11 НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

11.1. Методы решений неравенств

1. Если неравенство имеет вид $|f(x)| \le g(x)$, то оно равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases}$

2. Если неравенство имеет вид $|f(x)| \ge g(x)$, то оно равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array}\right.$

3. Если неравенство содержит несколько модулей, например, имеет вид $|f_1(x)| + |f_2(x)| \le g(x)$, $(\ge, <, >)$, то применяем метод интервалов (см. п. 10.3).

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все правильные варианты ответов (1–2):

1. Если неравенство имеет вид $|f(x)| \le g(x)$, то оно равносильно:

1) неравенству $f^2(x) \le g^2(x)$;

2) совокупности неравенств $f(x) \le g(x)$ и $f(x) \ge -g(x)$;

3) системе неравенств $f(x) \le g(x)$ и $f(x) \ge -g(x)$;

4) $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x); \end{array}\right.$

5) $\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{cases}$

2. Решением неравенства вида $|f(x)| \ge g(x)$ является:

1) пересечение множеств решений неравенств $f(x) \ge g(x)$ и $f(x) \le -g(x)$;

2) объединение множеств решений неравенств $f(x) \ge g(x)$ и $f(x) \le -g(x)$;

3) решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x); \end{array}\right.$

4) решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x); \end{array}\right.$

5) решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{cases}$;

Укажите все необходимые действия:

3. Чтобы найти решение неравенства вида $|f_1(x)|-|f_2(x)| \ge g(x)$, необходимо:

1) найти нули функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$;

2) найти нули функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $g(x)$;

3) нанести нули функций на координатную прямую и записать все полученные промежутки;

4) нанести нули функций на ОДЗ неравенства и записать все полученные промежутки;

5) на каждом промежутке раскрыть модули и решить полученные неравенства;

6) записать решение исходного неравенства, находя пересечение множеств решений неравенств на всех промежутках;

7) записать решение исходного неравенства, объединив решения неравенств на всех промежутках.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**
Вариант правильного ответа	3	2, 3	1, 4, 5, 7

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $\left|\frac{6x+1}{3-x}\right| < 6$.

Решение. Имеем неравенство вида $f(x) < 0$, следовательно, данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{6x+1}{3-x} < 6, \\ \frac{6x+1}{3-x} > -6; \end{cases} \begin{cases} \frac{6x+1-18+6x}{3-x} < 0, \\ \frac{6x+1+18-6x}{3-x} > 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{12x-17}{3-x} < 0, \\ \frac{19}{3-x} > 0. \end{cases}$$

Поскольку второе неравенство системы выполняется при $3-x>0$, то есть при $x<3$, то первое неравенство системы решим методом интервалов на промежутке $(-\infty; 3)$.

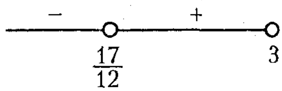

Рис. 11.1

Согласно рисунку 11.1 запишем решение системы неравенств, а, следовательно, и решение исходного неравенства: $x \in \left(-\infty;\ \frac{17}{12}\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty;\ \frac{17}{12}\right)$.

Пример 2. Решите неравенство $\left|2-|x-1|\right| \geq 30$.

Решение. Имеем неравенство вида $|f(x)| \geq g(x)$, следовательно, данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 2-|x-1| \geq 30, \\ 2-|x-1| \leq -30; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1| \leq -28, \\ |x-1| \geq 32. \end{array}\right.$$

Решим каждое неравенство совокупности:

1) поскольку левая часть неравенства $|x-1| \leq -28$ всегда положительна, а правая его часть всегда отрицательна и положительное число больше отрицательного, то неравенство не имеет решений;

2) $|x-1| \geq 32 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \geq 32, \\ x-1 \leq -32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 33, \\ x \leq -31; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -31] \cup [33;\ +\infty)$.

В таком случае решением совокупности неравенств является решение второго неравенства совокупности.

Ответ: $(-\infty;\ -31] \cup [33;\ +\infty)$.

Пример 3. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} |10x+3| \leq 33, \\ |10x+3| \geq 33. \end{cases}$$

Решение. Способ 1. Найдем решение каждого неравенства системы: 1) $|10x+3| \leq 33 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+3 \leq 33, \\ 10x+3 \geq -33; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -3{,}6; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-3{,}6;\ 3]$;

2) $|10x+3| \geq 33 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10x+3 \geq 33, \\ 10x+3 \leq -33; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ x \leq -3{,}6; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -3{,}6] \cup [3;\ +\infty)$.

Очевидно, что решением системы неравенств являются числа $-3{,}6$ и 3, сумма которых равна $-0{,}6$.

Способ 2. Заменим систему неравенств $\begin{cases}|10x+3|\le 33,\\ |10x+3|\ge 33\end{cases}$ равносильным уравнением

$$|10x+3|=33 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}10x+3=33,\\ 10x+3=-33;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-3,6.\end{array}\right.$$

Ответ: $-0,6$.

Пример 4. Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства $8x^2+8\sqrt{x^2}-3>0$.

Решение. Поскольку $\sqrt{x^2}=|x|$ и $x^2=|x|^2$, то неравенство примет вид $8|x|^2+8|x|-3>0$, решать которое будем методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=8|x|^2+8|x|-3$.
2. $D(f): x\in \mathbf{R}$.
3. Найдем нули функции, решая уравнение $8|x|^2+8|x|-3=0$.

Получим $|x|=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{4}$, откуда $x\in\varnothing$ и $|x|=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{4}$, откуда $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{4}$ и $x_2=\dfrac{2-\sqrt{10}}{4}$.

4. Нанесем полученные числа на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 11.2).

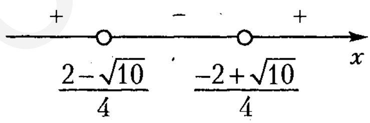

Рис. 11.2

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на которых функция $f(x)=8|x|^2+8|x|-3$ положительна:

$$\left(-\infty;\ \frac{2-\sqrt{10}}{4}\right)\cup\left(\frac{-2+\sqrt{10}}{4};\ +\infty\right).$$

Так как $\dfrac{2-\sqrt{10}}{4}<0$, а $\dfrac{-2+\sqrt{10}}{4}\approx 0,29$, то число 1 является наименьшим целым положительным решением неравенства.

Ответ: 1.

Пример 5. Найдите сумму квадратов целых решений неравенства $\big||x|-6\big|>\left|x^2-5|x|+9\right|$.

Решение. Поскольку обе части неравенства положительны, то, возводя их в квадрат и учитывая, что $|a|^2 = a^2$, запишем

$(|x|-6)^2 > \left(|x|^2-5|x|+9\right)^2$ или $(|x|-6)^2 - \left(|x|^2-5|x|+9\right)^2 > 0$.

Разложим левую часть неравенства на множители, применяя формулу разности квадратов:

$$\left(|x|-6-|x|^2+5|x|-9\right)\left(|x|-6+|x|^2-5|x|+9\right)>0,$$

$$\left(|x|^2-6|x|+15\right)\left(|x|^2-4|x|+3\right)<0.$$

Решим неравенство методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\left(|x|^2-6|x|+15\right)\left(|x|^2-4|x|+3\right)$.

2. $D(f): x\in \mathbf{R}$.

3. Найдем нули функции, решая совокупность уравнений $|x|^2-6|x|+15=0$, откуда $x\in\varnothing$ и $|x|^2-4|x|+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$ и $x_4=-3$.

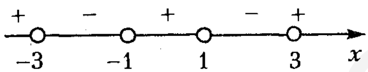

Рис. 11.3

4. Нанесем числа −1, 1, −3 и 3 на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 11.3).

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на котором функция $f(x)=\left(|x|^2-6|x|+15\right)\left(|x|^2-4|x|+3\right)$ отрицательна: $(-3;\ -1)\cup(1;\ 3)$.

Найдем сумму квадратов целых решений неравенства:

$$(-2)^2+2^2=8.$$

Ответ: 8.

Пример 6. Найдите сумму целых решений из области определения функции $y=\sqrt{|x-2|-|2x+4|}-2x^2-2x+4$.

Решение. Так как выражение, стоящее под знаком радикала, не может быть отрицательным, то $|x-2|-|2x+4|\geq 0$.

Решим неравенство методом интервалов:

1. Найдем нули функций, стоящих под знаком модуля, решая уравнения $x-2=0$, откуда $x=2$ и $2x+4=0$, откуда $x=-2$.

2. Нанесем числа 2 и -2 на координатную прямую и рассмотрим полученные промежутки (рис. 11.4).

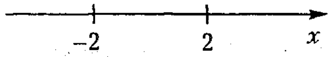

Рис. 11.4

Раскроем модули на каждом промежутке и решим неравенства:

а) если $x \in (-\infty; -2]$, то $2-x+2x+4 \geq 0$, $x \geq -6$ и $x \in [-6; -2]$;

б) если $x \in (-2; 2]$, то $2-x-2x-4 \geq 0$, $-3x \geq 2$, $x \leq -\frac{2}{3}$ и $x \in \left[-2; -\frac{2}{3}\right]$;

в) если $x \in (2; +\infty)$, то $-2+x-2x-4 \geq 0$, $-x \geq 6$, $x \leq -6$ и $x \in \varnothing$.

Решением неравенства является объединение полученных решений: $x \in \left[-6; -\frac{2}{3}\right]$. Найдем сумму целых решений неравенства:

$$-6-5-4-3-2-1=-21.$$

Заметим, что неравенство $|x-2|-|2x+4| \geq 0$ можно решить иначе. Запишем неравенство в виде $|2-x| \geq |2x+4|$ и возведем обе его части в квадрат. Получим $(x-2)^2 \geq (2x+4)^2$ или $(x-2-2x-4)(x-2+2x+4) \geq 0$, $(3x+2)(x+6) \leq 0$.

Согласно рисунку 11.5 запишем решение неравенства:

$$x \in \left[-6; -\frac{2}{3}\right].$$

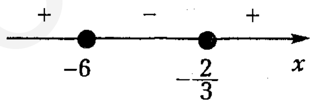

Рис. 11.5

Ответ: -21.

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{|x|^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} > 0$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов. Найдем нули функции $f(x)=x$, стоящей под знаком модуля: $x=0$.

1. Если $x \leq 0$, то неравенство примет вид $\dfrac{x^2+7x+10}{(x-3)^2} > 0$, $\dfrac{(x+5)(x+2)}{(x-3)^2} > 0$. Его решение показано на рисунке 11.6:

$$x \in (-\infty; -5) \cup (-2; 0].$$

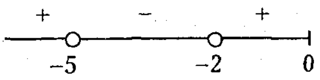

Рис. 11.6

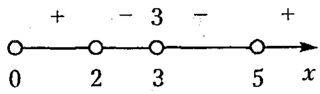

Рис. 11.7

2. Если $x>0$, то неравенство примет вид $\dfrac{x^2-7x+10}{(x-3)^2}>0$, $\dfrac{(x-5)(x-2)}{(x-3)^2}>0$. Его решение показано на рисунке 11.7:

$$x\in(0;\ 2)\cup(5;\ +\infty).$$

Решением исходного неравенства является объединение решений, полученных в первом и втором случаях:

$$x\in(-\infty;\ -5)\cup(-2;\ 2)\cup(5;\ +\infty).$$

Ответ: $(-\infty;\ -5)\cup(-2;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (1–14):

1. $|x(x-4)|-5<0$. **2.** $\left|8-x^2+2x\right|>2x$. **3.** $\left|\dfrac{x+2}{3-x}\right|-2>0$.

4. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{4-x^2}\right|\le 1$. **5.** $\left||x|^2-|x|\right|<0{,}25$. **6.** $|1-x|-|x|>0$.

7. $|x|^2-4|x|>-3$. **8.** $|x-1|+|2-x|>3+x$. **9.** $\dfrac{1}{1-|x+3|}<\dfrac{1}{3}$.

10. $\dfrac{1{,}5|x|-7}{3-x}\ge 2$. **11.** $\dfrac{|x|^2-5x+6}{-|x|-7}>0$. **12.** $\dfrac{|-x-2|-|-x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$.

13. $|1-x|-1+|2x+3|>|x|+(2x+3)$.

14. $|x-1|-|x-2|-|x+2|-|x|>-|x+1|-3$.

Решите системы неравенств (15–16):

15. $\begin{cases}\left||-x|^2+5x\right|<6,\\ |x+1|-1\le 0.\end{cases}$ **16.** $\begin{cases}|x(x-4)|<5,\\ |x+1|-3<0.\end{cases}$

17. Найдите число целых решений неравенства
$$\frac{|x-2|-|x+4|}{|2-x|-|-x|}\le 0.$$

18. Найдите длину интервала, который образуют все решения неравенства $\frac{|3-x|+x^2-5x+6}{x^2-5x+6}>3$.

19. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $|x-1|+|2-x|>3+x$.

20. Найдите среднее арифметическое целых решений системы неравенств $\begin{cases}|2x+5|-|4x-7|\ge 0,\\ |x|-2|4-x|<x-2.\end{cases}$

Ответы: **1.** $(-1;\ 5)$. **2.** $(-\infty;\ 2\sqrt{2})\cup(2+2\sqrt{3};\ +\infty)$. **3.** $\left(\frac{4}{3};\ 3\right)\cup$ $\cup(3;\ 8)$. **4.** $[0;\ 1{,}6]\cup[2{,}5;\ +\infty)$. **5.** $\left(-\frac{\sqrt{2}+1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$. **6.** $(-\infty;\ 0{,}5)$. **7.** $(-\infty;-3)\cup(-1;1)\cup(3;+\infty)$. **8.** $(-\infty;\ 0)\cup$ $\cup(6;+\infty)$. **9.** $(-\infty;-4)\cup(-2;+\infty)$. **10.** $\left(3;\ 3\frac{5}{7}\right]$. **11.** $(2;3)$. **12.** $(-1;\sqrt[3]{4})$. **13.** $\left(-\infty;\ \frac{-3}{2}\right)$. **14.** $(-3;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ 3)$. **15.** $(-2;\ 0]$. **16.** $(-1;\ 2)$. **17.** 2. **18.** 0,5. **19.** −1. **20.** 3.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Число натуральных решений неравенства $\lvert x^2-36\rvert\cdot(x-5)\le 0$ равно	1) 2; 2) 9; 3) 7; 4) 5; 5) 6.
2	Среднее арифметическое целых неотрицательных решений неравенства $\lvert 2-x\rvert\cdot(4-5x)\ge 0$ равно	1) 1; 2) 2; 3) 2,5; 4) 1,25; 5) 4.
3	Наименьшее целое решение неравенства $\lvert 16-x^2\rvert\cdot(x-1{,}25)>0$ равно	1) 3; 2) −6; 3) 2; 4) 1; 5) 5.

№	Задания	Варианты ответов
4	Количество целых отрицательных решений неравенства $\frac{\lvert x\rvert+x+3}{x+3}>1$ равно	1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 10; 5) 12.
5	Наибольшее решение неравенства $\frac{\lvert -x\rvert}{-x-3}\geq 0$ равно	1) −10; 2) −0,5; 3) −3; 4) 0; 5) −2.
6	Наименьшее целое решение неравенства $\left\lvert\frac{x-0{,}5}{x-1}\right\rvert>1$ равно	1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) −2; 5) −4.
7	Множество решений системы неравенств $\begin{cases}\lvert 1-x\rvert\leq 3,\\ -\lvert -x-2\rvert<-1\end{cases}$ имеет вид	1) $(-\infty;\ 4]$; 2) $(0;\ 4{,}5]$; 3) $(-1;\ 4)$; 4) $(-1;\ 4]$; 5) $(-1;\ +\infty)$.
8	Число целых решений неравенства $1\leq\lvert x-0{,}5\rvert<1{,}5$ равно	1) 6; 2) 5; 3) 0; 4) 3; 5) 1.
9	Число целых неотрицательных решений неравенства $\lvert 3-\lvert 2-x\rvert\rvert-1<0$ равно	1) 6; 2) 4; 3) 2; 4) 3; 5) 1.
10	Неравенство $\lvert 2-x\rvert+\lvert x-3\rvert-2x<5$ выполняется при условии, что	1) $x>0$; 2) $x\leq 0$; 3) $x>2$; 4) $x>3$; 5) $x\in\mathbf{R}$.
11	Число натуральных решений неравенства $\frac{-\lvert x\rvert^2+\lvert x\rvert+12}{3-x}-2x\geq 0$ равно	1) 8; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 1.
12	Количество целых решений неравенства $\frac{\lvert -x\rvert^2+x-2}{(3-\lvert 3-x\rvert)^2}\leq 0$ равно	1) 1; 2) 5; 3) 4; 4) 2; 5) 3.

№	Задания	Варианты ответов
13	Среднее арифметическое целых чисел, принадлежащих области определения функции $y=\sqrt{3-\lvert x-2\rvert}+\left(\sqrt{x-1}-1\right)^{-1}$, равно	1) 3; 2) 3,25; 3) 5; 4) 3,5; 5) 5,75.
14	Число целых неотрицательных решений неравенства $\lvert x-x^9\rvert+\lvert x^7-x^8\rvert-\lvert x^9-x^8+x^7-x\rvert\le 0$ равно	1) 2; 2) 1; 3) 5; 4) 9; 5) 17.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	5	1	3	1	4	2	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	5	1	4	5	2	1