ и угол между векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$ равен $\frac{2\pi}{3}$, то скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно	1) 518; 2) 48; 3) 250; 4) −314; 5) 651.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	5	2	3	1	3	2	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	5	2	2	2	4	1