

15 АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

15.1. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называют такую числовую последовательность, каждый следующий член которой отличается от предшествующего члена на одно и то же число d . Число d называют разностью арифметической прогрессии.

Отметим, что если $d > 0$, то арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если $d < 0$, то — убывающей последовательностью.

Если a_1 — первый член прогрессии, d — разность прогрессии, то справедливы следующие формулы:

$a_n = a_1 + d(n-1)$ — формула n -го члена;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ и $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$ — формулы суммы n первых членов;

$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ — свойство n -го члена.

15.2. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называют такую числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же число q . Число q называют знаменателем геометрической прогрессии.

Если b_1 — первый член прогрессии ($b_1 \neq 0$), q — знаменатель прогрессии ($q \neq 1$), то справедливы следующие формулы:

$b_n = b_1 q^{n-1}$ — формула n -го члена;

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ — формула суммы n первых членов;

$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$ — свойство n -го члена.

Если $|q| < 1$, то имеем бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, сумму которой находят по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все правильные варианты ответов (1–2):

1. Арифметической прогрессией является:

- 1) числовая последовательность, каждый следующий член которой отличается от предшествующего члена на одно и то же число;
- 2) числовая последовательность, каждый следующий член которой больше предшествующего члена на 3;
- 3) числовая последовательность, каждый следующий член которой меньше предшествующего члена на одно и то же число 5;
- 4) числовая последовательность, каждый следующий член которой отличается от предшествующего члена;
- 5) числовая последовательность, каждый следующий член которой больше предшествующего члена.

2. Геометрической прогрессией является:

- 1) числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на число 1;
- 2) числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, увеличенному на одно и то же число;
- 3) числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, уменьшенному на одно и то же число;
- 4) числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же число;
- 5) числовая последовательность, члены которой бесконечно убывают.

Установите соответствие (3–4):

3. Арифметическая прогрессия:

НАЗВАНИЕ

ФОРМУЛА

1) сумма n первых членов;

$$a) S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n;$$

2) n -ый член;

б) $a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;

3) сумма пяти первых членов;

в) $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}$;

4) свойство пятого члена.

г) $S_5 = \frac{5a_1 + 5a_n}{2}$;

д) $a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2}$;

е) $a_n = a_1 + d(n-1)$.

4. Геометрическая прогрессия:

НАЗВАНИЕ

ФОРМУЛА

1) сумма n первых членов;

а) $b_n = b_1 q^{n-1}$;

2) n -ый член;

б) $b_5 = \sqrt[5]{b_4 b_6}$;

3) сумма пяти первых членов;

в) $b_5 = \sqrt{b_4 b_6}$;

4) свойство пятого члена;

г) $S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1}$;

5) сумма бесконечной убывающей прогрессии.

д) $S = \frac{b_1}{1 - q}$;

е) $S = \frac{b_1}{q - 1}$;

ж) $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	1, 2, 3	4	1 - а, 2 - е, 3 - г, 4 - д	1 - ж, 2 - а, 3 - г, 4 - в, 5 - д

Примеры

Пример 1. Сумма семнадцати первых членов арифметической прогрессии равна 136. Найдите девятый член этой прогрессии.

Решение. Запишем сумму 17 первых членов прогрессии:

$$S_{17} = \frac{2a_1 + d(17-1)}{2} \cdot 17.$$

Так как $S_{17} = 136$, то $136 = \frac{2a_1 + 16d}{2} \cdot 17$, откуда $136 = (a_1 + 8d) \cdot 17$ и $a_1 + 8d = 8$. Поскольку $a_9 = a_1 + 8d$, то $a_9 = 8$.

Ответ: 8.

Пример 2. Арифметическая прогрессия содержит 25 членов. Первый член прогрессии равен 429, разность ее равна -22 . Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

Решение. Запишем формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$. Согласно условию задачи $a_1 = 429$, $d = -22$, $S_n = 3069$. Тогда число членов прогрессии найдем, решая уравнение $\frac{2 \cdot 429 - 22(n-1)}{2}n = 3069$, $(429 - 11n + 11)n = 3069$, $11n^2 - 440n + 3069 = 0$, $n^2 - 40n + 279 = 0$, откуда $n_1 = 9$, $n_2 = 31$. Поскольку прогрессия содержит 25 членов, то $n = 9$.

Ответ: 9.

Пример 3. Двадцать пять чисел, первое из которых равно единице, а каждое следующее на 0,5 больше предыдущего, в порядке возрастания расположены в двух таблицах. Сумма чисел первой таблицы равна 7. Сколько чисел содержится во второй таблице?

Решение. Согласно условию задачи запишем: $a_1 = 1$, $d = 0,5$. Если в первой таблице n чисел, то $S_n = 7$. Подставляя значения $a_1 = 1$, $d = 0,5$ и $S_n = 7$ в формулу суммы n первых членов прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$, получим: $\frac{2 + 0,5(n-1)}{2}n = 7$, $\left(2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)n = 14$, $(4 + n - 1)n = 28$, $n^2 + 3n - 28 = 0$, откуда $n_1 = -7$, $n_2 = 4$.

Поскольку $n_1 = -7$ – посторонний корень уравнения, то $n = 4$ и, следовательно, в первой таблице 4 числа. Так как имеется 25 чисел, то вторая таблица содержит 21 число.

Ответ: 21.

Пример 4. При делении тринадцатого члена арифметической прогрессии на третий член в частном получается 3, а при делении

восемнадцатого члена на седьмой член в частном получается 2 и в остатке 8. Определите второй член прогрессии.

Решение. Согласно условию задачи запишем систему уравне-

$$\text{ний } \begin{cases} \frac{a_{13}}{a_3} = 3, \\ \frac{a_{18}}{a_7} = 2 + \frac{8}{a_7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{13} = 3a_3, \\ a_{18} = 2a_7 + 8. \end{cases}$$

Применяя формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$, получим $a_3 = a_1 + 2d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_{13} = a_1 + 12d$ и $a_{18} = a_1 + 17d$.

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} a_1 + 12d = 3(a_1 + 2d), \\ a_1 + 17d = 2(a_1 + 6d) + 8; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 3d, \\ a_1 = 5d - 8; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 3d, \\ 3d = 5d - 8; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = 4. \end{cases}$$

Найдем второй член прогрессии: $a_2 = a_1 + d = 12 + 4 = 16$.

Ответ: 16.

Пример 5. В арифметической прогрессии 10 членов. Сумма членов с четными номерами равна A , а сумма членов с нечетными номерами равна B . Чему равна разность этой прогрессии?

Решение. Рассмотрим члены прогрессии с четными номерами: $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$. Согласно формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$, получим $\frac{a_2 + a_{10}}{2} \cdot 5 = A$, $a_2 + a_{10} = 0,4A$. Зная, что $a_2 = a_1 + d$ и $a_{10} = a_1 + 9d$, запишем $2a_1 + 10d = 0,4A$, $a_1 + 5d = 0,2A$.

Рассмотрим члены прогрессии с нечетными номерами: a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 . Выполняя аналогичные действия, получим $\frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 5 = B$, $a_1 + a_9 = 0,4B$, $2a_1 + 8d = 0,4B$, $a_1 + 4d = 0,2B$.

Вычитая из уравнения $a_1 + 5d = 0,2A$ уравнение $a_1 + 4d = 0,2B$, найдем разность прогрессии: $d = 0,2(A - B)$.

Ответ: $0,2(A - B)$.

Пример 6. Найдите сумму всех четных натуральных двузначных чисел, которые при делении на 13 дают в остатке 5.

Решение. Найдем наименьшее четное натуральное двузначное число, которое при делении на 13 дает в остатке 5: $13 + 5 = 18$.

Найдем наибольшее четное двузначное натуральное число, которое при делении на 13 дает в остатке 5. Для этого разделим 99 на 13. Поскольку $99 = 7 \cdot 13 + 8$, то $7 \cdot 13 + 5 = 96$.

Очевидно, что множество рассматриваемых чисел образует арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 18$, $d = 36$ и $a_n = 96$. Найдем число членов этой прогрессии. Согласно формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ получим $96 = 18 + 36 \cdot (n-1)$, откуда $26 \cdot (n-1) = 78$, $n-1 = 3$ и $n = 4$.

$$\text{В таком случае } S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4, \quad S_4 = \frac{18 + 96}{2} \cdot 4 = 228.$$

Ответ: 228.

Пример 7. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, члены которой поочередно меняют знак, если сумма первых шести членов равна 504 и $b_1 + b_4 = 24$.

Решение. Условию задачи соответствует система уравнений

$$\begin{cases} S_6 = 504, \\ b_1 + b_4 = 24. \end{cases} \quad \text{Применяя формулу суммы } n \text{ первых членов и формулу } n\text{-го члена геометрической прогрессии, запишем:}$$

$$\begin{cases} \frac{b_1(1-q^6)}{1-q} = 504, \\ b_1 + b_1q^3 = 24; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_1(1-q^3)(1+q^3)}{1-q} = 504, \\ b_1(1+q^3) = 24. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе и получим:

$$\frac{b_1(1-q^3)(1+q^3)}{(1-q)b_1(1+q^3)} = \frac{504}{24}, \quad 1+q+q^2 = 21, \quad q^2 + q - 20 = 0,$$

откуда $q_1 = 4$, $q_2 = -5$.

Найдем первый член прогрессии, подставляя значения q в уравнение $b_1(1+q^3) = 24$:

$$\text{если } q = 4, \text{ то } b_1 = \frac{24}{65};$$

$$\text{если } q = -5, \text{ то } b_1 = -\frac{6}{31}.$$

Так как согласно условию задачи члены заданной геометрической прогрессии поочередно меняют знак, то знаменатель прогрессии равен -5 .

Ответ: -5 .

Пример 8. Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии равна 16, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 1536. Найдите четвертый член прогрессии.

Решение. Рассмотрим бесконечную убывающую геометрическую прогрессию с первым членом b_1 и знаменателем q :

$$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \dots$$

Согласно формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ запишем:

$$\frac{b_1}{1-q} = 16, \quad b_1 = 16 \cdot (1-q).$$

Рассмотрим бесконечную убывающую геометрическую прогрессию $b_1^2, b_1^2q^2, b_1^2q^4, b_1^2q^6, \dots$ с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 . Согласно формуле $S = \frac{b_1^2}{1-q^2}$ запишем:

$$\frac{b_1^2}{1-q^2} = 1536, \quad b_1^2 = 1536 \cdot (1-q^2).$$

Зная, что $b_1 = 16 \cdot (1-q)$, получим:

$$16^2(1-q)^2 = 1536(1-q)(1+q), \quad 1-q = 6(1+q), \quad 7q = -5, \quad q = -\frac{5}{7}.$$

$$\text{Тогда } b_1 = 16 \cdot \left(1 + \frac{5}{7}\right) = 16 \cdot \frac{12}{7} = \frac{192}{7}.$$

Найдем четвертый член этой прогрессии по формуле $b_4 = b_1 \cdot q^3$.

$$\text{Получим } b_4 = \frac{192}{7} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)^3 = -\frac{24000}{2401}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{24\,000}{2\,401}.$$

Пример 9. Найдите a^3 , если $a = \sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n}}}}}}$.

Решение. Применяя последовательно формулы 2.9, 2.15, 2.3 (см. п. 2.2), получим: $a = m^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{4}} \cdot m^{\frac{1}{8}} \cdot n^{\frac{1}{16}} \cdot m^{\frac{1}{32}} \dots$,

$$a = \left(m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{1}{8}} \cdot m^{\frac{1}{32}} \dots \right) \cdot \left(n^{\frac{1}{4}} \cdot n^{\frac{1}{16}} \cdot n^{\frac{1}{64}} \dots \right), \quad a = m^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots} \cdot n^{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Восьмой член арифметической прогрессии равен 2, а ее одиннадцатый член равен 11. Найдите сумму 15 первых членов этой прогрессии.

2. Сумма седьмого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 10, а сумма пятого и десятого членов равна 1. Сколько членов этой прогрессии необходимо сложить, чтобы в результате получить число 190?

3. Девятый член арифметической прогрессии в 4 раза больше шестого ее члена, а их сумма равна 20. Найдите сумму девяти первых членов этой прогрессии.

4. Первый член арифметической прогрессии равен 800, а каждый следующий ее член на 25 меньше предыдущего. Сколько членов прогрессии необходимо сложить, чтобы их сумма была равна 5700, если прогрессия содержит не более пятнадцати членов?

5. Внутренние углы выпуклого девятиугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 5° . Определите наименьший угол этого многоугольника.

6. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена на шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найдите второй член этой прогрессии.

7. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найдите третий член прогрессии.

8. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите утроенную сумму 11 первых членов этой прогрессии.

9. Натуральные числа образуют арифметическую прогрессию. Произведения трех и четырех ее первых членов равны соответственно 6 и 24. Найдите среднее арифметическое четырех первых членов этой прогрессии.

10. Разность арифметической прогрессии равна 3. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 50, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 35. Определите, сколько членов содержит прогрессия.

11. Найдите сумму всех положительных четных двузначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 0.

12. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые делятся на 14.

13. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна -49 , а сумма средних ее членов равна 14. Найдите знаменатель этой прогрессии.

14. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, у которой первый член больше второго на 35, а третий больше четвертого на 560. Найдите сумму этой прогрессии.

15. Геометрическая прогрессия содержит шесть членов. Первый и второй ее члены соответственно равны 3 и 12. Найдите последний член этой прогрессии.

16. Утроенная сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 27, а удвоенная сумма квадратов ее членов равна 81. Найдите второй член прогрессии.

17. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, у которой первый член равен 6, а сумма трех ее первых членов равна $\frac{26}{3}$.

18. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему прибавить 1, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найдите сумму с четвертого по десятый член арифметической прогрессии.

19. Найдите наибольшее произведение четырех чисел, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних -12 .

Решите уравнения (20–22):

20. $12x + 6x^2 - 6x^3 + 6x^4 - 6x^5 + \dots = 7$, где $|x| < 1$.

21. $1,5 + 3,5 + 5,5 + \dots + 0,5x = 68$.

22. $\frac{1}{3x} + \dots + \frac{x-3}{3x} + \frac{x-2}{3x} + \frac{x-1}{3x} = 1$, где $x \in \mathbf{N}$.

23. Найдите целое положительное n из уравнения $(6+12+18+\dots+(6n-6)) + (8+11+14+\dots+(8+3n)) = 274$.

24. Вычислите $1+3^2+5^2+\dots+199^2-2^2-4^2-6^2-\dots-200^2$.

25. Вычислите $(2+0,5)^2 + (4+0,25)^2 + \dots + (2^5+0,5^5)^2$.

26. Найдите $1+2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-n}+\dots$, если $n \in \mathbf{N}$.

Ответы: 1. 30. 2. 20. 3. 0. 4. 8. 5. 120° . 6. 7. 7. 14. 8. 132. 9. 2,5.
 10. 10. 11. 810. 12. 35392. 13. -2 или -0,5. 14. -357 или $-991\frac{2}{3}$.
 15. 3072. 16. 2. 17. 9. 18. 105. 19. 768. 20. $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{7}{9}$. 21. 31.
 22. $x = 7$. 23. 7. 24. -20100. 25. $10 + \frac{(4^5 - 1)(4^6 + 1)}{3 \cdot 4^5}$. 26. 2.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Если сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 20, то ее пятый член равен	1) 18; 2) 15; 3) 10; 4) 14; 5) 5.
2	Если произведение десятого и двенадцатого положительных членов геометрической прогрессии равно 121, то ее одиннадцатый член равен	1) 21; 2) 11; 3) 60,5; 4) 36; 5) 41.
3	Если сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 5n^2 - 4n$, то третий член этой прогрессии равен	1) 22; 2) 13; 3) 12; 4) 1; 5) 21.
4	Если сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии равна 2, а четвертый ее член равен 0,125, то знаменатель прогрессии равен	1) 0,5; 2) 0,25; 3) -0,3; 4) 0,125; 5) -0,01.
5	Если четыре числа составляют геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 35, а сумма средних членов равна 30, то меньший член этой прогрессии равен	1) 12; 2) 18; 3) 7; 4) 8; 5) 5.

№	Задания	Варианты ответов
6	Если сумма с пятого по восьмой член арифметической прогрессии равна 48, а разность прогрессии равна 2, то ее первый член равен	1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 2,1; 5) -2.
7	Если сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна -40, а сумма их квадратов равна 3280, то среднее арифметическое этих чисел равно	1) 10; 2) 25; 3) 30; 4) -10; 5) -40.
8	Если цифры трехзначного числа образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа меньше данного на 400 – арифметическую, то сумма цифр этого числа равна	1) 12; 2) 13; 3) 10; 4) 9; 5) 15.
9	Если числа $5^{1+b} + 5^{1-b}$, $0,5a$, $5^{2b} + 5^{-2b}$ образуют арифметическую прогрессию, то наименьшее целое значение a равно	1) 12; 2) 10; 3) 11; 4) 14; 5) 13.
10	Если числа a , b , c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a+b$, $b+c$, $a+c$ – арифметическую, то знаменатель геометрической прогрессии равен	1) 4; 2) 0,25; 3) 0,5; 4) -2; 5) 2.
11	Если суммы первых m и n членов арифметической прогрессии равны, то значение S_{m+n} равно	1) -1; 2) 2; 3) 0; 4) 38; 5) 100.
12	Если сумма четырех первых членов геометрической прогрессии равна 100, а сумма обратных к ним величин равна 10, то произведение этих членов прогрессии равно	1) 100; 2) 1000; 3) 900; 4) 20; 5) 250.
13	Найдите произведение корней (или корень, если он единственный) уравнения $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 7$	1) 15; 2) 0; 3) 7; 4) 35; 5) 14.

№	Задания	Варианты ответов
14	Значение суммы $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{7 \cdot 8}$ равно	1) 7; 2) $\frac{9}{8}$; 3) $\frac{7}{8}$; 4) $\frac{8}{7}$; 5) $\frac{17}{15}$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	3	2	5	1	4	1	4
Номер задания	8	9	10	11	12	13	14
Номер правильного ответа	2	1	4	3	1	1	3